

ΘΕΜΑ Α

A1. ανόσμητο θάψατο 6X. 010210 010. 133.

A2. θάψατο 6X. 010210 010. 51.

A3. οπίσθο 6X. 010210. 010. 105.

A4. $\alpha) \rightarrow \Lambda$ $\beta) \rightarrow \Sigma$ $\gamma) \rightarrow \Sigma$ $\delta) \rightarrow \Sigma$ $\epsilon) \rightarrow \Lambda$.

ΘΕΜΑ Β

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad h(x) = 2 \ln(x-1)$$

$$g: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \sqrt{x-2} + 1$$

B1. $h = f \circ g$

$$Df \circ g = \begin{cases} x \in Dg \\ g(x) \in Df \end{cases} = \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{x-2} + 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x-2} > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

και $Dh = Df \circ g = (2, +\infty)$

$$\begin{aligned} h(x) &= (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \cdot \ln(g(x) - 1) = 2 \cdot \ln[\sqrt{x-2} + 1 - 1] \\ &= 2 \ln \sqrt{x-2} = 2 \ln(x-2)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln(x-2) \end{aligned}$$

B2. $h(x) = \ln(x-2)$, $x > 2$

$$h'(x) = \frac{1}{x-2} > 0 \quad \forall x > 2 \quad \text{και} \quad h \uparrow (2, +\infty) \Rightarrow \text{1-1}$$

και σφαιρικά

$$Dh^{-1} = h((2, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) \stackrel{y=x-2}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) \stackrel{y=x-2}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = +\infty$$

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = \ln(x-2) \Leftrightarrow e^y = x-2 \Leftrightarrow x = e^y + 2$$

$$\Leftrightarrow h^{-1}(y) = e^y + 2 \quad \text{for } y \in \mathbb{R}$$

$$\text{; } h^{-1}(x) = e^x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$B_3. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \ln(x-2) \cdot \frac{2 \ln(x-1)}{x-2} = (-\infty) \cdot 2 = -\infty$$

$$* \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 \ln(x-1)}{x-2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{2}{x-1}}{1} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{x-1} = 2$$

$$* \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) \stackrel{y=x-2}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 2^+ \\ y \rightarrow 0^+}} \ln y = -\infty.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i. Επείδη η f έχει οριζόντια ασυμπτωτική

$$\text{όσο } +\infty \text{ ισχύει: } A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$$

→ Για $k \neq 0$:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^3 + bx}{x^2 + 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^3}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} kx = k \cdot (+\infty)$$

Αν $k > 0$ τότε $A = +\infty$ άτοπο

Αν $k < 0$ τότε $A = -\infty$ άτοπο

$$\rightarrow \text{Για } k = 0 \text{ τότε } A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{0x^3 + bx}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx}{x^2 + 1} \stackrel{\frac{0}{\infty}}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = 0 \in \mathbb{R}. \text{ Άρα } k = 0.$$

$$\text{Οπότε } f(x) = \frac{bx}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

ii. Η C_f έχει εξίσωση εφαπτομένης στο $O(0,0)$

των ελπίδα $y = x$ οπότε $f'(0) = 1$

Η f παραγ. στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο $b \in$

$$f'(x) = \frac{(bx)'(x^2 + 1) - (x^2 + 1)'bx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{b(x^2 + 1) - 2x^2b}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{Συνεπώς, } f'(0) = \frac{b}{1} \Rightarrow b = 1$$

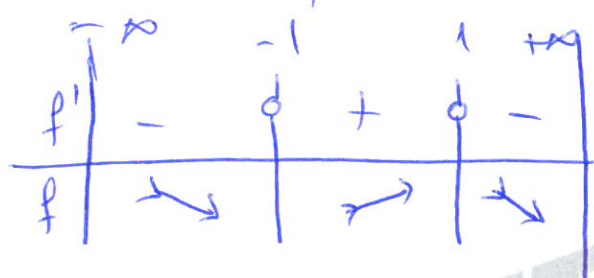
$$\text{Άρα } f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

Γ2 i $f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x \cdot x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \stackrel{(x^2 + 1) \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\bullet f'(x) > 0 \stackrel{(x^2 + 1)^2 > 0}{\Leftrightarrow} 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow 1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > |x| \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

$$\bullet f'(x) < 0 \stackrel{(x^2 + 1)^2 > 0}{\Leftrightarrow} 1 - x^2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x^2 \Leftrightarrow 1 < |x| \Leftrightarrow x > 1 \text{ ή } x < -1$$



H f $\nearrow$ στο $(-\infty, -1]$

H f $\nearrow$ στο $[-1, 1]$

H f $\searrow$ στο $[1, +\infty)$

H f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = -1$ το $f(-1) = -\frac{1}{2}$

H f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 1$ το $f(1) = \frac{1}{2}$

ii. f συνεχής κ' $\searrow (-\infty, -1]$

$$f(A_1) = [f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [-\frac{1}{2}, 0)$$

Διότι: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = 0$

f συνεχής κ' $\nearrow [-1, 1]$

$$f(A_2) = [f(-1), f(1)] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

f συνεχής κ' $\searrow [1, +\infty)$

$$f(A_3) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1)] = (0, \frac{1}{2}]$$

Τελικά, $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \quad (= \text{ισχύει για } a=0).$$

Για $a \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$a^2 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \geq f(x) \quad \text{άρα η εξίσωση:}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + a^2 \quad \text{είναι αδύνατη}$$

Για $a=0$ η εξίσωση: $f(x) = \frac{1}{2}$ έχει μοναδική
λύση

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΑΡΓΥΡΗ ΣΙΡΔΑΡΗ

$$13. \quad I_v = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx$$

$$\begin{aligned} i) \quad I_v + I_{v+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2v+2+1}}{x^2+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{2v+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{2v+1} \cdot x^2}{x^2+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{(x^2+1) x^{2v+1}}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^{2v+1} dx \\ &= \left[\frac{x^{2v+2}}{2v+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2v+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \quad I_0 &= \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+1) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

αρα $I_v + I_{v+1} = \frac{1}{2v+2}, \quad v \in \mathbb{N}.$

$$\begin{aligned} \text{για } v=0 \quad I_0 + I_1 &= \frac{1}{2} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - I_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \\ &= \frac{1}{2} (1 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln \frac{e}{2} \end{aligned}$$

$$\text{για } v=1 \quad I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{4} - I_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln \frac{e}{2}$$

Δ1) Θεωρούμε την $h(x) = g(x) + x$ στο $[-1, 0]$

► Η h είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως άθροισμα 2 συνεχών

$$\left. \begin{array}{l} h(0) = g(0) > 0 \\ h(-1) = g(-1) - 1 < 0 \end{array} \right\} h(0) \cdot h(-1) < 0 \quad \begin{array}{l} \text{Άρα } 0 < g(0) < 1 \\ 0 < g(-1) < 1 \end{array}$$

Άρα από το Bolzano υπάρχει 1 ρίζα $x_1 \in (-1, 0)$
ώστε $h(x_1) = 0 \Rightarrow g(x_1) + x_1 = 0$. Το ζητούμενο

Έχουμε ότι $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (Άρα $g'(x) \neq -1$)

Επειδή h' είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών

Άρα $\forall x \in \mathbb{R}$ $h'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο

Διό $h'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ή $h'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Οποότε η h είναι ο.μ.ω.ο.μ. με κα "1-1"
οπότε η ρίζα x_1 είναι μοναδική

Δ2) Παρατηρούμε ότι $f(0) = 2 \cdot 0 \cdot 0 + \epsilon \cdot 0 - k \cdot 0 \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$

Άρα η f είναι παρ/μη θα είναι κα παρ/μη ή ο x^2

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot (g(x) + x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[2 \frac{\eta \mu x}{x} + \frac{\epsilon \phi x}{x} - k \right]$$

$$\Rightarrow 0 \cdot [g(0) + 0] = 2 \cdot 1 + 1 - k$$

$$\Rightarrow 0 = 3 - k \Rightarrow \boxed{k = 3}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{6x}}{x}}{\frac{6x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6x} \cdot \frac{e^{6x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x}}{x} = \frac{1}{6 \cdot 0} \cdot 1 = 1.$$

$\Delta 3)$ 1) Αποκρίσεις
Παραγωγή on fron

$$f'(x) = 26wx + \frac{1}{6w^2x} - 3 = \frac{26w^3x - 36w^2x + 1}{6w^2x}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \quad p=1$$

$$= \frac{(6wx-1) \cdot (26w^2x - 36w^2x + 1)}{6w^2x}$$

$$= \frac{(6wx-1) \cdot 2(6wx-1)(6wx+1/2)}{6w^2x}$$

$\Delta 2) 1+8=9$

$$6wx = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

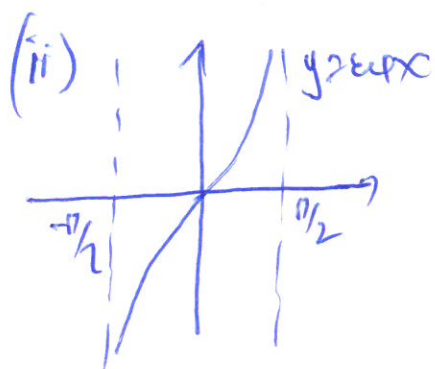
$$= \frac{2(6wx-1)^2 \cdot (6wx+1/2)}{6w^2x}$$

	0	$\pi/2$
$2(6wx-1)^2$	0	+
$6wx+1/2$		+
$6w^2x$		+
f'		+
+		+

$$\forall x \in (0, \pi/2) : 6wx > 0 \Rightarrow 6wx + 1/2 > 0$$

$\forall x \in (0, \pi/2)$ $6wx \cdot f'(x) > 0$ Άρα η f ως συν-
 αυξ. $\uparrow$ στο $[0, \pi/2)$

Ομοίως $x \geq 0 \xrightarrow{f'} f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0$



οπότε $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} f(x) = +\infty$

• $f(0) = 0$

• $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} (2\sin x + \cos x - 3x) = 2 \cdot 0 + 1 - 3 \cdot \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{3\pi}{2} < +\infty$

Άρα αν $A = [0, \pi/2)$ τότε $f(A) = [\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} f(x)) = [0, 1 - \frac{3\pi}{2})$

Η επίλυση $3f(x) = \pi \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{3}$

Άρα $\frac{\pi}{3} \in f(A)$ άρα υπάρχει $x_2 \in [0, \pi/2)$ ($x_2 \neq 0$)

ώστε $f(x_2) = \pi/3$ και επομένως η f είναι $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στο x_2 είναι μοναδικό.

Δ4) 2) Είναι $h(x) = g(x) - f(x)$ στο $[x_1, 0]$

$h(x) \geq 0$ και μοναδική επίλ. λόγω (Δ1)

Άρα στο $(x_1, 0)$ η h ΔΕΠ

οπότε $h(0) = g(0) - f(0) = g(0) > 0$ λόγω δεδομένων

Άρα η $f(x) \leq x^2 - (g(x)) \geq 0 \quad \forall x \in [x_1, 0]$

$$\int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{f(x_1)} f(x) dx$$

$$f(x_1) = \pi/3$$

$$\int_{x_1}^0 x^2 g(x) + x^3 dx = \int_0^{\pi/3} 2\ln x + e^x x - 3x dx$$

$$\int_{x_1}^0 \left(\frac{x^3}{3}\right)' g(x) dx + \int_{x_1}^0 x^3 dx = \left[-2\ln x + \ln|e^x x| - \frac{3x^2}{2}\right]_0^{\pi/3}$$

$$\left[\frac{x^3}{3} \cdot g(x)\right]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} \cdot g'(x) dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^0 = \left(-2 \cdot \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{\pi^2}{9}\right) - (-2 + \ln 1 - 0)$$

$$-\frac{x_1^3}{3} \cdot g(x_1) - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 \cdot g'(x) dx + \frac{x_1^4}{4} = -1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + 2$$

$$-\frac{x_1^3}{3} \cdot (-x_1) - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 \cdot g'(x) dx + \frac{x_1^4}{4} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{x_1^4}{3} - \frac{x_1^4}{4} = 1 + \ln 2 + \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 \cdot g'(x) dx$$

$$\frac{x_1^4}{12} = 1 + \ln 2 + \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx \quad \text{ενίς}$$

$$\int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} - 3 - 3 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2} \quad \text{Το } \int_{x_1}^0$$

ΘΕΜΑ Δ

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη $g' \leq$

① $0 < g(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$g'(x) \neq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Δ1. απο $\exists$ φορές $x_1 \in (-1, 0) : g(x_1) + x_1 = 0$.

Β' τάξης ορίζουμε $\phi(x) = g(x) + x$ πράξεις παραγωγίσιμων στο $\mathbb{R}$
απο να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

η ϕ είναι στο $[-1, 0]$.

$\phi(-1) = g(-1) - 1 < 0$ απο ① $0 < g(-1) < 1 \Rightarrow g(-1) - 1 < 0$

$\phi(0) = g(0) > 0$.

① $0 < g(x) < 1 \Rightarrow g(x) > 0$.

$\phi(-1) \cdot \phi(0) < 0$ απο ΘΒ. $\exists$ τουλάχιστον $x_1 \in (-1, 0) : \phi(x_1) = 0$

Επειδή απο υπάρχει $p \in (-1, 0) : \phi(p) = 0$.

απο $-1 < x_1 < p < 0$ στο $[x_1, p]$

η ϕ είναι στο (x_1, p) παραγωγίσιμη

απο Θεώρημα $\exists \xi \in (x_1, p) \subset (-1, 0) : \phi'(\xi) = 0$

$\Leftrightarrow g'(\xi) + 1 = 0$

$\Rightarrow g'(\xi) = -1$. άτοπο.

αφού $g'(x) \neq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Δ2. $f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - kx, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$

αφού η f παραγωγίσιμη στο $(-\infty, \frac{\pi}{2})$ θα είναι και συνεχής.

απο $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

$\Leftrightarrow 0 = 0$

