

ΘΕΜΑ Α**A1. Σχολικό σελ. 186****A2. Σχολικό σελ. 76****A3. Σχολικό σελ. 161****A4.****α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ****ΘΕΜΑ Β****B1**

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9$

Το $x_0=1$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$ και η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 , από το Θ . Fermat ισχύει ότι $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = -12 \Leftrightarrow \alpha = -6$

B2

Η συνάρτηση f έχει τύπο

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$$

και παράγωγο

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$$

Έχουμε ότι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$

Επομένως $f'(x) > 0$ για $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ για $x \in (1, 3)$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
f				

Η $f \nearrow$ στο $A_1 = (-\infty, 1]$ άρα $f(A_1) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1)] = (-\infty, 1]$

Διότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$, $f(1) = 1$

Το $0 \notin f(A_1)$ και η $f \nearrow$ στο A_1 οπότε υπάρχει ακριβώς ένα $x_1 \in (-\infty, 1)$: $f(x_1) = 0$

Όμως η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ ως πολυωνυμική και $f(0) = -3$, $f(1) = 1$, άρα $f(0) \cdot f(1) < 0$,

επομένως από Θ . Bolzano υπάρχει ακριβώς ένα $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$

Η $f \searrow$ στο $A_2 = [1, 3]$ άρα $f(A_2) = [f(3), f(1)] = (-3, 1]$

$f(3) = -3$

Το $0 \in f(A_2)$ και η $f \searrow$ στο A_2 οπότε υπάρχει ακριβώς ένα $x_2 \in (1, 3)$: $f(x_2) = 0$

Η $f \nearrow$ στο $A_3 = [3, +\infty]$ άρα $f(A_3) = (f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (-3, +\infty)$

Διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$

Το $0 \in f(A_3)$ και η $f \nearrow$ στο A_3 οπότε υπάρχει ακριβώς ένα $x_3 \in (3, +\infty)$: $f(x_3) = 0$

Οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 3 θετικές ρίζες.

B3

Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με παράγωγο

$$f''(x) = 6x - 12$$

Είναι

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

και

$$f''(x) < 0 \text{ για } x < 2 \text{ και } f''(x) > 0 \text{ για } x > 2$$

Επομένως η f είναι κοίλη για $x \in (-\infty, 2]$, κυρτή για $x \in [2, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $M(2, f(2)) = M(2, -1)$

B4

Η g είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$g'(x) = 1 + f'(x)$$

Η εφαπτόμενη της f στο $A(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$$

Για $x = 0$ έχουμε

$$y = -\xi \cdot f'(\xi) + f(\xi)$$

Η εφαπτόμενη της g στο $B(\xi, g(\xi))$ έχει εξίσωση

$$y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y - \xi - f(\xi) = (1 + f'(\xi))(x - \xi)$$

Για $x = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} y - \xi - f(\xi) &= (1 + f'(\xi))(0 - \xi) \Leftrightarrow \\ y - \xi - f(\xi) &= -\xi - \xi f'(\xi) \Leftrightarrow \\ y &= f(\xi) - \xi f'(\xi) + f(\xi) \end{aligned}$$

Δηλαδή οι εφαπτόμενες ευθείες τέμνονται πάνω στον άξονα y

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \eta \mu x) = 1 \cdot 0 = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^2 + x}) = 0$$

και

$$f(0) = 0$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^x \cdot \frac{\eta \mu x}{x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x(x+1)}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

Γ2

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Είναι

$$\begin{aligned} -1 \leq \eta \mu x \leq 1 &\Leftrightarrow -e^x \leq e^x \eta \mu x \leq e^x \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) &= 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0 \end{aligned}$$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής είναι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \eta \mu x) = 0$$

Άρα η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} \stackrel{x>0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x(x+1)}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} \stackrel{x>0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

Άρα η ευθεία $y=\lambda x+\beta \Leftrightarrow y=x+\frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Γ3

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$f(x)=y \Leftrightarrow e^x \eta \mu x = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x \eta \mu x - x - \frac{1}{2} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(-\pi, 0)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = e^x \eta \mu x - x - \frac{1}{2}, x \in [-\pi, 0]$$

Η g είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι

$$g(-\pi) = e^{-\pi} \eta \mu \pi + \pi - \frac{1}{2} = 0 + \pi - \frac{1}{2} > 0$$

και

$$g(0) = e^0 \eta \mu 0 + 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

$$g(-\pi) \cdot g(0) < 0$$

Επομένως από Θ Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-\pi, 0)$:

$$g(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\xi} \eta \mu \xi - \xi - \frac{1}{2} = 0. \text{ Δηλαδή το ζητούμενο.}$$

Γ4

Για $x=0$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη λόγω (Γ1)

Για $x>0$, ψάχνουμε t_0 τέτοιο ώστε $x'(t_0)=y'(t_0)$

Έχουμε

$$y = \sqrt{x^2 + x} \Leftrightarrow y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$$

Επομένως

$$y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} \cdot (x^2(t) + x(t))' = \frac{2x'(t)x(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}$$

Από την υπόθεση δίνεται $x'(t_0) = y'(t_0)$ επομένως

$$x'(t_0) = \frac{x'(t_0)(2x(t_0) + 1)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \Leftrightarrow$$

$$1 = \frac{2x(t_0) + 1}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} = 2x(t_0) + 1 \Leftrightarrow$$

$$4(x^2(t_0) + x(t_0)) = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 \Leftrightarrow$$

$$4x^2(t_0) + 4x(t_0) = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 \Leftrightarrow$$

$0 = 1$ που είναι αδύνατο.

Άρα δεν υπάρχει t_0 τέτοιο ώστε $x'(t_0) = y'(t_0)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

Έχουμε ότι

$$x^{\ln x} = e^{\ln x \ln x} = e^{\ln^2 x}$$

Άρα

$$(x^{\ln x})' = (e^{\ln^2 x})' = \frac{2 \ln x}{x} \cdot x^{\ln x}$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{f(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot \frac{2 \ln x}{x} \cdot x^{\ln x}}{x^{2 \ln x}} = \\ &= \frac{x^{\ln x} \cdot (xf(x) - 2F(x) \ln x)}{x^{2 \ln x}} = \\ &= \frac{xf(x) - 2F(x) \ln x}{x^{\ln x}} \end{aligned}$$

Όμως από την υπόθεση $xf(x) = 2F(x) \ln x$, οπότε τελικά

$$g'(x) = 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

Άρα η $g(x) = c$ από Σ.Θ.Μ.Τ.

Δ2

i)

Η εφαπτομένη στο $M(1, f(1))$ είναι $\varepsilon // y = 2x \Leftrightarrow f'(1) = 2$

Για $x=1$ από την υπόθεση έχουμε: $1f(1) = 2F(1) \ln 1 \Leftrightarrow f(1) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x) - f(1)}{x-1}}{\frac{\ln x - \ln 1}{x-1}} = \frac{f'(1)}{1} = 2$$

$$\text{Για το } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1}$$

$$\left. \begin{aligned} h(x) &= \ln x & h'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} \\ h'(x) &= \frac{1}{x} & h'(1) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = 1$$

ii)

Έχουμε

$$x \cdot f(x) = 2F(x) \cdot \ln x$$

Άρα

$$\begin{aligned} (x \cdot f(x))' &= (2F(x) \cdot \ln x)' \Leftrightarrow \\ f(x) + xf'(x) &= 2f(x) \ln x + \frac{2F(x)}{x} \end{aligned}$$

Για $x=1$ είναι

$$f(1) + 1 \cdot f'(1) = 2f(1) \cdot \ln 1 + \frac{F(1)}{1} \Leftrightarrow F(1) = 1$$

Η συνάρτηση g είναι σταθερή, επομένως

$$g(x) = c \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c$$

Όμως $F(1) = 1$, οπότε

$$\frac{F(1)}{1^{\ln 1}} = c \Leftrightarrow c = 1$$

Άρα

$$\frac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1 \Leftrightarrow F(x) = x^{\ln x}$$

Δ3

Η F είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$F'(x) = (x^{\ln x})' = x^{\ln x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}, x > 0$$

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow x^{\ln x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} > 0$$

Για $x > 0$ είναι $x^{\ln x} > 0$ και $\frac{1}{x} > 0$, επομένως

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Επομένως η F

- είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$
- είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$
- παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $F(1) = 1$

Για $x = 1$ είναι

$$F(1^2) - F(1) = -(1-1)^2 \text{ που ισχύει (προφανής ρίζα)}$$

Για κάθε $0 < x < 1$ έχουμε

$$x^2 < x \Leftrightarrow F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$$

και

$$-(x-1)^2 < 0$$

οπότε η εξίσωση $F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2$ είναι αδύνατη.

Για κάθε $x > 1$ έχουμε

$$x^2 > x \Leftrightarrow F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$$

και

$$-(x-1)^2 < 0$$

οπότε η εξίσωση $F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2$ είναι αδύνατη.

Άρα η $x = 1$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2$

Δ4

Γνωρίζουμε ότι, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$, ισχύει

$$e^x \geq x + 1$$

$$F(x) = x^{\ln x} = e^{\ln^2 x}$$

Επομένως

$$e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$$

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_1^e (\ln^2 x + 1) dx &= \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx = \\&= \int_1^e (x)' \ln^2 x dx + e - 1 = \\&= \left[x \ln^2 x \right]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \ln x \frac{1}{x} dx + e - 1 = \\&= \left[2(\ln e)^2 - 1 \cdot \ln 1 \right] - 2 \int_1^e \ln x dx + e - 1 = \\&= e - 2 \left[x \ln x - x \right]_1^e + e - 1 = \\&= e - 2 \left[(e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) \right] + e - 1 = \\&= e - 2(+1) + e - 1 = 2e - 3 \\ \text{Άρα } E &> 2e - 3\end{aligned}$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΑΡΓΥΡΗ ΣΙΡΔΑΡΗ