

ΘΕΜΑ Α

A1.

σχολικό βιβλίο σελ. 93

βιβλίο φροντιστηρίου σελ. 148

A2.

σχολικό βιβλίο σελ. 16

βιβλίο φροντιστηρίου σελ. 10

A3. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

A4. α) $(c)' = 0$ β) $(x^2)' = 2x$

ΘΕΜΑ Β

B1.

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i
0	<u>10</u>	<u>20</u>	<u>10</u>
1	15	<u>30</u>	<u>25</u>
2	11	<u>22</u>	<u>36</u>
3	8	<u>16</u>	<u>44</u>
4	6	<u>12</u>	<u>50</u>
Σύνολο	50	100	

$$v = 50$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v \Rightarrow v_1 = 10$$

$$f_i\% = \frac{v_i}{v} \cdot 100$$

B2.

$$\frac{\sum x_i \cdot v_i}{v} = \frac{0 \cdot 10 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 6}{50} = \frac{85}{50} = 1,7$$

B3.

$$v=50 \text{ άρτιος, } \delta = \frac{t_{2.5} + t_{2.6}}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

B4.

α) Το πολύ 3 ώρες εργάζεται το 88%

$$f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 20 + 30 + 22 + 16 = 88\%$$

β) Οι τιμές θα γίνουν $y_i = x_i + 4$

$$\text{άρα } \bar{y} = \bar{x} + 4 = 1,7 + 4 = 5,7 \text{ ώρες}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$f(x) = -2x^3 + 6x^2$$

$$f'(x) = -6x^2 + 12x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 12x = 0 \Rightarrow 6x(-x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Άρα η f είναι:

- γν. αύξουσα στο $[0, 2]$
- γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$

Γ2.

Η f παρουσιάζει τοπ. μέγιστο στο $x = 2$ με τιμή $f(2) = -2 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + \alpha = 8 + \alpha$

και τοπ. ελάχιστο στο $x = 0$ με τιμή $f(0) = -2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 + \alpha = \alpha$

Ισχύει:
$$\frac{f(2)+f(0)}{2} = -8 \Rightarrow \frac{8+\alpha+\alpha}{2} = -8 \Rightarrow 8+2\alpha = -16 \Rightarrow \alpha = -12$$

Γ3.

Για $\alpha = -12$ έχουμε: $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12$

$$f'(x) = -6x^2 + 12x$$

Έστω εφαπτομένη $y = \alpha x + \beta$, με $x=1$, $y = f(1) = \dots = -8$ και $\lambda = f'(1) = \dots = 6$

Άρα έχουμε $-8 = 6 \cdot 1 + \beta \Rightarrow \beta = -14$

Άρα $\varepsilon: y = 6x - 14$

Γ4.

Η f παρουσιάζει τοπ. μέγιστο στο $x = 2$ με τιμή $f(2) = 8 - 12 = -4$

Άρα: $f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4 \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 8 \leq 0 \Leftrightarrow x^3 = 3x + 4 > 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 0 \Rightarrow f'(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x + 7 = x^2 + 2\alpha x + 7$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + \frac{2}{3}$$

$$\text{Άρα } f'(1) = 0 \Rightarrow 1 + 2\alpha + 7 = 0 \Rightarrow 2\alpha = -8 \Rightarrow \alpha = -4$$

Δ2.

Για $\alpha = -4$: $f(x) = (1/3)x^3 - 4x^2 + 7x + 2/3$

$$f'(x) = x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ και } x = 7$$

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f είναι: • γν. αύξουσα στο $(-\infty, 1] \cup [7, +\infty)$

• γν. φθίνουσα στο $[1, 7]$

Δ3.

$2020 < 2025$ και f γν. αύξουσα στο $[7, +\infty)$

Άρα $f(2020) < f(2025) \Rightarrow f(2025) - f(2020) > 0$

$(3/2) < (5/2)$ και f είναι φθίνουσα στο $[1, 7]$

Άρα $f(3/2) > f(5/2) \Rightarrow f(3/2) - f(5/2) > 0$

Άρα $A = \frac{f(2025) - f(2020)}{f(3/2) - f(5/2)} > 0$

Δ4.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{(x+1)} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - 2x + 8 + 1}{\sqrt{(x+1)} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16}{\sqrt{(x+1)} - \sqrt{3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 10x + 16)(\sqrt{(x+1)} + \sqrt{3})}{(\sqrt{(x+1)} - \sqrt{3})(\sqrt{(x+1)} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{(x+1)} + \sqrt{3})}{(x+1) - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{(x+1)} + \sqrt{3})}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x-8)(\sqrt{(x+1)} + \sqrt{3}) = (2-8)(\sqrt{2+1} + \sqrt{3}) = -6(\sqrt{3} + \sqrt{3}) = -12\sqrt{3}$$