

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 19 Απριλίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 133
A2. Σχολικό βιβλίο σελίδες 128 και 129
A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 185
A4. (α) Σωστό (β) Σωστό (γ) Λάθος (δ) Σωστό (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Αφού η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} θα είναι και συνεχής στο $x = 0$

$$\text{Δηλαδή } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{-x} + \alpha) = 1 + \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + 3) = 3$$

$$f(0) = 1 + \alpha$$

Από την σχέση (1) προκύπτει ότι $1 + \alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 2$

$$\text{Επομένως } f(x) = \begin{cases} e^{-x} + 2, & x \leq 0 \\ -x^2 + 3, & x > 0 \end{cases}$$

Για την παράγωγο της f στο $x = 0$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x} - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{D.L.H } x \rightarrow 0^-} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-e^{-x}) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 + 3 - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$

B2. Η f παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $A_1 = (-\infty, 0)$, $A_2 = (0, +\infty)$

$$\text{με } f'(x) = \begin{cases} -e^{-x}, & x < 0 \\ -2x, & x > 0 \end{cases}$$

Για $x < 0$ έχουμε $e^{-x} < 0$ ενώ για $x > 0$ έχουμε $-2x < 0$ άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in A_1 \cup A_2$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 0$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} άρα η αντιστρέφεται.

B3. Ψάχνουμε τις λύσεις της εξίσωσης $f'(x) = -1$ με $x \neq 0$

$$\text{Αν } x < 0 \quad f'(x) = -1 \Leftrightarrow -e^{-x} = -1 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ απορρίπτεται}$$

$$\text{Αν } x > 0 \quad f'(x) = -1 \Leftrightarrow -2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα η ευθεία } y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y - \frac{11}{4} = -x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = -x + \frac{13}{4}$$

B4. Για το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}$ επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 2) = +\infty$ εργαζόμαστε ως εξής

$$\left| \frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)} \right| = \frac{|\eta\mu(f(x))|}{|f(x)|} \leq \frac{1}{|f(x)|} \text{ και επειδή } f(x) = e^{-x} + 2 > 0 \text{ έχουμε}$$

$$\left| \frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)} \right| \leq \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \leq \frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)} \leq \frac{1}{f(x)}$$

Ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{f(x)} \right) = 0$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)} = 0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.ι. Έστω $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} f(x) dx = \kappa$ όπου $\kappa \in \mathbb{R}$ άρα $f(x) = x - \frac{8x}{x^2 - 1} + \kappa$

$$\text{Οπότε } \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \left(x - \frac{8x}{x^2 - 1} + \kappa \right) dx = \kappa \Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{2} - 4 \ln |x^2 - 1| + \kappa x \right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} = \kappa$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{18} - 4 \ln \frac{8}{9} + \frac{\kappa}{3} \right) - \left(\frac{1}{18} - 4 \ln \frac{8}{9} - \frac{\kappa}{3} \right) = \kappa \Leftrightarrow \frac{2\kappa}{3} = \kappa \Leftrightarrow \boxed{\kappa = 0}$$

ii. Αρκεί: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$

$$\text{Πράγματι: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{8x}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{8x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{8x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{8}{x} \right) = 0$$

Γ2. i. Η f παραγωγίσιμη στο A με

$$f'(x) = 1 - \frac{8(x^2 - 1) - 8x - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(x^2 - 1)^2 - 8x^2 + 8 + 16x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{x^4 - 2x^2 + 1 - 8x^2 + 8 + 16x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 + 6x^2 + 9}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(x^2 + 3)^2}{(x^2 - 1)^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in A$$

Η f γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$$A_1 = (-\infty, -1), A_2 = (-1, 1), A_3 = (1, +\infty)$$

Εύρεση συνόλου τιμών

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (-\infty, -1)$ επομένως

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

Διότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x^3 - 9x}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} \right) = (-4) \cdot (-\infty) = +\infty$$

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2 = (-1, 1)$ επομένως

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

Διότι :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x^3 - 9x}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} \right) = (-4) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^3 - 9x}{x + 1} \cdot \frac{1}{x - 1} \right) = (-4) \cdot (-\infty) = +\infty$$

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_3 = (1, +\infty)$ επομένως

$$f(A_3) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

Διότι :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^3 - 9x}{x + 1} \cdot \frac{1}{x - 1} \right) = (-4) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\text{Άρα } f(A) = \mathbb{R}$$

ii. $x^3 - \alpha x^2 - 9x + \alpha = 0 \Leftrightarrow x^3 - 9x = \alpha x^2 - \alpha \Leftrightarrow x^3 - 9x = \alpha(x^2 - 1)$

Για $x = 1$ έχω $-8 = 0 \cdot \alpha$ Αδύνατη

Για $x = -1$ έχω $8 = 0 \cdot \alpha$ Αδύνατη

Οπότε οι αριθμοί $1, -1$ δεν αποτελούν λύσεις της εξίσωσης.

Για $x \neq \pm 1$ έχουμε $\frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} = \alpha$ ή $f(x) = \alpha$

• $\alpha \in f(A_1) = \mathbb{R}$ άρα υπάρχει $x_1 \in A_1 : f(x_1) = \alpha$

Το x_1 μοναδικό διότι f γνησίως αύξουσα στο A_1

• $\alpha \in f(A_2) = \mathbb{R}$ άρα υπάρχει $x_2 \in A_2 : f(x_2) = \alpha$

Το x_2 μοναδικό διότι f γνησίως αύξουσα στο A_2

• $\alpha \in f(A_3) = \mathbb{R}$ άρα υπάρχει $x_3 \in A_3 : f(x_3) = \alpha$

Το x_3 μοναδικό διότι f γνησίως αύξουσα στο A_3

Άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

Γ3. $f'(x) = \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 - 1}\right)^2$

$$f''(x) = 2 \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} \cdot \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 - 1}\right)' = 2 \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} \cdot \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= 2 \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} \cdot \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2(x^2 + 3) \cdot 8x}{(x^2 - 1)^3} = \frac{-16x}{(x^2 - 1)^3} (x^2 + 3)$$

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
-16x	+	+	○	-	-		
$(x^2 - 1)^3$	+	○	-	-	○	+	
$x^2 + 3$	+	+	+	+	+		
f''	+	//	-	○	+	//	-
f	↪	//	↩	↪	//	↩	

Η f έχει σημείο καμπής το $M(0, f(0))$ ή $M(0, 0)$

Η εφαπτομένη στο Μ είναι $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = 9x$

Γ4. Για το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + (\kappa - 10)x^2 + x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 \cdot f(x) - x^3 + \kappa^2 x^2}$ κάνουμε το εξής

Διαιρώ με x^2 όλους τους όρους $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x} + (\kappa - 10) + x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x) - x + \kappa^2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$ θέτω $u = \frac{1}{x}$ άρα $\frac{1}{4} = x$ όταν $x \rightarrow +\infty$ τότε $u \rightarrow 0^+$ οπότε

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{u} = f'(0) = 9$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x} + (\kappa - 10) + x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x) - x + \kappa^2} = \frac{1 + \kappa - 10 + 9}{\kappa^2} = \frac{1}{\kappa}$$

Άρα θα δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικός $\kappa \in (0, 1)$ ώστε $\frac{1}{\kappa} = e^\kappa \Leftrightarrow e^\kappa \cdot \kappa - 1 = 0$

Θεωρώ: $\varphi(x) = e^x - x - 1$, η φ συνεχής στο $[0, 1]$ και

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(0) = -1 \\ \varphi(1) = e - 1 \end{array} \right\} \text{ Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει } x_0 \in (0, 1): \varphi(x_0) = 0$$

$\varphi'(x) = e^x \cdot x + x \cdot e^x = e^x(x + 1) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ άρα το x_0 μοναδικό



ΘΕΜΑ Δ

Δ1.i. Η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = e^x - 2x$ και $f''(x) = e^x - 2$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$$

Άρα το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f''(x)$	-	○	+
$f(x)$			

Η f κοίλη στο $(-\infty, \ln 2]$ και κυρτή στο $[\ln 2, +\infty)$

Το σημείο $(\ln 2, f(\ln 2))$ ή $(\ln 2, 2 - \ln^2 2)$ είναι το σημείο καμπής.

ii. Το πρόσημο της f'' στα διαστήματα $(-\infty, \ln 2]$, $[\ln 2, +\infty)$ μας δείχνει το είδος της μονοτονίας της f' .

Οπότε η f' γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \ln 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2, +\infty)$

Στη θέση $x = \ln 2$ έχει ελάχιστο το

$$f'(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 = 2 - 2\ln 2 = 2 - \ln 4 = \ln e^2 - \ln 4 > 0$$

Δηλαδή το ελάχιστο της f' είναι θετικό επομένως $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επομένως η f γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Η f συνεχής στο \mathbb{R} άρα και στο $[-1, 0]$ και επιπλέον $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$, $f(0) = 1 > 0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\alpha \in (-1, 0) : f(\alpha) = 0$, δηλαδή η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $M(\alpha, 0)$

Το α είναι μοναδικό διότι η f γνησίως αύξουσα.

Δ2. $2f(\beta)\ln x - x + 1 \leq 0$ για κάθε $x > 0$, θεωρώ $h(x) = 2f(\beta)\ln x - x + 1$, $x > 0$

Για την οποία ισχύει $h(x) \leq h(1)$ για κάθε $x > 0$

Δηλαδή στη θέση $x=1$ η $h(x)$ έχει μέγιστο, είναι παραγωγίσιμη και είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της άρα από Θεώρημα Fermat : $h'(1) = 0$

$$\text{Όμως } h'(x) = \frac{2f(\beta)}{x} - 1 \text{ και } h'(1) = 0 \Leftrightarrow f(\beta) = \frac{1}{2}$$

Ισχύει ότι $f(\alpha) = 0$, $f(0) = 1$, $f(\beta) = \frac{1}{2}$ και επειδή η f γνησίως αύξουσα προκύπτει ότι $\alpha < \beta < 0$

Δ3. Η $g(x) = f(x)^2(f(x)-1)^2$ παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) \cdot (f(x)-1)^2 + 2f(x)^2 \cdot (f(x)-1) \cdot f'(x)$$

$$g'(x) = 2f'(x) \cdot f(x) \cdot (f(x)-1) \cdot (f(x)-1+f(x))$$

$$= 2f'(x) \cdot f(x) \cdot (f(x)-1) \cdot (2f(x)-1)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$$

$$\text{ή } f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{ή } f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \beta$$

$$f(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow x > 0$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(\alpha) \Leftrightarrow x > \alpha$$

$$f(x) - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow f(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) > f(\beta) \Leftrightarrow x > \beta$$

x	$-\infty$	α	β	0	$+\infty$
$f(x) - 1$	-	-	-	○	+
$2f(x) - 1$	-	-	○	+	+
$2f'(x)$	+	+	+	+	
$f(x)$	-	○	+	+	+
$g(x)$	-	+	-	+	+
	↘	↗	↘	↗	

Άρα η g παρουσιάζει δύο τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο

Δ4. $I = \int_0^1 (e^{\sqrt{x}} - x) dx = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx - \int_0^1 x dx = I_1 - I_2$

$$I_2 = \int_0^1 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Για το } I_1 = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} \, dx \text{ θέτουμε } u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x \Rightarrow 2u \, du = dx$$

$$\text{Άρα } I_1 = \int_0^1 2u e^u \, du = \int_0^1 2u (e^u)' \, du = [2ue^u]_0^1 - \int_0^1 2e^u \, du = [2ue^u]_0^1 - [2e^u]_0^1 = [2ue^u - 2e^u]_0^1 = 2$$

$$\text{Τελικά έχουμε : } I = I_1 - I_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$