

**ΤΑΞΗ: 3<sup>η</sup> ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.****ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ****Ημερομηνία: Τετάρτη 5 Μαΐου 2021****Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες****ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ****ΘΕΜΑ Α**

Α1. Σελίδα 11

Α2. Σελίδα 59-60

Α3. Σελίδα 31 (πρώτη απόδειξη)

Α4.  $\alpha \rightarrow 3$   $\beta \rightarrow 2$   $\gamma \rightarrow 4$   $\delta \rightarrow 1$   $\epsilon \rightarrow 5$ 

Α5. Λ Σ Σ Σ

**ΘΕΜΑ Β**

Β1. Το πίνακακι με τις κλάσεις είναι το παρακάτω:

ΚΛΑΣΕΙΣ	πλάτος
[20 – ...)	c
[... – ...)	c
[... – ...)	c
[... – ...)	c
[40 – ...)	
[... – ...)	
ΣΥΝΟΛΟ	

$$\text{Ισχύει: } 40 - 20 = 4 \cdot c \Leftrightarrow 20 = 4c \Leftrightarrow c = 5$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021**  
 Α' ΦΑΣΗ

**E\_3.ΜΕΛ3Γ(α)**
**B2.**

ΚΛΑΣΕΙΣ	$x_i$	$v_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i \%$
[20 – 25)	$\frac{45}{2}$	8	8	0,16	16
[25 – 30)	$\frac{55}{2}$	9	17	0,18	34
[30 – 35)	$\frac{65}{2}$	15	32	0,3	64
[35 – 40)	$\frac{75}{2}$	10	42	0,2	84
[40 – 45)	$\frac{85}{2}$	5	47	0,1	94
[45 – 50)	$\frac{95}{2}$	3	50	0,06	100
ΣΥΝΟΛΟ		50		1,00	

$$x_1 = \frac{20 + 25}{2} = \frac{45}{2}, \quad x_2 = \frac{25 + 30}{2} = \frac{55}{2}, \quad x_3 = \frac{30 + 35}{2} = \frac{65}{2}, \quad x_4 = \frac{35 + 40}{2} = \frac{75}{2},$$

$$x_5 = \frac{40 + 45}{2} = \frac{85}{2}, \quad x_6 = \frac{45 + 50}{2} = \frac{95}{2},$$

$$N_1 = v_1 = 8$$

Το  $f_1 = \frac{v_1}{v_{ολ}} = \frac{8}{50} = \frac{16}{100} = 0,16$  και  $f_1\% = 0,16 \cdot 100 = 16$  άρα και  $F_1\% = f_1\% = 16$

Αφού  $F_2\% = 34 \Leftrightarrow F_2 = 0,34$ , επίσης  $f_1 + f_2 = F_2 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 0,34 \Leftrightarrow 0,16 + f_2 = 0,34 \Leftrightarrow f_2 = 0,18$

Από  $f_2 = \frac{v_2}{v_{ολ}} \Leftrightarrow 0,18 = \frac{v_2}{50} \Leftrightarrow v_2 = 0,18 \cdot 50 = 9$ , οπότε και  $N_2 = v_1 + v_2 = 8 + 9 = 17$

Το  $N_3 = N_2 + v_3 \Leftrightarrow 32 = 17 + v_3 \Leftrightarrow v_3 = 15$

Το  $f_3 = \frac{v_3}{v_{ολ}} = \frac{15}{50} = \frac{30}{100} = 0,3$  και  $f_3\% = 0,3 \cdot 100 = 30$  και  $F_3\% = F_2\% + f_3\% = 34 + 30 = 64$

Από  $f_4 = \frac{v_4}{v_{ολ}} \Leftrightarrow 0,2 = \frac{v_4}{50} \Leftrightarrow v_4 = 0,2 \cdot 50 = 10$ , οπότε και το  $N_4 = N_3 + v_4 = 32 + 10 = 42$

Το  $f_4\% = 0,2 \cdot 100 = 20$  και  $F_4\% = F_3\% + f_4\% = 64 + 20 = 84$

Το  $f_5 = \frac{v_5}{v_{ολ}} = \frac{5}{50} = \frac{10}{100} = 0,1$  και  $f_5\% = 0,1 \cdot 100 = 10$  οπότε  $F_5\% = F_4\% + f_5\% = 84 + 10 = 94$ , επίσης  $N_5 = N_4 + v_5 = 42 + 5 = 47$

Το  $v_6 = v_{ολ} - N_5 = 50 - 47 = 3$ , οπότε το  $f_6 = \frac{v_6}{v_{ολ}} = \frac{3}{50} = \frac{6}{100} = 0,06$  και  
 $f_6\% = 0,06 \cdot 100 = 6$

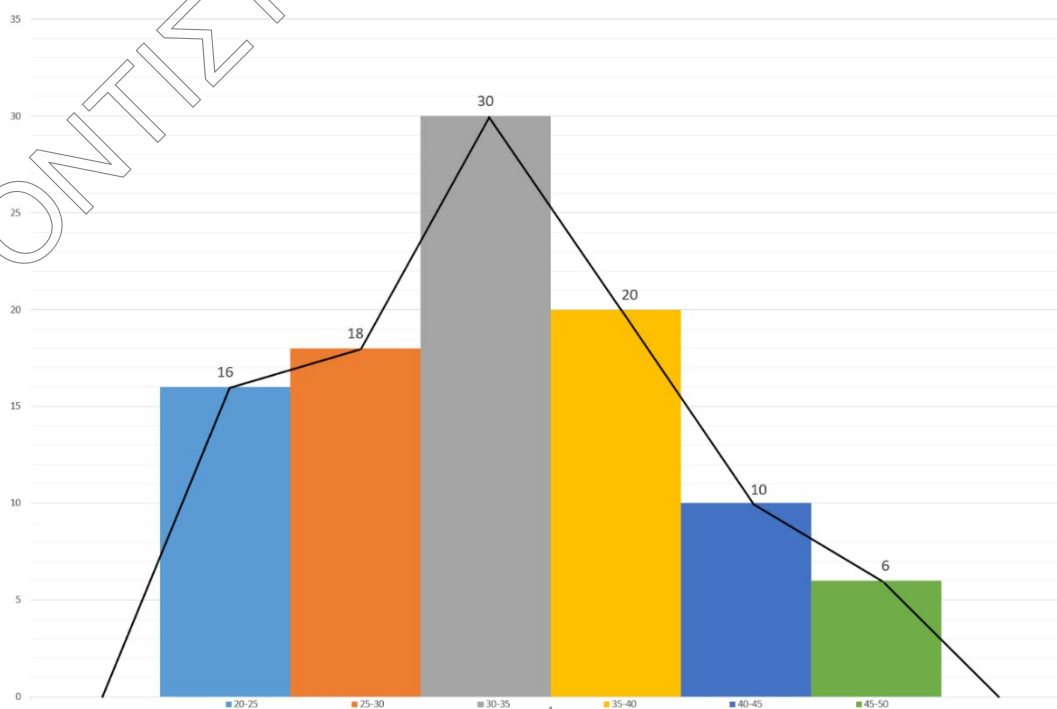
Το  $N_6 = v_{ολ} = 50$  και το  $f_6\% = 100$

**B3.** Τουλάχιστον 40 μήνες είναι:  $f_5\% + f_6\% = 10\% + 6\% = 16\%$

**B4.**

ΚΛΑΣΕΙΣ	$x_i$	$v_i$	$N_i$	$f_i$	$f_i\%$	$F_i\%$
[20 – 25)	$45/2$	8	8	0,16	16	16
[25 – 30)	$55/2$	9	17	0,18	18	34
[30 – 35)	$65/2$	15	32	0,3	30	64
[35 – 40)	$75/2$	10	42	0,2	20	84
[40 – 45)	$85/2$	5	47	0,1	10	94
[45 – 50)	$95/2$	3	50	0,06	6	100
ΣΥΝΟΛΟ		50		1,00	100	

Ιστόγραμμα και πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων %



**ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Δίνεται  $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax - \beta$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Επομένως  $f'(x) = 3x^2 - 12x + a$

Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο  $x_0 = 2$  είναι ίσος με -3 πρέπει:

$$f'(2) = -3 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + a = -3 \Leftrightarrow 12 - 24 + a = -3 \Leftrightarrow a = 9$$

Επίσης  $f(x) = y \Leftrightarrow f(x) = -3x + 4$  για  $x=2$  έχουμε

$$f(2) = -3 \cdot 2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - \beta = -6 + 4 \Leftrightarrow$$

$$8 - 24 + 18 - \beta = -6 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\beta = -6$$

Γ2. Η συνάρτηση γίνεται  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$

Βρίσκουμε την παράγωγο  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3(x - 3)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \text{ ή } x = 1$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'$	+		-	+
$f$		↗	↘	↗

Γ3. το 1821, 2021  $\in (3, +\infty)$  όπου η f είναι αύξουσα επομένως

$$1821 < 2021 \Leftrightarrow f(1821) < f(2021)$$

το 1,821, 2,021  $\in (1,3)$  όπου η f είναι φθίνουσα επομένως

$$1,821 < 2,021 \Leftrightarrow f(1,021) > f(2,021)$$

Γ4. Βρίσκουμε την  $f''(x) = 6x - 12$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''$		-	+
$f'$		↘	↗

άρα ο ρυθμός μεταβολής γίνεται ελάχιστος για  $x=2$ ,  $f'(2) = -3$

**Γ5.** Για να είναι συνεχής η  $g$  για  $x_0=2$  πρέπει  $g(2) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

Υπολογίζω το  $g(2) = -6$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x-12}{4-\sqrt{x^2+4x+4}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6(x-2)}{(4-\sqrt{(x+2)^2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6(x-2)}{4-(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6(x-2)}{2-x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6(x-2)}{-(x-2)} = -6$$

Επομένως η  $g$  είναι συνεχής για  $x_0=2$ .

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Από την υπόθεση δίνεται

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \alpha x + 1}{x^2 + \beta} = 1$$

Έστω η συνάρτηση  $h(x) = \frac{x^2 + \alpha x + 1}{x^2 + \beta}$ ,  $x \in \mathbf{R}$

$$\text{Είναι } h(x) = \frac{x^2 + \alpha x + 1}{x^2 + \beta} \Leftrightarrow x^2 + \alpha x + 1 = h(x)(x^2 + \beta)$$

Από όπου προκύπτει

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + \alpha x + 1) = \lim_{x \rightarrow 0} [h(x)(x^2 + \beta)] \Rightarrow 1 = 1 \cdot \beta \Rightarrow \beta = 1$$

Η ευθεία  $y = x + 7$  έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = 1$

Η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + 1}{x^2 + 1}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{R}$  ως πηλίκο παραγωγίσιμων με παράγωγο

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{x^2 + \alpha x + 1}{x^2 + 1} \right)' = \\ &= \frac{(x^2 + \alpha x + 1)' \cdot (x^2 + 1) - (x^2 + 1)' \cdot (x^2 + \alpha x + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{(2x + \alpha) \cdot (x^2 + 1) - 2x \cdot (x^2 + \alpha x + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{\cancel{2x^3} + \cancel{2x} + \alpha x^2 + \alpha - \cancel{2x^3} - 2\alpha x^2 - \cancel{2x}}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{-\alpha x^2 + \alpha}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Για να είναι η εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία στο σημείο  $A(0, f(0))$  πρέπει να ισχύει

$$f'(0) \cdot \lambda = -1 \Leftrightarrow \frac{-\alpha \cdot 0^2 + \alpha}{(0^2 + 1)^2} \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow +\alpha = -1$$

Άρα τελικά ο τύπος της  $f$  γράφεται  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$  και η παράγωγος είναι

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

**Δ2.**  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$

**Δ3.** Ο πίνακας μονοτονίας είναι:

$x$	$-\infty$	$-1$	$+1$	$+\infty$	
$f'$	+	○	-	○	+
$f$	↗	↘	↗	↗	

Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα  $(-\infty, -1]$ ,  $[1, +\infty)$  και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[-1, 1]$

Στο  $x = -1$  παρουσιάζεται τοπικό μέγιστο με τιμή

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 - (-1) + 1}{(-1)^2 + 1} = \frac{1 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

Στο  $1$  παρουσιάζεται τοπικό ελάχιστο με τιμή  $f(1) = \frac{1^2 - 1 + 1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}$

Δ4. Τα πεδία ορισμού των δύο συναρτήσεων είναι  $A_f = \mathbf{R}$ ,  $A_g = (0, +\infty)$

Το κοινό πεδίο ορισμού είναι  $A_{f+g} = (0, +\infty)$

Ο τύπος είναι :

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} + \frac{-x^3 + 3x^2 - x + 2}{x(x^2 + 1)} = \frac{x^3 - x^2 + x}{x(x^2 + 1)} + \frac{-x^3 + 3x^2 - x + 2}{x(x^2 + 1)} = \\ &= \frac{x^3 - x^2 + x - x^3 + 3x^2 - x + 2}{x(x^2 + 1)} = \frac{2x^2 + 2}{x(x^2 + 1)} = \frac{2(x^2 + 1)}{x(x^2 + 1)} = \frac{2}{x}\end{aligned}$$

και το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο  $A_{f+g} = (0, +\infty)$ .

Δ5. Το σημείο Σ είναι πάνω στην συνάρτηση  $(f+g)(x) = \frac{2}{x}$ , η προβολή του στον

άξονα x'x είναι το σημείο A(x,0) και στον άξονα y'y είναι το σημείο B(0,  $\frac{2}{x}$ )

Οπότε  $(OB) = |y_\Sigma| = \frac{2}{|x|} = \frac{2}{x}$ ,  $x > 0$  και  $(OA) = x_\Sigma = |x| = x$ ,  $x > 0$

Οπότε η περίμετρος του ορθογωνίου είναι

$$\Pi(x) = 2(OA) + 2(OB) = 2x + 2\frac{2}{x} = 2x + \frac{4}{x}, \quad x > 0$$

Δ6. Η συνάρτηση  $\Pi(x) = 2x + \frac{4}{x}$ ,  $x > 0$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με παράγωγο

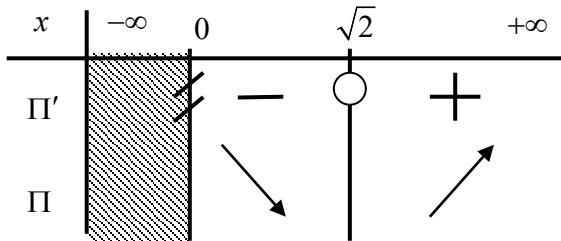
$$\Pi'(x) = 2 - \frac{4}{x^2}$$

Η παράγωγος μηδενίζεται αν:

$$\Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ δεκτή} \quad \eta$$

$$x = -\sqrt{2} \text{ απορ.}$$

Ο πίνακας μονοτονίας της συνάρτησης  $\Pi(x)$  είναι:



Οπότε η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για  $x = \sqrt{2}$  το:

$$\Pi(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Άρα } \Pi(x) \geq \Pi(\sqrt{2}) \Leftrightarrow \Pi(x) \geq 4\sqrt{2}$$