

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 5 Μαΐου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1. Θεώρημα Fermat σελ.142 σχολικού.

Α2. σελ.143 σχολικού.

Α3. σελ.46 σχολικού.

Α4. α) Λάθος β) Λάθος γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Λάθος.

Θέμα Β

$$B1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1-x}}{(x-1) \cdot (x-2) \sqrt{1-x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{(x-1) \cdot (x-2) \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{(x-1) \cdot (x-2) \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-1}{x-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) = +\infty$$

$$\text{διότι : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = +\infty \text{ εφόσον } \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x} = 0 \text{ και } \sqrt{1-x} > 0 \text{ ενώ } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x-2} = 1$$

B2. $f'(x) = (1 + \sqrt{1-x})' = \frac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}} = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ και f συνεχής στο $x = 1$, άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $A = (-\infty, 1]$ οπότε η $f \ll 1 - 1 \gg$, επομένως είναι αντιστρέψιμη με πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f .

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = (-\infty, 1]$ με σύνολο τιμών

$$f(A) = [f(1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [1, +\infty) \text{ αφού: } f(1) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \sqrt{1-x}) = +\infty$$

Εύρεση του τύπου της f^{-1}

Για κάθε $y \geq 1$ έχουμε

$$y = 1 + \sqrt{1-x} \Leftrightarrow y - 1 = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow (y-1)^2 = 1-x \Leftrightarrow x = 1 - (y-1)^2.$$

Άρα $f^{-1}(y) = 1 - (y-1)^2$ με $y \geq 1$

Αν θέσουμε όπου y το x έχουμε $f^{-1}(x) = 1 - x^2 + 2x - 1 = -x^2 + 2x$, $A_{f^{-1}} = [1, +\infty)$

B3. Η συνάρτηση $f^{-1} \circ g$ ορίζεται όταν το σύνολο $\{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_{f^{-1}}\} \neq \emptyset$

$$\text{Δηλαδή } \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq e \end{cases} \Leftrightarrow x \geq e, \text{ άρα } (f^{-1} \circ g)(x) = -(\ln x)^2 + 2 \ln x, x \geq e.$$

B4 α) $\varphi'(x) = \frac{-2 \ln x}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2(-\ln x + 1)}{x}, x \geq e.$

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e$$

$$\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow -\ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow -\ln x < -1 \Leftrightarrow x > e$$

Επειδή η φ είναι συνεχής στο $[e, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.

$$\text{θα έχουμε: } x \geq e \Leftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(e) \Leftrightarrow \varphi(x) \leq 1$$

Άρα παρουσιάζει μέγιστο για $x = e$, το $\varphi(e) = 1$.

β) $\varphi''(x) = 2 \cdot \frac{(-\ln x + 1)' \cdot x - (-\ln x + 1)}{x^2} = 2 \cdot \frac{-1 + \ln x - 1}{x^2} = 2 \cdot \frac{\ln x - 2}{x^2}, x \geq e$

- $\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$
 $\varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 2 \Leftrightarrow x > e^2$

Το πρόσημο της φ'' και τα διαστήματα κυρτότητας της φ φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί :

x	e	e^2	$+\infty$
$\varphi''(x)$	-	○	+
$\varphi(x)$	↪		↻

Η φ κοίλη στο διάστημα $[e, e^2]$ και κυρτή στο διάστημα $[e^2, +\infty)$ ενώ το σημείο $M(e^2, \varphi(e^2))$ δηλαδή το $M(e^2, 0)$ είναι το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της φ που προφανώς ανήκει στον άξονα $x'x$.

Θέμα Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο x_0 , οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - \sigma\upsilon\nu x + 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1 - 0 = 1$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \alpha$$

$$\text{Άρα } \alpha = 1 \text{ και } f(x) = \begin{cases} -x^3 + 1, & x \leq 0 \\ \frac{x - \sigma\upsilon\nu x + 1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^3 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0 \quad (1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x - \sigma\upsilon\nu x + 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sigma\upsilon\nu x + 1}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-\sigma\upsilon\nu x + 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{2x} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2. Για κάθε $x > 0$, ισοδύναμα έχουμε :

$$f(x) < \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow \frac{x - \sigma\upsilon\nu x + 1}{x} < \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \sigma\upsilon\nu x + 1 < \frac{1}{2}x^2 + x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + \sigma\upsilon\nu x - 1 > 0$$

Έστω $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sigma\upsilon\nu x - 1$, $x \geq 0$ αρκεί να δείξουμε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x > 0$

$g'(x) = x - \eta\mu x > 0$ στο $(0, +\infty)$ διότι $|\eta\mu x| < |x|$ για $x \neq 0$.

οπότε $-|x| < \eta\mu x < |x| \Rightarrow \eta\mu x < x$ για $x > 0$

Επειδή g συνεχής στο $[0, +\infty)$, η g γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Άρα για κάθε $x > 0$ ισχύει $g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$

Γ3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sigma\upsilon\nu x + 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \right) \quad (1)$

• $\left| \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \right| = \frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$

$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \leq \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ (από την (1))

Επομένως η $y = 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Γ4. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f και $(\varepsilon) : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ η εξίσωση της εφαπτομένης της στο M .

Η (ε) διέρχεται από το $A(1, -1)$ όταν:

$$1 - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (1 - x_0) \Leftrightarrow 1 - (-x_0^3 + 1) = -3x_0^2(1 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$1 + x_0^3 - 1 = -3x_0^2 + 3x_0^3 \Leftrightarrow 2x_0^3 - 3x_0^2 + 2 = 0$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $2x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(-\infty, 0)$.

Έστω $h(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$, $x \in (-\infty, 0]$

- Η h είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ και $h(-1) \cdot h(0) = -6 < 0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιος ώστε $h(x_0) = 0$.

Επειδή $h'(x) = 6x^2 - 6x > 0$ για κάθε $x < 0$ η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$.
 Επομένως το x_0 είναι μοναδικό.

Β-τρόπος

Η h παραγωγίσιμη στο $A = (-\infty, 0)$ με $h'(x) = 6x^2 - 6x \Leftrightarrow h'(x) = 6x(x-1)$

Για κάθε $x \in A$ έχουμε $6x(x-1) > 0$ άρα $h'(x) > 0$ οπότε η h γνησίως αύξουσα στο

$A = (-\infty, 0)$ και το σύνολο τιμών της είναι $h(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) \right) = (-\infty, 2)$

Ο αριθμός $0 \in h(A)$ άρα υπάρχει $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$, το x_0 μοναδικό διότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $A = (-\infty, 0)$

Θέμα Δ

Δ1. $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$ και $f''(x) = e^x + \frac{1}{x+1} > 0$ για κάθε $x > -1$.

Άρα $f'(x)$ γνησίως αύξουσα και $f'(0) = 0$ άρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$

Από τη μονοτονία της f' και τη ρίζα της $x = 0$ βρίσκουμε το πρόσημό της.

- Για κάθε $x < 0$ ισχύει $f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$
- Για κάθε $x > 0$ ισχύει $f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	↘		↗

Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [0, +\infty)$

Στη θέση $x = 0$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(0) = 0$ το οποίο προφανώς είναι μοναδικό.

Δ2. Για όπου y το x_0 και $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$|g(x) - g(x_0)| \leq (x - x_0)^2 \text{ και για } x \neq x_0 \text{ έχουμε :}$$

$$\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right| \leq |x - x_0| \Leftrightarrow -|x - x_0| \leq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \leq |x - x_0|$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = 0$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = 0 \text{ δηλαδή } g'(x_0) = 0, \text{ άρα } g'(x) = 0, x \in \mathbb{R} \text{ αφού το } x_0 \text{ είναι τυχαίο}$$

σημείο. Επομένως η g είναι σταθερή.

Δ3. Η g είναι σταθερή και $g(0) = 21$. Άρα $g(x) = 21$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε την εξίσωση $f(x) = 21$ με $x \in (-1, +\infty)$.

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f .

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (-1, 0]$ με

$$f(A_1) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \right) = [0, +\infty) \text{ διότι :}$$

- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} [e^x - 1 - \ln(x+1)] = e^{-1} - 1 - (-\infty) = +\infty$
διότι $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$ (όπου $x+1 = u$)

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [0, +\infty)$ με

$$f(A_2) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, +\infty) \text{ διότι :}$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x - 1 - \ln(x+1)]$ (Μορφή $+\infty - \infty$) =

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(1 - \frac{1}{e^x} - \frac{\ln(x+1)}{e^x} \right) \right] \quad (1)$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x+1))'}{(e^x)'} = \dots = 0$

Άρα από την (1) έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Το $21 \in f(A_1)$ άρα υπάρχει $\rho_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $f(\rho_1) = 21$, το ρ_1 μοναδικό αφού η f γνησίως φθίνουσα στο A_1 και προφανώς $\rho_1 < 0$.

Το $21 \in f(A_2)$ άρα υπάρχει $\rho_2 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(\rho_2) = 21$, το ρ_2 μοναδικό αφού η f γνησίως φθίνουσα στο A_1 και προφανώς $\rho_2 > 0$.

Δ4. α) Ισχύει το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\rho_1, 0]$

$$\text{Άρα υπάρχει } \xi_1 \in (\rho_1, 0) \text{ τέτοιος ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(0) - f(\rho_1)}{0 - \rho_1} = \frac{21}{\rho_1} \quad (1)$$

Ισχύει το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0, \rho_2]$.

$$\text{Άρα υπάρχει } \xi_2 \in (0, \rho_2) \text{ τέτοιος ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(\rho_2) - f(0)}{\rho_2 - 0} = \frac{21}{\rho_2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) συμπεραίνουμε $\rho_1 \cdot f'(\xi_1) = \rho_2 \cdot f'(\xi_2)$

β) Για κάθε $\rho_1 < x \leq 0$ ισχύει $f(\rho_1) > f(x) \geq f(0)$ δηλαδή $0 \leq f(x) < 21$

αφού η f γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$

• Για κάθε $0 \leq x < \rho_2$ ισχύει $f(0) \leq f(x) < f(\rho_2)$ δηλαδή $0 \leq f(x) < 21$.

Αφού η f γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Επομένως $0 \leq f(x) < 21$ για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$.