ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Καλή επιτυχία!

Μην εξαντλείστε στο να κάνετε τα **"πράγματα σωστά"** αλλά προσπαθείτε να κάνετε τα **"σωστά πράγματα"**.

Οι έξυπνοι άνθρωποι **συνεργάζονται**
δεν διαπληκτίζονται.

Κανένας στόχος δεν μπορεί να επιτευχθεί χωρίς τη **σωστή στρατηγική**. Η στρατηγική είναι η **λεωφόρος που οδηγεί στην επίτευξη.**

Οι νικητές διαθέτουν δύο πράγματα.
Ξεκάθαρους στόχους
και επιθυμία να πετύχουν.

Να θυμάστε πάντα ότι ο χρόνος σας είναι **το πιο πολύτιμο, το πιο ατομικό, το πιο πεπερασμένο αγαθό.**

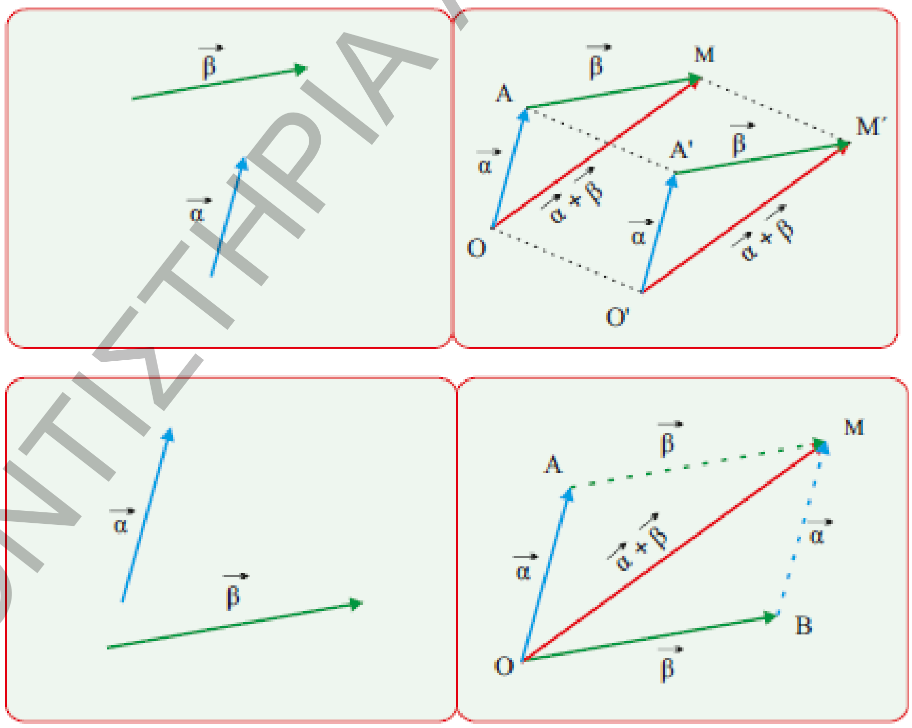
1ο ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Πρόσθεση Διανυσμάτων

Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο Ο παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και στη συνέχεια με αρχή το Α παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{AM}=\vec{\beta}$. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ λέγεται **άθροισμα** ή **συνισταμένη** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και συμβολίζεται με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

Το άθροισμα δύο διανυσμάτων βρίσκεται και με το λεγόμενο **κανόνα του παραλληλόγραμμου**. Δηλαδή, αν με αρχή ένα σημείο Ο πάρουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, τότε το άθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ ορίζεται από τη διαγώνιο ΟΜ του παραλληλόγραμμου που έχει προσκείμενες πλευρές τις ΟΑ και ΟΒ.



Ιδιότητες Πρόσθεσης Διανυσμάτων

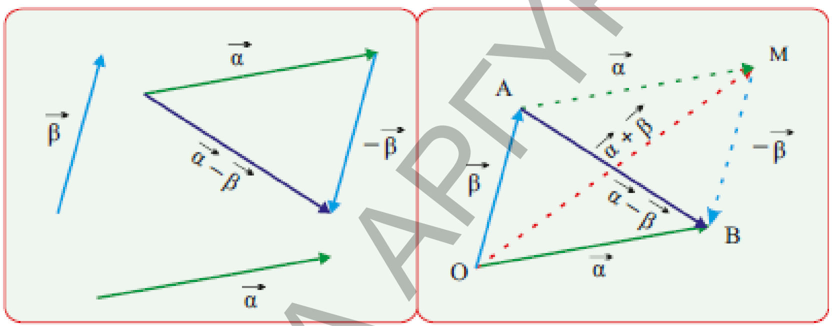
Για την πρόσθεση των διανυσμάτων ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης πραγματικών αριθμών. Δηλαδή, αν $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι τρία διανύσματα, τότε:

1. $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)

2. $(\alpha+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ (Προσεταιριστική ιδιότητα)

3. $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$ $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$.

Αφαίρεση Διανυσμάτων

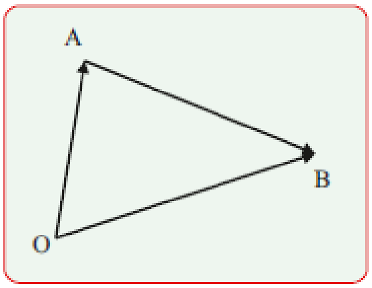


Η διαφορά $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ορίζεται ως άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$. Δηλαδή : $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$

Διάνυσμα Θέσεως

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

“Κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής”.



Μέτρο Αθροίσματος Διανυσμάτων

$$\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|\le|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$$

1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ (1)

1. ΘΕΜΑ Β 1.2 22055

Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{ΒΑ}=\overrightarrow{Β΄Α΄}$ και $\overrightarrow{ΑΓ}=\overrightarrow{Α΄Γ΄}$.

α. Να εξηγήσετε γιατί:

i. το μήκος της πλευράς ΒΑ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς Β′Α′ και

ii. το μήκος της πλευράς ΑΓ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς Α′Γ′ .

β. **i.** Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{ΒΓ}=\overrightarrow{Β'Γ'}$.

ii. Να εξηγήσετε γιατί το μήκος της πλευράς ΒΓ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς Β′Γ′ .

γ. Θα μπορούσε η ακόλουθη πρόταση να ήταν κριτήριο ισότητας τριγώνων;

«Αν για δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ ισχύει $\overrightarrow{ΒΑ}=\overrightarrow{Β΄Α΄}$ και $\overrightarrow{ΑΓ}=\overrightarrow{Α΄Γ΄}$, τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα».

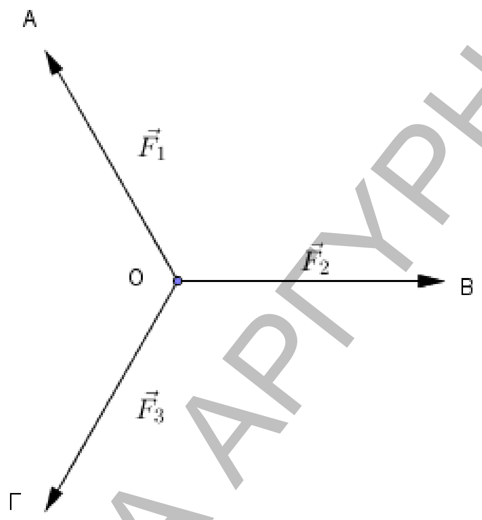
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες [(3+3)+(10+3)+6]=25

1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ (1)

1. ΘΕΜΑ Δ 1.2 22068

Σε ένα υλικό σημείο O εφαρμόζονται τρεις δυνάμεις $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ οι οποίες σχηματίζουν ανά δύο γωνία 120^o, έτσι ώστε το υλικό σημείο O να ισορροπεί.



α. Ποια σχέση ανάμεσα στα διανύσματα $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ εκφράζει την συνθήκη ισορροπίας;

β. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{F_1}+\vec{F_2}$ και $\vec{F_3}$ είναι αντίθετα.

γ. Αν A, B, Γ, Δ είναι τα πέρατα των διανυσμάτων $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ και $\vec{F_1}+\vec{F_2}$, αντίστοιχα (θεωρούμενων ως διανυσμάτων με αρχή το σημείο O), τότε να αποδείξετε ότι:

i. $A\hat{O}\Delta = B\hat{O}\Delta = 60^o$.

ii. $O\hat{\Delta}B = 60^o$.

δ. Να αποδείξετε ότι: $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| = |\vec{F_3}|$.

Μονάδες [5+5+(5+5)+5]=25

1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Ορισμός Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα

Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq 0$ και $\vec{\alpha}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Ονομάζουμε **γινόμενο του λ με το** $\vec{\alpha}$ και το συμβολίζουμε με $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ ή $\lambda\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα το οποίο:

- είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda < 0$ και
- έχει μέτρο $|\lambda||\vec{\alpha}|$.

Αν είναι $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε ως $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.

Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα

Για το γινόμενο πραγματικού αριθμού με διάνυσμα ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

1. $\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ **2.** $(\lambda+\mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\alpha}$ **3.** $\lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\vec{\alpha}$

Ως συνέπεια του ορισμού του γινομένου αριθμού με διάνυσμα και των παραπάνω ιδιοτήτων έχουμε:

i. $\lambda\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$

ii. $(-\lambda\vec{\alpha}) = \lambda(-\vec{\alpha}) = -(\lambda\vec{\alpha})$

iii. $\lambda(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}$

iv. $(\lambda-\mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}-\mu\vec{\alpha}$

v. Αν $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$

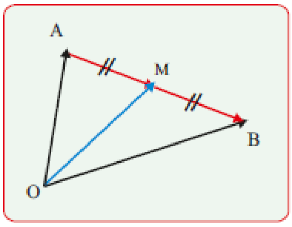
vi. Αν $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε $\lambda = \mu$.

Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα, με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, $\lambda \in R$.

Διανυσματική Ακτίνα Μέσου Τμήματος

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$$



1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ (4)

1. ΘΕΜΑ Β 1.1 15010

Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου A, B, Γ και τα διανύσματα $\vec{B\Delta}$ και $\vec{\Gamma E}$ τέτοια ώστε $\vec{B\Delta} = \vec{BA} + \vec{B\Gamma}$ και $\vec{\Gamma E} = \vec{\Gamma A} + \vec{\Gamma B}$.

α. **i.** Να δείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$ και $\vec{AE} = \overrightarrow{\Gamma B}$.

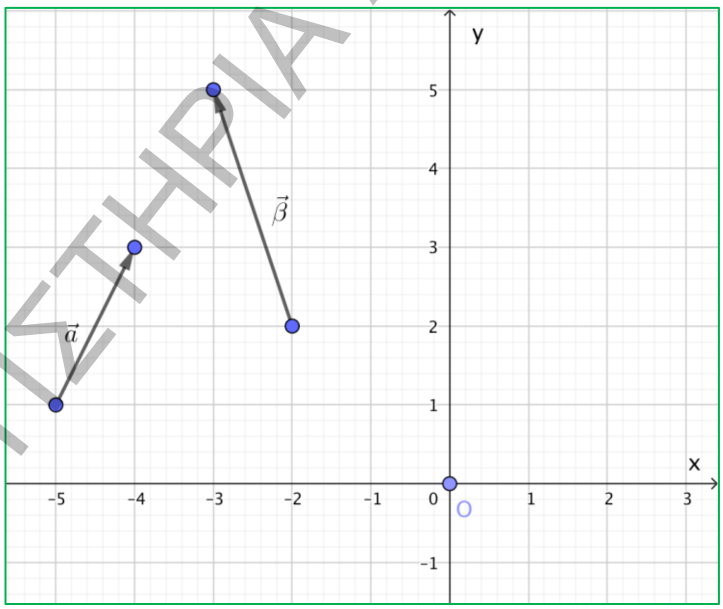
ii. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$ και $\vec{AE}$ είναι αντίθετα.

β. Να δικαιολογήσετε γιατί τα σημεία A, Δ και E είναι συνευθειακά.

Μονάδες (8+8+9)=25

2. ΘΕΜΑ Β 1.1 20914

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.



α. Να σημειώσετε πάνω στο σχήμα τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ όπου O η αρχή των αξόνων.

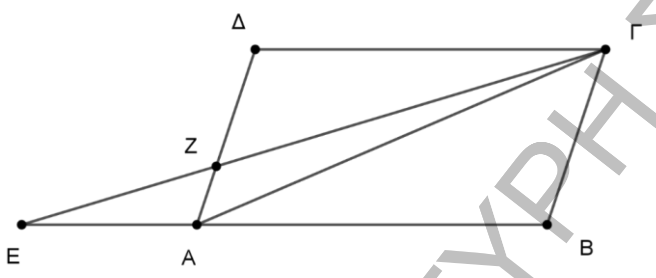
β. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AB}$.

γ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο.

Μονάδες (8+8+8)=25

3. **ΘΕΜΑ Β** **1.2** **21165**

Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}$.



Τα σημεία Ε και Ζ είναι τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AZ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A\Delta}$.

α. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{EZ}=\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma}=\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\vec{\beta}$.

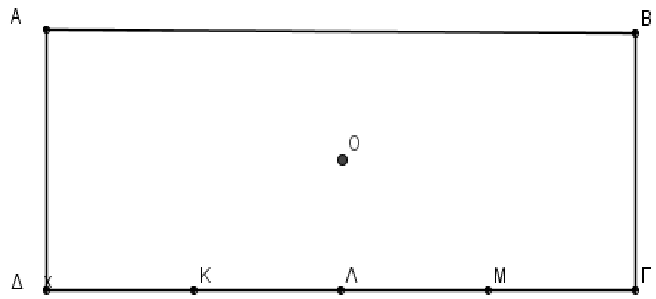
β. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{Z\Gamma}=2\overrightarrow{EZ}$.

γ. Να δείξετε ότι τα σημεία Ζ, Ε και Γ είναι συνευθειακά.

Μονάδες (10+9+6)=25

4. **ΘΕΜΑ Β** **1.1** **22042**

Στο σχήμα φαίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Τα σημεία Κ, Λ, Μ χωρίζουν την πλευρά ΔΓ σε τέσσερα ίσα τμήματα.



Αν $\overrightarrow{\Delta K}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta A}=\vec{\beta}$ να εκφράσετε καθένα από τα ακόλουθα διανύσματα ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α. $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ **β.** $\overrightarrow{MA}$ **γ.** $\overrightarrow{O\Delta}$

Μονάδες (8+8+9)=25

1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ (1)

1. ΘΕΜΑ Δ 1.3 21885

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ,Ε σημεία εσωτερικά των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\overrightarrow{AB} = \kappa \cdot \overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \cdot \overrightarrow{AE}$, όπου κ και λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, τότε:

α. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β. **i.** Αν $\kappa = \lambda$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} \,//\, \overrightarrow{\Delta E}$ και $\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right| = \kappa\left|\overrightarrow{\Delta E}\right|$.

ii. Αν $\kappa = \lambda = 2$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ και να διατυπώσετε λεκτικά ποιο γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί.

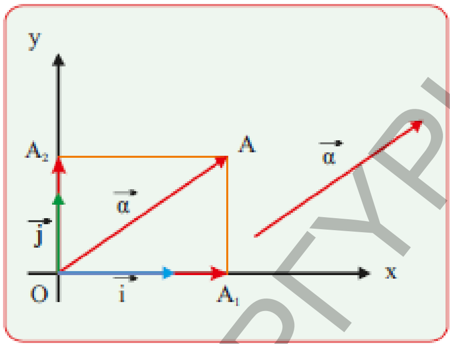
Μονάδες [8+(10+7)]=25

1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Συντεταγμένες Διανύσματος

“Κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $\vec{\alpha}=x\vec{i}+y\vec{j}$”.

“Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ίσες”.



Συντεταγμένες Γραμμικού Συνδυασμού Διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, τότε έχουμε:

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(x_1+x_2,y_1+y_2) \quad \text{και} \quad \lambda\vec{\alpha}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$$

Γενικότερα, για το γραμμικό συνδυασμό $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$ έχουμε:

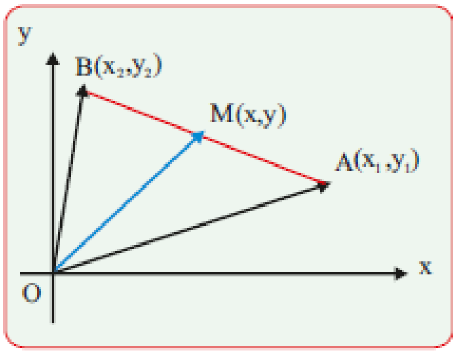
$$\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=(\lambda x_1,\lambda y_1)+(\mu x_2,\mu y_2)=(\lambda x_1+\mu x_2,\lambda y_1+\mu y_2).$$

Συντεταγμένες Μέσου Τμήματος

Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και ας υποθέσουμε ότι (x,y) είναι οι συντεταγμένες του μέσου M του AB.

Τότε :

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{και} \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$



ΘΕΩΡΙΑ

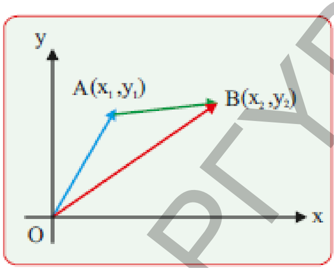
Συντεταγμένες Διανύσματος με Γνωστά Άκρα

Οι συντεταγμένες (x,y) του διανύσματος με άκρα τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$x = x_2 - x_1 \quad \text{και} \quad y = y_2 - y_1 .$$

Δηλαδή

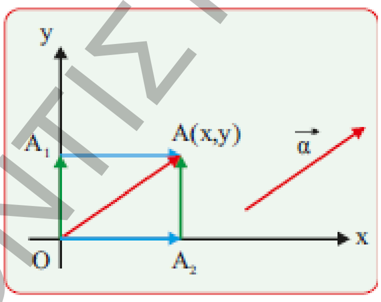
$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

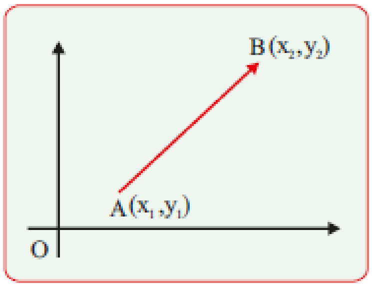


Μέτρο Διανύσματος

Αν $\vec{\alpha} = (x,y)$, τότε $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Η απόσταση των σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι ίση με $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$





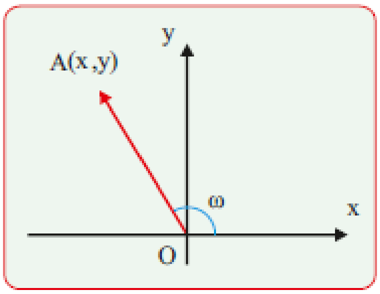
Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

Έστω $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου.

$$\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0. \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0$$

Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος

$$\lambda=\frac{y}{x}=\varepsilon\varphi\varphi \qquad \text{και} \quad 0\le\varphi<2\pi$$



- Αν $y=0$, δηλαδή αν $\vec{\alpha}//x'x$, τότε $\lambda=0$
- Αν $x=0$, δηλαδή αν $\vec{\alpha}//y'y$, τότε **δεν ορίζεται** συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$.
- Ας θεωρήσουμε τώρα δύο διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως.

  Τότε έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2.$$

Επομένως, η συνθήκη παραλληλίας για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 διατυπώνεται ως εξής :

$$\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2$$

1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ (18)

1. ΘΕΜΑ Β 1.4 14666

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,-3)$ και $\vec{\beta}=(-2,-1)$

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων

$$\vec{u}=3\vec{\alpha}-5\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{v}=5\vec{\alpha}-9\vec{\beta}$$

β. Αν $\vec{w}=2\vec{u}-\vec{v}$, να γράψετε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

γ. Αν τα $\vec{\beta}$, $\vec{w}$, $\vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων Κ, Λ, και Μ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.

Μονάδες (9+9+7)=25

2. ΘΕΜΑ Β 1.4 15002

Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $\Delta(4,5)$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=(3,-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,1)$.

α. Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(3,6)$.

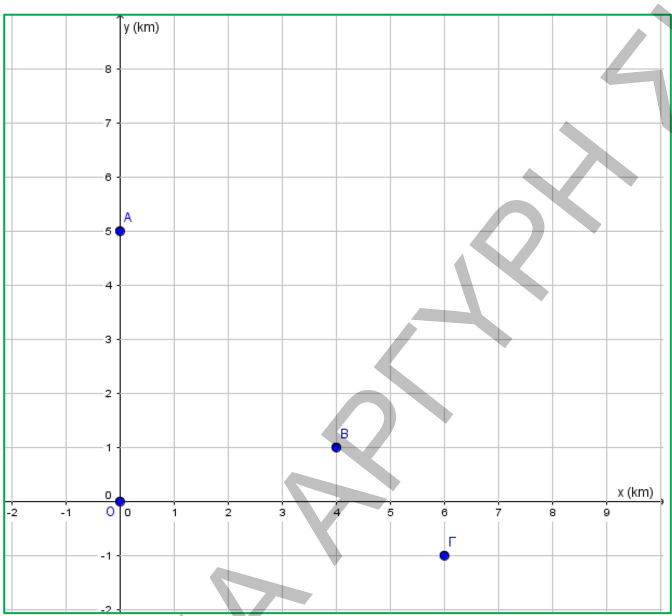
β. **i.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Μονάδες (11+6+8)=25

3. ΘΕΜΑ Β 1.4 15043

Ένα γραφείο μελετών έχει αναλάβει την αναμόρφωση μιας οικιστικής περιοχής, η οποία αποτυπώνεται σε τοπογραφικό σχέδιο με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Τα σημεία $A(0,5)$, $B(4,1)$ και $\Gamma(6,-1)$ παριστάνουν τη θέση τριών οικισμών στο χάρτη.



α. **i.** Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και ως εκ τούτου υπάρχει η δυνατότητα να σχεδιασθεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς.

β. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό A είναι διπλάσια από την απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό Γ.

Μονάδες (6+7+12)=25

4. **ΘΕΜΑ Β** **1.4** **15854**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,1)$ και $\vec{\beta}=(-8,\,-4)$.

α. Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$.

β. Να δείξετε ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\,\vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\beta}=-4\vec{\alpha}$.

γ. Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι τετραπλάσιο του μέτρου του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

Μονάδες (10+7+8)=25

5. **ΘΕΜΑ Β** **1.4** **16147**

Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{\alpha}=3\vec{i}+3\sqrt{3}\,\vec{j},\ \vec{\beta}=\sqrt{2}\,\vec{i},\ \vec{\gamma}=-3\,\vec{j}$ και $\vec{\delta}=(-1,\,1)$.

α. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{\alpha},\,\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$.

β. Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha},\,\vec{\beta},\,\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Ox.

γ. Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

Μονάδες (9+10+6)=25

6. **ΘΕΜΑ Β** **1.4** **16151**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,3)$ και $\vec{\beta}=(-\sqrt{3},1)$.

α. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσής των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα x΄x.

β. Να βρείτε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$.

Μονάδες (16+9)=25

7. ΘΕΜΑ Β 1.4 16579

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$ και $B(6,7)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α. Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.

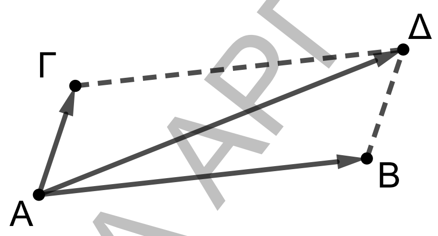
β. Αν $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$.

γ. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}=(-8,-12)$ και $\vec{v}$ του β) ερωτήματος είναι αντίρροπα.

Μονάδες (7+8+10)=25

8. ΘΕΜΑ Β 1.4 16580

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(2, 4)$, $B(11, 5)$, $\Gamma(3, 7)$ και ένα σημείο Δ ώστε το $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.



Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

α. των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

β. του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$.

γ. του σημείου Δ.

Μονάδες (12+8+5)=25

9. ΘΕΜΑ Β 1.4 16581

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(-1,6)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(3,-2)$.

α. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

γ. Να αποδείξετε ότι το Β είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

Μονάδες (12+6+7)=25

10. **ΘΕΜΑ Β** **1.4** **17070**

Στο καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνονται τα σημεία $A(3,4)$, $B(2,1)$, $\Gamma(3,-1)$ και $\Delta(4,2)$.

α. Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία Α, Β, Γ και Δ.

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

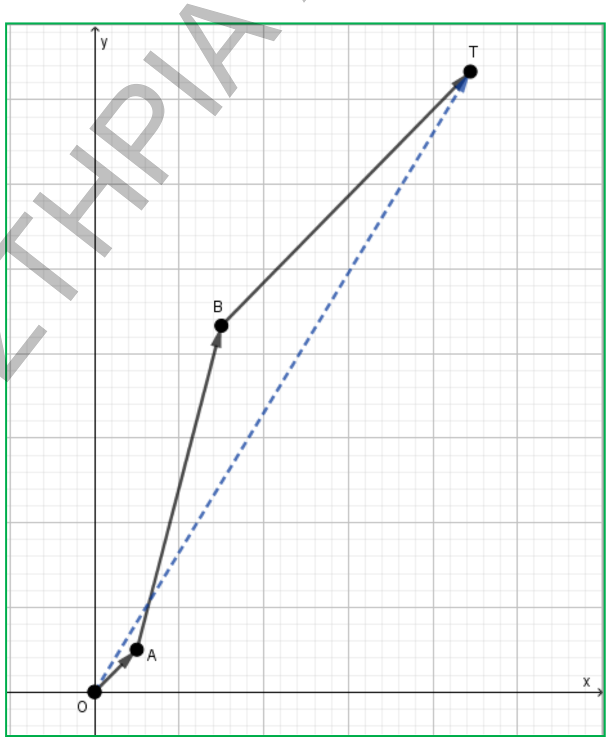
Μονάδες (8+9+8)=25

11. **ΘΕΜΑ Β** **1.4** **18878**

Ένας εξερευνητής ξεκίνησε από την κατασκήνωσή του (σημείο O) τρείς μέρες πριν, για ένα ταξίδι μέσα στη ζούγκλα. Στο τέλος της πρώτης ημέρας έφθασε στο σημείο A, στο τέλος της δεύτερης ημέρας έφθασε στο σημείο B και στο τέλος της τρίτης ημέρας έφθασε στο σημείο T. Οι τρεις ημέρες του ταξιδιού του μπορούν να περιγραφούν από τα παρακάτω διανύσματα

$$\overrightarrow{OA}=(1,1),\quad \overrightarrow{AB}=(2,4),\quad \overrightarrow{BT}=\left(2{,}5\sqrt{3}-5\right),$$

όπως φαίνονται στο σχήμα:



Αν οι αποστάσεις εκφράζονται σε χιλιόμετρα, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OT}=\left(5,5\sqrt{3}\right)$.

β. Να υπολογίσετε την απόσταση (OT) του εξερευνητή από την κατασκήνωση στο τέλος της τρίτης ημέρας.

Μονάδες (13+12)=25

12. ΘΕΜΑ Β 1.4 19038

Δίνεται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,3)$, $\vec{\beta}=(-1,1)$ και $\vec{\gamma}=(-5,-5)$.

α. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα x΄x.

β. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}|=5|\vec{\beta}|$.

γ. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$.

Μονάδες (9+8+8)=25

13. ΘΕΜΑ Β 1.4 21681

Θεωρούμε τα σημεία $A(1,\ 2)$, $B(-3,\ 4)$, $\Gamma(2,\ 5)$.

α. Να βρείτε σημείο Δ ώστε $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{AB}$.

β. Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Να βρείτε το κέντρο Ο του παραλληλογράμμου.

Μονάδες (10+8+7)=25

14. ΘΕΜΑ Β 1.4 22038

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(5,\ -12)$.

α. Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι ομόρροπο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 1.

β. Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι αντίρροπο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 7.

Μονάδες (12+13)=25

15. ΘΕΜΑ Β 1.4 22044

Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(4,0)$ και $\Gamma(5,1)$.

α. Να σχεδιάσετε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και να τοποθετήσετε σε αυτό τα σημεία Α, Β, Γ

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός τέταρτου σημείου Δ έτσι ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (10+15)=25

16. ΘΕΜΑ Β 1.4 22052

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-2,5)$ και $\vec{\beta}=(1,-3)$.

α. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.

β. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{v}=(8,\ -21)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

Μονάδες (12+13)=25

17. ΘΕΜΑ Β 1.4 22060

Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$, $B(3,\ 0)$, $\Gamma(6,2)$ και $\Delta(3,4)$.

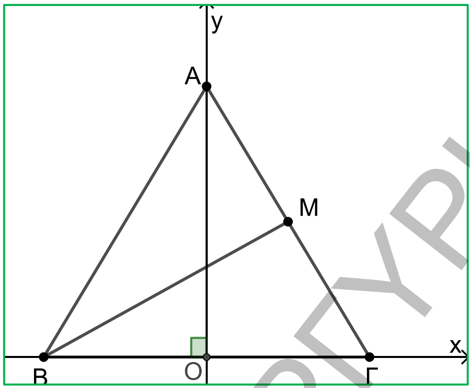
α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{BA}$ και να επιβεβαιώσετε ότι: $\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{B\Gamma}$.

β. Να δείξετε ότι $\left|\overrightarrow{BA}\right|=\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|$. Ποιο είναι το σχήμα του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$;

Μονάδες (12+13)=25

18. ΘΕΜΑ Β 1.4 22557

Το ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχει βάση $ΒΓ$ και ύψος $ΑΟ$. Η κορυφή $Α$ είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και οι κορυφές $Β$ και $Γ$ είναι σημεία του άξονα $x'x$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έστω $(ΒΓ)=12$, $(ΑΟ)=8$ και $Μ$ το μέσο της πλευράς $ΑΓ$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $Α(0,8)$, $Β(-6,0)$ και $Γ(6,0)$.

ii. $Μ(3,4)$

β. Να βρείτε το μήκος της διαμέσου $ΒΜ$.

Μονάδες (9+9+7)=25

1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ (3)

1. ΘΕΜΑ Δ 1.4 17076

Δίνονται τα σημεία $A(-3,-1)$, $B(0,3)$ και $M(x,\ y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$.

β. Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$.

γ. Να αποδείξετε ότι $\left|\overrightarrow{AM}\right|+\left|\overrightarrow{MB}\right|\geq 5$.

δ. Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=4$$

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (6+6+7)=25

2. ΘΕΜΑ Δ 1.4 17077

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως

$$\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+\lambda\vec{j} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OB}=(\lambda+1)\vec{i}+(\lambda+3)\vec{j},\ \text{με } \lambda\in\mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}=(\lambda-1)\vec{i}+3\vec{j}$.

β. Να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B ως συνάρτηση του λ.

γ. Για ποιές τιμές του λ η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με 5;

δ. Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων A και B να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (6+7+7+5)=25

3. **ΘΕΜΑ Δ** **1.4** **20938**

Θεωρούμε τρίγωνο OAB, με $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=(6,8)$. Για το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γνωρίζουμε

ότι $\vec{\alpha}=\left(|\vec{\alpha}|-4,\ |\vec{\alpha}|-2\right)$

α. Να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}|=2$.

β. Να βρείτε σημείο Γ έτσι, ώστε το τετράπλευρο $OA\Gamma B$ να αποτελεί παραλληλόγραμμο.

γ. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η πλευρά OA με τη διαγώνιο AB του παραλληλογράμμου $OA\Gamma B$.

Μονάδες (10+8+7)=25

1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi,$$ όπου φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

- Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=0$, τότε ορίζουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

Άμεσες συνέπειες του παραπάνω ορισμού είναι οι εξής:

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)
- Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ και αντιστρόφως.
- Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.
- Αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\vec{\alpha}^2$ και λέγεται **τετράγωνο του** $\vec{\alpha}$.

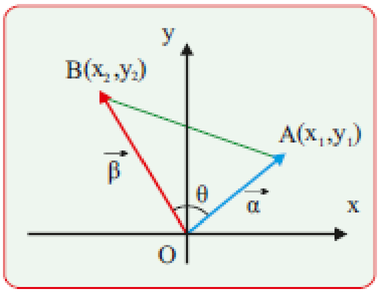
Έχουμε: $\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2$.

Αναλυτική Έκφραση Εσωτερικού Γινομένου

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$$

Δηλαδή:

“Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους”.



Με τη βοήθεια της αναλυτικής έκφρασης του εσωτερικού γινομένου αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

- $\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}),\quad \lambda\in R$
- $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ (Επιμεριστική Ιδιότητα)
- $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2=-1$ όπου $\lambda_1=\lambda_{\vec{\alpha}}$ και $\lambda_2=\lambda_{\vec{\beta}}$, $(\vec{\alpha},\vec{\beta}\nparallel y'y)$

Συνημίτονο Γωνίας δύο Διανυσμάτων

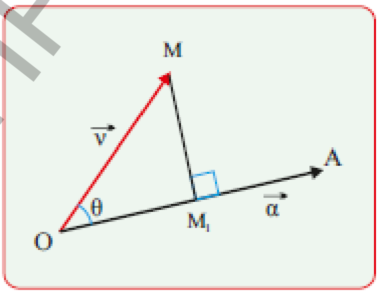
$$\text{συν}\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

Προβολή Διανύσματος σε Διάνυσμα

Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM_1}$ λέγεται **προβολή του** $\vec{v}$ **στο** $\vec{\alpha}$ και συμβολίζεται με $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$.

Για το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{\alpha}$ και $\vec{v}$ έχουμε:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$$



1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ (27)

1. ΘΕΜΑ Β 1.5 14586

Δίνονται τα σημεία Α(1,2), Β(3,4) και Γ(5,-2).

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.

β. Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ, να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

γ. Να γραφεί το $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AM}$.

Μονάδες (9+8+8)=25

2. ΘΕΜΑ Β 1.5 14953

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-2,5)$, $B(7,8)$, $\Gamma(1,-4)$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

β. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

Μονάδες (15+10)=25

3. ΘΕΜΑ Β 1.5 15038

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}|=3, |\vec{\beta}|=4$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$.

α. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

β. Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$.

γ. Να αποδείξετε ότι $\left(3\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)=15$.

Μονάδες (9+6+10)=25

4. ΘΕΜΑ Β 1.5 15073

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,\ 2)$ και $\vec{\beta}=(2,3)$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

β. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

γ. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$.

Μονάδες (8+8+9)=25

5. ΘΕΜΑ Β 1.5 15186

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(6,3)$, $\Delta(1,-2)$ και $\Gamma(9,2)$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Το μέσο M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $(4,2)$ και το μέσο N του τμήματος $\Gamma\Delta$ έχει συντεταγμένες $(5,0)$.

β. $\overrightarrow{MN}=(1,-2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(8,4)$.

γ. $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

Μονάδες (8+8+9)=25

6. ΘΕΜΑ Β 1.5 15252

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=(2,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,-1)$.

α. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma}=(1,-2)$.

β. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την ΑΓ.

γ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

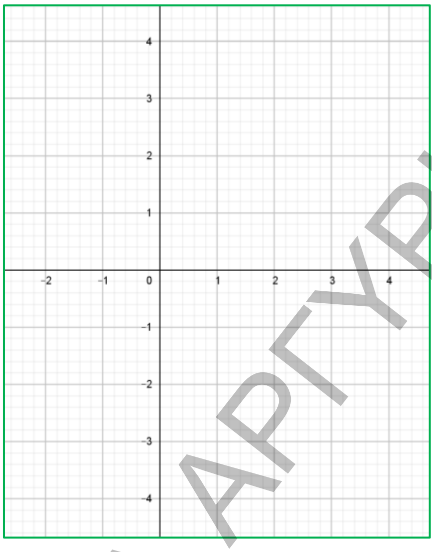
Μονάδες (8+9+8)=25

7. ΘΕΜΑ Β 1.5 15317

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v}=(3,0)$ και $\vec{w}=(-3,4)$.

α. Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα.

β. **i.** Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$.



ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα.

Μονάδες [12+(10+3)]=25

8. ΘΕΜΑ Β 1.5 15379

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,3)$, $\vec{\beta}=(3,-1)$

Να υπολογίσετε:

α. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

β. το διάνυσμα $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

Μονάδες (13+12)=25

9. ΘΕΜΑ Β 1.5 15463

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB}=(2,1)$ και $\vec{A\Gamma}=(3,-1)$.

α. Να αποδείξετε ότι $\vec{B\Gamma}=(1,-2)$.

β. Να αποδείξετε ότι $\vec{AB}\perp\vec{B\Gamma}$.

γ. Να αποδείξετε ότι $|\vec{AB}|=|\vec{B\Gamma}|$.

Μονάδες (8+9+8)=25

10. ΘΕΜΑ Β 1.5 15825

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=4$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

α. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=4$.

β. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0$.

γ. Να βρείτε τη $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}}\right)$.

Μονάδες (8+10+7)=25

11. ΘΕΜΑ Β 1.5 15852

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,2)$, $\vec{\beta}=(-2,1)$.

Να υπολογίσετε:

α. το διάνυσμα $\vec{v}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$.

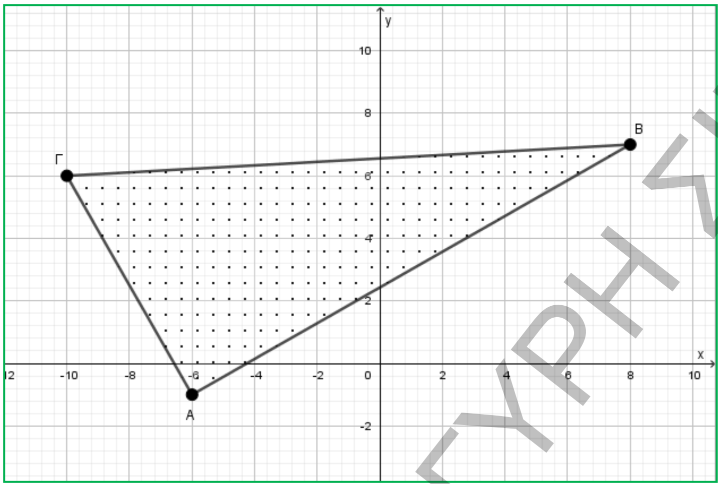
β. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

γ. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}$.

Μονάδες (8+8+9)=25

12. **ΘΕΜΑ Β** **1.5** **15996**

Δίνονται τα σημεία $A(-6,-1)$, $B(8,7)$, $\Gamma(-10,6)$, τα οποία ορίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$.



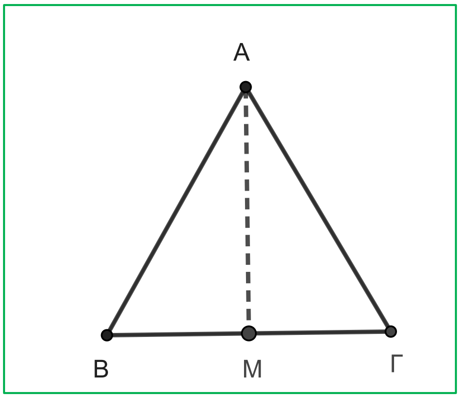
α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}$ και του αθροίσματος τους $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$.

β. Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού.

Μονάδες (10+15)=25

13. **ΘΕΜΑ Β** **1.5** **16141**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 10 και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.



α. Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

i. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)$

ii. $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B\Gamma}\right)$

iii. $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{\Gamma A}\right)$

iv. $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{\Gamma M}\right)$

v. $\left(\overrightarrow{\Gamma M}, \overrightarrow{\Gamma B}\right)$

β. Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

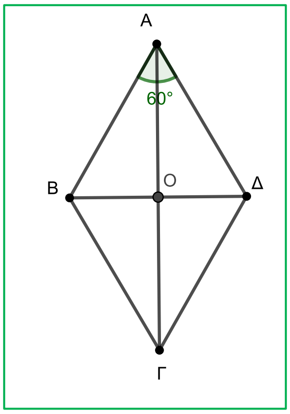
i. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$

ii. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Gamma A}$

iii. $\overrightarrow{\Gamma M} \cdot \overrightarrow{\Gamma B}$

Μονάδες (10+ 15)=25

14. **ΘΕΜΑ Β** **1.5** **16144**



Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, πλευρά 4 και $\hat{A} = 60^{o}$.

Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :

α. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$

β. $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$

γ. $\overrightarrow{O\Delta} \cdot \overrightarrow{AO}$

δ. $\overrightarrow{O\Delta} \cdot \overrightarrow{OB}$

ε. $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

Μονάδες 25)

15. **ΘΕΜΑ Β** **1.5** **16426**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2\,,-1)$ και $\vec{\beta} = (-3\,,2)$.

α. Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$.

β. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (x\,, y)$ όταν $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$ και $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$.

Μονάδες (10+15)=25

16. **ΘΕΜΑ Β** **1.5** **16427**

Δίνονται τα σημεία Α(-2 , 3), Β (0 , 8), Γ (5 , 3) και Δ (10 , 5). Να υπολογίσετε:

α. το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

β. τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ με τον άξονα x’x.

Μονάδες (12+13)=25

17. **ΘΕΜΑ Β** **1.5** **16428**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$ και $\left|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = \frac{\sqrt{3}}{2}\right| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

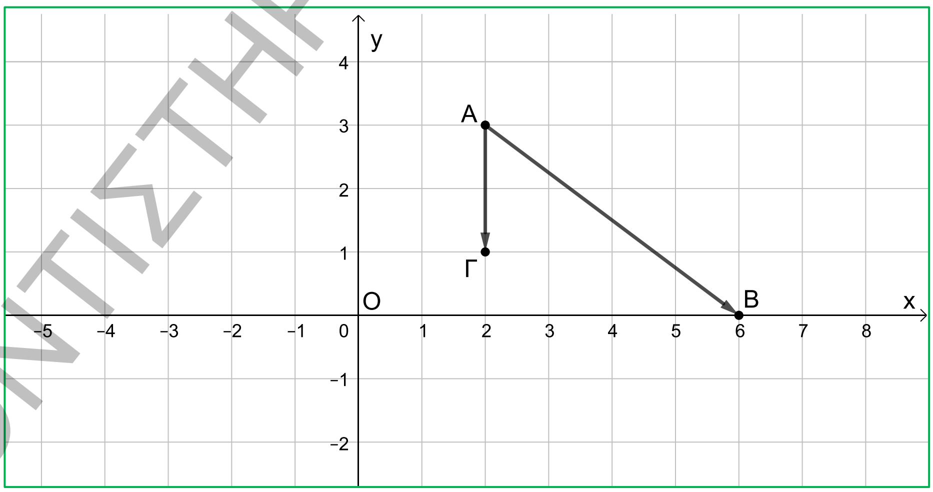
α. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\frac{3}{8}$.

β. Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Μονάδες (15+10)=25

18. **ΘΕΜΑ Β** **1.5** **17075**

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.



α. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (4,\ -3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (0,\ -2)$.

β. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

Μονάδες (12+13)=25

19. **ΘΕΜΑ Β** **1.5** **20685**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(1,1)$, $\vec{w}=(-10,2)$ και τα σημεία $A(-1,2)$, $B(\beta,0)$, $\Gamma(0,\gamma)$. Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και να αποδείξετε ότι $\beta=1$.

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι $\gamma=\frac{9}{5}$.

γ. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

Μονάδες (9+9+7)=25

20. **ΘΕΜΑ Β** **1.5** **20732**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,1)$ και $\vec{\beta}=(-8,-4)$.

α. Να δείξετε ότι τα διάνυσμα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{\beta}|=4|\vec{\alpha}|$.

β. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}<0$.

Μονάδες (12+6+7)=25

21. **ΘΕΜΑ Β** **1.5** **20733**

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$ και $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

α. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$ συναρτήσει του διανύσματος $\vec{\beta}$.

β. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

γ. Να αιτιολογήσετε γιατί τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

Μονάδες (10+10+5)

22. **ΘΕΜΑ Β** **1.5** **20773**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1\,,-2)$ και $\vec{\beta}=(2\,,3)$

α. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

β. Αν $\vec{u}=(4\,,-1)$ να βρείτε την τιμή του $\kappa\in R$ ώστε το διάνυσμα $\vec{u}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{v}=(1\,,\kappa)$.

γ. Για $\kappa=4$ να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}$ του προηγούμενου ερωτήματος.

Μονάδες (8+9+8)=25

23. **ΘΕΜΑ Β** **1.5** **20888**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}|=4,\ |\vec{\beta}|=5,\ (\widehat{\vec{\alpha},\ \vec{\beta}})=\frac{2\pi}{3} \quad \text{και} \quad \vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}.$$

Να υπολογίσετε:

α. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

β. το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

Μονάδες (10+15)=25

24. **ΘΕΜΑ Β** **1.5** **21682**

Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δυο διανύσματα για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(11,\ 2)$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(-5,\ -10)$.

α. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}=(3,\ -4)$ και να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\beta}$.

β. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ και $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|$.

Μονάδες (14+11)=25

25. ΘΕΜΑ Β 1.5 22040

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(-4,3)$.

α. Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

β. Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 1.

Μονάδες (12+13)=25

26. ΘΕΜΑ Β 1.5 22170

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,3)$, $\vec{\beta}=\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ και $\vec{v}=(x^2,x-1)$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.

β. Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{u}=(3,4)$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα.

γ. Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά;

Μονάδες (8+8+9)=25

27. ΘΕΜΑ Β 1.5 22554

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy, με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$, $y'y$ τα $\vec{i}$, $\vec{j}$ αντίστοιχα, τα σημεία Α και Β έχουν διανύσματα θέσεως $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}+2\vec{j}$ και $\overrightarrow{OB}=6\vec{i}-\vec{j}$.

Έστω Μ ένα σημείο τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{5}\left(2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}-3\vec{j}$, **ii.** $\overrightarrow{OM}=\vec{j}$.

β. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OM}$.

Μονάδες (8+8+9)=25

1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ (5)

1. ΘΕΜΑ Δ 1.4 15320

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ με $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα.

α. Να δείξετε ότι:

i. $\left|\overrightarrow{O\Gamma}\right|^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\left|\vec{\beta}\right|^2$.

ii. $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\left|\vec{\beta}\right|^2$.

β. Αν $\left|\overrightarrow{O\Gamma}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$, να δείξετε ότι το ΟΑΓΒ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες (9+9+7)=25

2. ΘΕΜΑ Δ 1.4 18520

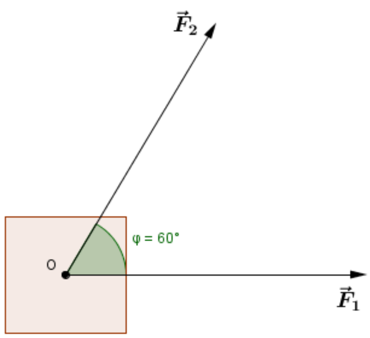
α. Να αποδειχθεί ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει: $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2+\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=2\left|\vec{\alpha}\right|^2+2\left|\vec{\beta}\right|^2$ (1)

β. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ με $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$.

i. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

ii. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1).

γ. Ένα σώμα σύρεται πάνω σε λείο επίπεδο από δύο ανθρώπους, οι οποίοι εξασκούν πάνω σε αυτό δυνάμεις $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα $10\,N$ (Newton) και η γωνία που σχηματίζουν είναι $60°$. Να σχεδιάσετε την συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ και να βρείτε το μέτρο της.



Μονάδες (6+5+4+10)=25

3. ΘΕΜΑ Δ 1.4 18547

Δίνονται τα σημεία $A(0, -1)$, $B(\lambda, 1)$ και $\Gamma(\lambda-2, \lambda-3)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in R$ ώστε :

i. Τα σημεία Α, Β και Γ να είναι κορυφές τριγώνου.

ii. Το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με $\widehat{A} = 90^o$.

β. Για $\lambda = -2$,να βρείτε:

i. Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$.

ii. Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες [(8+7)+(4+6)]=25

4. ΘΕΜΑ Δ 1.4 22063

α. Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να αποδείξετε ότι:

i. $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$.

ii. $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = \left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.

β. Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν ότι:

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}, \quad |\vec{\alpha}|=1, \quad |\vec{\beta}|=2, \quad |\vec{\gamma}|=1.$$

Να αποδείξετε ότι:

i. $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\gamma}$ **ii.** $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ **iii.** $\vec{\alpha}=\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}=-2\vec{\alpha}$.

Μονάδες [(5+5)+(5+5+5)]=25

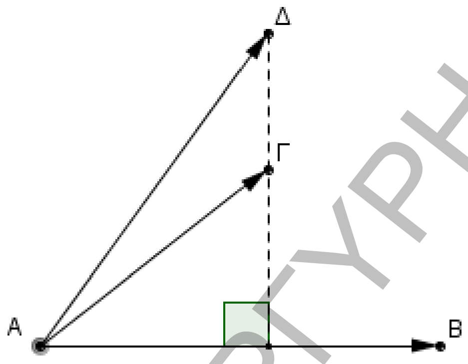
5. ΘΕΜΑ Δ 1.4 22064

α. Αν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Delta}$ είναι τρία διανύσματα, τότε οι ποσότητες $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$:

i. είναι αριθμοί ή διανύσματα; **ii)** μπορούν να συγκριθούν;

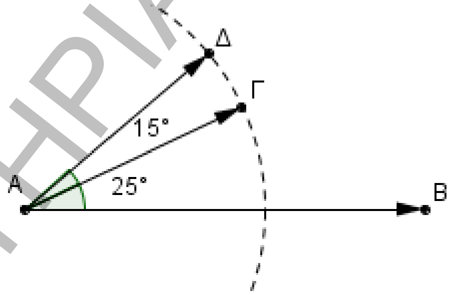
β. Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

i. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} > \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$ **ii.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} < \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$ **iii.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$



γ. Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος (η διακεκομμένη γραμμή είναι τμήμα κύκλου με κέντρο A) να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

i. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} > \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$ **ii.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} < \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$ **iii.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$



Σε όλα τα ερωτήματα, να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Μονάδες (5+10+10)=25

2ο ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

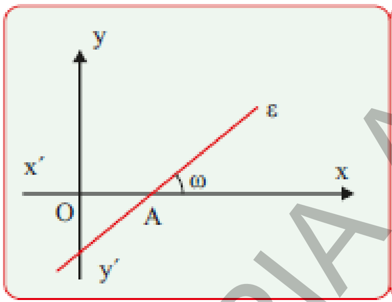
2.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

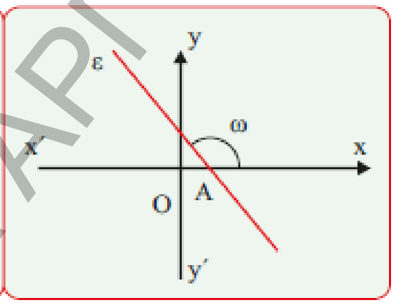
Εξίσωση Γραμμής

Μια εξίσωση με δύο αγνώστους x, y λέγεται εξίσωση μιας γραμμής C, όταν οι συντεταγμένες των σημείων της C, και μόνο αυτές, την επαληθεύουν.

Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας

- Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A.





Τη γωνία ω που διαγράφει ο άξονας $x'x$ όταν στραφεί γύρω από το A κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ευθεία ε τη λέμε

γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$.

Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, τότε λέμε ότι σχηματίζει με αυτόν γωνία $\omega = 0$.

Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία ω ισχύει $0^0 \le \omega < 180^0$ ή σε ακτίνια $0 \le \omega < \pi$.

Ως **συντελεστή διεύθυνσης** μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$.

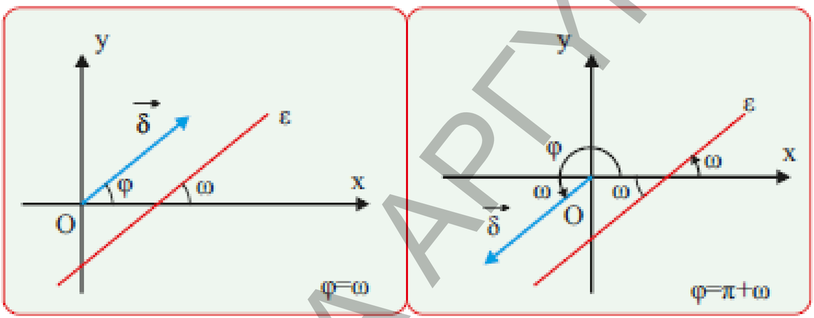
Προφανώς ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας είναι θετικός, αν η γωνία ω είναι οξεία και αρνητικός, αν είναι αμβλεία.

Αν η ευθεία σχηματίζει με τον $x'x$ μηδενική γωνία, δηλαδή είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, ο συντελεστής διεύθυνσης είναι ίσος με μηδέν.

Στην περίπτωση που η γωνία της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ είναι 90^0, δηλαδή η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, δεν ορίζουμε συντελεστή διεύθυνσης για την ευθεία αυτή.

- Έστω τώρα ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$ παράλληλο σε μια ευθεία ε.

"Όταν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα, έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης".



Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία της ευθείας ε, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι ίσος με το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

δηλαδή ίσος με

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \ x_1 \neq x_2.$$

Συνθήκες Καθετότητας και Παραλληλίας Ευθειών

Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως, τότε:

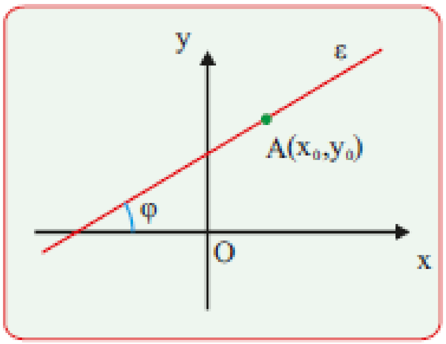
$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

και

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

Εξίσωση Ευθείας

Μια ευθεία στο επίπεδο καθορίζεται, όταν δίνονται ένα σημείο της και ο συντελεστής διεύθυνσής της ή δύο σημεία της. Θα βρούμε την εξίσωση της ευθείας σε καθεμιά από τις δύο αυτές περιπτώσεις.

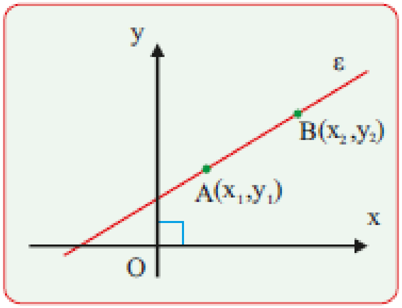


- Η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι:

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \qquad (1)$$

- Η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι: $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ (2)

  Οι εξισώσεις (1) και (2) δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν, όταν η ευθεία ε είναι κατακόρυφη, αφού στην περίπτωση αυτή δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.



Όμως η εξίσωση μιας κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ μπορεί να βρεθεί αμέσως, αφού κάθε σημείο της Μ έχει τετμημένη x_0 και άρα η εξίσωσή της είναι: $x = x_0$

Ειδικές περιπτώσεις

- Η εξίσωση ευθείας που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,\beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι:

$$y = \lambda x + \beta .$$

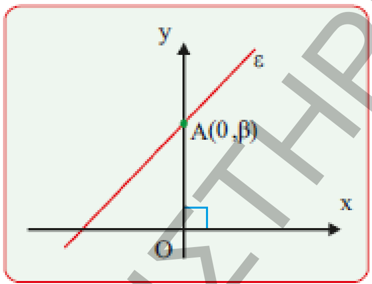
- Αν μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε η εξίσωσή της είναι:

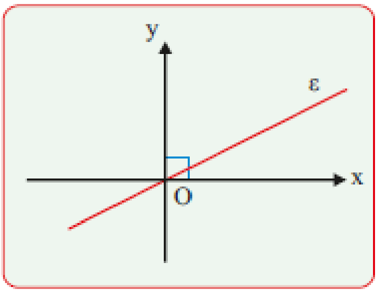
$$y = \lambda x$$

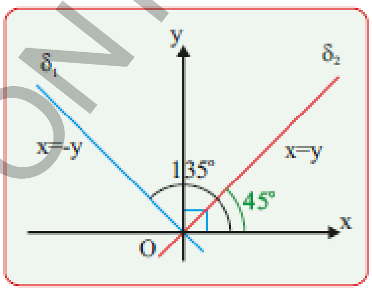
Έτσι,

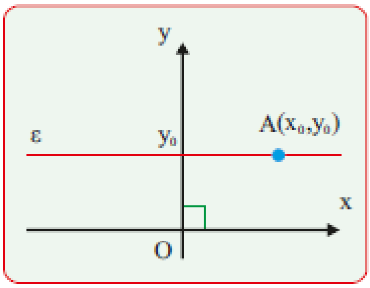
οι διχοτόμοι των γωνιών $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}x'$ έχουν εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$ αντιστοίχως.

- Τέλος, αν μια ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, δηλαδή είναι όπως λέμε μια οριζόντια ευθεία, έχει εξίσωση : $y = y_0$





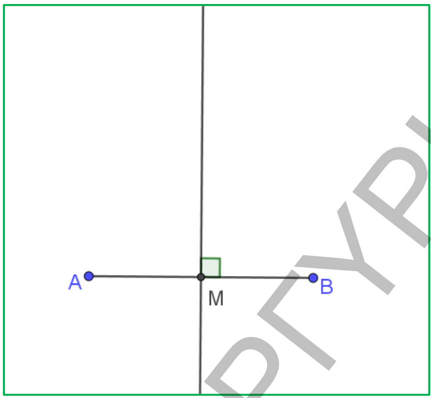




2.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ (15)

1. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **15027**

Δίνονται τα σημεία $A(1,\ -1)$ και $B(3,\ 5)$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ.

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος ΑΒ.

Μονάδες (7+8+10)=25

2. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **15044**

Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $B(6,-1)$.

α. **i.** Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, είναι το σημείο $M(3,2)$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ε) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

Μονάδες [(5+5)+15]=25

3. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **15271**

Δίνονται τα σημεία $A(-3,\ 2)$, $B(1,\ 6)$ και $\Gamma(-13,\ -7)$.

α. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα Α, Β.

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα Α, Β έχει εξίσωση $y = x + 5$.

γ. Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ΑΒ.

Μονάδες (8+7+10)=25

4. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **15657**

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2 : x - 2y = -2$.

α. Να βρείτε το κοινό τους σημείο M.

β. Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 : 3x - y = 4$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Μονάδες (12+13)=25

5. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **16002**

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $A(3,\ -2)$ και $\Gamma(5,\ 2)$. Αν το σημείο $M\left(3,\ \frac{1}{2}\right)$ είναι το μέσο της ΒΓ, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $B(1,\ -1)$.

β. Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΒΓ.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΓ.

Μονάδες (9+6+10)=25

6. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **16766**

Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις $x - 3y = 4$ και $9x + 3y = 6$ αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

β. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A(1,\ -1)$.

γ. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στον άξονα x΄x.

Μονάδες (8+8+9)=25

7. ΘΕΜΑ Β 2.1 18236

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $A(-1, 5)$ και $B(2, 1)$. Αν οι πλευρές ΑΓ και ΒΓ βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1 : y = -x + 4$ και $\varepsilon_2 : y = -\frac{1}{2}x + 2$ αντίστοιχα, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $\Gamma(4, 0)$.

β. Να βρείτε:

i. το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ

ii. την εξίσωση του ύψους ΒΔ.

Μονάδες (12+6+7)=25

8. ΘΕΜΑ Β 2.1 18351

Δίνονται τα σημεία $A(-1, 5)$, $B(3, 3)$. Να υπολογίσετε:

α. Τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ.

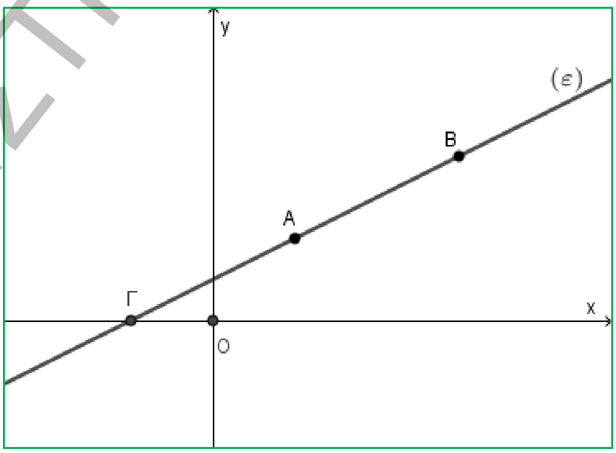
β. Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ.

γ. Την εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος ΑΒ.

Μονάδες (8+8+9)=25

9. ΘΕΜΑ Β 2.1 20868

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα σημεία $A(1,1), B(3,2)$ και Γ μιας ευθείας (ε).



α. Να βρείτε την κλίση λ της ευθείας (ε).

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι η $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

γ. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ, στο οποίο η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$

Μονάδες (10+5+10)=25

10. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **21964**

Δίνονται το σημείο Α(4,-2) και η ευθεία (ε_1) με εξίσωση: $x - y + 2 = 0$. Να βρείτε:

α. την ευθεία (ε_2) που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στην ευθεία (ε_1).

β. το σημείο τομής Β, των ευθειών (ε_1) και (ε_2): $y = -x + 2$.

γ. το συμμετρικό Γ του σημείου Α, ως προς την ευθεία (ε_1).

Μονάδες (6+8+11)=25

11. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **21965**

Δίνονται τα σημεία Α(2, -4) και Β(0, -2)

α. Να βρείτε το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ.

β. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

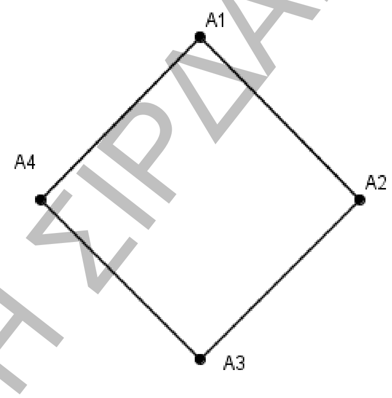
γ. Αν (ζ): $y = x - 4$ και (ε): $y = 2\cdot x-6$, τότε να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ζ), (ε).

δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία (ε) είναι η $(x-2)^2+(y+2)^2=4$.

Μονάδες (4+5+9+7)=25

12. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **22047**

Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4. Έστω λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 οι κλίσεις των ευθειών A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 αντίστοιχα.



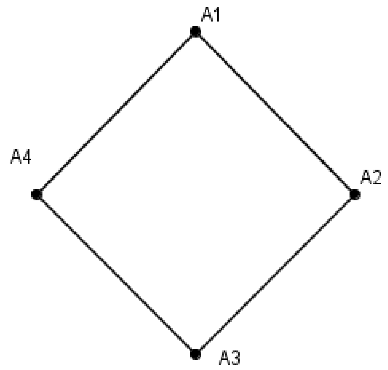
α. Να βρείτε όλα τα ζεύγη των παράλληλων πλευρών του τετραγώνου. Ποια σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο παράλληλων πλευρών;

β. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3} + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_4} = 2$.

Μονάδες (15+10)=25

13. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **22049**

Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4. Έστω λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 οι κλίσεις των ευθειών A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 αντίστοιχα.



α. Να βρείτε όλα τα ζεύγη των πλευρών του τετραγώνου που είναι κάθετες μεταξύ τους. Ποια σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο κάθετων πλευρών;

β. Να αποδείξετε ότι:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_3 \cdot \lambda_4 + \lambda_4 \cdot \lambda_1 = -4 \ .$$

Μονάδες (15+10)=25

14. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **22071**

Οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ έχουν εξισώσεις x+2y+1=0 και 2x+y+5=0 αντίστοιχα και το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο Κ(1,2).

α. Να αποδείξετε ότι:

i. Η κορυφή Α του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες Α(-3, 1).

ii. Η κορυφή Γ του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες Γ(5, 3).

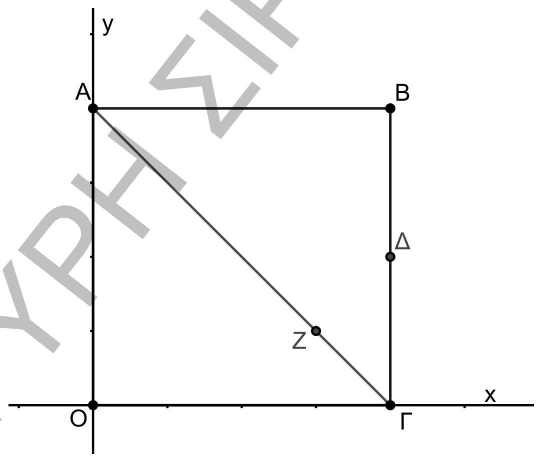
β. Να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών του ΒΓ και ΓΔ.

Μονάδες [(8+7)+10]=25

15. ΘΕΜΑ Β 2.1 22173

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΟ με κορυφές τα σημεία $A(0,4)$, $B(4,4)$, $\Gamma(4,0)$, $O(0,0)$. Στην διαγώνιο ΑΓ παίρνουμε σημείο Ζ, τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AZ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$.

Επίσης, θεωρούμε το μέσο Δ της ΒΓ.



α. **i.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ζ.

β. Αν το σημείο Δ είναι το $(4,2)$ και το σημείο Ζ το $(3,1)$, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΖΔ είναι κάθετη στην ευθεία ΑΓ.

Μονάδες [(7+9)+9]=25

2.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ (7)

1. ΘΕΜΑ Δ 2.1 14970

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο $M(2, 1)$.

α. Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το Μ. Να βρείτε:

i. Την εξίσωση της.

ii. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

β. Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Α, Β αντίστοιχα.

i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ, τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ.

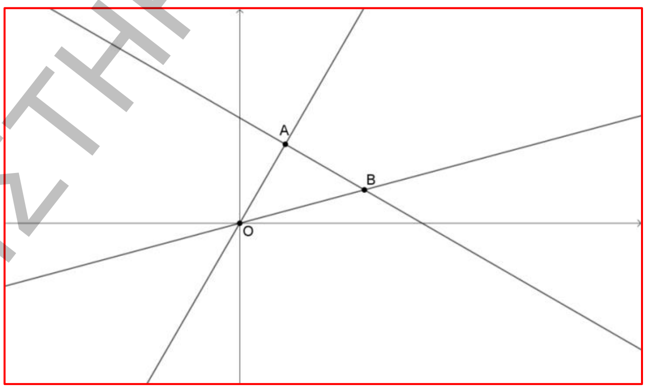
ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

iii. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.

Μονάδες [(2+4)+(6+7+6)]=25

2. ΘΕΜΑ Δ 2.1 15029

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(1,\sqrt{3})$, $B(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1)$.



α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΟΑ καθώς και τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB καθώς και τη γωνία f που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$

γ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A}=90^\circ$.

δ. Να δείξετε ότι $εφ15^\circ=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

Μονάδες (6+6+7+6)=25

3. **ΘΕΜΑ Δ** **2.1** **15275**

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο $M(2, 1)$.

α. Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το Μ. Να βρείτε:

i. Την εξίσωση της.

ii. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

β. Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Α, Β αντίστοιχα.

i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ, τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ.

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

iii. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.

Μονάδες [(2+5)+(6+6+6)]=25

4. **ΘΕΜΑ Δ** **2.1** **15658**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{α}=(2,-2)$ και $\vec{β}=(1,1)$ τα οποία έχουν κοινή αρχή το σημείο $K(2,1)$

α. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$ είναι κάθετα.

β. Αν το σημείο A είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{α}$, B είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{β}$ και $Γ(x_Γ, y_Γ)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας AB,

i. να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και B είναι $A(4,-1)$ και $B(3,2)$.

ii. να δείξετε ότι $3x_Γ+y_Γ=11$.

iii. να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, αν ισχύει ότι το Γ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB και $|\overrightarrow{K\Gamma}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$.

Μονάδες [4+(5+6+10)]=25

5. **ΘΕΜΑ Δ** **2.1** **17078**

Δίνονται τα σημεία $A(3, 2\alpha)$, $B(4, \alpha)$, $\Gamma(\alpha+1, 1-\alpha)$ και $\Delta(\alpha, 1)$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β έχει εξίσωση $y = -\alpha x + 5\alpha$.

ii. Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην ευθεία ΑΒ αν και μόνο αν $\alpha = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

iii. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο όταν $\alpha \neq \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

β. Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες [(6+7+7)+5]=25)

6. **ΘΕΜΑ Δ** **2.1** **18568**

Δίνονται τα σημεία $A(2, 4)$, $B(-1, 0)$ και $\Gamma(3, -2)$.

α. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου ΑΒΓ.

β. Αν η ευθεία ΑΒ τέμνει τον άξονα y'y σε ένα σημείο Δ και η ευθεία ΑΓ τέμνει τον άξονα x'x σε ένα σημείο Ε, τότε:

i, Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και Ε.

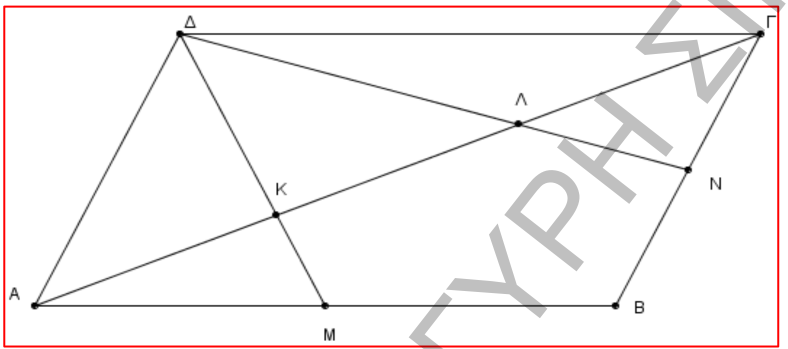
ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{\Delta B}$ και $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{E\Gamma}$

γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι παράλληλη της ΒΓ.

Μονάδες [4+(10+6)+5]=25

7. **ΘΕΜΑ Δ** **2.1** **22065**

Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(8,0)$, $\Gamma(10,4)$, $\Delta(2,4)$. Τα σημεία M και N είναι τα μέσα των πλευρών AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα, ενώ K και Λ είναι τα σημεία που τέμνουν τα τμήματα ΔM και ΔN την διαγώνιο $A\Gamma$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και N.

γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $A\Gamma$, ΔM, ΔN και στη συνέχεια τις συντεταγμένες των σημείων K και Λ.

δ. Να δείξετε ότι τα σημεία K και Λ τριχοτομούν την διαγώνιο $A\Gamma$, δηλαδή την χωρίζουν σε τρία ίσα τμήματα.

Μονάδες (5+5+10+5)=25

2.2 ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

Η Εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$**, με** $A\neq 0$ **ή** $B\neq 0$

Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής

$$Ax+By+\Gamma=0 \quad \text{με} \quad A\neq 0 \quad \text{ή} \quad B\neq 0 \qquad (1)$$

και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

Διάνυσμα Παράλληλο ή Κάθετο σε Ευθεία

Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,-A)$.

Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n}=(A,B)$.

2.2 ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ (7)

1. ΘΕΜΑ Β 2.2 15986

Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,3)$.

α. **i.** Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα Α, Β.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι η $(\varepsilon): y = 2x - 1$.

β. Να εξετάσετε αν το σημείο $\Gamma(2^{100}, 5)$ ανήκει στην ευθεία (ε).

Μονάδες (12+13)=25)

2. ΘΕΜΑ Β 2.2 21162

Δίνονται τα σημεία $A(3,2)$ και $B(-1,-6)$. Να βρεθούν:

α. Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

β. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

γ. Η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας (ε) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

Μονάδες (8+8+9)=25

3. ΘΕΜΑ Β 2.2 21662

Δίνεται η ευθεία ε: $-x + y - 2 = 0$ και τα σημεία $A(-5,1)$ και $B(-3,5)$.

α. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α ως προς το σημείο Β.

β. Να βρείτε:

i. την εξίσωση της ευθείας ε' που διέρχεται από το Β και είναι κάθετη στην ε.

ii. το σημείο τομής των ευθειών ε και ε'.

iii. το συμμετρικό του σημείου Β ως προς την ευθεία ε.

Μονάδες [10+(5+5+5)]=25

4. **ΘΕΜΑ Β** **2.2** **22059**

Δίνεται το σημείο $A(1,-3)$ και η ευθεία $\varepsilon : 4x+6y=1$.

α. Να εξηγήσετε γιατί το A δεν είναι σημείο της ευθείας ε.

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στην ευθεία ε.

Μονάδες (10+15)=25)

5. **ΘΕΜΑ Β** **2.2** **22072**

Δίνονται οι εξισώσεις (1): $\lambda x+(\lambda-1)y-4=0$ και (2): $(3\lambda+1)x-2\lambda y-7=0$ με $\lambda \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε $\lambda \in R$.

β. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in R$, ώστε οι ευθείες με εξισώσεις τις (1) και (2) να είναι μεταξύ τους κάθετες.

Μονάδες (15+10)=25

6. **ΘΕΜΑ Β** **2.2** **22092**

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφή $A(1,4)$. Η πλευρά ΑΔ έχει εξίσωση $3x-2y+5=0$ και η διαγώνιος ΒΔ έχει εξίσωση $y=x+2$.

α. Να αποδείξετε ότι η κορυφή Δ έχει συντεταγμένες $\Delta(-1,1)$.

β. Αν οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα, να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου ΑΓ.

Μονάδες (12+13)=25

7. **ΘΕΜΑ Β** **2.2** **22171**

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x-y=5$ και $\varepsilon_2 : x-y+1=0$.

α. Να βρεθεί το σημείο τομής τους M.

β. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το $M(3,4)$ και είναι κάθετη στην (ε_2).

γ. Να βρεθεί ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε_1).

Μονάδες (10+10+5)=25

2.2 ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ (10)

1. ΘΕΜΑ Δ 2.2 14978

Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(3,3)$.

α. Αν $M(x,y)$ σημείο του επιπέδου, να βρείτε τις αποστάσεις d_1, d_2 του M από τα A και B αντίστοιχα.

β. Να γράψετε τη σχέση που πρέπει να πληρούν οι d_1, d_2, ώστε το σημείο M να ανήκει στη μεσοκάθετο του AB.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του AB.

δ. Να βρείτε σημείο Σ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΣAB να είναι ισόπλευρο.

Μονάδες (6+4+8+7)=25

2. ΘΕΜΑ Δ 2.2 15004

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που διέρχεται από τα σημεία $A(4,2)$ και $B(8,5)$

β. Αν $\varepsilon_1: 3x-4y-4=0$, να δείξετε ότι η οξεία γωνία που σχηματίζει με την ευθεία $\varepsilon_2: 7x-y-1=0$ είναι $\hat{\varphi}=45^o$.

γ. Να βρείτε το σημείο τομής των ε_1 και ε_2.

δ. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ε_3 τέτοιας ώστε η ε_2 να διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_3.

Μονάδες (6+4+8+7)=25

3. ΘΕΜΑ Δ 2.2 15253

Δίνεται η εξίσωση $(\mu^2-1)x+(3\mu^2-2\mu-1)y-5\mu^2+4\mu+1=0$ (1), όπου $\mu\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η (1) παριστάνει ευθεία ε.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του μ οι ευθείες ε:

i. είναι παράλληλες στον xx'.

ii. είναι παράλληλες στον yy'.

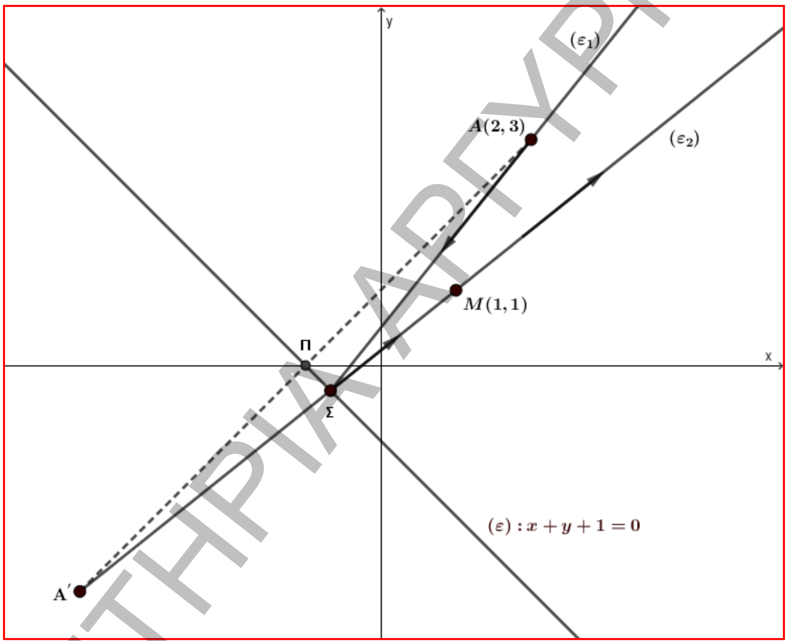
iii. διέρχονται από το $(0,0)$.

γ. Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες ε που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

Μονάδες [5+(4+4+4)+8]=25

4. **ΘΕΜΑ Δ** **2.2** **15439**

Μία φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο $A(2,3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία (ε) με εξίσωση $x+y+1=0$, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$.



α. **i.** Να αποδείξετε ότι η προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία (ε) είναι το σημείο $\Pi(-1,0)$.

ii. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό του σημείου A ως προς την ευθεία (ε), είναι το σημείο $A'(-4,-3)$.

β. **i.** Αν γνωρίζετε ότι η ανακλώμενη ακτίνα είναι η ευθεία (ε_2), η οποία διέρχεται από τα σημεία $A',\ \Sigma,\ M$, τότε να βρείτε την εξίσωσή της.

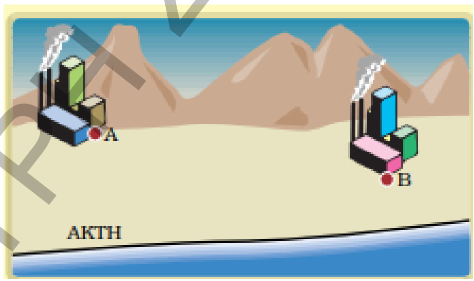
ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου πρόσπτωσης Σ της φωτεινής ακτίνας (ε_1) πάνω στην ευθεία (ε).

γ. Αν $\Sigma\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$, τότε να βρείτε την εξίσωση της προσπίπτουσας ακτίνας (ε_1).

Μονάδες ((7+5)+(4+5)+4]=25

5. **ΘΕΜΑ Δ** **2.2** **15475**

Δύο εργοστάσια Α και Β τα οποία σε ένα σύστημα συντεταγμένων έχουν συντεταγμένες $A(2, 1)$, $B(4, 3)$ βρίσκονται κοντά σε μια ακτή που πρόκειται να κατασκευαστεί μια αποβάθρα και θα εξυπηρετεί τα δύο εργοστάσια.



α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια.

β. Αν η ακτή είναι ευθύγραμμη με εξίσωση $\varepsilon: y = 2x - 7$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της ακτής στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα ώστε να απέχει εξ ίσου από τα δύο εργοστάσια.

γ. Αν το ζητούμενο σημείο του ερωτήματος β) είναι $N(4, 1)$, να βρείτε πόσο απέχει το κάθε εργοστάσιο από το σημείο αυτό.

Μονάδες (8+10+7)=25

6. **ΘΕΜΑ Δ** **2.2** **16003**

Θεωρούμε την οικογένεια των ευθειών

$$\varepsilon_\alpha : (\alpha-4)x - 2\alpha y + \alpha + 4 = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

α. Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν $\alpha = 0$ και όταν $\alpha = 1$ και κατόπιν να προσδιορίσετε το κοινό τους σημείο Μ.

β. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το Μ.

γ. Έστω ότι μια ευθεία της παραπάνω οικογένειας τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Οx, Οy στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

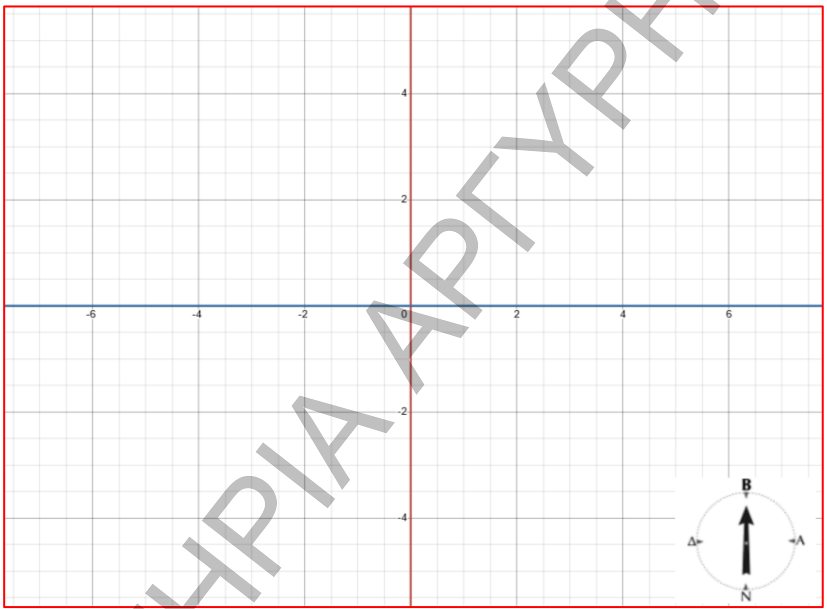
i. Να αποδείξετε ότι $0<\alpha<4$.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $(OA)=2(OB)$

Μονάδες [8+6+(6+5)]=25

7. **ΘΕΜΑ Δ** **2.2** **16477**

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, η εξίσωση ευθείας $\varepsilon_\lambda : \lambda x+(1-\lambda)y+2=0$, όπου λ αριθμός που μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, παριστάνει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ.



Ακόμη δίνεται ότι ένα φορτηγό πλοίο είναι αγκυροβολημένο στο σημείο $O(0,0)$.

α. **i.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ.

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο.

β. Ένα ρυμουλκό πλοίο P βρίσκεται βόρεια του φάρου Φ.

Η φωτεινή ακτίνα που φωτίζει το P έχει εξίσωση $x+y+4=0$.

Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου P όταν είναι γνωστό ότι η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι ίση με 4 μονάδες μήκους.

Μονάδες [(10+5)+10]=25

8. ΘΕΜΑ Δ 2.2 18244

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y=\sqrt{3}x$ και $\varepsilon_2 : y = x$.

α. Να σχεδιάσετε τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

β. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια από τις ευθείες ε_1 και ε_2 με τον άξονα xx'.

γ. Να αιτιολογήσετε γιατί η οξεία γωνία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι 15°.

δ. Να αποδείξετε ότι $συν15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

Μονάδες (6+6+3+10)=25

9. ΘΕΜΑ Δ 2.2 21160

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε το τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία O(0, 0), B(κ, 0) και Γ(0,2κ) όπου κ θετικός πραγματικός αριθμός. Εξωτερικά του τριγώνου ΟΒΓ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΟΒΔΕ και ΟΓΖΗ, τότε:

α. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που ανήκουν τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΒΖ.

β. Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους του τριγώνου ΟΒΓ που διέρχεται από το Ο.

γ. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΓΔ, ΒΖ και το ύψος του β) ερωτήματος διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Μονάδες (10+7+8)=25

10. ΘΕΜΑ Δ 2.2 21652

Δίνονται οι εξισώσεις $\lambda x + y = 2\lambda \ (1)$ και $x + \lambda y = \lambda + 1 \ (2)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν ευθείες ε_λ και η_λ αντίστοιχα.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι ευθείες ε_λ και η_λ τέμνονται.

γ. Για $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$

i. να βρείτε συναρτήσει του λ τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των ε_λ και η_λ

ii. αν $M\left(\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$ να αποδείξετε ότι το M κινείται στην ευθεία $\zeta : x - y = 1$.

Μονάδες [6+6+(7+6)]=25

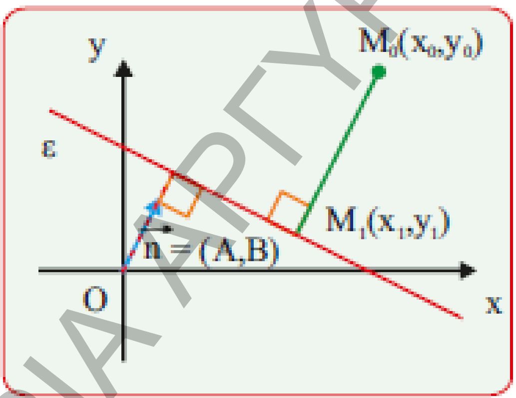
2.3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Απόσταση Σημείου από Ευθεία

Έστω ε μια ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου, με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ και $M_0(x_0,y_0)$ ένα σημείο εκτός αυτής.

Η απόσταση $d(M_0,\varepsilon)$ του σημείου M_0 από την ευθεία ε είναι :

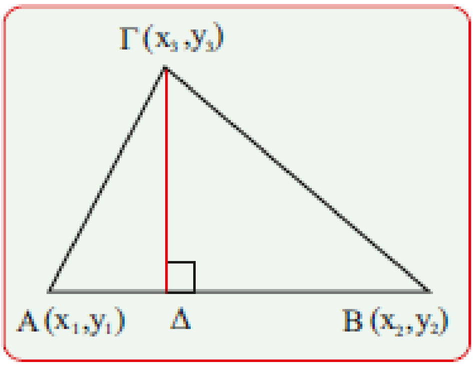
$$d(M_0,\varepsilon)=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$



Υπολογισμός Εμβαδού

Έστω $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ και $\Gamma(x_3,y_3)$ τρία σημεία του καρτεσιανού επιπέδου.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι : $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})|$



2.3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ (16)

1. ΘΕΜΑ Β 2.3 15440

Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$, $B(3,0)$ και $\Gamma(1,1)$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$.

β. **i.** Να εξετάσετε αν τα σημεία A, B και Γ ορίζουν τρίγωνο.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες (9+8+8)=25

2. ΘΕΜΑ Β 2.3 16194

Δίνονται οι ευθείες (ε_1): $8x+y-28=0$, (ε_2): $x-y+1=0$, (ε_3): $3x+4y+5=0$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των (ε_1) και (ε_2).

β. Αν το σημείο τομής είναι το M(3,4) να υπολογίσετε:

i. Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, όπου O η αρχή των αξόνων.

ii. Την απόσταση του σημείου M από την ευθεία (ε_3).

Μονάδες [9+(8+8)]=25

3. ΘΕΜΑ Β 2.3 16425

Δίνονται οι ευθείες: (ε_1): $y=\frac{2}{3}x+1$ και (ε_2): $x=\frac{3}{2}y+9$.

α. Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

β. Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

Μονάδες (12+13)=25

4. ΘΕΜΑ Β 2.3 16759

Δίνονται οι ευθείες (ε_1), (ε_2) και (ε_3) με εξισώσεις $x-2y=-1,\ 2x+y=4$ και $y=-1$ αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

β. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{7}{5},\frac{6}{5}\right)$.

γ. Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε_3).

Μονάδες (8+9+8=25)

5. ΘΕΜΑ Β 2.3 16769

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές $A(1,7)$, $B(-1,5)$ και $\Gamma(3,3)$.

α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

β. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε να υπολογίσετε:

i. Τις συντεταγμένες του Μ.

ii. Την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ.

Μονάδες [9+(8+8)]=25

6. ΘΕΜΑ Β 2.3 16771

Δίνονται τα σημεία Α(2,1), Γ(4,-1) και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}=(3,-1)$.

α. Να βρεθεί το σημείο Β.

β. Αν Β(5,0):

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες (9+8+8)=25

7. ΘΕΜΑ Β 2.3 16774

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(2,5), Β(3,6) και Γ(-1,-2).

α. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ.

β. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το Α.

γ. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΑΒ με τον άξονα x΄x.

Μονάδες (7+9+9)=25

8. ΘΕΜΑ Β 2.3 16810

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία

$$A(1,1),\ B(5,2),\ \Gamma(0,-2) \text{ και } \Delta(8,0).$$

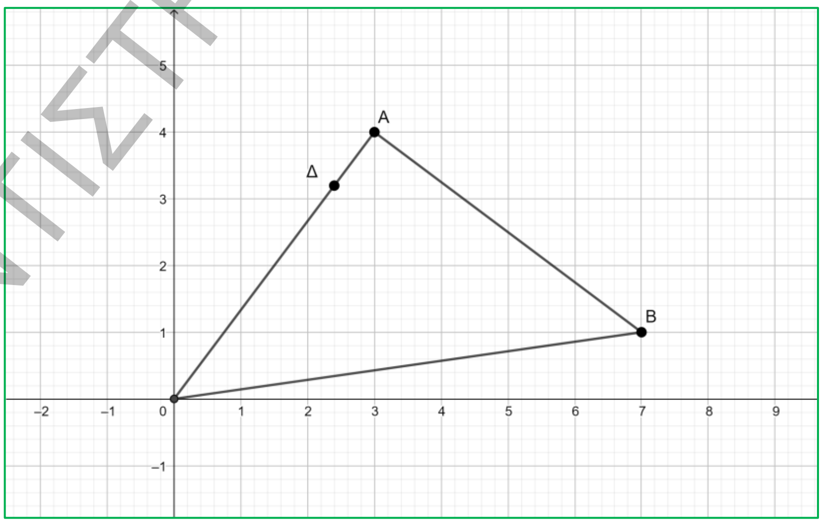
α. Να τοποθετήσετε τα παραπάνω σημεία του επιπέδου σε ένα πρόχειρο σχήμα και να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία αυτά είναι τραπέζιο.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου του ερωτήματος α).

Μονάδες (10+15)=25

9. ΘΕΜΑ Β 2.3 17805

Δίνεται το τρίγωνο AOB με $A(3,4)$, $B(7,1)$, O η αρχή των αξόνων και το σημείο $\Delta\left(\frac{12}{5},\frac{16}{5}\right)$ της πλευράς AO.



α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$.

β. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta}=-\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AO}$.

γ. Δίνεται ότι $(OAB)=\frac{25}{2}$ τετραγωνικές μονάδες. Να δείξετε ότι $(A\Delta B)=\frac{1}{5}(OAB)$.

Μονάδες (7+9+9)=25

10. **ΘΕΜΑ Β** **2.3** **18240**

Δίνεται το σημείο $A(1,2)$ και η ευθεία $(\varepsilon): y=x+3$.

α. Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε).

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην (ε).

γ. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες $(\eta),(\varepsilon)$.

Μονάδες (7+8+10)=25

11. **ΘΕΜΑ Β** **2.3** **18733**

Δίνονται τα σημεία $A(4,3)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(6,0)$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

β. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

γ. Δίνεται το σημείο $M\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$. Να δείξετε ότι $(MA)=(MB)$.

Μονάδες (8+8+9)=25

12. **ΘΕΜΑ Β** **2.3** **18979**

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x+3y=5$ και $\varepsilon_2: 4x+6y=8$.

α. Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1, ε_2 είναι παράλληλες.

β. Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1,1)$ είναι σημείο της ευθείας ε_1.

γ. Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε_2.

Μονάδες (10+5+10)=25

13. **ΘΕΜΑ Β** **2.3** **20864**

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: 2x+y-6=0$ και $\varepsilon_2: 2x+y+2=0$.

α. Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

β. **i.** Να δείξετε ότι το σημείο $A(0,6)$ ανήκει στην ευθεία ε_1.

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2.

Μονάδες [12+(5+8)]=25

14. **ΘΕΜΑ Β** **2.3** **20885**

Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Α(-3, -1) και σχηματίζει με τον άξονα x’x γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.

β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου, που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες x’x και y’y, είναι: Ε = 8.

Μονάδες (12+13)=25

15. ΘΕΜΑ Β 2.3 20926

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x-2y=1$ και τα σημεία $A(0,2)$, $B(1,0)$.

α. Να αποδείξετε ότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία ε ενώ το σημείο A δεν είναι σημείο της ε.

β. Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε.

γ. Να υπολογίσετε την απόσταση του A από το B και να αποδείξετε ότι η προβολή του A στην ευθεία ε είναι το B.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

16. ΘΕΜΑ Β 2.3 21260

Δίνεται η ευθεία (ε): $y-2x=0$ και τα σημεία $B(1,1)$ και $\Gamma(-1,3)$.

α. Να δείξετε ότι το σημείο $A(5,10)$ ανήκει στην ευθεία (ε).

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

γ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$.

Μονάδες $(5+10+10)=25$

2.3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ (22)

1. ΘΕΜΑ Δ 2.3 14984

Θεωρούμε τα σημεία $A(-2,-3)$ και $B(7,9)$. Έστω S το σύνολο των σημείων Μ που είναι κορυφές των τριγώνων ΑΜΒ ώστε $(AMB)=12$ τ.μ.

α. Να αποδείξτε ότι το S αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών $(\varepsilon_1): 4x-3y-9=0$ και $(\varepsilon_2): 4x-3y+7=0$.

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι η μεσοπαράλληλη των (ε_1) και (ε_2).

γ. Θεωρούμε ένα σημείο M_1 στην (ε_1) και ένα σημείο M_2 στην (ε_2) ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο AM_1BM_2. Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα ΑΧΒΥ υπάρχουν, αν το Χ πρέπει να είναι σημείο της (ε_1) και το Υ σημείο της (ε_2), που έχουν το ίδιο εμβαδό με το AM_1BM_2; Εξηγήστε.

Μονάδες (9+9+7)=25

2. ΘΕΜΑ Δ 2.3 15194

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1)$, $B(4,4)$ και $\Gamma(3,1)$.

α. Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο.

β. Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$.

γ. Να βρείτε σημείο Κ της ευθείας (ε) του β) ερωτήματος τέτοιο ώστε $(KA)=(KB)$. Τι ιδιότητα έχει το σημείο Κ;

Μονάδες (7+9+9)=25

3. **ΘΕΜΑ Δ** **2.3** **15273**

Θεωρούμε τα σταθερά σημεία $A(3,4), B(2,5)$ και $\Gamma(-2,2)$ και το μεταβλητό σημείο $M(4\alpha-1, 3\alpha+1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι τα A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.

γ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην $B\Gamma$.

δ. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου Μ ισχύει

$$(MB\Gamma) = (AB\Gamma).$$

Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά;

Μονάδες (5+5+7+8)=25

4. **ΘΕΜΑ Δ** **2.3** **15380**

Δίνονται τα σημεία $A(1, 3)$, $B(-2, 2)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 3x + y + \alpha = 0$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε για ποια τιμή του α, η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β είναι ίση με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.

β. Για α=4

i. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα y′y.

ii. Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες [8+(8+9)]=25

5. **ΘΕΜΑ Δ** **2.3** **15433**

Δύο οικισμοί Α και Β βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία $A(-1,-2)$ και $B(3,1)$. Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση $\delta: x + y - 1 = 0$.

α. Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου δ:

i. Ο οικισμός Α έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο.

ii. Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς.

β. Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία Α, Β και Γ είναι ίσο με 8.

Μονάδες $[(8+7)+10]=25$

6. **ΘΕΜΑ Δ** **2.3** **15681**

Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$, $B(\frac{\alpha}{2},\beta)$ και $M(\frac{\alpha}{2},0)$, όπου α,β σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

α. Να μεταφέρετε τα παραπάνω σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές και το σημείο M είναι το μέσο της βάσης του OA.

β. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των ευθειών OB και AB είναι $OB: 2\beta x-\alpha y=0$ και $AB: 2\beta x+\alpha y-2\alpha\beta=0$ αντίστοιχα.

γ. Αν d_1 είναι η απόσταση του σημείου M από την ευθεία OB και d_2 η απόσταση του σημείου M από την ευθεία AB, να αποδείξετε ότι $d_1=d_2$.

δ. Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί;

Μονάδες $(6+8+8+3)=25$

7. **ΘΕΜΑ Δ** **2.3** **15692**

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+y=x+2xy+6$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $(x-y)^2-(x-y)-6=0$.

ii. Η εξίσωση παριστάνει ένα ζεύγος παράλληλων ευθειών, τις οποίες να βρείτε.

Έστω $\varepsilon_1 : x - y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x - y + 2 = 0$ οι δυο παράλληλες ευθείες.

β. Να αποδείξετε ότι όλα τα σημεία $M\left(\alpha,\ \alpha - \frac{1}{2}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ισαπέχουν από τις δυο ευθείες.

γ. Να βρείτε την μεσοπαράλληλη των δυο ευθειών.

Μονάδες [(4+4)+10+7]=25

8. **ΘΕΜΑ Δ** **2.3** **15987**

Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,3)$

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας AB είναι η (ε): $y = 2x - 1$.

β. Να αιτιολογήσετε αν το σημείο $\Gamma\left(2^{100},\ 5\right)$ ανήκει ή όχι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία (ε) και την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

γ. Να αιτιολογήσετε αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ.

Μονάδες (8+8+9)=25

9. **ΘΕΜΑ Δ** **2.3** **16057**

Δίνονται τα σημεία $A(2,\ 0)$, $B(3,\ 4)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. **i.** Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο Α και έχουν κλίση λ.

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο Α, έχει κλίση λ και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο Β, έχει εξίσωση $(\varepsilon): 15x - 8y - 30 = 0$.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει και άλλη ευθεία (ζ), εκτός από την (ε), η οποία διέρχεται από το σημείο Α και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο Β.

γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ).

Μονάδες [(5+8)+5+7]=25

10. **ΘΕΜΑ Δ** **2.3** **17694**

Στο χάρτη μίας πεδινής περιοχής, που είναι εφοδιασμένος με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, δύο κωμοπόλεις Α και Β έχουν συντεταγμένες Α(3,6) και Β(7,-2).

α. Ανάμεσα στις δύο κωμοπόλεις, θα κατασκευαστεί ευθεία σιδηροδρομική γραμμή, κάθε σημείο της οποίας θα ισαπέχει από αυτές. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή.

β. Πάνω στην σιδηροδρομική γραμμή θα κατασκευαστεί σταθμός Σ, ώστε το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τα σημεία Α, Β και Σ να ισούται με 20 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σταθμού Σ στο χάρτη.

Μονάδες (12+13)=25

11. **ΘΕΜΑ Δ** **2.3** **17695**

Υποθέτουμε, ότι σε ένα επίπεδο που έχουμε εφοδιάσει με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, κινούνται δύο σημεία Α και Β. Κάθε χρονική στιγμή t με $t \geq 0$ η θέση του πρώτου σημείου είναι $A(t-1,\ 2t-1)$ και του δευτέρου $B(3t-1,\ -4t-1)$.

α. Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο σημεία.

β. Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο σημεία ταυτίζονται;

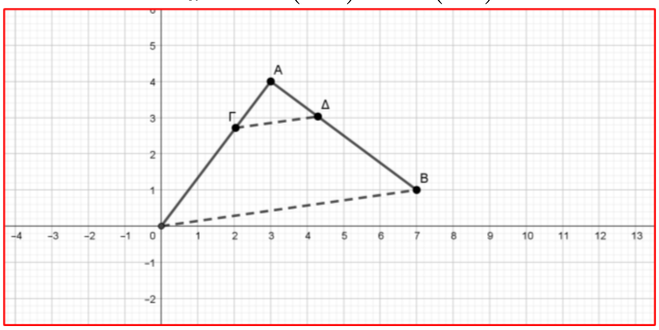
γ. Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σημείων την χρονική στιγμή t=2.

δ. Να βρεθεί η χρονική στιγμή t κατά την οποία η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε: $4x+3y+7=0$ ισούται με 6.

Μονάδες (8+7+5+5)=25

12. **ΘΕΜΑ Δ** **2.3** **18732**

Σε σύστημα αξόνων δίνονται τα σημεία $A(3,4)$ και $B(7,1)$.



α. Αν $\Gamma\left(2,\frac{8}{3}\right)$ και $\Delta\left(\frac{13}{3},3\right)$ να δείξετε ότι:

i. $\overrightarrow{A\Gamma}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

ii. $\Gamma\Delta//OB$.

iii. Να δείξετε ότι $(A\Gamma\Delta)=\left(\frac{1}{3}\right)^2(AOB)$.

β. Γενικεύοντας το παράδειγμα του α) ερωτήματος, αν για τα σημεία Γ και Δ ισχύουν $\overrightarrow{A\Gamma}=\frac{1}{\nu}\overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{\nu}\overrightarrow{AB}$, να δείξετε ότι $(A\Gamma\Delta)=\left(\frac{1}{\nu}\right)^2(ABO)$.

Μονάδες [(6+5+5)+9]=25

13. **ΘΕΜΑ Δ** **2.3** **20655**

Δίνονται τα σημεία $A(2,1), B(3,-1)$ και $\Gamma(-2,0)$.

α. **i.** Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά.

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με $\frac{9}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $\Delta(x,y)$ για τα οποία ισχύει $(\Delta A\Gamma)=(AB\Gamma)$

γ. Αν ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Δ του ερωτήματος (β) αποτελείται από τις ευθείες $\varepsilon_1: x-4y-7=0$ και $\varepsilon_2: x-4y+11=0$, τότε:

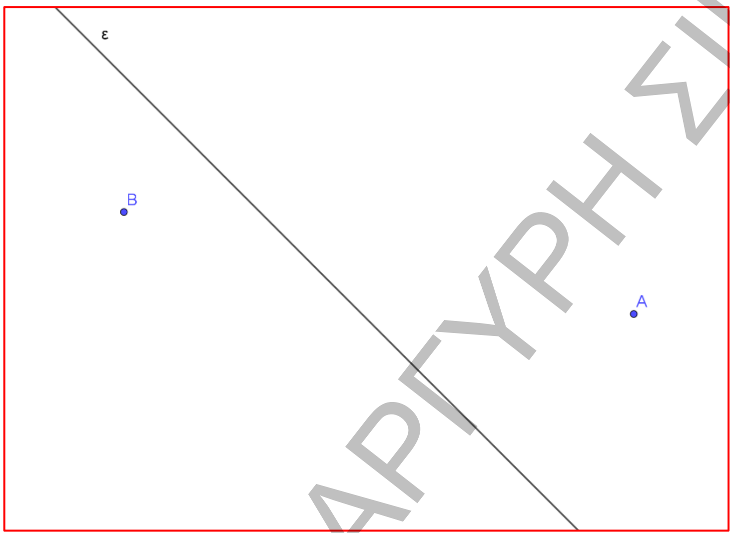
i. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΓ, ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

ii. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός « οι ευθείες $x-4y-7=0$ και $x-4y+11=0$ έχουν ως μεσοπαράλληλο την ευθεία ΑΓ».

Μονάδες [(7+3)+7+(3+5)]=25

14. **ΘΕΜΑ Δ** **2.3** **20724**

Η ευθεία ε με εξίσωση $x+y-1=0$ του παρακάτω σχήματος, αναπαριστά τη γραμμή ενός σιδηροδρομικού δικτύου που εξυπηρετεί τους κατοίκους δύο πόλεων $A(8,1)$, $B(-7,4)$ (για την ακρίβεια A, B είναι τα κεντρικά σημεία των πόλεων από τα οποία μετράμε αποστάσεις).



Για το λόγο αυτό θα κατασκευαστεί κατά μήκος της γραμμής (ε), ένας σταθμός σε ένα σημείο Σ και μία πεζογέφυρα σε ένα σημείο Π. Να βρείτε :

α. ποια πόλη από τις A, B είναι πλησιέστερα στη γραμμή του τραίνου.

β. τις συντεταγμένες του Π, αν είναι γνωστό ότι θα κατασκευαστεί στο πλησιέστερο σημείο της γραμμής στην πόλη Β.

γ. τις συντεταγμένες του Σ στις παρακάτω περιπτώσεις

i. ο σταθμός Σ να ισαπέχει από τις πόλεις A, B.

ii. το οδικό δίκτυο που θα συνδέει το σταθμό Σ με τις πόλεις A, B να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος.

Μονάδες $[6+7+(6+6)]=25$

15. **ΘΕΜΑ Δ** **2.3** **20728**

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ και $\varepsilon_2 : y = x$.

α. Να σχεδιάσετε τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

β. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια με τον άξονα xx'.

γ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB, όπου $O(0,0), A(3,\sqrt{3}), B(3,3)$.

δ. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Μονάδες (6+6+6+7)=25

(Θυμίζουμε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται από το ημιγινόμενο δύο πλευρών του επί το ημίτονο της περιεχόμενης γωνίας τους).

16. **ΘΕΜΑ Δ** **2.3** **20861**

Δίνεται το σημείο $M(-2,2)$.

α. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) που διέρχονται από το σημείο M.

β. **i.** Να βρείτε ποιες από τις παραπάνω εξισώσεις ευθειών σχηματίζουν τρίγωνο με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1), η οποία διέρχεται από το σημείο M και σχηματίζει με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy τρίγωνο, με εμβαδόν $E = 8$.

γ. Αν $(\varepsilon_1): y = x + 4$, να βρείτε το μήκος του ύψους του ορθογωνίου τριγώνου, που σχηματίζει η (ε_1) με τους άξονες, το οποίο φέρεται από την κορυφή O.

Μονάδες [6+(4+10)+5]=25

17. **ΘΕΜΑ Δ** **2.3** **20939**

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy είναι τοποθετημένα 7 χωριά ως σημεία του επιπέδου και μια πηγή νερού σε ένα σημείο Π. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν 6 αγωγοί νερού που συνδέουν την πηγή με έξι από τα παραπάνω χωριά. Οι αγωγοί αυτοί ανήκουν στις γραμμές με εξισώσεις της μορφής: $(\lambda+1)x+(\lambda-1)y+2=0$, με $\lambda\in\{0,1,2,3,4,5\}$.

α. Να αποδείξετε ότι και οι 6 γραμμές είναι ευθείες.

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Π.

γ. Το έβδομο χωριό βρίσκεται στο σημείο $O(0,0)$. Να αποδείξετε ότι κανένας από τους παραπάνω αγωγούς νερού δεν διέρχεται από το χωριό αυτό.

δ. Προκειμένου να έχει πρόσβαση στο νερό το χωριό O, υπάρχουν δύο επιλογές:

1η επιλογή: Να συνδέσουμε απευθείας το χωριό O με την πηγή

2η επιλογή: Να συνδέσουμε το χωριό O με έναν από τους παραπάνω αγωγούς μέσω της συντομότερης διαδρομής.

Με δεδομένο ότι το κόστος κατασκευής ανά μονάδα μήκους για κάθε μία από τις παραπάνω επιλογές είναι το ίδιο,

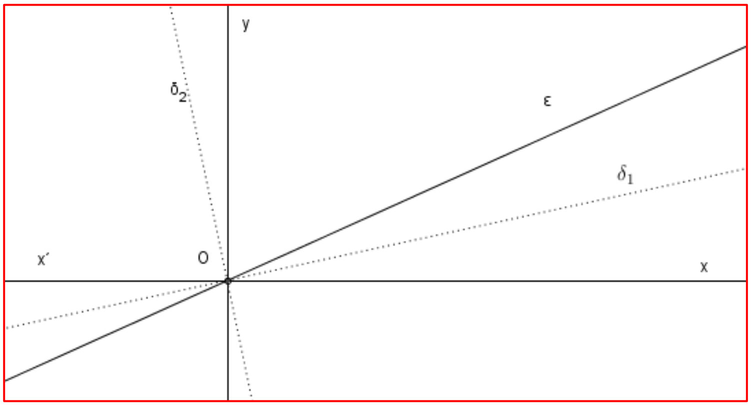
i. να βρείτε την τιμή του λ για την οποία οι δύο επιλογές οδηγούν στο ίδιο κόστος κατασκευής.

ii. Πως εξηγείται γεωμετρικά το συμπέρασμα;

Μονάδες [4+6+4+(8+3)]=25

18. **ΘΕΜΑ Δ** **2.3** **22067**

Θεωρούμε μία ευθεία $\varepsilon:\ y=\lambda x$ με θετική κλίση λ.



α. Αν δ_1 είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x'x$ άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου δ_1 είναι: $y=\lambda_1 x$ με $\lambda_1=\dfrac{\lambda}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}$.

β. Αν δ_2 είναι η διχοτόμος της αμβλείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x'x$ άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου δ_2 είναι:

$$y=\lambda_2 x \quad \text{με} \quad \lambda_2=\frac{\lambda}{1-\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

γ. Αν $\lambda=1$, να εφαρμόσετε τους τύπους του α) ερωτήματος για να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon\varphi 22,5^{\circ}=\sqrt{2}-1.$$

Μονάδες (12+7+6)=25

19. ΘΕΜΑ Δ 2.3 22073

Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο Λ(2,6) και η θέση ενός πλοίου με το σημείο Π(λ-1, 2+λ), $\lambda\in R$.

α. **i.** Αν το πλοίο κινείται ευθύγραμμα, να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του.

ii. Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι.

β. Αν τελικά το πλοίο δεν περάσει από το λιμάνι, να βρείτε:

i. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι;

ii. Το σημείο του καρτεσιανού επιπέδου που βρίσκεται το πλοίο, όταν απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι.

Μονάδες [(7+5)+(6+7)]=25

20. ΘΕΜΑ Δ 2.3 22262

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $A(-2,1)$, $B(1,5)$ και $\Gamma(5,-1)$.

α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

γ. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου από την κορυφή Α. Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας ΒΓ, από το οποίο, το Α απέχει την ελάχιστη απόσταση.

δ. Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $(MAB)=\frac{1}{2}(AB\Gamma)$.

Μονάδες (5+5+8+7)=25

21. **ΘΕΜΑ Δ** **2.3** **22265**

Στο καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα σημεία $A(1,-1)$, $B(2,2)$ και $\Gamma(\mu-1, 3\mu-2)$, $\mu\in R$.

α. Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το R, το σημείο Γ κινείται στην ευθεία ε: $y = 3x + 1$.

β. Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το R, τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου.

γ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι σταθερό.

δ. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Β και από τις οποίες το σημείο Α, απέχει απόσταση ίση με 1.

Μονάδες (6+6+5+8)=25

22. **ΘΕΜΑ Δ** **2.3** **22266**

Δίνεται η εξίσωση

$(2\lambda+1)x-(\lambda-2)y+\lambda-7=0$ (Ε) με $\lambda\in\mathbb{R}$ και η ευθεία (ζ) με εξίσωση: $6x-8y+3=0$.

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση (Ε) παριστάνει ευθεία. (Μονάδες 6)

β. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (Ε), για τα διάφορα $\lambda\in\mathbb{R}$, διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

γ. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (Ε) να είναι παράλληλη στη ευθεία (ζ). Ποια είναι η εξίσωση της (ε);

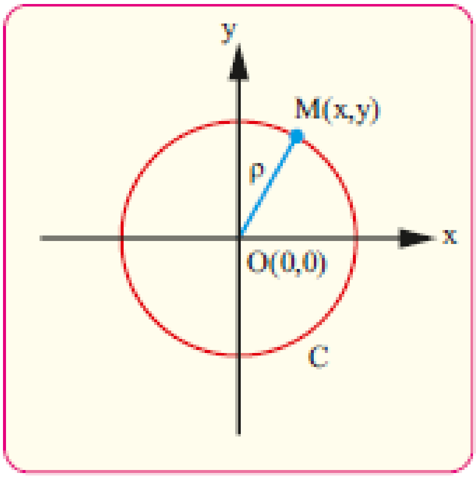
δ. Να βρείτε την απόσταση του σημείου Μ(1,3) από την ευθεία (ζ).

Μονάδες (6+7+7+5)=25

3ο ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

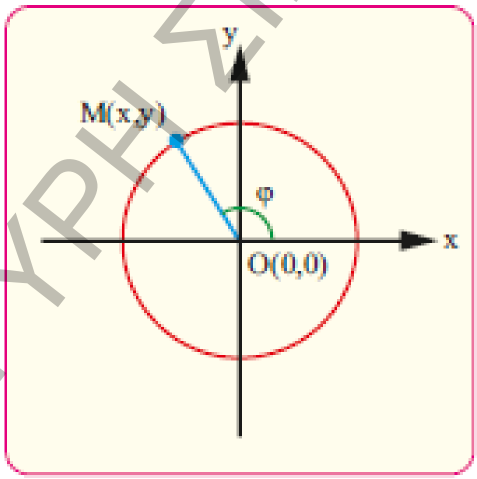
3.1 Ο ΚΥΚΛΟΣ

Εξίσωση Κύκλου



$$x^2+y^2=\rho^2$$

Παραμετρικές Εξισώσεις Κύκλου

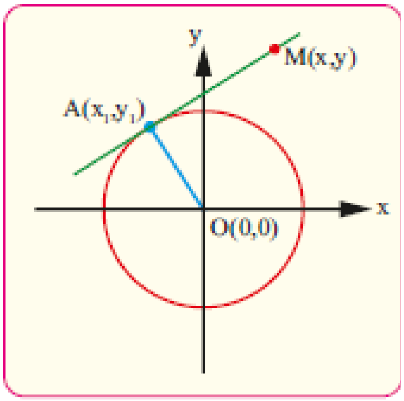


$$x=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi \quad \kappa\alpha\iota \quad y=\rho\cdot\eta\mu\varphi, \quad \varphi\in[0,2\pi)$$

Εφαπτομένη Κύκλου

Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση :

$$\varepsilon:\ xx_1+yy_1=\rho^2$$



Η Εξίσωση $\mathbf{x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0}$ **(1)**

- Αν $A^2+B^2-4\Gamma>0$, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με

$$\text{κέντρο } K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right) \text{ και ακτίνα } \rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}.$$

- Αν

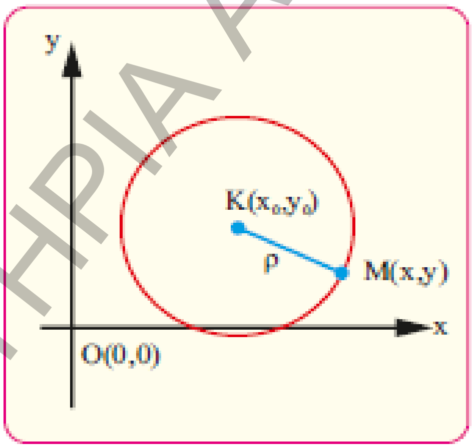
$$A^2+B^2-4\Gamma=0,$$

η εξίσωση (1) παριστάνει ένα μόνο σημείο, το $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$.

- Αν

$$A^2+B^2-4\Gamma<0,$$

η εξίσωση (3) είναι αδύνατη, δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία $M(x,y)$ των οποίων οι συντεταγμένες να την επαληθεύουν.



3.1 Ο ΚΥΚΛΟΣ (19)

1. ΘΕΜΑ Β 3.1 15028

Έστω κύκλος C με κέντρο $K(1,2)$ και ακτίνα $\rho=2$ και ευθεία (ε) με εξίσωση $3x+4y-1=0$.

α. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C.

β. Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου $K(1,2)$ από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.

γ. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C.

Μονάδες (8+9+8)=25

2. ΘΕΜΑ Β 3.1 15680

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2+y^2-2x-4y+1=0$ με κέντρο $K(1,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x+4y+1=0$

α. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho=2$.

β. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε είναι $\frac{12}{5}$.

γ. Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία.

Μονάδες (10+10+5)=25

3. ΘΕΜΑ Β 3.1 15994

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4x+3=0$ (1).

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β. Να σχεδιάσετε τον κύκλο (C) και να βρείτε, χρησιμοποιώντας το σχήμα ή με οποιανδήποτε άλλον τρόπο, τα κοινά του σημεία με τους άξονες.

Μονάδες (13+12)=25

4. **ΘΕΜΑ Β** **3.1** **16773**

α. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το Ο(0,0) και διέρχεται από το σημείο Α(1,2).

β. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=5$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενής του στο σημείο Α.

ii. Να βρεθεί το σημείο Β, το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του Α σε αυτόν τον κύκλο.

Μονάδες (8+9+8)=25

5. **ΘΕΜΑ Β** **3.1** **16808**

Τα σημεία Α(-8, 1), Β(4, 5) και Γ(-4, 9) είναι σημεία ενός κύκλου C.

α. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 15)

β. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C.

Μονάδες (15+10)=25

6. **ΘΕΜΑ Β** **3.1** **17317**

Δίνεται ο κύκλος $C:(x-1)^2+(y-2)^2=4$ και η ευθεία $\varepsilon:3x-4y=8$.

α. Να βρείτε το κέντρο K του κύκλου C και την ακτίνα του.

β. Αν $K(1,\,2)$, να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου C από την ευθεία ε είναι $d(K,\varepsilon)=\frac{13}{5}$.

γ. Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Μονάδες (5+13+7)=25

7. **ΘΕΜΑ Β** **3.1** **18238**

Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$ και $B(-3,5)$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του τμήματος AB.

β. Να αποδείξετε ότι $(\text{KA}) = \sqrt{5}$.

γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB.

Μονάδες $(7+8+10)=25$

8. **ΘΕΜΑ Β** **3.1** **18239**

Δίνεται το σημείο $\text{K}(-3,1)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 4x - 3y + 5 = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου K από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.

β. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο το σημείο K και εφάπτεται στην ευθεία (ε).

γ. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τον κύκλο C και την ευθεία (ε).

Μονάδες $(6+9+10)=25$

9. **ΘΕΜΑ Β** **3.1** **18241**

Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

α. τον κύκλο C.

β. τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον yy' και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

γ. τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον xx' και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

Μονάδες $(9+8+8)=25$

10. ΘΕΜΑ Β 3.1 18700

Δίνεται κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 5.

α. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C και να τον σχεδιάσετε στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

β. Δίνεται το σημείο $A(3,-4)$.

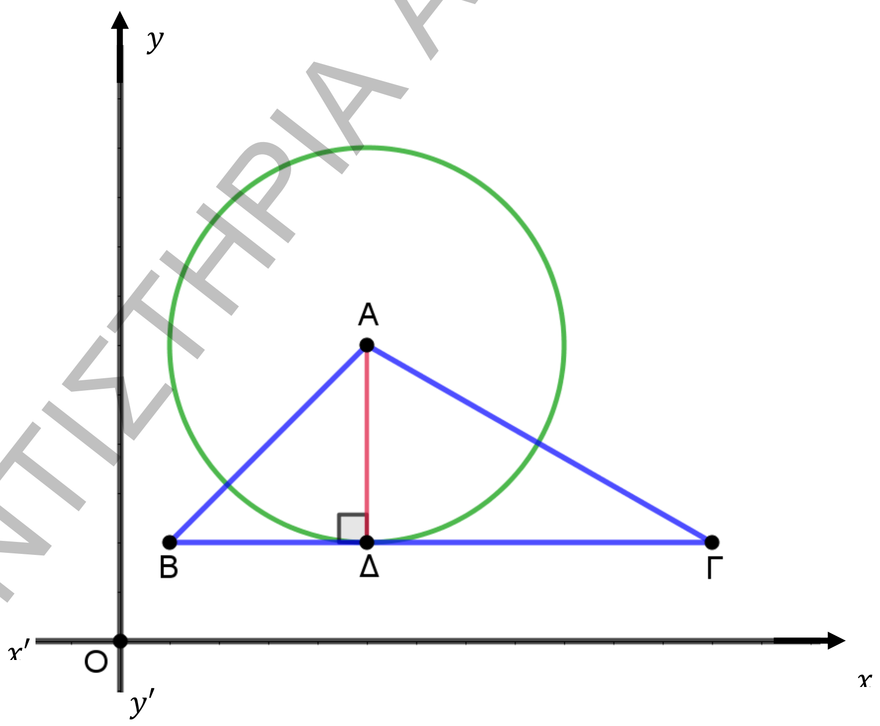
i. Να αποδείξετε ότι το σημείο A ανήκει στον κύκλο C.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο A.

Μονάδες $(10+5+10)=25$

11. ΘΕΜΑ Β 3.1 18749

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ώστε $A(5,6)$, $B(1,2)$, $Γ(12,2)$ και το ύψος του $ΑΔ$, όπου $Δ$ σημείο της $ΒΓ$, όπως στο παρακάτω σχήμα.



α. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ΒΓ και ΑΔ.

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο Α, ο οποίος εφάπτεται της ευθείας ΒΓ στο σημείο Δ.

Μονάδες (10+5+10)=25

12. ΘΕΜΑ Β 3.1 18968

Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2+y^2-6x-8y=0$:(1).

α. Να δείξετε ότι ο κύκλος C έχει κέντρο $K(3,4)$ και ακτίνα $\rho=5$.

β. Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου Κ του κύκλου από την ευθεία $\varepsilon: 3x+4y=0$ ισούται με 5 μονάδες μήκους.

γ. Να δικαιολογήσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός: «Ο κύκλος C και η ευθεία ε εφάπτονται».

Μονάδες (10+8+7)=25

13. ΘΕΜΑ Β 3.1 19039

Δίνεται η εξίσωση $(x-1)(x+3)+(y+1)(y-3)=-4$ (1)

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1, 1)$, και ακτίνα $R=2$

β. **i.** Να βρείτε τα σημεία Α και Β του κύκλου (K, R) τα οποία έχουν τετμημένη ίση με -1.

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β είναι αντιδιαμετρικά.

Μονάδες (9+8+8)=25

14. ΘΕΜΑ Β 3.1 20890

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(3,-3), Β(2,-8) και Γ(7,-3).

Να βρείτε:

α. την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.

β. την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το Α και εφάπτεται στην πλευρά ΒΓ.

Μονάδες (10+15)=25

15. ΘΕΜΑ Β 3.1 21962

Δίνονται τα σημεία Α(0,3), Β(3,4) και Γ(1,0).

α. Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή.

β. Να βρείτε το μέσο Κ της υποτείνουσας ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ.

Μονάδες (13+5+7)=25

16. ΘΕΜΑ Β 3.1 22056

Έστω Ω το σύνολο όλων των σημείων (x,y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $x^2+y^2\le 9$.

α. Να σχεδιάσετε το σύνολο Ω σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy.

β. Υπάρχει σημείο Α στο σύνολο Ω τέτοιο ώστε $|\overrightarrow{OA}|=4$, όπου Ο η αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (13+12)=25

17. ΘΕΜΑ Β 3.1 22147

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+y^2-x-y-\frac{7}{2}=0 \qquad (1)$$

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $R=2$.

β. Να αποδείξετε ότι το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ είναι σημείο του κύκλου (K,R).

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (K,R) στο Α.

Μονάδες (9+8+8)=25

18. **ΘΕΜΑ Β** **3.1** **22172**

Θεωρούμε την ευθεία ε: $3x - 4y = 0$ και το σημείο Α(-2,1).

α. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία είναι 2.

β. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (η) κάθετης στην (ε) που διέρχεται από το σημείο Α.

γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Α και εφάπτεται στην ευθεία (ε).

Μονάδες (8+10+7)=25

19. **ΘΕΜΑ Β** **3.1** **22279**

Δίνεται η εξίσωση $\left(y-1\right)^2 = (3+x)(1-x)$ (1)

Να αποδείξετε ότι:

α. Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-1,1\right)$ και ακτίνα $R=2$.

β. Η αρχή Ο(0,0) των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (K,R).

γ. Η ευθεία (ε): $x+y=2$ είναι τέμνουσα του κύκλου (K,R).

Μονάδες (9+7+9)=25

3.1 Ο ΚΥΚΛΟΣ (48)

1. ΘΕΜΑ Δ 3.1 14954

Θεωρούμε τις εξισώσεις

$$(\varepsilon_1): \ \mu x - y - \mu = 0 \ \text{ και } \ (\varepsilon_2): (\mu+1)x + (\mu-1)y - \mu + 1 = 0, \ \ \mu \in \mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι οι (ε_1) και (ε_2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε τιμή της παραμέτρου μ.

β. Να αποδείξτε ότι η οξεία γωνία των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι 45° για κάθε τιμή της παραμέτρου μ.

γ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.

Μονάδες (6+10+9)=25

2. ΘΕΜΑ Δ 3.1 14984

Θεωρούμε τα σημεία $A(-2,-3)$ και $B(7,9)$. Έστω S το σύνολο των σημείων M που είναι κορυφές των τριγώνων AMB ώστε $(AMB)=12$ τ.μ.

α. Να αποδείξτε ότι το S αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών

$$(\varepsilon_1): 4x-3y-9=0 \ \text{ και } \ (\varepsilon_2): 4x-3y+7=0.$$

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι η μεσοπαράλληλη των (ε_1) και (ε_2).

γ. Θεωρούμε ένα σημείο M_1 στην (ε_1) και ένα σημείο M_2 στην (ε_2) ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο AM_1BM_2. Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα AXBY υπάρχουν, αν το X πρέπει να είναι σημείο της (ε_1) και το Y σημείο της (ε_2), που έχουν το ίδιο εμβαδό με το AM_1BM_2; Εξηγήστε.

Μονάδες (9+9+7)=25

3. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **15030**

Δίνεται ο κύκλος $C:(x-2)^2+(y+3)^2=5$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x+y+5=0$.

α. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C.

β. Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία.

γ. Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες $(\eta_1),(\eta_2)$ που είναι παράλληλες στην ευθεία (ε) και εφάπτονται του κύκλου C και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

δ. Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών $(\eta_1),(\eta_2)$.

Μονάδες $(6+6+7+6)=25$

4. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **15042**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο του επιπέδου Μ, τέτοιο ώστε:

$$\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{0}$$

α. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Γ, Μ είναι συνευθειακά.

β. Να αποδείξετε ότι το Μ είναι το μέσο του $B\Gamma$.

γ. Έστω πραγματικοί αριθμοί κ,λ τέτοιοι ώστε $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\kappa$ και $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\lambda$.

Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι για τα μη παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{AB}$ ισχύει ότι $\kappa\overrightarrow{A\Gamma}=\lambda\overrightarrow{AB}$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\kappa=\lambda=0$.

ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Να προσδιορίσετε την ορθή γωνία και τις πλευρές που είναι ίσες.

Μονάδες $[8+2+(7+8)]=25$

5. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **15080**

Δίνονται οι εξισώσεις

$$C_1:\ x^2+y^2-2x-8=0 \qquad (1) \quad \text{και} \quad C_2:\ x^2+y^2-6x+8=0 \qquad (2).$$

α. Να δείξετε ότι οι (1) και (2) είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα $K(1,0)$, $\Lambda(3,0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 1$ αντίστοιχα.

β. **i.** Να βρείτε το μήκος της διακέντρου $(K\Lambda)$.

ii. Να δείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1.

γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου C_1 που εφάπτονται στον κύκλο C_2.

Μονάδες [6+(5+5)+9]=25

6. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **15081**

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1: x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \quad \text{και} \quad C_2: x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0.$$

α. Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν κέντρα $K\left(-\sqrt{2},0\right)$, $\Lambda\left(3\sqrt{2},0\right)$ και ακτίνες $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 3$ αντίστοιχα.

β. **i.** Να δείξετε ότι από την αρχή των αξόνων διέρχονται δύο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2.

ii. Να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο σχήμα όπου να φαίνονται οι κύκλοι και οι δύο αυτές εφαπτόμενες.

Μονάδες [8+(10+7)]=25

7. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **15082**

Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις:

$$C_1: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 8 \text{ και } C_2: (x-7)^2 + (y+2)^2 = 18.$$

α. Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $(K\Lambda)$, όπου K, Λ τα κέντρα των κύκλων C_1, C_2 αντίστοιχα. Ακολούθως να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

β. **i.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $K\Lambda$.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $ΚΛ$ με τον κύκλο C_1 και το σημείο επαφής των δύο κύκλων.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των κύκλων.

Μονάδες [5+(5+7)+8]=25

8. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **15177**

Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$ και $B(0,-1)$ και ο κύκλος c_1 με εξίσωση

$$c_1 : \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=2.$$

α. Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων $N(x,y)$ του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση $\overrightarrow{NA}^2-\overrightarrow{NB}^2=4$, ανήκουν στην ευθεία $(ε)$ με εξίσωση $y=-x-2$.

β. Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων P του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση $2x^2+2y^2+10x+14y+21=0$, ανήκουν σε κύκλο c_2 κέντρου $Λ\left(-\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνας $R=2\sqrt{2}$.

γ. **i.** Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι c_1 και c_2 εφάπτονται εξωτερικά και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση των σημείων τους.

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(ε)$ είναι η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων c_1 και c_2 .

Μονάδες [7+6+(6+6)]=25

9. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **15189**

Δίνονται τα σημεία $A(-2,0)$ και $B(2,-2)$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB.

β. Να δείξετε ότι ο κύκλος C με διάμετρο AB έχει εξίσωση $C: x^2+(y+1)^2=5$.

γ. Να δείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία $(AMB)=5$ ανήκουν στις ευθείες $ε_1: x+2y-3=0$ και $ε_2: x+2y+7=0$.

δ. Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 εφάπτονται του κύκλου C.

Μονάδες (6+6+7+6)=25

10. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **15272**

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2x+4y=-1$.

α. Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β. Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(3,\ 2)$ βρίσκεται έξω από τον κύκλο.

γ. Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το Μ.

Μονάδες (6+7+12)=25

11. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **15432**

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4\kappa x-2\kappa y+4=0$ (1) με $\kappa\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο.

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κάθε κύκλου.

γ. Να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων.

δ. Για $\kappa=1$ να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του αντίστοιχου κύκλου της εξίσωσης (1) στο σημείο $\Gamma(2,\ 2)$.

Μονάδες (7+3+7+8)=25

12. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **15628**

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+(4-2k)x-2(1+k)y+5-2k=0$ (1) όπου $k\in(0,+\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $M(k-2,\ k+1)$ και ακτίνα $k\sqrt{2}$ για κάθε $k>0$.

β. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει σε μια σταθερή ευθεία για κάθε $k>0$.

γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=-x-1$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου για κάθε $k>0$.

Μονάδες (10+7+8)=25

13. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **15646**

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1: (x-1)^2+(y-1)^2=9 \ \text{ και } \ C_2: (x-4)^2+(y-4)^2=9.$$

α. Να δείξετε ότι τα κέντρα K, Λ των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα βρίσκονται στην διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$ του συστήματος συντεταγμένων.

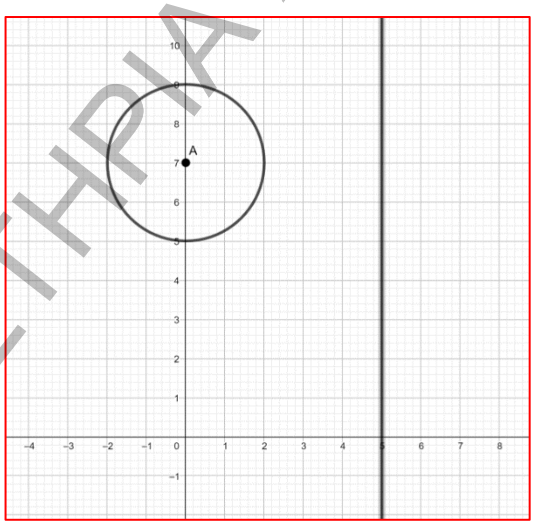
β. Να βρείτε τα σημεία τομής B, Γ των κύκλων C_1 και C_2.

γ. Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $y=x$ ώστε το τρίγωνο που σχηματίζεται με τα B, Γ να έχει εμβαδόν $\frac{21}{2}$ τ.μ.

Μονάδες (8+7+10)=25

14. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **15791**

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σχεδιάσει κύκλο C_1 κέντρου A και την ευθεία $(\varepsilon): x=5$.



α. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1.

β. Έστω ένα σημείο του επιπέδου $B(x_1, y_1)$

i. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $B(x_1,y_1)$ και ακτίνα 2.

ii. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου AB σε συνάρτηση με τις συντεταγμένες του σημείου B

γ. Να βρείτε όλους τους κύκλους του ερωτήματος β)i. με ακτίνα 2, που εφάπτονται εξωτερικά στον C_1 και στην ευθεία (ε).

Μονάδες ([3+(6+6)+10]=25

15. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **15826**

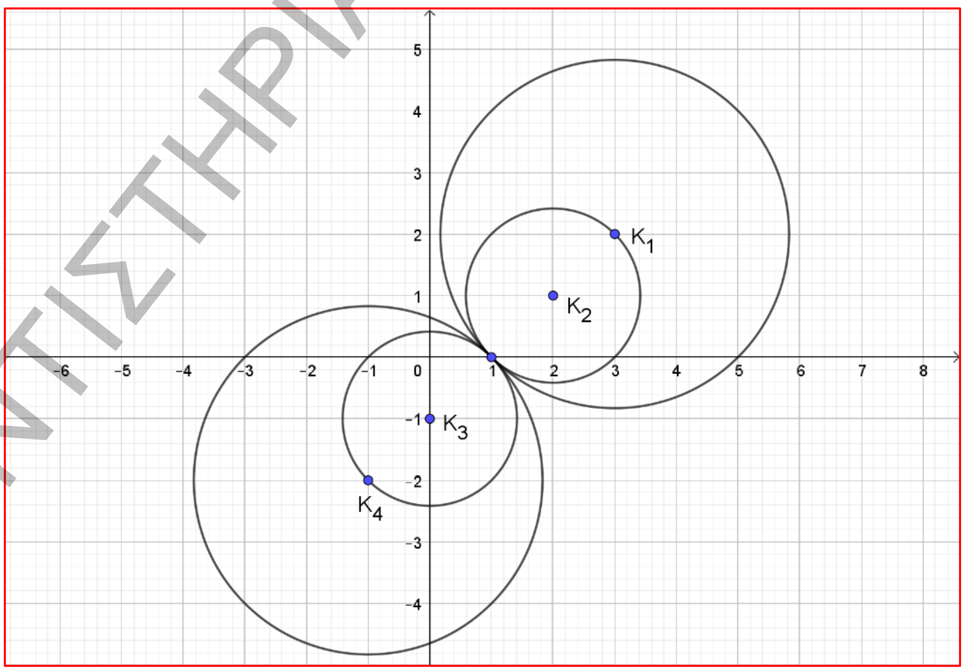
Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+y^2-2(\lambda+1)x-2\lambda y+2\lambda+1=0 \ (1), \text{ όπου } \lambda\in\mathbb{R}.$$

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να γράψετε ως συνάρτηση του λ τις συντεταγμένες του κέντρου K και την ακτίνα ρ.

β. Τι παριστάνει η εξίσωση (1) για $\lambda=0$;

γ. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται 4 κύκλοι με τα αντίστοιχα κέντρα τους K_1, K_2, K_3, K_4 που προκύπτουν από την (1) για 4 αντίστοιχες τιμές του λ. Αξιοποιώντας το σχήμα,



i. να αποδείξετε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ii. να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

iii. να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x+y-1=0$ είναι κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1).

Μονάδες [7+3+(5+5+5)]=25

16. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **15993**

Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2+1 \quad (1)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β. Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

γ. Αν $A(1,0)$ και $B(3,0)$ είναι τα μοναδικά σημεία από τα οποία διέρχονται όλοι οι κύκλοι, τότε να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων.

δ. Αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha\beta=0$

Μονάδες (3+10+7+5)=25

17. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **16191**

Δίνονται τα σημεία A(1,1), B(5,5).

α. Αν για το σημείο $M(x,\psi)$ ισχύει $\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{BM}^2=32$, να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο Μ βρίσκεται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $x^2+\psi^2-6\psi-6x+10=0\,(1)$

ii. Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

β. Αν το κέντρο του κύκλου είναι το K(3,3) και η ακτίνα του $\rho=2\sqrt{2}$:

i. Να διερευνήσετε για ποιες τιμές του λ η ευθεία (ε): $\lambda\chi + \psi = 2$ εφάπτεται του κύκλου (1).

ii. Υπάρχει τιμή του λ για την οποία η ευθεία (ε) σχηματίζει με την ΑΒ γωνία 45^o;

Μονάδες [(8+3)+(7+7)]=25

18. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **18237**

Θεωρούμε τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(3, 2)$, $\Gamma(1, 4)$.

α. Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.

β. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς ΒΓ.

Έστω ότι η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ είναι η ευθεία $\varepsilon: y = x+1$.

γ. Να βρείτε σημείο Κ στην μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ που ισαπέχει από τα Α, Β.

δ. Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες (6+7+7+5)=25

19. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **18247**

Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$ και $B(0,\beta)$, όπου $\alpha,\beta > 0$.

α. Να βρείτε συναρτήσει των α,β

i. τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB.

ii. την απόσταση (OM).

β. Αν $(OM) = \dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $(OM) = \dfrac{(AB)}{2}$.

ii. να γράψετε την πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί.

γ. Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου OAB.

Μονάδες [(5+5)+(5+3)+7]=25

20. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **18415**

Δίνεται η εξίσωση $(x-3\lambda)^2+(y+2\lambda)^2=1$ (1) όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x+3y=0$.

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την (1) ανήκουν στην ευθεία ε.

β. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ που απέχουν μεταξύ τους 2 μονάδες και έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία ε.

γ. Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες.

δ. Να βρείτε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ αντίστοιχα.

Μονάδες (6+7+6+6)=25

21. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **18416**

Δίνεται η εξίσωση $x(x-4)+y(y-2)=2(x+y-4)$ (1).

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3,2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

β. Δίνονται τα σημεία $A(4,4)$ και $B(2,0)$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Α και Β είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

ii, Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο ΑΒ.

γ. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η ευθεία (η) με εξίσωση $y=\lambda x+4$ να τέμνει τον παραπάνω κύκλο σε δύο σημεία Γ και Δ ώστε $(\Gamma\Delta)=\sqrt{20}$.

Μονάδες (6+(4+9)+6]=25

22. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **18467**

Δίνεται η εξίσωση $(x-1)^2+(y+2)^2=2(x+3)$: (1).

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(2,-2)$ και ακτίνα $\rho=3$.

β. Να δείξετε ότι η αρχή Ο των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία Α και Β ώστε η αρχή των αξόνων να είναι το μέσο της χορδής ΑΒ.

δ. Αν η ευθεία (ε) του προηγούμενου ερωτήματος έχει εξίσωση $y=x$ τότε να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΚΑΒ.

Μονάδες (6+4+8+7)=25

23. ΘΕΜΑ Δ 3.1 18521

Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(2,4)$ και $\Gamma(3,1)$.

α. Να αποδείξετε ότι η $B\hat{A}\Gamma=90°$.

β. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου c, ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ.

γ. Αν ο κύκλος c έχει εξίσωση $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$, τότε να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του, οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες (6+9+10)=25

24. ΘΕΜΑ Δ 3.1 18567

Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 4$ και το σημείο Α($2\sqrt{2}$, 0).

α. **i.** Να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι εξωτερικό του κύκλου C.

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο Α και να αποδείξετε ότι είναι μεταξύ τους κάθετες.

β. Αν Β, Γ τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες ευθείες από το σημείο Α, να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ.

Μονάδες [(5+12)+8]=25

25. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **18569**

Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2=1$.

α. Αν Α και Α΄ είναι τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες Οx και Οx΄ αντίστοιχα, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Α και Α΄ είναι Α(1,0) και Α΄(-1,0).

ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το Α και σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $150°$.

β. Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C και στο σημείο Β, να αποδείξετε ότι η χορδή ΑΒ έχει μήκος $\sqrt{3}$.

γ. Αν η ευθεία ε έχει εξίσωση $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) που διέρχεται από τα σημεία Α΄ και Β.

Μονάδες [(5+6)+8+6]=25

26. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **18871**

Δίνεται ο κύκλος (c) με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$ και το σημείο $A(3,1)$.

α. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου και να αποδείξετε οτι το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου.

β. **i.** Να αποδείξετε οτι οι ευθείες που εφάπτονται στον κύκλο (c) και διέρχονται από το σημείο A έχουν εξισώσεις $(\varepsilon_1): 2x-y=5$ και $(\varepsilon_2): x+2y=5$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $B A \Gamma$, όπου B και Γ είναι αντίστοιχα τα σημεία επαφής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) με τον κύκλο.

Μονάδες (7+10+8)=25

27. ΘΕΜΑ Δ 3.1 20091

Τα σημεία $A(-7, -1)$ και $B(3, -5)$ είναι σημεία ενός κύκλου C κέντρου Κ. Το σημείο Μ είναι το μέσο της χορδής ΑΒ και μία ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία Κ και Μ.

α. Να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες του σημείου Μ.

ii. Την εξίσωση της ευθείας ΚΜ.

β. Αν από το κέντρο Κ του κύκλου διέρχεται η ευθεία $(\delta): x+y=-12$, τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Κ.

ii. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C.

Μονάδες [(4+8)+(7+6)]=25

28. ΘΕΜΑ Δ 3.1 20229

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - (\lambda + 8)x + \lambda y + 7 = 0$ (1), με $\lambda \in \mathbf{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

β. Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων αυτών.

γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \Re$, όλοι οι παραπάνω κύκλοι, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να βρεθούν.

δ. Θεωρούμε τον κύκλο που ορίζεται από την (1) για λ=0. Να βρεθούν τα σημεία του κύκλου αυτού, που απέχουν από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση αντίστοιχα.

Μονάδες (6+7+7+5)=25

29. ΘΕΜΑ Δ 3.1 20650

α. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = x+2$, $\varepsilon_2: y = x-2$ και τα σημεία $A(-2,0)$, $B(2,0)$ των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα.

i. Να αποδειχθεί ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

ii. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου M, του AB.

iii. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαραλλήλου των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

β. Ο κύκλος (K, ρ) έχει την ιδιότητα να εφάπτεται των ευθειών ε_1 και ε_2. Αν το κέντρο K του κύκλου (K, ρ) ανήκει στην ευθεία $(\eta): x = \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε:

i. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου K, συναρτήσει του λ.

ii. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ είναι ανεξάρτητη του λ και να γράψετε την εξίσωση που παριστάνει όλους τους κύκλους (K, ρ), για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες [(4+2+6)+(5+8)]=25

30. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **20651**

Θεωρούμε τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(2, 4)$.

α. Να βρείτε όλα τα σημεία Μ στον άξονα $y'y$ ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΒ.

β. Να βρείτε την εξίσωση κύκλου C με διάμετρο ΑΒ.

γ. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C διέρχεται από τα σημεία Μ που προσδιορίσατε στο ερώτημα (α). Κατόπιν, να το επιβεβαιώσετε γεωμετρικά.

Μονάδες (8+7+10)=25

31. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **20700**

Δίνεται το τετράγωνο MM_1OM_2 με $M(4,4), M_1(4,0), M_2(0,4)$. Αν O η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, τότε:

α. Να δείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του τετραγώνου MM_1OM_2 έχει εξίσωση $C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$.

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x + y = 8$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου C

γ. Να βρείτε το σημείο επαφής της ευθείας ε με τον κύκλο C.

Μονάδες (8+8+9)=25

32. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **20863**

Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$ και $B(3,0)$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος AB.

β. Αν K είναι ένα τυχαίο σημείο της ευθείας (ζ), να βρείτε την εξίσωση (c) όλων των κύκλων, οι οποίοι έχουν κέντρο K και διέρχονται από τα σημεία A και B, συναρτήσει μιας παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ. Αν η εξίσωση $(x-2)^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2+1,\ \lambda \in \mathbb{R}$, παριστάνει όλους τους κύκλους (c) του ερωτήματος β), τότε:

i. Να σχεδιάσετε τον κύκλο, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB.

ii. Να αποδείξετε οτι η ευθεία $(\varepsilon): x+\lambda y-1=0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους (c) στο σημείο $A(1,0)$.

Μονάδες $[7+8+(5+5)]=25$

33. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **21154**

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4\alpha x-4\alpha y=0$ (1)

όπου α είναι πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

β. Να προσδιορίσετε το κέντρο Κ και την ακτίνα R των κύκλων ως συνάρτηση του α.

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του α του ερωτήματος (α).

δ. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται στον άξονα x΄x.

Μονάδες $(8+6+5+6)=25$

34. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **21159**

Δίνονται τα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$ με $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha + \beta = 10$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση των κύκλων με διάμετρο την ΑΒ, για κάθε τιμή των α και β είναι $x^2 + y^2 - \alpha x - (10 - \alpha) y = 0$.

β. Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι με διάμετρο την ΑΒ, για τις διάφορες τιμές των α και β διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, την αρχή Ο των αξόνων και ένα σημείο Ρ του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων όλων των κύκλων με διάμετρο την ΑΒ για τις διάφορες τιμές των α και β.

Μονάδες (8+9+8)=25

35. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **21276**

Σε μια σύγχρονη πόλη, κατασκευάζεται σιδηροδρομικό δίκτυο που περιλαμβάνει:

- τη γραμμή γ_1, κάθε σημείο της οποίας στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι της μορφής: $A(\lambda-1, 2\lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- τη γραμμή γ_2, που περνάει από το σταθμό $\Sigma(-4, 2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (-1, 3)$.

α. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι γραμμές γ_1 και γ_2.

β. Η είσοδος του αθλητικού σταδίου μιας συνοικίας θα βρίσκεται στο σημείο $K(1, 1)$ του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Οι κατασκευαστές θέλουν να συνδέσουν την είσοδο του σταδίου απ' ευθείας με κάθετο δρόμο, με μια από τις γραμμές γ_1 και γ_2. Να βρείτε με ποια από τις δύο γραμμές είναι πιο συμφέρουσα η σύνδεση. Δίνεται ότι το κόστος σύνδεσης ανά μονάδα μήκους, είναι το ίδιο και για τις δύο γραμμές.

γ. Γύρω από το στάδιο θα δημιουργηθεί κυκλικό πάρκο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που θα ορίζει το πάρκο, αν το κέντρο του είναι το σημείο Κ και επιπλέον ο κύκλος αυτός εφάπτεται της γραμμής γ_1.

Μονάδες (10+9+6=25

36. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **21349**

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο Ο θεωρούμε κύκλο (C) και ευθεία (ε) με εξισώσεις $x^2+y^2-9x-3y+10=0$ (1) και $4x+3y-10=0$ (2) αντίστοιχα.

α. **i.** Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα R του κύκλου (C).

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C) σε δύο σημεία.

iii. Να προσδιορίσετε τα σημεία Α και Β στα οποία η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C).

β. Αν είναι Α(1,2) και Β(4 , −2), τότε:

i. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.

ii. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο ΑΒ διέρχεται από το σημείο Ο.

Μονάδες [(5+4+5)+(5+6)]=25

37. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **21696**

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+y^2-2x+4y=0$, (1) και η ευθεία $\varepsilon: x-2y+3=0$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ.

β. Να εξετάσετε αν η ευθεία ε έχει κοινά σημεία με τον κύκλο C.

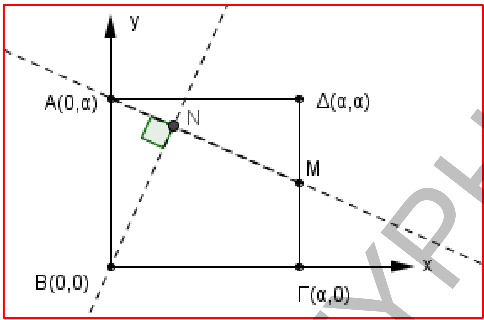
γ. Να βρείτε τις εφαπτόμενες ε_1, ε_2 του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία ε.

δ. Να αποδείξετε ότι $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)=2\rho$. Πως αιτιολογείται γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό;

Μονάδες (5+5+7+8)=25

38. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **22061**

Δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ με μήκος πλευράς $α$ $(α>0)$ και κορυφές $Α(0,α)$, $Β(0,0)$, $Γ(α,0)$ και $Δ(α,α)$. $Μ$ είναι το μέσο της πλευράς $ΓΔ$ και το τμήμα $ΒΝ$ είναι κάθετο στο τμήμα $ΑΜ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών:

i. $ΑΜ$ **ii.** $ΒΝ$

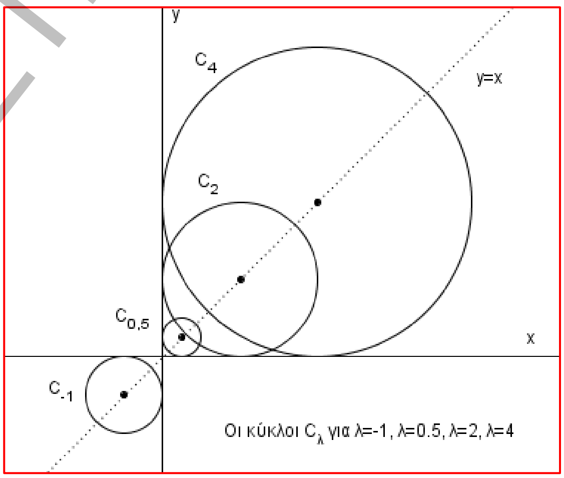
β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $Ν$.

γ. Να αποδείξετε ότι το σημείο $Ν$ ανήκει σε κύκλο με κέντρο $Γ$ και ακτίνα ίση με $α$. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου αυτού.

Μονάδες $[(5+5)+5+10]=25$

39. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **22062**

Δίνεται η οικογένεια κύκλων $C_λ:(x-λ)^2+(y-λ)^2=λ^2$, με $λ\neq 0$.



α. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα κάθε κύκλου C_λ, $\lambda \neq 0$.

β. Να αποδείξετε ότι το κέντρο κάθε κύκλου C_λ βρίσκεται στην ευθεία $y = x$.

γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x = 0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους C_λ, $\lambda \neq 0$. Να εξηγήσετε με συντομία ότι το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία $y = 0$.

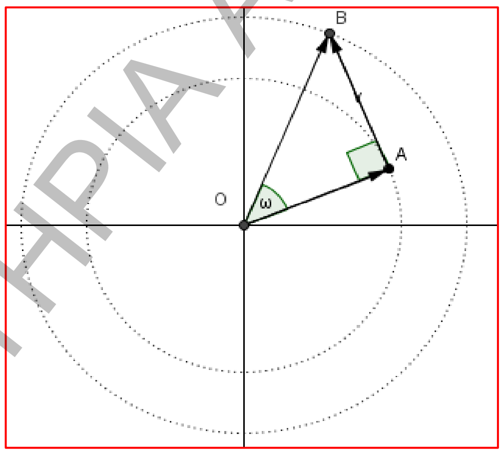
δ. Έστω $\alpha \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x = \alpha$ εφάπτεται σε ένα, και μόνο ένα, από τους κύκλους C_λ . Να εξηγήσετε με συντομία ότι το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία $y = \alpha$.

ε. Έστω $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\alpha x + \beta y = 1$ εφάπτεται σε δύο, και μόνο δύο, από τους κύκλους C_λ .

Μονάδες $(5+5+5+5+5)=25$

40. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **22066**

Θεωρούμε το σημείο $A = (\sigma\upsilon\nu\theta,\ \eta\mu\theta)$ και το σημείο $B = (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta,\ \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)$, όπου $\theta \in [0, 2\pi)$.



α. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B ανήκουν σε δύο κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.

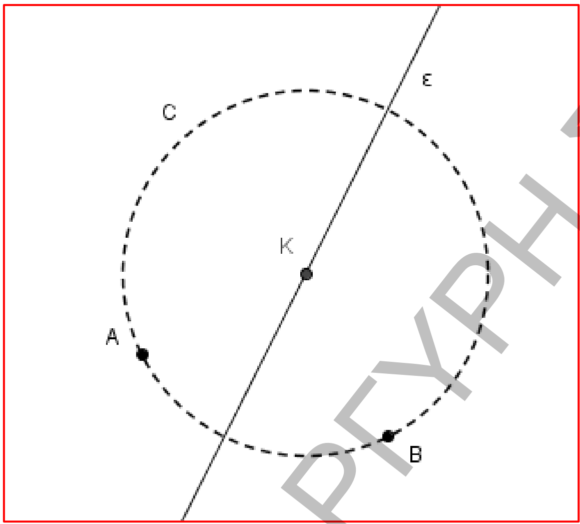
β. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$.

γ. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας ω μεταξύ των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

41. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **22069**

Τα σημεία $A(3,2)$ και $B(6,\ 1)$ βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο C από το κέντρο K του οποίου διέρχεται η ευθεία $\varepsilon: y=2x-7$. Να βρείτε:



α. τις συντεταγμένες του κέντρου K του κύκλου C.

β. την ακτίνα R του κύκλου C.

γ. την εξίσωση του κύκλου C.

Μονάδες (12+8+5)=25

42. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **22214**

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία M(x,y), A(-1,0), B(1,0) για τα οποία ισχύει

$$\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{BM}^2=9\left|\overrightarrow{AB}\right|.$$

α. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=8$.

β. Έστω Γ και Δ δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε $\Gamma\Delta^2=32$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Γ και Δ και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία.

ii. Αν το σημείο M κινείται στον κύκλο, να υπολογίσετε το $\overrightarrow{M\Gamma}\cdot\overrightarrow{M\Delta}$

Μονάδες [10+(8+7)]=25

43. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **22223**

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\overrightarrow{AB} = (\lambda, \lambda+1)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (3\lambda, \lambda-1)$ και το σημείο Μ είναι το μέσο της ΒΓ με $\lambda \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM} = (2\lambda, \lambda)$

β. Δίνεται επιπλέον ότι η γωνία $B\hat{A}\Gamma = 90^o$.

i. Να υπολογίσετε το λ.

ii. Αν $\lambda = \frac{1}{2}$ και $A(2, \frac{3}{2})$ να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες [8+(8+9)]=25

44. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **22239**

Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy η εξίσωση 3x + 4y = 25 περιγράφει τη θέση ενός αγωγού ύδρευσης. Σε αυτό το σύστημα θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι με κέντρο το O(0,0) και ακτίνα 2.

α. **i.** Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου που περιγράφει την θέση του σιντριβανιού;

ii. Να εξετάσετε αν ο αγωγός ύδρευσης διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, προκειμένου να ενωθεί με αυτό.

iii. Αν ο αγωγός ύδρευσης δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, ποιο σημείο του αγωγού ύδρευσης πρέπει να ενωθεί με το κέντρο του σιντριβανιού ώστε να έχουμε την μικρότερη δυνατή απόσταση, άρα και οικονομικότερη κατασκευή;

β. Ο μηχανικός που θέλει να χαράξει έναν ευθύγραμμο δρόμο, κατέληξε στην εξίσωση $\lambda x + y + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \neq 0$. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει για ποια τιμή του λ ο δρόμος αυτός εφάπτεται του σιντριβανιού;

Μονάδες [(4+5+8)+8]=25

45. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **22264**

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + \lambda y + \lambda - 1 = 0$ (1), $\lambda \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in R$.

β. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που ορίζεται από την εξίσωση (1), ο οποίος εφάπτεται της ευθείας ε: $x + y + 2 = 0$.

γ. Για $\lambda = 1$, στον κύκλο που προκύπτει από την εξίσωση (1), να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του, που διέρχονται από το σημείο $M(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.

Μονάδες (7+9+9)=25

46. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **22280**

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο O(0,0) θεωρούμε τους κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) με εξισώσεις

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0 \quad (2)$$

αντίστοιχα.

α. Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων.

β. Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου.

γ. Έστω M, N τυχαία σημεία των κύκλων (K, R) και (Λ, ρ) αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση των σημείων M και N.

Μονάδες (12+8+5)=25

47. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **22508**

Οι κορυφές Α, Γ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι τα σημεία $(1,4)$ και $(3,0)$ αντιστοίχως.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ γράφεται στη μορφή $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2)$.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ γράφεται στη μορφή $(x-2)^2+(y-2)^2=5$.

γ. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών Β, Δ του τετραγώνου.

Μονάδες (8+8+9)=25

48. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **33696**

Το κέντρο ενός κύκλου (c) βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και είναι σημείο της ευθείας (ε): y=2x – 1. Ο κύκλος (c) έχει ακτίνα $\rho=3\sqrt{2}$ και η ευθεία (ζ): x + y -2 = 0 εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο Α.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου (c) είναι $(x-3)^2+(y-5)^2=18$.

β. Να αποδείξετε ότι:

i. Η εξίσωση της ευθείας ΚΑ είναι η $x-y+2=0$.

ii. Είναι Α(0,2).

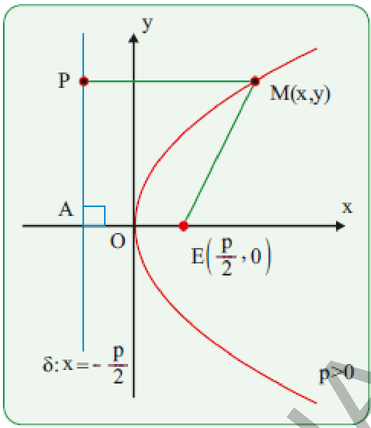
γ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΛΜ, όπου Μ και Λ είναι τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τον κύκλο (c).

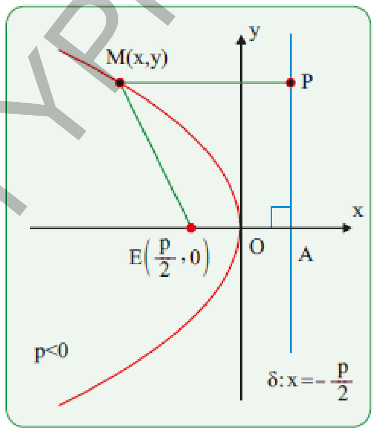
Μονάδες [9+(5+4)+7]=25

3.2 Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ

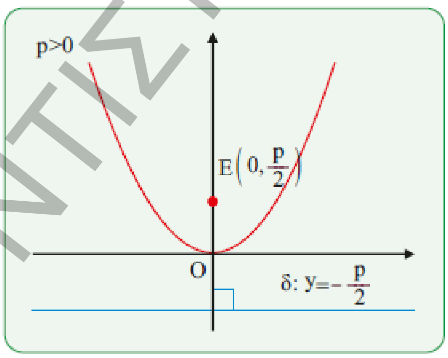
Παραβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από μια σταθερή ευθεία (δ) που λέγεται **διευθετούσα** της παραβολής και από ένα σταθερό σημείο Ε που λέγεται **εστία** της παραβολής.

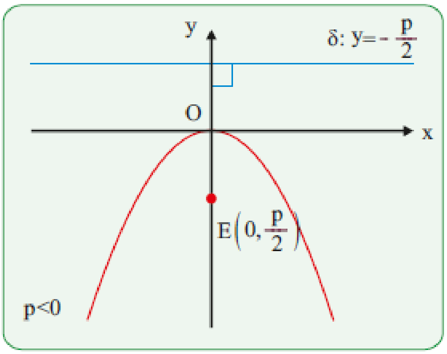
Η εξίσωση της παραβολής C με εστία $E\left(\frac{p}{2},0\right)$ και διευθετούσα $\delta: x=-\frac{p}{2}$ είναι : $y^2=2px$





Η εξίσωση της παραβολής C με εστία $E\left(0,\frac{p}{2}\right)$ και διευθετούσα $\delta: y=-\frac{p}{2}$ είναι : $x^2=2py$





Εφαπτομένη Παραβολής

Η εφαπτομένη της παραβολής $C: y^2 = 2px$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση :

$$\varepsilon: yy_1 = p(x + x_1)$$

Η εφαπτομένη της παραβολής $C: x^2 = 2py$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση :

$$\varepsilon: xx_1 = p(y + y_1)$$

3.2 Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ (7)

1. ΘΕΜΑ Β 3.2 18242

Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = 4x$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της C.

β. Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C στο σημείο της $M(4,4)$.

γ. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C, τη διευθετούσα δ και την ευθεία (ε).

Μονάδες (8+8+9)=25

2. ΘΕΜΑ Β 3.2 20235

Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 8x$.

α. Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

β. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $(\frac{1}{8}, 1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία ε: $8x - 2y + 3 = 0$.

Μονάδες (10+15)=25

3. ΘΕΜΑ Β 3.2 21248

Δίνεται το σημείο $E(2,0)$, η ευθεία $\delta_1 : x = -2$ και τυχαίο σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου.

α. **i.** Να βρείτε την απόσταση (ME) του σημείου $M(x,y)$ από το $E(2,0)$ ως συνάρτηση των x, y.

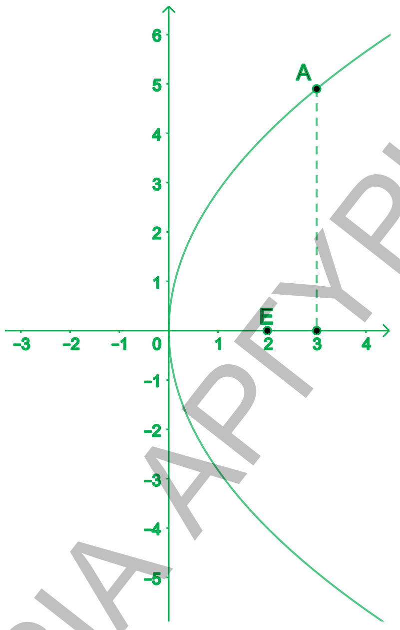
ii. Να βρείτε την απόσταση $d(M,\delta)$ του σημείου M από την ευθεία δ ως συνάρτηση των x, y.

β. Αν ισχύει $(ME) = d(M,\delta)$ να δείξετε ότι το σημείο M ανήκει στην παραβολή $y^2 = 8x$.

Μονάδες (8+8+9)=25

4. **ΘΕΜΑ Β** **3.2** **21306**

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x΄x, κορυφή O(0,0) και εστία E(2,0), όπως στο παρακάτω σχήμα. Το σημείο A της παραβολής έχει τετμημένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy.



α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$ και ότι $A(3, 2\sqrt{6})$.

β. Να σχεδιάσετε τη διευθετούσα (δ) της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο A.

Μονάδες (10+6+9)=25

5. ΘΕΜΑ Β 3.2 21307

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$.

α. Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(0,3)$ και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3.

β. Να αποδείξετε ότι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) της παραβολής στα σημεία Α(6,3) και Β(-6,3), αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$.

γ. Να βρείτε το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2).

Μονάδες (12+8+5)=25

6. ΘΕΜΑ Β 3.2 22190

Δίνεται η παραβολή (C) με εξίσωση $y^2 = x$ (1)

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας Ε και την εξίσωση της διευθετούσας (δ).

β. Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1,-1)$ είναι σημείο της παραβολής.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής στο σημείο της $A(1,-1)$.

Μονάδες (12+5+8)=25

7. ΘΕΜΑ Β 3.2 22267

Δίνεται η εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

α. Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :
«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται …………………. Η εστία της Ε, έχει συντεταγμένες Ε(….., …..) και η διευθετούσα έχει εξίσωση ………….».

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην παραπάνω καμπύλη στο σημείο Α(1, -2).

γ. Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα x'x είναι σημείο της διευθετούσας της παραβολής.

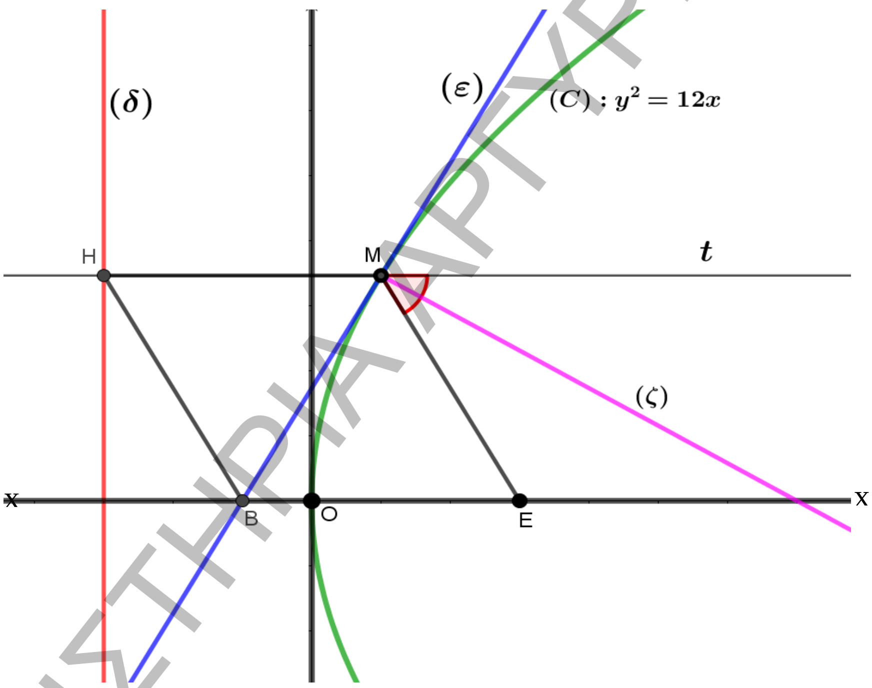
Μονάδες (9+8+8)=25

3.2 Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ (15)

1. ΘΕΜΑ Δ 3.2 15394

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 12x$ με εστία Ε και η εφαπτομένη ευθεία (ε) της (C) στο σημείο της $M\left(1,\ 2\sqrt{3}\right)$, η οποία τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο Β.

Από το σημείο Μ φέρνουμε ημιευθεία Mt παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, η οποία τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο Η.



α. Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $y = \sqrt{3}\cdot x + \sqrt{3}$.

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β, Η, Ε.

γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΕΒΗ είναι ρόμβος.

δ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) η οποία διχοτομεί την γωνία $E\hat{M}t$.

Μονάδες (6+6+7+6)=25

2. **ΘΕΜΑ Δ** **3.2** **18245**

Δίνεται η παραβολή C : $y^2 = 4x$ και η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y + \lambda^2 + 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας Ε και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής C.

β. Να αποδείξετε ότι η (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία ε_λ που δεν διέρχεται από το $O(0,0)$.

γ. Να αποδείξετε ότι η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ.

δ. Έστω $M(\alpha,\beta)$ σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στην παραπάνω διευθετούσα δ. Αν από το Μ διέρχεται μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών ε_λ, να δείξετε ότι το Μ ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο την κορυφή της παραβολής C και διέρχεται από την εστία της Ε.

Μονάδες (6+6+6+7)=25

3. **ΘΕΜΑ Δ** **3.2** **18372**

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία Α(-2,- 2), Β(0,-4) και την παραβολή $y^2 = 4x$.

α. Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

β. Να βρείτε το σημείο Μ της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ΑΒ.

γ. Αν Μ(1,-2) και Κ είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ευθείας του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΜΚ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες (9+8+8)=25

4. **ΘΕΜΑ Δ** **3.2** **18570**

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2-4x-8y-5=0$ και η ευθεία (ε): $3x-4y=\mu$, $\mu \in R$.

α. Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του.

β. Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία Α, Β

i. Να αποδείξετε ότι -35<μ<15.

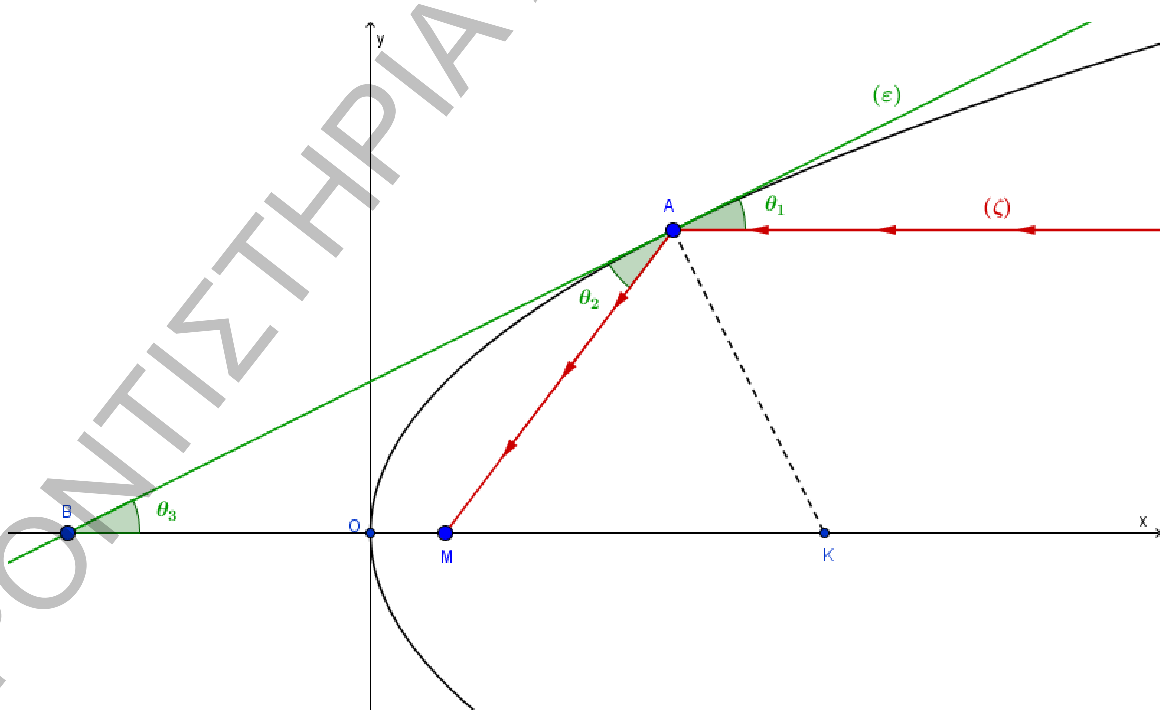
ii. Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του.

iii. Να βρεθεί σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε, το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή ΑΒ.

Μονάδες [5+(7+4+9)]=25

5. **ΘΕΜΑ Δ** **3.2** **18870**

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 4x$, η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο $A(4,4)$ και η ΑΚ κάθετη στην (ε). Μία φωτεινή ακτίνα (ζ), ακολουθώντας πορεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, προσπίπτουσα στο σημείο A και ανακλώμενη πάνω στην καμπύλη (που αντιστοιχεί σε παραβολικό κάτοπτρο) διέρχεται από το σημείο M. Αν γνωρίζετε ότι η γωνία θ_1 που σχηματίζει η προσπίπτουσα φωτεινή ακτίνα (ζ) με την (ε) και η γωνία θ_2 που σχηματίζει η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα AM με την (ε) είναι ίσες, τότε:



α. Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και το σημείο B στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$.

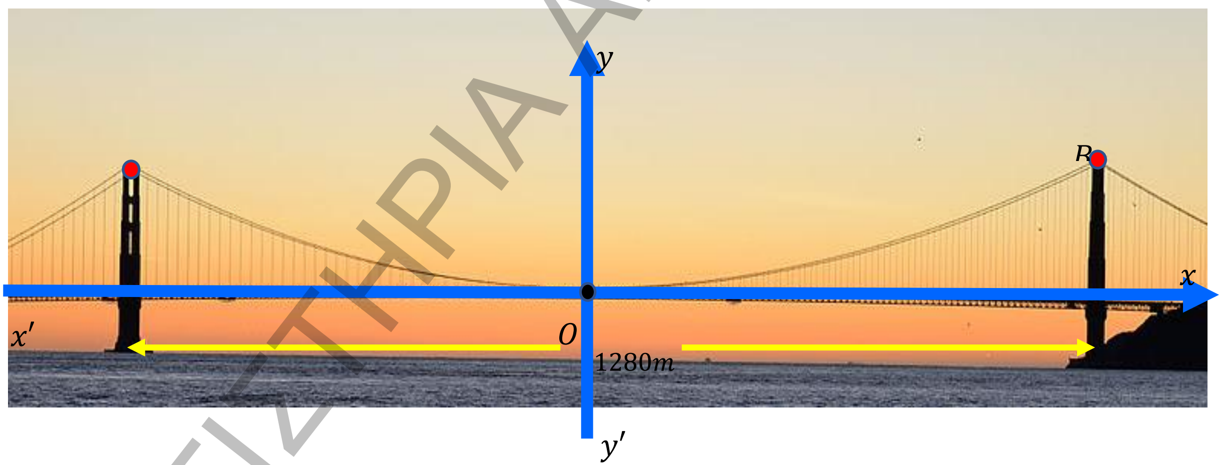
γ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές.

δ. Να αποδείξετε ότι το σημείο M ταυτίζεται με την εστία της παραβολής.

Μονάδες $(6+6+7+6)=25$

6. ΘΕΜΑ Δ 3.2 19047

Στην Golden Gate γέφυρα του San Francisco, το κεντρικό καλώδιο θεωρούμε προσεγγιστικά ότι αποτελεί τμήμα παραβολής. Οι δύο βασικοί πυλώνες απέχουν μεταξύ τους $1280\,m$, ενώ το ύψος του κάθε πυλώνα σε σχέση με το οδόστρωμα της γέφυρας είναι $160\,m$. Γνωρίζουμε ότι το κατώτερο σημείο του παραβολικού καλωδίου αγγίζει τη γέφυρα στο μέσο της απόστασης των δύο πυλώνων. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων, όπως στο σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής του κεντρικού καλωδίου σ΄αυτό το σύστημα των αξόνων είναι $x^2=2560y$.

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας (δ) της παραβολής.

γ. Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $B(640,160)$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι $E\Delta = EB$.

Μονάδες (9+8+8)=25

7. ΘΕΜΑ Δ 3.2 20090

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και $M(x_0, y_0), y_0 > 0$, ένα σημείο της.

α. Αν Α είναι η προβολή του Μ στη διευθετούσα της παραβολής,

i. Να εκφράσετε τις συντεταγμένες των σημείων Μ και Α συναρτήσει της τεταγμένης y_0 του σημείου Μ.

ii. Αν Ε είναι η εστία της παραβολής, να βρείτε το σημείο Μ για το οποίο $(MAE) = \frac{5}{8}$ τ.μ.

β. Αν $M\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ και ε η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΜΕΜ΄ είναι ρόμβος, όπου Ε είναι η εστία της παραβολής και Μ΄ το σημείο που η ευθεία ε τέμνει τον άξονα x'x.

Μονάδες ΄[(5+12)+8]=25

8. ΘΕΜΑ Δ 3.2 20092

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$, το σημείο της $M(\frac{1}{4}, 1)$ και η ευθεία ε του επιπέδου με εξίσωση

$$\varepsilon: \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0.$$

α. i. Να δείξετε ότι η ευθεία ε δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόστασή του σημείου Μ από την ε.

ii. Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x'x και y'y στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $(M\Gamma\Delta) = 5$ τ.μ.

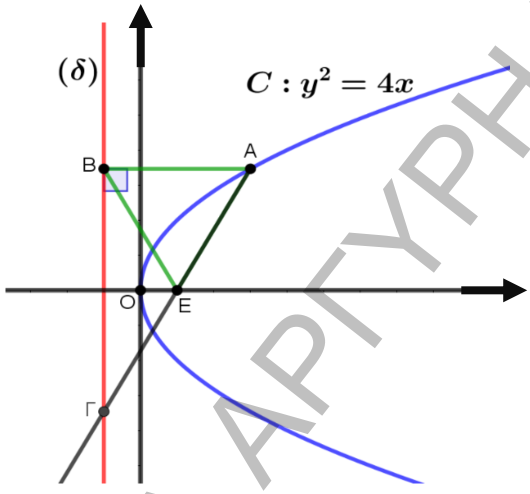
β. i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθεία ζ της παραβολής με ζ παράλληλη στην ε.

ii. Ποια είναι η απόσταση των ευθειών ζ και ε;

Μονάδες [(7+5)+(8+5)]=25

9. **ΘΕΜΑ Δ** **3.2** **20684**

Ένα σημείο $A(x_A, y_A)$ της παραβολής $C: y^2 = 4x$ με $x_A > 0,\ y_A > 0$, έχει την εξής ιδιότητα: η ημιευθεία AE τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο Γ, έτσι όμως ώστε η εστία E της παραβολής C, να είναι το μέσο του τμήματος $A\Gamma$. Επίσης, από το σημείο A φέρνουμε κάθετη στην διευθετούσα (δ) και έστω B το σημείο τομής, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισόπλευρο.

β. Να αποδείξετε ότι $x_A = 3$ και $y_A = 2\sqrt{3}$.

γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες (7+10+8)=25

10. **ΘΕΜΑ Δ** **3.2** **20862**

Δίνονται τα σημεία $M(-2,2), E\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ και η ευθεία (ζ) με εξίσωση $y = \frac{1}{2}$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1) που διέρχεται από το σημείο M και σχηματίζει γωνία $45°$ με τον άξονα $x'x$.

β. Να βρείτε την εξίσωση, που εκφράζει το σύνολο των σημείων του επιπέδου, που απέχουν ίση απόσταση από το σημείο E και την ευθεία (ζ).

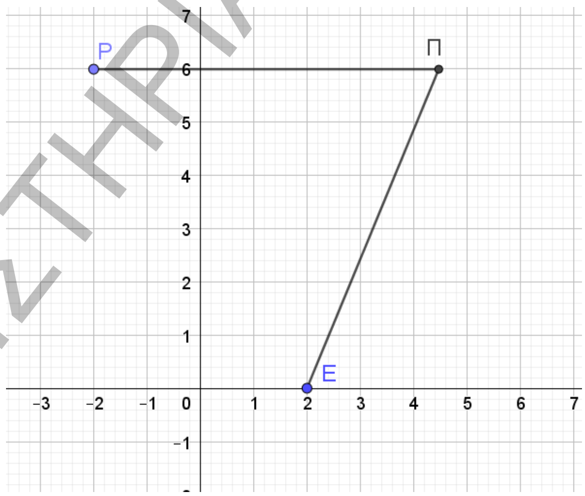
γ. **i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (η) της καμπύλης $C: x^2 + 2y = 0$, που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε_1), με εξίσωση $y = x + 4$.

ii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της καμπύλης C και των ευθειών (ε_1) και (η). Με τη βοήθεια του σχήματος (ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο) να αποδείξετε ότι η ελάχιστη απόσταση των σημείων της C από την ευθεία (ε_1) είναι $\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$.

Μονάδες [5+6+(7+7)]=25

11. **ΘΕΜΑ Δ** **3.2** **21653**

Στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, το 1ο τεταρτημόριο αντιστοιχεί σε μια θαλάσσια περιοχή και τα υπόλοιπα τεταρτημόρια σε στεριά. Οι ημιάξονες Ox, Oy οριοθετούν ένα λιμάνι. Ένα πλοίο ρυμουλκείται στο λιμάνι, δεμένο με δύο συρματόσχοινα στο ίδιο σημείο $\Pi(\kappa, \lambda)$ του πλοίου. Το ένα από τα δύο ρυμουλκά είναι σταθερό στο σημείο $E(2,0)$ και το άλλο κινείται ώστε η θέση να περιγράφεται από το σημείο $P(-2, \lambda)$. Η ρυμούλκηση γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε χρονική στιγμή της ρυμούλκησης να ισχύει $(\Pi E) = (\Pi P)$.



α. Να αποδείξετε ότι το σημείο $P(-2, \lambda)$ κινείται σε σταθερή ευθεία (δ) της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

β. Να αιτιολογήσετε γιατί κάθε χρονική στιγμή της ρυμούλκησης είναι $\Pi P \perp (\delta)$.

γ. Να αποδείξετε ότι η πορεία του $\Pi(\kappa,\lambda)$ είναι παραβολή C της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

δ. Αν $y^2=8x$ η εξίσωση της παραβολής C να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή η μεσοκάθετος του $ΕΡ$ εφάπτεται της παραβολής C στο σημείο Π.

Μονάδες (5+5+7+8)=25

12. **ΘΕΜΑ Δ** **3.2** **21690**

Δίνεται η παραβολή $C: y^2=3x$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x+4y+10=0$.

α. Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία και να τις σχεδιάσετε.

β. Έστω $M(x_o,\ y_o)$ ένα σημείο της παραβολής. Να αποδείξετε ότι η απόστασή του $d(M,\ \varepsilon)$ από την ευθεία είναι $d(M,\ \varepsilon)=\dfrac{(y_0+2)^2+6}{5}$.

γ. Να βρείτε το σημείο της παραβολής που είναι το πιο κοντινό στην ευθεία.

δ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο που βρήκατε στο ερώτημα γ) είναι παράλληλη στην ευθεία ε.

Μονάδες (8+8+5+4)=25

13. **ΘΕΜΑ Δ** **3.2** **21883**

Δίνεται η παραβολή $C:x^2=4y$ και η ευθεία $\varepsilon:y=x-2$.

α. Να βρείτε την εστία Ε και τη διευθετούσα δ της παραβολής.

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία. Στη συνέχεια σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις της παραβολής C και της ευθείας ε.

γ. Αν Mx,y) είναι σημείο της παραβολής , τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του Μ από την ευθεία ε είναι $d(M,\varepsilon)=\dfrac{\frac{1}{4}x^2-x+2}{\sqrt{2}}$

ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία ε καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου Μ της παραβολής που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία .

Μονάδες [5=8+(6+6)]=25

14. **Θ Ε Μ Α Δ** **3.2** **22275**

Δίνεται η παραβολή (C) που έχει εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

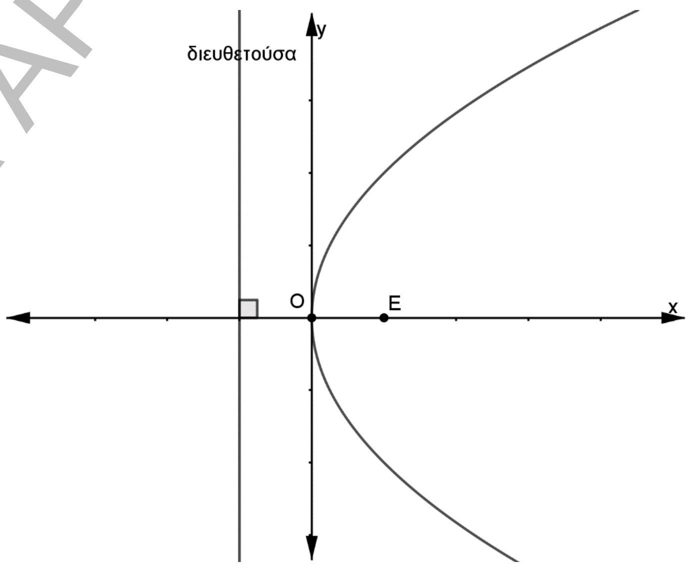
α. Να σχεδιάσετε πρόχειρα την παραπάνω παραβολή και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας της Ε και την εξίσωση της ευθείας της διευθετούσας δ.

β. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Α(0 , 2) και εφάπτονται στην παραβολή που περιγράφει η εξίσωση (1).

Μονάδες (12+13)=25

15. **Θ Ε Μ Α Δ** **3.2** **22465**

Έστω παραβολή C με κορυφή την αρχή των αξόνων Ο και άξονα συμμετρίας τον x'x. Η απόσταση της εστίας Ε από την διευθετούσα δ της παραβολής C είναι 4 και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.



α. Να δικαιολογήσετε ότι η εστία της είναι η Ε(2,0), η διευθετούσα της είναι η δ : x=-2 και η εξίσωσή της παραβολής είναι $y^2=8x$.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της Α(2,4) είναι η ε: y=x+2 .

γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην ευθεία ε στο σημείο της Α(2,4).

Μονάδες (9+9+7)=25

3.3 Η ΕΛΛΕΙΨΗ

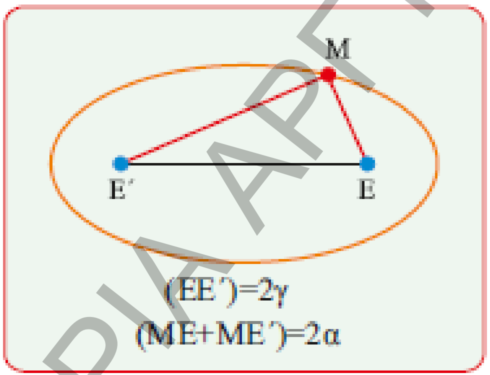
Ορισμός Έλλειψης

Έστω E' και E δύο σημεία ενός επιπέδου.

Ονομάζεται **έλλειψη** με **εστίες** τα σημεία E' και E ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερό και μεγαλύτερο του $E'E$.

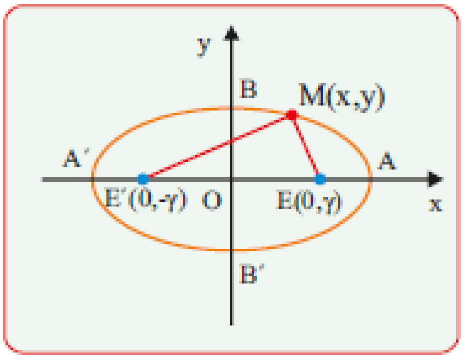
Το σταθερό αυτό άθροισμα το συμβολίζουμε, συνήθως, με **2α** και την απόσταση των εστιών E' και E με **2γ**.

Η απόσταση $E'E$ ονομάζεται **εστιακή απόσταση** της έλλειψης.



Η εξίσωση της έλλειψης C με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ και σταθερό άθροισμα 2α

είναι: $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$, όπου $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$

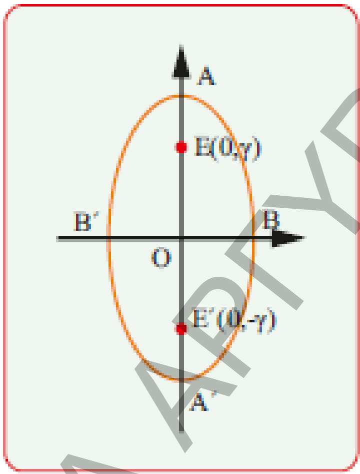


Η εξίσωση της έλλειψης C με εστίες τα σημεία $E'(0,-\gamma)$, $E(0,\gamma)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι:

$$\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1,$$

όπου

$$\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$$



Εκκεντρότητα Έλλειψης

Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της έλλειψης

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

και τη συμβολίζουμε με **ε**, το λόγο

$$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}<1.$$

Οι ελλείψεις που έχουν την ίδια εκκεντρότητα, λέγονται **όμοιες**.

Εφαπτομένη Έλλειψης

- Αν η έλλειψη C έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,$$

τότε η εφαπτομένη της στο σημείο της $M_1(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση :

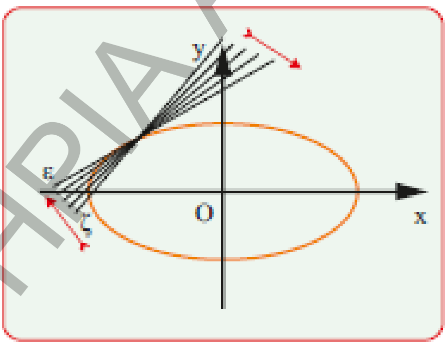
$$\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$$

- Αν η έλλειψη C έχει εξίσωση

$$\frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{x^2}{\beta^2}=1,$$

τότε η εφαπτομένη της στο σημείο της $M_1(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση :

$$\frac{yy_1}{\alpha^2}+\frac{xx_1}{\beta^2}=1.$$



3.3 Η ΕΛΛΕΙΨΗ (12)

1. ΘΕΜΑ Β 3.3 20718

Δίνεται η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$.

α. Να βρείτε τις εστίες της.

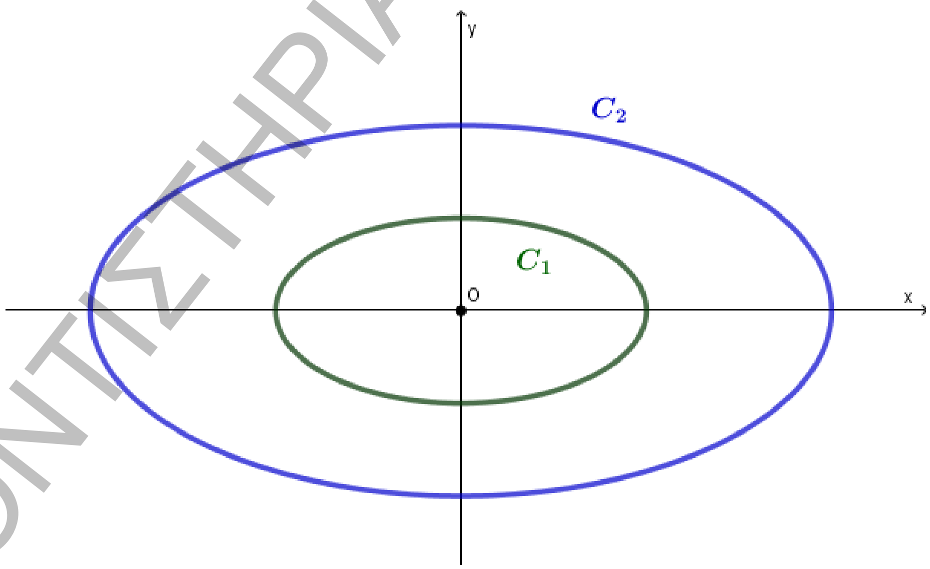
β. Να σχεδιάσετε την έλλειψη C σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

γ. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα τις εφαπτόμενες στις κορυφές της C και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

Μονάδες (8+8+9)=25

2. ΘΕΜΑ Β 3.3 20865

Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: x^2+4y^2=4$, $C_2: \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ και οι γραφικές τους παραστάσεις στο παρακάτω σχήμα.



α. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες των δύο ελλείψεων.

β. Από το σχήμα φαίνεται ότι οι δύο ελλείψεις έχουν την ίδια εκκεντρότητα. Να αποδείξετε ότι αυτό είναι αληθές.

Μονάδες (14+11)=25

3. ΘΕΜΑ Β 3.3 20883

Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης C: $16x^2 + 25y^2 = 400$.

α. Να βρείτε τα μήκη BB', AA' του μικρού και τον μεγάλου άξονα της έλλειψης, καθώς και τις εστίες της Ε και E'.

β. Αν Ε'(-3,0) και Ε(3,0), να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο Ε' και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το Ε και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$.

Μονάδες (12+13)=25

4. ΘΕΜΑ Β 3.3 21308

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Να βρείτε:

α. Τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄ της έλλειψης και την απόστασή τους.

β. Το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης.

γ. Την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης στο σημείο της $B(0,4)$.

Μονάδες (9+8+8)=25

5. ΘΕΜΑ Β 3.3 21647

Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(4,0), E'(-4,0)$ και μεγάλο άξονα 10. Να βρείτε:

α. την εξίσωση της C.

β. την εκκεντρότητά της C.

γ. την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(4,\frac{9}{5})$.

Μονάδες (10+7+8)=25

6. **ΘΕΜΑ Β** **3.3** **21648**

Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $Ε(3,0), Ε΄(-3,0)$ και διέρχεται από το σημείο $Μ(4,\frac{12}{5})$.

α. Να αποδείξετε ότι το μήκος του μεγάλου άξονα είναι 10.

β. Να βρείτε την εξίσωση της C.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $Μ(4,\frac{12}{5})$.

Μονάδες (10+8+7)=25

Δίνεται ότι $\sqrt{1369}=37$

7. **ΘΕΜΑ Β** **3.3** **22168**

Δίνονται η παραβολή y2 = 2px και η έλλειψη $\frac{x^2}{α^2}+\frac{y^2}{β^2}=1$.

α. Αν η παραβολή διέρχεται από το σημείο Α(1,2), να βρείτε:

i. Την εξίσωση της παραβολής.

ii. Την εστία Ε της παραβολής.

β. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο το Ο, αν η μια εστία της είναι το σημείο Ε(1,0) και ο μεγάλος άξονας της έχει μήκος ίσο με 4.

Μονάδες [(10+5)+10]=25

8. **ΘΕΜΑ Β** **3.3** **22192**

Δίνεται η έλλειψη (C) με εξίσωση $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{81}=1$ (1)

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄.

β. Να αποδείξετε ότι το σημείο $Β(0,9)$ είναι σημείο της έλλειψης.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης στο σημείο της $Β(0,9)$.

Μονάδες (10+5+10)=25

9. **ΘΕΜΑ Β** **3.3** **22268**

Δίνεται η εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ (1).

α. Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :

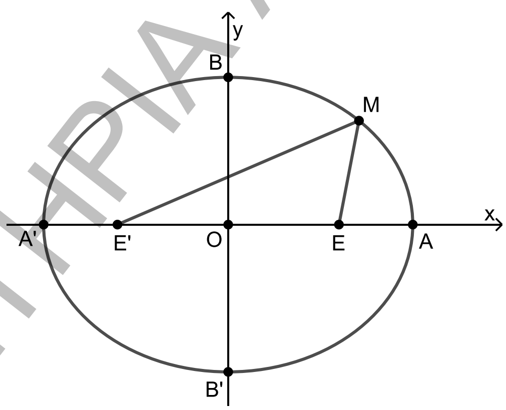
«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται ……………….. Οι εστίες της Ε και Ε' , έχουν συντεταγμένες Ε(….., …..) και Ε'(….., …..) . Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με ….. και η εκκεντρότητα της είναι ίση με ………».

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία εφάπτεται στην καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1), στο σημείο της Β(0,-2).

Μονάδες (15+10)=25

10. **ΘΕΜΑ Β** **3.3** **22556**

Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει κορυφές τα σημεία $A'(-5,0)$, $A(5,0)$, $B'(0,-4)$ και $B(0,4)$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. Τα μήκη των αξόνων της έλλειψης είναι $(A'A)=10$ και $(B'B)=8$.

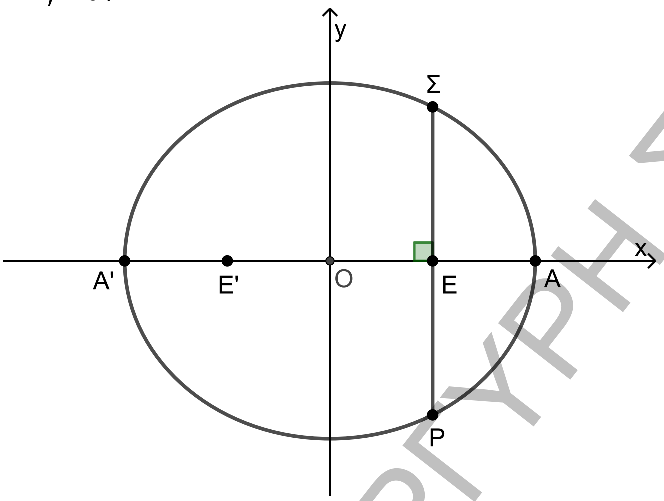
ii. Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$.

β. Έστω Μ ένα σημείο της έλλειψης. Να αποδείξετε ότι $(ME')+(ME)=10$.

Μονάδες (10+10+5)=25

11. **ΘΕΜΑ Β** **3.3** **22558**

Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει εστίες τα σημεία $E'(-2,0)$ και $E(2,0)$ και μήκος μεγάλου άξονα $(A'A)=8$.



α. Να αποδείξετε ότι η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

β. Έστω Σ και P τα σημεία της έλλειψης που έχουν την ίδια τετμημένη με την εστία $E(2,0)$. Επίσης το Σ έχει θετική τεταγμένη και το P αρνητική τεταγμένη.

i. Να αποδείξετε ότι $\Sigma(2,3)$ και $P(2,-3)$.

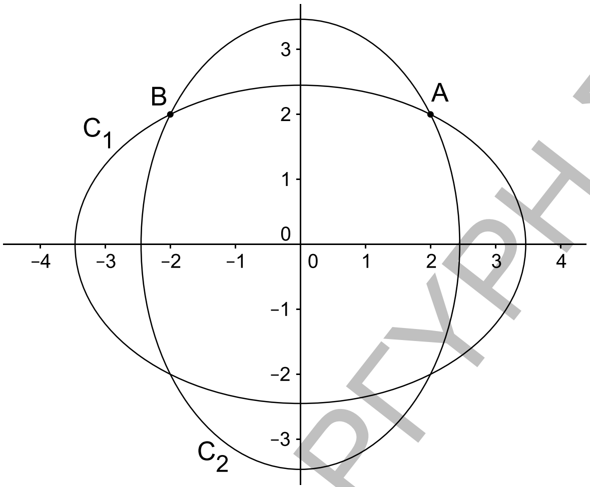
ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΣP.

Μονάδες [12+(8+5)]=25

12. **ΘΕΜΑ Β** **3.3** **22564**

Δίνονται οι ελλείψεις

$$C_1 : \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1 \quad \text{και} \quad C_2 : \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}=1.$$



α. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(2,2)$ και $B(-2,2)$ ανήκουν και στις δύο ελλείψεις.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο A και η εξίσωση της εφαπτομένης ε_2 της έλλειψης C_2 στο σημείο B είναι αντίστοιχα

$$x+2y-6=0 \quad \text{και} \quad -2x+y-6=0 \ .$$

γ. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες ε_1, ε_2 είναι κάθετες.

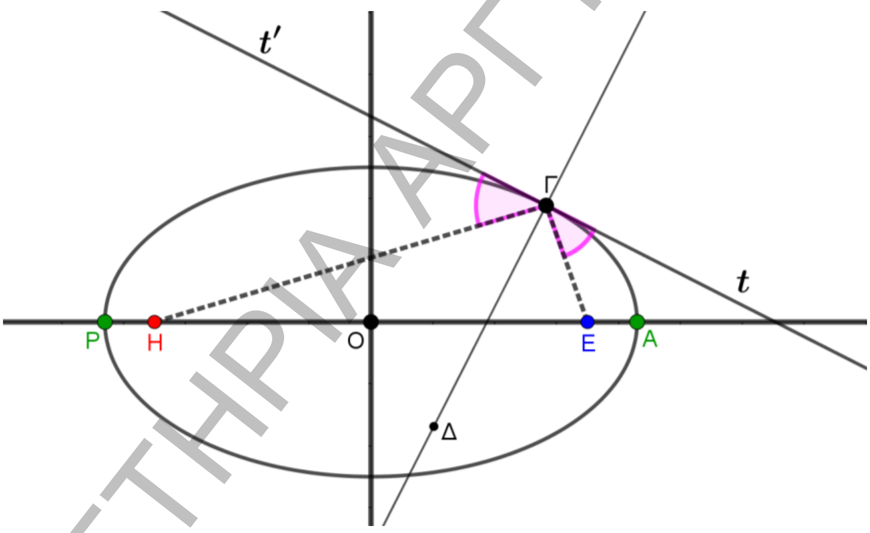
(Μονάδες 5)

≤

3.3 Η ΕΛΛΕΙΨΗ (5)

1. **ΘΕΜΑ Δ** **3.3** **20666**

Η τροχιά της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι μια έλλειψη με μία εστία τον Ήλιο. Η ελάχιστη απόσταση του κέντρου της Γης από το κέντρο του Ήλιου είναι $\text{PH} = 147{,}5$ εκατομμύρια Km και η μέγιστη $\text{AH} = 152{,}5$ εκατομμύρια Km. Στο σχήμα θεωρούμε ότι τα σημεία Η και Γ είναι τα κέντρα του Ήλιου και της Γης αντίστοιχα. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων με αρχή το μέσο του ΗΕ και $x'x$ τον μεγάλο άξονα της έλλειψης, ενώ ο άξονας $y'y$ είναι η μεσοκάθετος του ΗΕ. Τέλος, η ευθεία ΓΔ είναι η κάθετη στην εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο Γ.



α. Να αποδείξετε $(\text{PA}) = 300\,\text{km}$, $(\text{HE}) = 5\,\text{km}$ και ότι η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι $\varepsilon = \dfrac{1}{60}$.

β. Για μια τυχαία θέση της Γης πάνω στην ελλειπτική τροχιά, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΗΓΕ.

γ. Αν ονομάσουμε $t't$ την εφαπτομένη ευθεία της έλλειψης στο Γ, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $t'\hat{\Gamma}H$ και $t\hat{\Gamma}E$ είναι ίσες.

Μονάδες (10+8+7)=25

2. **ΘΕΜΑ Δ** **3.3** **20722**

Έστω $K(x,y)$ μεταβλητό σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει $(KE)+(KE')=10$, όπου $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$.

α. Να βρείτε το είδος της καμπύλης C πάνω στην οποία κινείται το σημείο K και να γράψετε την εξίσωσή της, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Έστω $C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ και $(\varepsilon):3x+5y=25$.

β. Να αποδείξετε ότι C και (ε) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο M και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M.

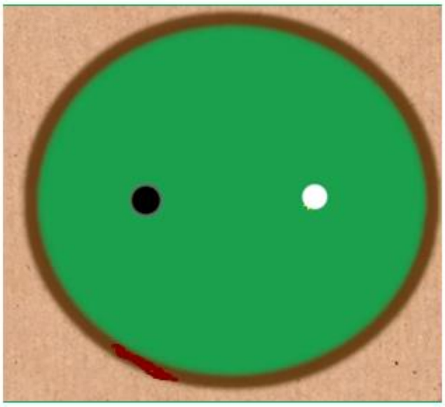
γ. Να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος γ) και να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα την έλλειψη C και την ευθεία ε.

δ. Να σχεδιάσετε τη διχοτόμο της γωνίας $E\hat{M}E'$ και να βρείτε την εξίσωσή της .

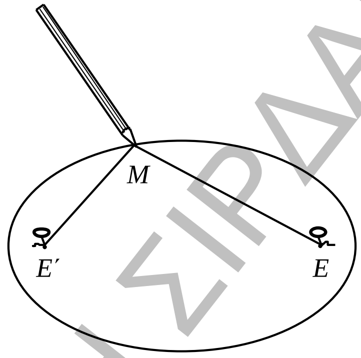
Μονάδες (6+7+6+6)=25

3. **ΘΕΜΑ Δ** **3.3** **20726**

Ένας κατασκευαστής μπιλιάρδων θέλει να κατασκευάσει ένα ελλειπτικό μπιλιάρδο όπως αυτό του παρακάτω σχήματος (σχήμα 1). Το περίγραμμα του μπιλιάρδου είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$. Η μοναδική τρύπα του μπιλιάρδου έχει σχήμα κύκλου (ο μαύρος κύκλος στο σχήμα 1) με κέντρο το σημείο E'. Για να σχεδιάσει ο κατασκευαστής το περίγραμμα του μπιλιάρδου πάνω σε μία ξύλινη επίπεδη επιφάνεια, τοποθέτησε στα σημεία E και E' δύο καρφιά στα οποία έδεσε τις άκρες ενός σχοινιού μήκους 10 μονάδων μήκους. Στη συνέχεια με ένα μολύβι διατηρούσε το σχοινί τεντωμένο, ώστε αυτό, κατά την κίνησή του, να διαγράψει έλλειψη C όπως φαίνεται στο παρακάτω (σχήμα 2).



Σχήμα 1



Σχήμα 2

α. Να βρείτε τα μήκη του μεγάλου και του μικρού άξονα της έλλειψης C.

β. Να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης C και να βρείτε την εκκεντρότητά της.

γ. Ένας παίκτης τοποθετεί μια άσπρη μπάλα (ο άσπρος κύκλος στο σχήμα 1) ακριβώς στο σημείο Ε. Σκοπεύει να χτυπήσει την άσπρη μπάλα ώστε αφού αυτή προσκρούσει πρώτα στο ελλειπτικό περίγραμμα του μπιλιάρδου, στη συνέχεια να πέσει στην τρύπα. Αν θεωρήσουμε ότι ο παίκτης θα χτυπήσει με όση δύναμη απαιτείται για να φτάσει η μπάλα στην τρύπα και το χτύπημα θα είναι στο κέντρο της μπάλας ώστε αυτή να κυλά χωρίς να περιστρέφεται, να βρείτε σε ποιο σημείο της έλλειψης C πρέπει να σημαδέψει, ώστε με ένα μόνο χτύπημα η μπάλα να μπει στην τρύπα:

1. μόνο στα άκρα του μεγάλου άξονα

2. μόνο στα άκρα του μικρού άξονα

3. μόνο στα άκρα του μικρού άξονα και στο ένα άκρο του μεγάλου άξονα

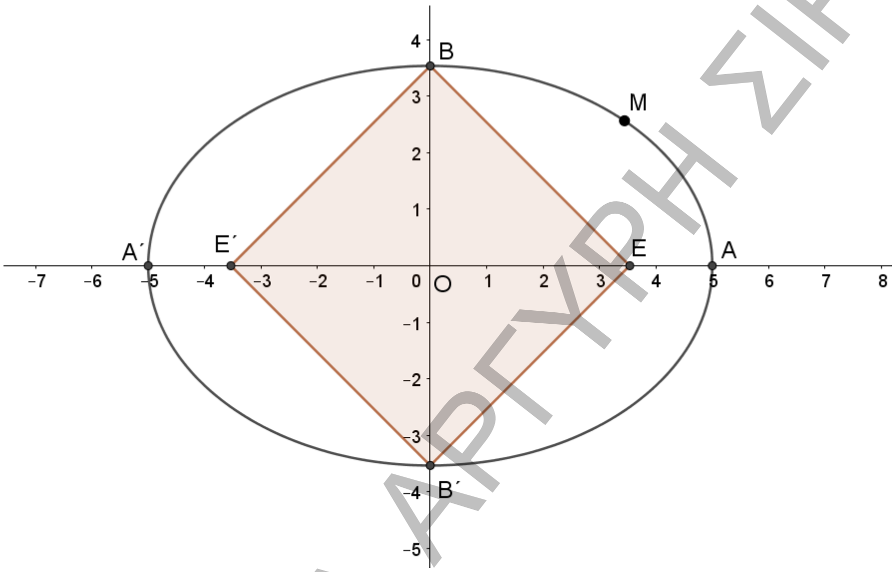
4. σε οποιοδήποτε σημείο της C εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα

Επιλέξτε τη μοναδική σωστή απαντήσεις αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες (10+5+10)=25

4. **ΘΕΜΑ Δ** **3.3** **21655**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η έλλειψη C με κέντρο το $O(0,0)$, εστίες τα σημεία E, E' και κορυφές τα σημεία $A(5,0), A'(-5,0), B, B'$. Αν είναι γνωστό ότι το τετράπλευρο $BEB'E'$ είναι τετράγωνο, να βρείτε:



α. τις συντεταγμένες των σημείων B, B', E, E'.

β. την εξίσωση της έλλειψης C.

γ. Έστω M τυχαίο σημείο της C, που δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα A, A'.

- **i.** να αποδείξετε ότι όλα τα τρίγωνα EME' έχουν την ίδια περίμετρο την οποία να προσδιορίσετε.
- **ii.** να βρείτε τις συντεταγμένες του M για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου EME' παίρνει τη μέγιστη τιμή του, την οποία και να προσδιορίσετε.

Μονάδες $[8+7+(5+5)]=25$

5. **ΘΕΜΑ Δ** **3.3** **22273**

Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

α. Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας τις συντεταγμένες :

i. Των σημείων που η έλλειψη τέμνει τους άξονες x'x και y'y.

ii. Των εστιών Ε και Ε' της έλλειψης.

β. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Α(0 , 4) και εφάπτονται στη καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1).

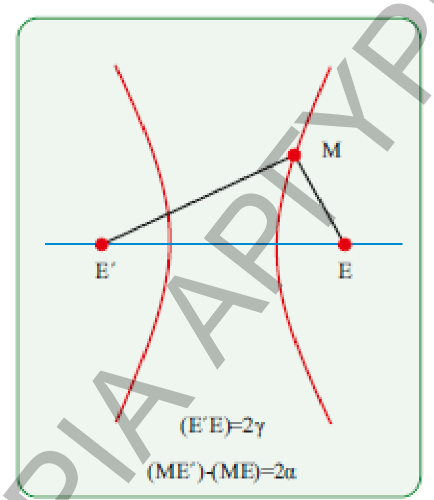
Μονάδες (12+13)=25

3.4 Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Ορισμός Υπερβολής

Έστω E' και E δύο σημεία ενός επιπέδου.

Ονομάζεται **υπερβολή** με εστίες τα σημεία E' και E ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερή και μικρότερη του $(E'E)$.

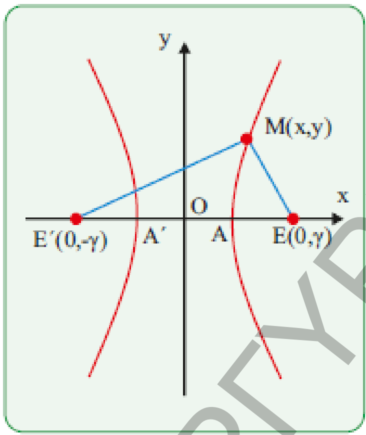


Την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων κάθε σημείου της υπερβολής από τις εστίες την παριστάνουμε συνήθως με 2α, ενώ την απόσταση των εστιών με 2γ.

Η απόσταση $E'E$ ονομάζεται **εστιακή απόσταση** της υπερβολής.

Η εξίσωση της υπερβολής C με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$, και σταθερή διαφορά 2α είναι :

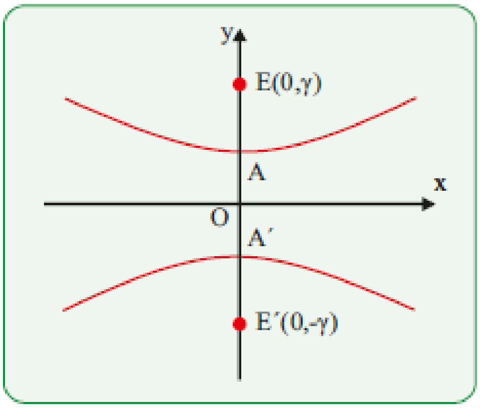
$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1, \quad \text{όπου} \quad \beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$$



Η εξίσωση της υπερβολής C με εστίες τα σημεία $E'(0,-\gamma)$, $E(0,\gamma)$ και σταθερή διαφορά 2α, είναι :

$$\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1, \quad \text{όπου} \quad \beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}\,.$$

- Τέλος, αν είναι $\alpha=\beta$, τότε η υπερβολή λέγεται **ισοσκελής** και η εξίσωσή της γράφεται: $x^2-y^2=\alpha^2$.



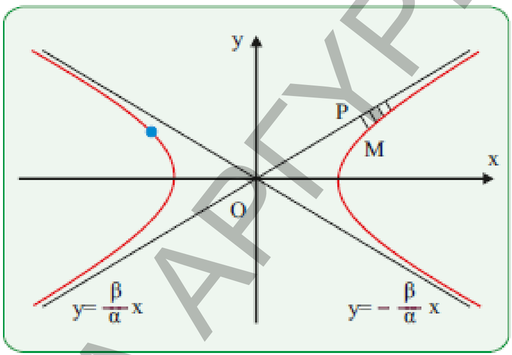
Ασύμπτωτες Υπερβολής

Οι **ασύμπτωτες** της υπερβολής

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

είναι οι ευθείες :

$$y=\frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{και} \quad y=-\frac{\beta}{\alpha}x$$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ένας μνημονικός κανόνας για να βρίσκουμε κάθε φορά τις ασύμπτωτες μιας υπερβολής είναι ο εξής: Παραγοντοποιούμε το πρώτο μέλος της εξίσωσης της υπερβολής και εξισώνουμε κάθε παράγοντα με μηδέν.

Εκκεντρότητα Υπερβολής

Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της υπερβολής

$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, και τη συμβολίζουμε με **ε**, το λόγο $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}>1$.

Εφαπτομένη Υπερβολής

Αν η υπερβολή C έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1,$$

τότε η εφαπτομένη της στο σημείο της $M_1(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση :

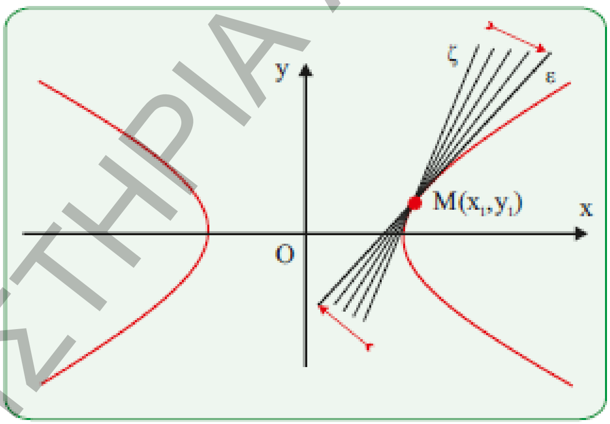
$$\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1$$

Αν η υπερβολή C έχει εξίσωση

$$\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1,$$

τότε η εφαπτομένη της στο σημείο της $M_1(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση :

$$\frac{yy_1}{\alpha^2}-\frac{xx_1}{\beta^2}=1$$



3.4 Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ (15)

1. ΘΕΜΑ Β 3.4 16128

Δίνεται η υπερβολή $(C): \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E' και E.

β. Αν το N είναι τυχαίο σημείο της (C), να βρείτε την τιμή της διαφοράς $|(NE')-(NE)|$

γ. Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C).

Μονάδες (10+5+5)=25

2. ΘΕΜΑ Β 3.4 17942

Δίνεται η κωνική τομή με εξίσωση $(C)\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

α. Να προσδιορίσετε το είδος της κωνικής τομής και να βρείτε μία εστία της.

β. Να εξετάσετε αν το σημείο Μ(1,2022) μπορεί να ανήκει στην (C).

Μονάδες (12+13)=25

3. ΘΕΜΑ Β 3.4 20721

Δίνεται η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

α. Να βρείτε τις εστίες της C.

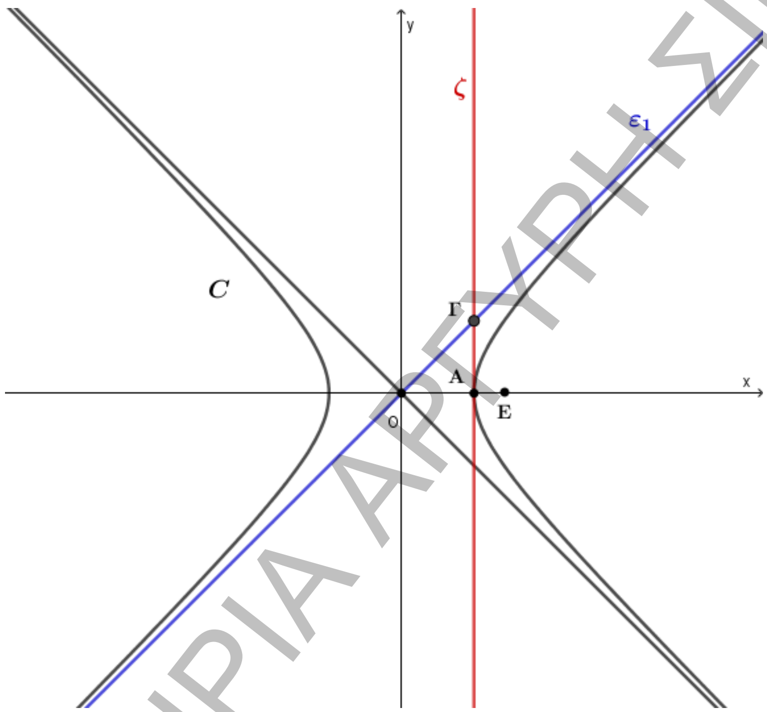
β. Να βρείτε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της C.

γ. Να σχεδιάσετε την υπερβολή C και τις ασύμπτωτές της στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Μονάδες (8+8+9)=25

4. ΘΕΜΑ Β 3.4 20869

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται η υπερβολή $C: x^2 - y^2 = 1$, η εστία της E, η εφαπτομένη της ζ στο σημείο $A(1,0)$ και το σημείο Γ στο οποίο αυτή τέμνει την ασύμπτωτη ευθεία ε_1 της υπερβολής.



α. Να βρείτε τις εστίες E', E και τις ασύμπτωτες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της υπερβολής.

β. **i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ζ.

ii. Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(1,1)$.

Μονάδες $(10+7+8)=25$

5. ΘΕΜΑ Β 3.4 21218

Δίνονται οι υπερβολές $(C_1): x^2 - y^2 = 1$, $(C_2): y^2 - x^2 = 1$.

α. Να αποδείξετε ότι οι εστίες της C_1 είναι οι $E_1\left(\sqrt{2},0\right), E'_1\left(-\sqrt{2},0\right)$.

β. Αν E_2, E'_2 οι εστίες της C_2 τότε να αποδείξετε ότι το $E_1E_2E'_1E'_2$ είναι τετράγωνο.

Μονάδες (12+13)=25

6. ΘΕΜΑ Β 3.4 21649

Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$. Να βρείτε:

α. την εξίσωση της C.

β. τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της C.

γ. την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(5,\frac{9}{4})$.

Μονάδες (10+8+7)=25

7. ΘΕΜΑ Β 3.4 21651

Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4,0)$.

α. Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.

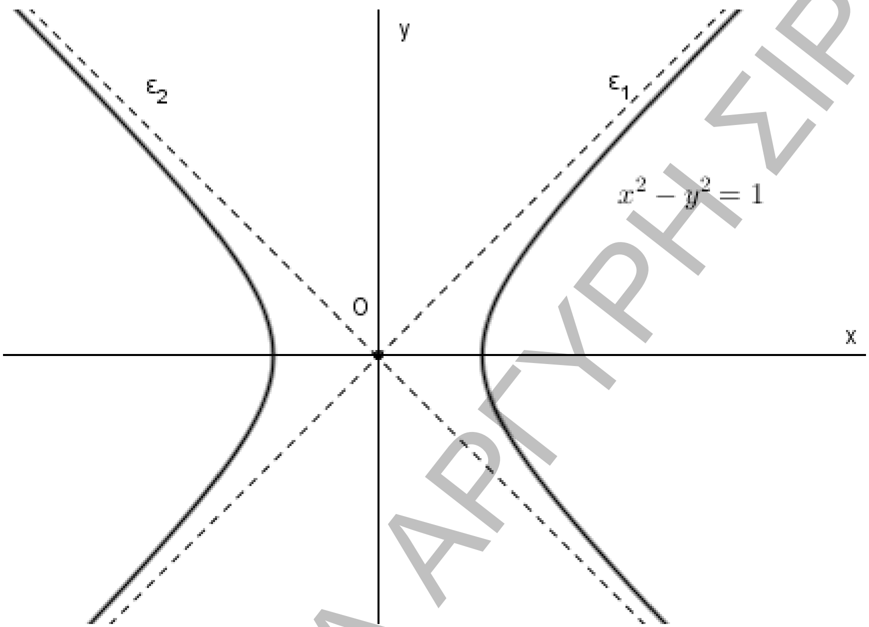
β. Να βρείτε την εξίσωση της C.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(5,\frac{9}{4})$.

Μονάδες (10+8+7)=25

8. ΘΕΜΑ Β 3.4 22051

Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$. Να αποδείξετε για τις ασύμπτωτες ευθείες ε_1 και ε_2 της υπερβολής ότι:



α. Συμπίπτουν με την διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου και την διχοτόμο του 2ου και 4ου τεταρτημορίου, αντίστοιχα.

β. Είναι ευθείες κάθετες μεταξύ τους.

Μονάδες (13+12)=25

9. ΘΕΜΑ Β 3.4 22169

Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με ασύμπτωτη την $y = \frac{3}{4}x$. Η απόσταση των κορυφών της Α και Α΄ είναι 8.

α. **i.** Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής.

ii. Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής;

β. Να βρείτε την εφαπτομένη της $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ στο σημείο της $(5,\frac{9}{4})$.

Μονάδες [(10+5)+10]=25

10. ΘΕΜΑ Β 3.4 22196

Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση $x^2-y^2=25$ (1)

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄.

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες (ε_1), (ε_2) της υπερβολής.

γ. Τι γωνία σχηματίζουν οι ασύμπτωτες (ε_1), (ε_2); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (10+10+5)=25

11. ΘΕΜΑ Β 3.4 22269

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση : $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ (1).

α. Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας :

i. Τις συντεταγμένες των εστιών της.

ii. Την εκκεντρότητά της.

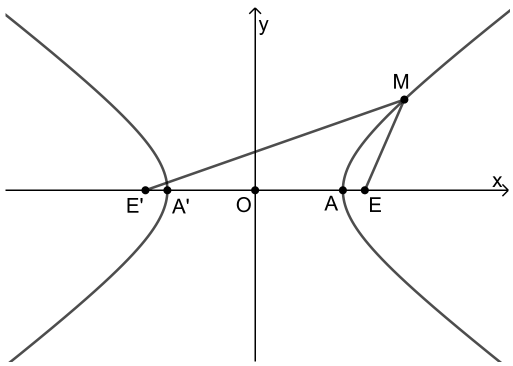
iii. Τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής.

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της, $A(\sqrt{5},\frac{1}{2})$.

Μονάδες (15+10)=25

12. ΘΕΜΑ Β 3.4 22559

Η υπερβολή στο παρακάτω σχήμα έχει εστίες τα σημεία $E'(-10,0)$ και $E(10,0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-8,0)$ και $A(8,0)$.



α. Να αποδείξετε ότι η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

β. Έστω M ένα σημείο της υπερβολής.

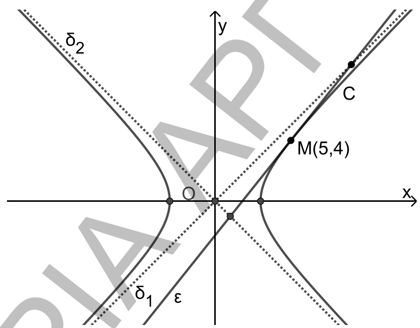
i. Να αποδείξετε ότι $|(ME')-(ME)|=16$.

ii. Αν $(ME)=9$, να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την εστία E'.

Μονάδες [12+(8+5)]=25

13. ΘΕΜΑ Β 3.4 22561

Στο παρακάτω σχήμα η υπερβολή C έχει εξίσωση $x^2-y^2=9$, οι ευθείες δ_1 και δ_2 είναι οι ασύμπτωτες της C και η ε είναι η εφαπτομένη της C στο σημείο της $M(5,4)$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. Οι εξισώσεις των ασυμπτώτων είναι $\delta_1: y=x$ και $\delta_2: y=-x$.

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι $\varepsilon: 5x-4y=9$.

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_1 καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_2.

Μονάδες [(8+8)+9]=25

14. ΘΕΜΑ Β 3.4 22566

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $4x^2 - y^2 = 4$.

α. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι Α(1,0) και Α΄(-1,0)

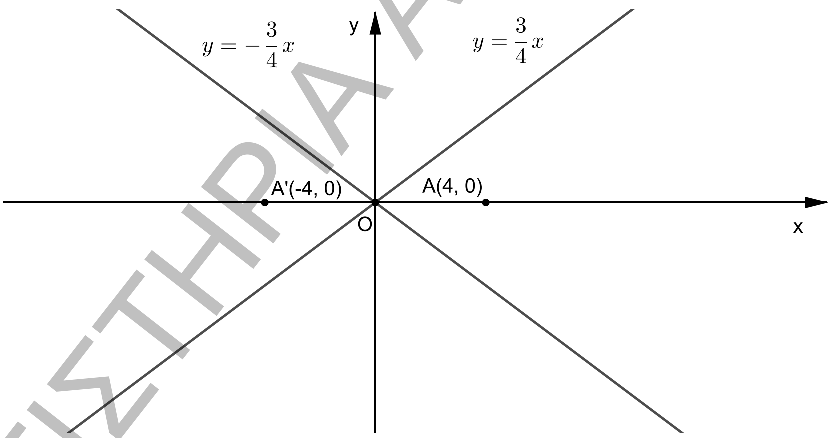
β. Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y = 2x$ και $y = -2x$.

γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Α και είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y = -2x$ έχει εξίσωση $y = -2x + 2$.

Μονάδες (8+9+8)=25

15. ΘΕΜΑ Β 3.4 22567

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy η υπερβολή $C: \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία $A'(-4,0)$ και $A(4,0)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \dfrac{3}{4}x$ και $y = -\dfrac{3}{4}x$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha = 4$ και $\beta = 3$,

ii. οι εστίες της C είναι τα σημεία $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$.

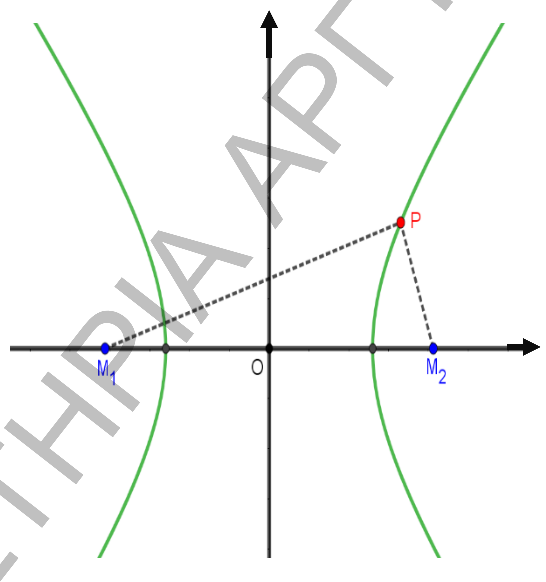
β. Να σχεδιάσετε το παρακάτω σχήμα, συμπληρώνοντάς το με την παραπάνω υπερβολή C.

Μονάδες [(10+10)+5]=25

3.4 Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ (4)

1. **ΘΕΜΑ Δ** **3.4** **20653**

Κατά τη διάρκεια μιας επιχείρησης εντοπισμού ενός αγνοούμενου σε μια αχανή δασώδη επίπεδη περιοχή, δύο παρατηρητές M_1 και M_2 βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία. Ο αγνοούμενος εκτοξεύει φωτοβολίδες που διαθέτει και οι δύο παρατηρητές σημειώνουν τις χρονικές στιγμές που ακούνε τον ήχο της εκπυρσοκρότησης του όπλου. Είναι γνωστό ότι ο παρατηρητής M_1 ακούει σε όλες τις εκρήξεις τον ήχο με διαφορά $4\,\text{sec}$ αργότερα από τον παρατηρητή M_2.



α. Αν ονομάσουμε P την θέση του αγνοούμενου, να αποδείξετε ότι $(PM_1)-(PM_2)=1360\text{ m}$. Θεωρούμε ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι 340 m/sec.

β. Να αποδείξτε ότι η θέση P του αγνοούμενου ανήκει σε έναν κλάδο υπερβολής με εστίες τα σημεία M_1 και M_2.

γ. Αν γνωρίζουμε ότι η απόσταση (M_1M_2) είναι $1378\ \mathrm{m}$, να αποδείξετε ότι αυτή η υπερβολή έχει εξίσωση $\dfrac{x^2}{680^2}-\dfrac{y^2}{111^2}=1$, θεωρώντας ως άξονα $x'x$ την ευθεία M_1M_2 και κέντρο της υπερβολής την αρχή των αξόνων. Δίνεται ότι $37^2=1369$.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

2. **ΘΕΜΑ Δ** **3.4** **21656**

Έστω υπερβολή C με κέντρο το $(0,0)$, εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και κορυφές τα σημεία $A(4,0), A'(-4,0)$.

α. Να βρείτε:

i. τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής C.

ii. την εξίσωση της υπερβολής C.

β. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα, την υπερβολή C, τις ασύμπτωτες της C και το ορθογώνιο βάσης της C.

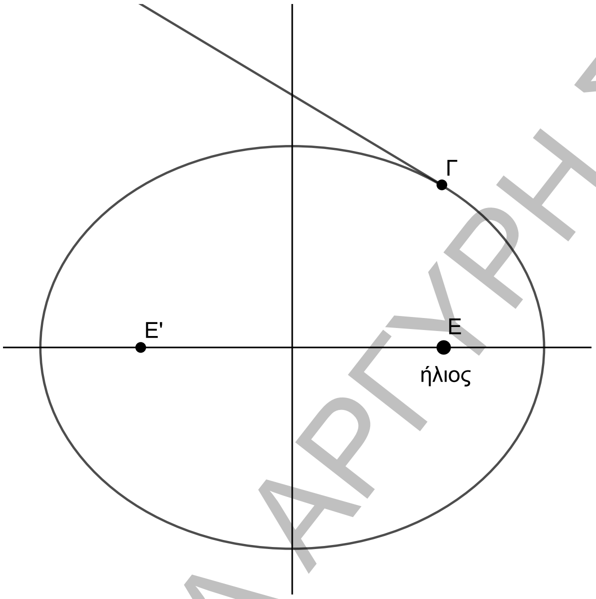
γ. Αν M τυχαίο σημείο της C, να βρείτε την τιμή της παράστασης $(ME)-(ME')$.

δ. Αν $M(\sqrt{80},6)$ σημείο της C, να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $E\hat{M}E'$.

Μονάδες $[(3+3)+9+5+5]=25$

3. **ΘΕΜΑ Δ** **3.4** **22174**

Πλανήτης κινείται πάνω σε επίπεδο, ελλειπτικά γύρω από τον ήλιο του. Στο καρτεσιανό επίπεδο ο ήλιος βρίσκεται στην εστία της έλλειψης Ε(γ,0), ενώ η άλλη εστία είναι στο Ε΄(-γ,0). Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι 0,6 ενώ ο μεγάλος άξονας 10.



α. Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς.

β. Θεωρούμε ότι ο πλανήτης κινείται πάνω στην $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

i. Τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο $\Gamma\left(3,\frac{16}{5}\right)$ εκπέμπεται από αυτόν σήμα που κινείται κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς του προς τη μεριά του άξονα Oy. Να εξετάσετε αν αυτό το σήμα θα περάσει από το σημείο Δ(0,5).

ii. Κομήτης κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη και πάνω στην καμπύλη $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ με $x>0$. Ποια είναι τα σημεία συνάντησης των δύο τροχιών;

Μονάδες [9+(9+7)]=25

4. **ΘΕΜΑ Δ** **3.4** **32206**

Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M(5,\frac{9}{4})$.

α. Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της C.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $E\hat{M}E'$.

δ. Να βρείτε το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ασύμπτωτές της.

Δίνεται ότι $\sqrt{1681} = 41$.

Μονάδες (7+6+6+6)=25

3.5 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $Ax^2+By^2+\Gamma x+\Delta y+E=0$ (1)

1. ΘΕΜΑ Δ 3.5 21657

Έστω υπερβολή C με κέντρο το $(0,0)$, εστίες πάνω στον άξονα xx' της οποίας το ορθογώνιο βάσης είναι τετράγωνο.

α. Να βρείτε:

i. τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της C.

ii. την εκκεντρότητα της C.

β. Αν η υπερβολή διέρχεται από το σημείο $(2,0)$ και (ζ) τυχαία ευθεία παράλληλη σε κάποια εκ των ασύμπτωτων της C (που δεν ταυτίζεται με κάποια από αυτές),

i. να δείξετε ότι η (ζ) έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την C.

ii. είναι η ευθεία (ζ) εφαπτόμενη της C; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

Μονάδες [(6+6)+(8+5)]=25

Σχετική Θέση Ευθείας και Κωνικής

Ας θεωρήσουμε μία ευθεία $y=\lambda x+\beta$ και μία κωνική τομή $Ax^2+By^2+\Gamma x+\Delta y+E=0$.

Η ευθεία ε και η κωνική C έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία, αφού το σύστημα

$$\begin{cases} y=\lambda x+\beta & (1) \\ Ax^2+By^2+\Gamma x+\Delta y+E=0 & (2) \end{cases}$$

έχει το πολύ δύο διακεκριμένες λύσεις.

Για την επίλυση του συστήματος θέτουμε στη (2), όπου $y=\lambda x+\beta$, οπότε προκύπτει μια δευτεροβάθμια εξίσωση.

— Αν η εξίσωση αυτή έχει δύο ρίζες άνισες ή μια απλή ρίζα (όταν είναι 1ου βαθμού), τότε η ευθεία και η κωνική τέμνονται.

— Αν η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες, δηλαδή αν είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα Δ=0, τότε αποδεικνύεται ότι η ευθεία εφάπτεται της κωνικής.

—Τέλος, αν η εξίσωση δεν έχει ρίζες, τότε η ευθεία και η κωνική δεν έχουν κοινά σημεία.

1. ΘΕΜΑ Α 21152

A. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε διάνυσμα στον χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.

ii. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_o,y_o)$ και είναι παράλληλη στον άξονα x΄x έχει εξίσωση $x = x_0$.

iii. Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\eta}=(A,B)$.

iv. Η παραβολή με εξίσωση $y^2=4x$ έχει εστία το σημείο $E(1,0)$.

v. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\rho^2$.

Μονάδες 10

B. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0,\ y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y-y_0=\lambda(x-x_0)$.

Μονάδες 15

2. ΘΕΜΑ Α 21973

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν ισχύει $|\vec{\alpha}|=\lambda|\vec{\beta}|$ τότε υποχρεωτικά $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$.

ii. Η εφαπτομένη του κύκλου C: $x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του Α (x_1, y_1), έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

iii. Η διευθετούσα της παραβολής $y^2 =2px$, έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$.

iv. Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης είναι μικρότερη της μονάδας.

v. Η εξίσωση: $x^2 + y^2 = \alpha^2$ είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής.

Μονάδες 10

B. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0,\ y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y-y_0=\lambda(x-x_0)$.

Μονάδες 15

1. **ΘΕΜΑ Γ** **2.3** **15152**

Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x+y+\alpha=0$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β.

β. Για ποιες τιμές του α, η απόσταση ΑΒ είναι ίση με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.

γ. Για $\alpha=4$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$.

Μονάδες $(5+8+12)=25$

2. **ΘΕΜΑ Γ** **2.2** **15178**

Δίνεται η εξίσωση $(\mu+1)x+(\mu+2)y=0,\ \mu\in\mathbb{R}\ \ (1)$.

α. **i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

β. **i.** Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης 0; Ποια είναι η εξίσωσή της;

ii. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης; Ποια είναι η εξίσωσή της;

γ. Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού μ, προκύπτει ευθεία η οποία σχηματίζει γωνία $45°$ με τον άξονα $x'x$. Ποια είναι η εξίσωσή της;

Μονάδες $[(8+2)+(3+3)+9]=25$

3. **ΘΕΜΑ Γ** **1.4** **17944**

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση της μορφής $(C): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, εστιακή απόσταση $EE' = 2\sqrt{7}$

και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2, \beta = \sqrt{3}$.

β. **i.** Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών A, A' της υπερβολής (C).

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής (C).

γ. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την υπερβολή (C), τις ασύμπτωτές της, τις εστίες της και τις κορυφές της.

Μονάδες [8+(4+4)+9]=25

4. **ΘΕΜΑ Γ** **1.4** **18243**

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$, $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα

$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} \text{ και } \vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}.$$

α. Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

β. Να βρείτε το $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$.

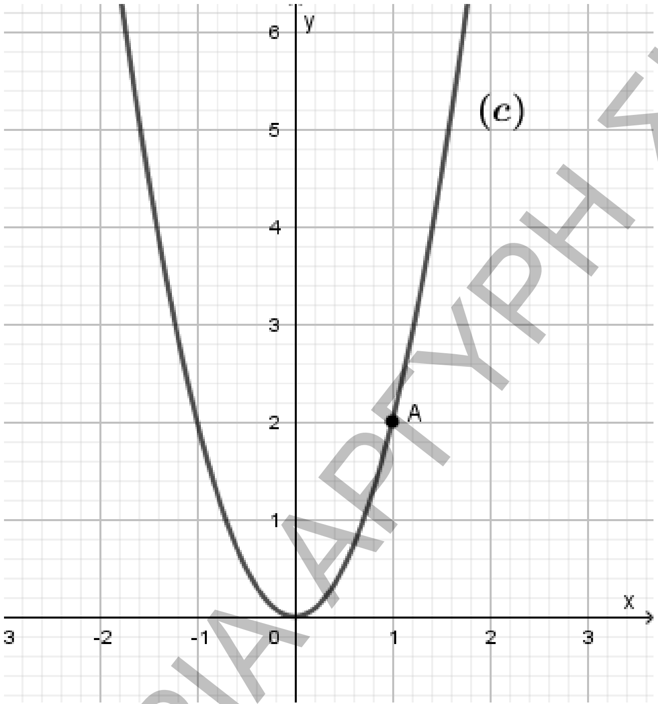
γ. Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|, |\vec{\delta}|$

δ. Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\gamma}, \vec{\delta}})$.

Μονάδες (5+7+8+5)=25

5. **ΘΕΜΑ Γ** **3.2** **20866**

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραβολής (c), που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον y΄y και διέρχεται από το σημείο Α(1,2).



α. Να βρείτε την εξίσωση, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

β. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α ως προς τον άξονα της παραβολής.

γ. **i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο $A'(-1,2)$.

ii. Να βρείτε το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα y΄y και στη συνέχεια να την σχεδιάσετε.

Μονάδες [6+4+(8+7)]=25

51

ΘΕΜΑΤΑ Γ

1. ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=3$ και $|\vec{\beta}|=2$ για τα οποία ισχύει

$$\left(7\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\right)\perp\left(\vec{\alpha}+6\vec{\beta}\right).$$

Γ1. Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-3$ και να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)$

Γ2. Αν είναι $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+3\cdot\vec{\beta}$ να δείξετε ότι $|\vec{\gamma}|=3\sqrt{3}$ και να βρείτε τη γωνία $\left(\vec{\gamma},\vec{\beta}\right)$

Μονάδες (10+15)=25

2. ΘΕΜΑ Γ

Έστω $|\vec{\alpha}|=1$ και $|\vec{\beta}|=2$ και $|3\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$. Να βρείτε:

Γ1. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

Γ2. Τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$.

Γ3. Το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $\vec{v}=\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ και $\vec{u}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

Μονάδες (8+5+12)=25

3. ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ τέτοια ώστε

$$|\vec{\alpha}|=2,\ |\vec{\beta}|=5\ ,\ \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=60^{\circ}\ \text{ και }\ (\vec{\gamma}-3\vec{\alpha})^{2}=0.$$

Γ1. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma}\uparrow\uparrow\vec{\alpha}$ και να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

Μονάδες (10+15)=25

4. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τέτοια ώστε, $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ και $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\frac{2\pi}{3}$. Να βρείτε:

Γ1. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

Γ2. το μέτρο του διανύσματος $\vec{w}=3\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

Γ3. τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{w}$.

Γ4. την τιμή του πραγματικού αριθμού λ, για τον οποίο τα διανύσματα $\vec{u}=\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, είναι κάθετα.

Μονάδες (5+6+7+7)=25

5. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τέτοια, ώστε $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

Αν είναι $\vec{u}=3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, τότε:

Γ1. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-3$

Γ2. Να δείξετε ότι: $|\vec{u}|=6$.

Γ3. Να δείξετε ότι: $\left(\widehat{\vec{u},\vec{\alpha}}\right)=\frac{\pi}{3}$

Μονάδες (5+8+12)=25

6. **ΘΕΜΑ Γ**

Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δυο διανύσματα για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(3,4) \quad \text{και} \quad 3\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(1,8).$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}=(1,3)$ και $\vec{\beta}=(2,1)$.

Γ2. Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Γ3. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=(8,9)$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Μονάδες (7+9+9)=25

7. **ΘΕΜΑ Γ**

Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$, $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ να βρείτε:

Γ1. Τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}$

Να υπολογίσετε

Γ2. το $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2$

Γ3. Το $|\vec{v}|$

Μονάδες (8+9+8)=25

8. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2, 1)$, $\vec{\beta}=(-5, 0)$ και $\vec{\gamma}=\vec{\beta}+x\vec{\alpha}$, $x\in R$.

Γ1. **i.** Βρείτε τις συντεταγμένες του $\vec{\gamma}$ **ii.** Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\gamma}$ δείξτε ότι $x=2$.

Γ2. Αν $x=2$ να βρείτε

i. το $|\vec{\gamma}|$ **ii.** το $\sigma\upsilon\nu(\vec{\beta},\vec{\gamma})$

Μονάδες (6+6+6+7)=25

9. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται τα σημεία: $A(-2, 4)$, $B(2, -1)$ και $\Gamma(-1, 3)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

Γ1. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\alpha}=\overrightarrow{B\Gamma}$ και το $|\vec{\alpha}|$.

Γ2. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\beta}=\overrightarrow{A\Gamma}$, το συντελεστή διεύθυνσής του $\lambda_{\vec{\beta}}$ και τη γωνία ω που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$.

Γ3. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u}=(-3,5)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

Γ4. Έστω Ε και Ε΄ σημεία του άξονα $x'x$ συμμετρικά ως προς το $O(0,0)$ τέτοια ώστε: $(E'E)=2|\vec{\alpha}|$. Να βρείτε την εξίσωση του γεωμετρικού τόπου των σημείων Μ του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση: $(ME)+(ME')=-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

Μονάδες (5+6+6+8)=25

10. **ΘΕΜΑ Γ**

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{4}$

Έστω επίσης το διάνυσμα $\vec{v}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.

Γ1. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

Γ2. Να βρείτε το $|\vec{v}|$

Γ3. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}$

Γ4. Να αποδείξετε ότι συν$\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$

Μονάδες (5+7+6+7)=25

11. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$.

Γ1. Να βρείτε το: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

Γ2. Αν $\vec{v}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{u}=\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}$ να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ να είναι κάθετα.

Γ3. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος: $\vec{m}=3\vec{\alpha}-\vec{\beta}$

Γ4. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων: $\vec{m}$ και $\vec{\alpha}$.

Μονάδες (4+7+7+7)=25

12. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,2)$, $\vec{\beta}=(3,\ -4)$ και $\vec{v}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

Γ1. Να βρείτε τα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}$

Γ2. Να βρείτε το $|\vec{\beta}|$

Γ3. i. Να υπολογίσετε το συν$(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ (μονάδες 6).

ii. Η γωνία $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ είναι αμβλεία ή οξεία; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (μονάδες 4)

Μονάδες [8+7+(6+4)]=25

13. ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με Α(1,4), Β(3,1) και Γ(4,6).

Γ1. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του.

Γ2. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

Γ3. Τί είδους είναι το τρίγωνο ως προς τις πλευρές και τις γωνίες;

Μονάδες (10+10+5)=25

14. ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση της γραμμής $(\varepsilon): \ (3\alpha+1)x+(1-5\alpha)y+10\alpha-2=0$, $\alpha\in R$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του α

Γ2. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που προκύπτουν για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ διέρχονται από ένα σταθερό σημείο το οποίο και να βρεθεί.

Γ3. Από το σύνολο των παραπάνω ευθειών να βρείτε την ευθεία (ε_1) που είναι παράλληλη με την ευθεία (η) : $y=-x+2018$.

Γ4. Να υπολογίσετε την απόσταση των δυο παραπάνω ευθειών (ε_1) και (η).

Μονάδες (5+7+7+6)=25

15. ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(2,4) , Β(1,2) , Γ(3,3) .

Γ1. Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΒΓ

Γ2. Να βρείτε την απόσταση της κορυφής Α από την πλευρά ΒΓ

Γ3. Αν Μ μέσο της πλευράς ΒΓ να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου της ΒΓ

Γ4. Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΜ

Γ5. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές στην κορυφή Β

Μονάδες (5+5+6+5+4)=25

16. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με Α(1,3), Β(-2,-7) και Γ(4,-1). Να βρείτε:

Γ1. την εξίσωση του ύψους ΑΔ

Γ1. την εξίσωση της μεσοκαθέτου της ΒΓ.

Γ1. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες (8+9+8)=25

17. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται τρίγωνο με κορυφές Α(4,9) , Β(1,3) και Γ(7,0). Να βρείτε:

Γ1. το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

Γ2. την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.

Γ3. την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ όπου Μ το μέσο της ΒΓ.

Γ4. το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ΒΓ.

Μονάδες (6+6+6+7)=25

18. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1,5)$, $B(-6,3)$, $\Gamma(2,1)$

Γ1. Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ

Γ2. Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u}=(\lambda,\lambda)$, $\lambda\in R$ είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ για κάθε $\lambda\in R$.

Γ3. Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες (8+8+9)=25

19. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται τα σημεία Α(2,2) , Β(3,4) και Γ(t,2t) , $t\in R$. Να βρείτε:

Γ1. την εξίσωση της ευθείας ΑΒ , καθώς και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

Γ2. την απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία ΑΒ και να δείξετε ότι το Γ κινείται σε ευθεία παράλληλη στην ΑΒ.

Γ3. το συμμετρικό του σημείου Ο(0,0) ως προς την ευθεία ΑΒ.

Μονάδες ()=25

20. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $A(1\,,2)$, $B(-2\,,5)$, $\Gamma(5\,,6)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η γωνία Α του τριγώνου είναι ορθή.

Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από την κορυφή Α του τριγώνου και είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου.

Μονάδες (7+8+10)=25

21. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η εξίσωση (ε_λ): $(\lambda+2)x-(2\lambda+1)y+3=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (ε_λ) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Γ2. Για λ=1 να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1), το σημείο Α στο οποίο η ευθεία (ε_1) τέμνει τον άξονα $x'x$ και την απόσταση του σημείου Ο (0,0) από την (ε_1).

Γ3. Για $\lambda=0$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_0), το σημείο Β στο οποίο η ευθεία (ε_0) τέμνει τον άξονα $y'y$, το σημείο τομής Γ των ευθειών (ε_0) και (ε_1) και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Γ4. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες (ε_λ) διέρχονται από το σταθερό σημείο Γ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα και να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου από τα οποία δε διέρχεται καμιά ευθεία από αυτές που παριστάνει η εξίσωση (ε_λ).

Μονάδες (5+6+7+7)=25

22. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές $A(1\,,\,1)$, $B(4\,,\,4)$ και $\Gamma(3\,,\,1)$.

Γ1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

Γ2. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΑΒ.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του μέσου Μ από την ευθεία ΒΓ είναι $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες (6+6+7+6)=25

23. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται τα σημεία $A(5, 3)$ $B(-1, 8)$ $\Gamma(4, 0)$

Γ1. Να αποδείξετε ότι δεν είναι συνευθειακά .

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην ΒΓ

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες (10+10+5)=25

24. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται το σημείο του επιπέδου $M(2t+1,\ 4t+3)$, $t \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι η ευθεία $\varepsilon: 2x - y + 1 = 0$.

Γ2. Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου $O(0,\ 0)$ από την ευθεία ε .

Γ3. Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει από το $O(0,\ 0)$ την ελάχιστη δυνατή απόσταση.

Μονάδες (9+7+9)=25

25. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται τα σημεία $A(1,\ 2)$, $B(-1,\ 1)$, $\Gamma(2,\ 4)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α , Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου.

Γ2. Να βρείτε σημείο Δ, ώστε το ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο.

Γ3. Να βρείτε το κέντρο Κ του παραλληλογράμμου.

Μονάδες (7+9+9)=25

26. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται τα σημεία $A(\kappa,\ \kappa+1)$, $B(1,\ \kappa)$, $\Gamma(0,\ \kappa+2)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε τις τιμές του $\kappa = 1$ ώστε τα σημεία Α, Β, Γ να ορίζουν τρίγωνο.

Γ2. Για $\kappa = 1$, να υπολογίσετε:

α. το μήκος της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ,

β. την τιμή της παράστασης $\overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{\Gamma A})$.

Μονάδες [8+(9+8)]=25

27. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-2)x+(\lambda^2-5\lambda+6)y-\lambda+2=0,\ \lambda\in\mathbb{R}\ (1)$.

Γ1. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, ώστε η (1) να παριστάνει ευθεία.

Γ2. Να δείξετε ότι (για τα κατάλληλα $\lambda\in\mathbb{R}$) οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρείτε.

Γ3. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία της (1) με τους άξονες να είναι $\frac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

Γ4. Για $\lambda=4$ να βρείτε την απόσταση του σημείου $O(0,0)$ από την ευθεία.

Μονάδες (6+7+6+6)=25

28. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται τα σημεία $A(4,9)$, $B(3,2)$ και $\Gamma(12,5)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου.

Γ2. Να βρείτε τις εξισώσεις:

i. της διαμέσου ΒΜ. **ii.** του ύψους ΑΔ.

Γ3. Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΒΜ και ΑΔ, να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΑΚΒ.

Μονάδες [6+(6+6)+7]=25

29. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1,3)$, $B(-2,-7)$ και $\Gamma(4,-1)$

Γ1. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΑΔ του τριγώνου.

Γ2. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΑΔ με τον άξονα $x'x$.

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου: ΑΒΓ.

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου

Γ5. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία των ευθειών ΑΜ και ΑΔ

Μονάδες (5+5+5+5+6)=25

30. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται το σημείο $A(1,2)$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = x + 3$.

Γ1. Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε).

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς την (ε).

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΛ όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων και Κ, Λ είναι τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα .

Μονάδες (8+8+9)=25

31. **ΘΕΜΑ Γ**

Η αρχή Ο(0, 0) ενός συστήματος συντεταγμένων παριστάνει ένα σταθμό εκπομπής σημάτων, ενώ τα σημεία Α(3, 2) και Β(5, 1) παριστάνουν τις θέσεις δύο πλοίων. Η θέση ενός τρίτου πλοίου παριστάνεται από το σημείο Γ για το οποίο ισχύει: $\vec{O\Gamma} = 2\vec{OA} - \vec{OB}$

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

β. Αν η εμβέλεια του σταθμού εκπομπής (μέγιστη απόσταση στην οποία μπορεί να φτάσει το σήμα) είναι 5 μονάδες, να βρείτε με ποια από τα τρία πλοία μπορεί να επικοινωνήσει ο σταθμός.

Μονάδες (13+12)=25

32. **ΘΕΜΑ Γ**

Ένα επιβατηγό πλοίο εκτελεί το δρομολόγιο Πειραιάς– Ηράκλειο Κρήτης. Σε κάθε χρονική στιγμή t του ταξιδιού η θέση Μ του πλοίου ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy είναι: $M(2 + \kappa t, \lambda + 2t)$, όπου $\kappa, \lambda \in IR$.

Τη χρονική στιγμή t = 5 το πλοίο διέρχεται από το σημείο Α(7, 13).

α. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ .

β. Να αποδείξετε ότι το πλοίο διαγράφει γραμμή που βρίσκεται πάνω στην ευθεία (ε): $y = 2x - 1$.

γ. Ένα δελφίνι κινείται παράλληλα προς το πλοίο. Να βρείτε ένα διάνυσμα μήκους 1 κάθετο προς την ευθεία πάνω στην οποία κινείται το δελφίνι.

Μονάδες (7+10+8)=25

33. ## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές τα σημεία

$$A(2\lambda-1,3\lambda+2),\quad B(1,2)\ \text{ και }\ \Gamma(2,3),\ \text{ όπου }\ \lambda\in\mathbb{R}\ \text{ και }\ \lambda\neq 2.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α κινείται σε ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Εάν $\lambda=1$, να βρείτε:

i. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

ii. την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο το σημείο $A(1,5)$ και εφάπτεται στην ευθεία ΒΓ.

Μονάδες [8+(8+9)]=25

34. ## ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι κύκλοι $C_1:(x-1)^2+(y-4)^2=9$ και $C_2:x^2+y^2-14x+8y+61=0$,

η ευθεία $(\varepsilon):4x-3y+\mu=0$, $\mu\in\mathbb{R}$ και το σημείο $A(5,7)$

Γ1. Να βρείτε το κέντρο και η ακτίνα των κύκλων C_1, C_2 και να δειχθεί ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εκτός του άλλου.

Γ2. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση μεταξύ ενός σημείου του κύκλου C_1 από ένα σημείο του κύκλου C_2

Γ3. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση μεταξύ ενός σημείου του κύκλου C_1 από το σημείο $A(5,7)$

Γ4. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{AK_1}\perp\overrightarrow{K_1K_2}$ και έπειτα να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\overset{\triangle}{AK_1K_2}$, όπου K_1 και K_2 τα κέντρα των δύο κύκλων;

Γ5. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου μ για τις οποίες η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C_2

Μονάδες (6+5+5+4+5)=25

35. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η εξίσωση : $x^2+y^2+\lambda x-\lambda y=0$ (1), όπου $\lambda\neq 0, \lambda\in\mathbb{R}^*$

Γ1. Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}^*$ η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Γ2. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων.

Γ3. Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι C_λ που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από ένα σταθερό σημείο .

Γ4. Αν η ευθεία $y=x+2$ εφάπτεται του κύκλου (1) να βρείτε τις τιμές του λ .

Μονάδες (8+6+6+5)=25

36. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι εξισώσεις : $x^2+2xy+y^2-\lambda(x+y)=0$ (1) και

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2(8\lambda-15-\lambda^2) \quad (2), \quad \lambda=1,2,3,......,2015.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει 2016 ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, για τις διάφορες τιμές του λ .

Γ2. Να βρείτε όλες τις ευθείες της εξίσωσης (1) που σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. Ποια από αυτές ορίζει τρίγωνο εμβαδού 18τ.μ;

Γ3. Έστω ότι η εξίσωση (2) παριστάνει κύκλο C .

α. Να αποδείξετε ότι $\lambda=4$ και στη συνέχεια να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C .

β. Να αποδείξετε ότι μόνο δυο από τις 2016 ευθείες του ερωτήματος (1) είναι εφαπτόμενες του κύκλου C.

Μονάδες [6+6+(7+6)]=25

37. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+\lambda(x-y+2)=2$ (1), $\lambda\in\mathbb{R}$.

Γ1. να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο (c_λ).

Γ2. για $\lambda\neq 2$, να βρείτε

- **i.** το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ του κύκλου (c_λ).
- **ii.** το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων (c_λ).

Γ3. για $\lambda=-2$, να γράψετε

- **i.** την εξίσωση του κύκλου C και να δείξετε ότι το σημείο Α(3,5) είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου.
- **ii.** την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C που διέρχεται από το σημείο Α(3,5).

Μονάδες [4+(4+4)+(4+9)]=25

38. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η εξίσωση $C: x^2+y^2-(\lambda-4)x-(2\lambda+4)y+2\lambda+5=0$ (1)

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για $\lambda\in R$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που παριστάνει η εξίσωση (1) ανήκουν σε μια ευθεία.

Γ3. Έστω ότι το κέντρο του κύκλου C που παριστάνει η εξίσωση (1) βρίσκεται στην ευθεία ζ: 3x-2y+11=0.Να δείξετε ότι λ=2 και να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ του κύκλου C.

Γ4. Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου C στο σημείο του Α(1,2).

Μονάδες (6+5+9+5)=25

39. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η εξίσωση : (C): $(\lambda-1)x^2+(\lambda-1)y^2-2x+4\lambda y+1=0$ (1) με $\lambda\in\mathbb{R}$.

Γ1. Αφού προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο, να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου αυτού.

Γ2. Να αποδείξετε ότι, όταν το λ διατρέχει το σύνολο $\mathbb{R}-\{1\}$, τα κέντρα των κύκλων (C) βρίσκονται σε ευθεία.

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (C), ο οποίος διέρχεται από το σημείο Α(-2, 1)

Μονάδες (10+10+5)=25

40. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ (1)

Γ1. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει 2 ευθείες κάθετες

Γ2. Αν ε_1, ε_2 οι ευθείες που παριστάνει η (1) να βρείτε το σημείο τομής τους Α

Γ3. Αν η ε_3: $-x + 2y - 2 = 0$ τέμνει τις ε_1, ε_2 στα σημεία Β, Γ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Γ, όπου Α το σημείο τομής των ε_1, ε_2

Γ4. Αν Δ(2 , -1) σημείο του κύκλου $C: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 20$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο Δ

Γ5. Αν Ε(0,4) τυχαίο σημείο να εξετάσετε αν άγονται από αυτό εφαπτόμενες στον κύκλο C του **(Γ4)** ερωτήματος.

Μονάδες (8+2+8+5+2)=25

41. **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (y-2,\ x)$ και $\vec{\beta} = (y+2,\ x+2)$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο C_1 των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία είναι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος C_1 είναι κύκλος, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Γ3. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο $A(0,\ 5)$

Μονάδες (7+8+10)=25

42. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η εξίσωση $x(x-4) + y(y-2) = 2(x+y-4)$ (1).

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3\ ,2)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$.

Γ2. Δίνονται τα σημεία $A(4\ ,4)$ και $B(2\ ,0)$.

α. Να δείξετε ότι τα σημεία Α και Β είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

β. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο ΑΒ.

Μονάδες (9+7+9)=25

43. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι εξισώσεις:

$(C_1): x^2+y^2-6x+2y+\lambda+1=0$ και $(C_2): x^2+y^2-4x+4y+4\lambda+2=0$ με $\lambda\in\mathbb{R}$

Γ1. Για ποιες τιμές του λ οι παραπάνω εξισώσεις παριστάνουν κύκλους;

Γ2. Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες (συναρτήσει του λ) των παραπάνω κύκλων.

Γ3. Να αποδείξετε ότι για $\lambda=1$ οι εφαπτομένες τους σε ένα κοινό τους σημείο είναι κάθετες μεταξύ τους και να βρείτε την εξίσωση της κοινή τους χορδής.

Μονάδες (6+7+12)=25

44. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+(\lambda-2)x+\lambda y-\lambda=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$ (1).

Γ1. Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του λ, του οποίου να βρείτε το κέντρο του Κ και την ακτίνα.

Γ2. Για $\lambda=0$ να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του παραπάνω κύκλου C_1, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $\Delta(3,1)$.

Γ3. Έστω $N(\alpha,\beta)$ σημείο που κινείται στον παραπάνω κύκλο C_1 (για $\lambda=0$) και Μ σημείο του ίδιου επιπέδου για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{KN}$. Να δείξετε ότι το Μ κινείται σε κύκλο, τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Γ4. Αν Β, Γ δύο σημεία του C_1 με $(B\Gamma)=2$ και Λ σημείο του ίδιου επιπέδου τέτοιο ώστε $\overrightarrow{B\Lambda}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Lambda}=0$, να υπολογίσετε την παράσταση $(B\Lambda)^2+(\Gamma\Lambda)^2$, δικαιολογώντας το αποτέλεσμα.

Μονάδες (7+6+6+6)=25

45. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η εξίσωση: $x^2+y^2-2\lambda x+2(1-\lambda)y+2\lambda^2-2\lambda-24=0$ (1), με $\lambda\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) για κάθε τιμή της παραμέτρου λ παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία κινείται το κέντρο του κύκλου για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

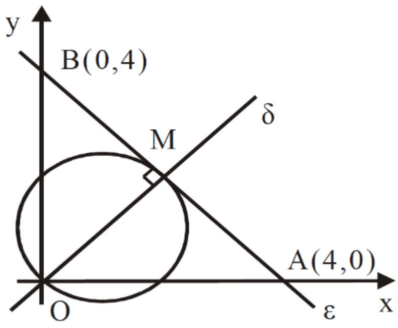
Γ3. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες ο κύκλος που προκύπτει εφάπτεται στην ευθεία $4x-3y+20=0$.

Γ4. Έστω (C_1) ο κύκλος που προκύπτει από την (1) για $\lambda=2$. Να εξετάσετε αν το σημείο $A(-2,5)$ είναι εσωτερικό ή εξωτερικό σημείο του κύκλου.

Μονάδες (6+7+7+5)=25

46. **ΘΕΜΑ Γ**

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy του παρακάτω σχήματος, δίνονται τα σημεία A(4,0) και B(0,4), η ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία A και B και η ευθεία δ που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και είναι κάθετη προς την ευθεία ε.



α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ε είναι x+y=4.

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας δ.

γ. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των ευθειών δ και ε.

δ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα OM.

Μονάδες (5+5+5+10)=25

47. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $C_1: y^2=4x$ και η εξίσωση

$$C_2: x^2+y^2-6\kappa x+2(\kappa-1)y+2\kappa-1=0, \kappa\in\mathbb{R}.$$

Γ1. Να βρείτε την εστία Ε και τη διευθετούσα δ της παραβολής.

Γ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση (C_2) παριστάνει κύκλο για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$ και για κ=1 να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Γ3. Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής $y^2=4x$ που είναι παράλληλη με την ευθεία $y=2x+1$.

Μονάδες (9+9+7)=25

48. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2\lambda^2 x-4\lambda y+\lambda^2=0$ (1) όπου $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}^*$ του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

Γ2. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα όλων των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε παραβολή από την οποία εξαιρείται η κορυφή της.

Γ3. Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής του ερώτηματος (Β).

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραπάνω παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία $y=-\frac{1}{2}x+2$

Μονάδες (5+8+5+7)=25

49. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση: $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$

Γ1. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των κορυφών, των εστιών καθώς επίσης και τη εκκεντρότητα της έλλειψης.

Γ2. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της έλλειψης οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία $(\eta):\ x-y+2=0$

Μονάδες (10+15)=25

50. **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Να βρείτε η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο την αρχή των αξόνων, μεγάλο άξονα πάνω στον άξονα των $y'y$ και διέρχεται από τα σημεία $A(3,\ 4)$ και $B(2,\ 6)$

Γ2. Αν η εξίσωση έλλειψης του ερωτήματος (Α) είναι $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{52}=1$

Να βρείτε :

i. Τον μεγάλο άξονα

ii. Τον μικρό άξονα

iii. Τις εστίες

iv. Την εκκεντρότητα

Μονάδες (13+12)=25

51. **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η υπερβολή $C_1:\ 16x^2-9y^2=144$ και η γραμμή $C_2:\ x^2+y^2-6x-2y+9=0$

Γ1. Να βρείτε τις εστίες και τις ασύμπτωτες της υπερβολής C_1

Γ2. Να αποδείξετε ότι η γραμμή C_2 είναι κύκλος του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Γ3. Να εξετάσετε τη σχετική θέση του κύκλου C_2 και της ασύμπτωτης της υπερβολής που σχηματίζει οξεία γωνία με τον $x'x$.

Γ4. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες (6+6+6+7)=25

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Ο.Ε.Φ.Ε.

16

2016-17-18-19-20-21-22-2023

Α΄-Β΄ ΦΑΣΗ

ΟΜΟΣΠΟΝΔΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Α ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2 y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Δείξτε ότι $\vec{a}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2$.

(15 μονάδες)

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εξίσωση $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ με $\mathrm{A}\neq 0$ ή $\mathrm{B}\neq 0$ παριστάνει πάντοτε ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$.

β) Αν $\vec{a}\vec{\beta}+|\vec{a}||\vec{\beta}|=0$ τότε $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

γ) Ισχύει $\vec{a}\cdot\vec{\beta}=\vec{a}\cdot\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{a}$, $\vec{\beta}\neq\vec{0}$.

δ) Αν η γωνία της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ είναι 90° τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι 0.

ε) Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, που σχηματίζουν γωνία θ ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{a}||\vec{\beta}|}$.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία Α(1,2), Κ(-1,4) και το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}=(4,3)$.

Β1. Βρείτε το συμμετρικό Β, του σημείου Α ως προς το Κ.

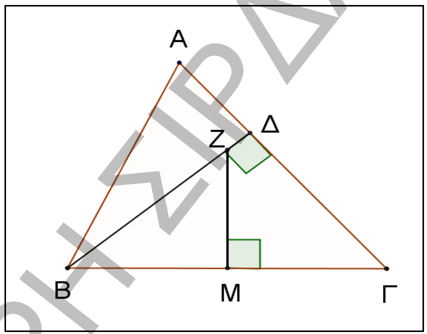
Β2. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ και του $\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}$, που είναι η $\text{προβ}_{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}$.

Β3. Υπολογίστε το μέτρο $|\overrightarrow{\mathrm{AK}}-2\overrightarrow{\mathrm{K}\Gamma}|$.

(7-10-8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Γ(5, 4).
Η πλευρά ΑΒ έχει εξίσωση $2x-y+4=0$, ενώ το ύψος ΒΔ έχει εξίσωση $y=11-5x$.



Γ1. Βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Β.
Γ2. Βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΓ.
Γ3. Αν Β(1, 6) τότε βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς ΒΓ και το σημείο τομής Ζ, της μεσοκαθέτου με το ύψος ΒΔ.

(7,8,10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Δίνονται τα σημεία Α(κ, 5) και Β(4, κ+4), $\kappa\in\mathbb{R}$.
Βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ του ΑΒ.

Δ2. Αν η ευθεία (ε), που διέρχεται από τα Α(κ,5) και Β(4, κ+4) είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon_1: y-2x+5=0$, τότε να βρείτε τον $\kappa\in\mathbb{R}$ και να δείξετε ότι η ευθεία (ε) έχει εξίσωση: $2x-y-1=0$.

Δ3. Έστω τα διανύσματα $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{a}-2\vec{\beta}$, όπου $\vec{a},\vec{\beta}$ διανύσματα με $|\vec{a}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$ και $\left(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

α) Βρείτε το γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{v}$ και το μέτρο $|\vec{v}|$.

β) Βρείτε το σημείο Γ της ευθείας (ε) του ερωτήματος Δ2 και τον $\mu\in\mathbb{R}$ ώστε:

$$(\vec{u}\vec{v})\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}+\left(|\vec{v}|^2-2\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4,\mu+1).$$

(6,7,6,6 μονάδες)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Ιανουαρίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ με $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \not\parallel y'y$ και συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

$$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2=-1$$

Μονάδες 15

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,-A)$.

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μίας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι: $\lambda=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

γ) Οι συντεταγμένες (x,y) του διανύσματος με άκρα τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις $x = x_2+ x_1$ και $y = y_2 + y_1$.

δ) Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι διανύσματα του επιπέδου τότε ισχύει πάντα $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$.

ε) Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με $\vec{\beta}\neq\vec{0}$ τότε $\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 10

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Έστω δύο κυκλικά ρολόγια τοίχου με δείκτες. Το πρώτο βρίσκεται στην Αθήνα και το δεύτερο στο Λονδίνο. Τα ρολόγια λειτουργούν άψογα και δείχνουν την ώρα στην Αθήνα και στο Λονδίνο αντίστοιχα. Το ρολόι που βρίσκεται στην Αθήνα έχει λεπτοδείκτη μήκους 4cm και ωροδείκτη μήκους 3cm. Το ρολόι που βρίσκεται στο Λονδίνο έχει λεπτοδείκτη μήκους 8cm. Θεωρούμε το λεπτοδείκτη και τον ωροδείκτη του ρολογιού που βρίσκεται στην Αθήνα ως διανύσματα $\vec{\lambda}_A, \vec{\omega}_A$ αντιστοίχως, με κοινή αρχή το κέντρο του ρολογιού. Αναλόγως $\vec{\lambda}_\Lambda, \vec{\omega}_\Lambda$ είναι τα διανύσματα του λεπτοδείκτη και του ωροδείκτη αντιστοίχως, του ρολογιού που βρίσκεται στο Λονδίνο, με κοινή αρχή το κέντρο του ρολογιού.

Β1. Να βρείτε την τιμή του εσωτερικού γινομένου $\vec{\lambda}_A \cdot \vec{\omega}_A$:

i) Όταν η ώρα στην Αθήνα είναι 06:00 π.μ.

Μονάδες 6

ii) Κάποια χρονική στιγμή κατά την οποία η απόσταση του πέρατος του $\vec{\lambda}_A$ από το πέρας του $\vec{\omega}_A$ είναι 5cm.

Μονάδες 7

Β2. Να βρείτε το μήκος του ωροδείκτη του ρολογιού που βρίσκεται στο Λονδίνο αν στις 04:00π.μ. ώρα Αθήνας, ο λόγος του εσωτερικού γινομένου των δεικτών του ρολογιού που βρίσκεται στο Λονδίνο προς το εσωτερικό γινόμενο των δεικτών του ρολογιού που βρίσκεται στην Αθήνα, είναι ίσος με –4.

Μονάδες 12

Δίνεται ότι η ώρα στο Λονδίνο είναι δύο ώρες ακριβώς πίσω από την ώρα στην Αθήνα.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x$ και τα σημεία του επιπέδου $A\left(\frac{\kappa^2+1}{2}, 2\kappa\right)$, $\kappa \in \mathbb{R}$ και $B\left(\mu, \frac{1}{2}\mu\right)$, $\mu > 0$.

Γ1. **i)** Αν η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο Α, να βρείτε τις συντεταγμένες του Α.

Μονάδες 4

ii) Αν ισχύει $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{5}$ όπου $O(0,0)$ η αρχή των αξόνων, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β.

Μονάδες 4

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\overrightarrow{OA}=(1,2)$, $\vec{\beta}=\overrightarrow{OB}=(2,1)$, $\vec{\gamma}=(x,y)$ και $\vec{\delta}=(y,x)$ με $xy\neq 0$.

Γ2. Αν $\omega=(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$, $\varphi=(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\delta}})$ και $\vec{\alpha}\perp\vec{\gamma}$ να αποδείξετε ότι:

i) $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{4}{5}$

Μονάδες 3

ii) $x=-2y$ και $\vec{\beta}\perp\vec{\delta}$

Μονάδες 4

iii) οι γωνίες φ και ω είναι παραπληρωματικές.

Μονάδες 4

Γ3. Να αποδείξετε ότι

i) Τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ δεν είναι παράλληλα.

Μονάδες 3

ii) Το παραλληλόγραμμο που κατασκευάζεται από τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η ευθεία (ζ) με εξίσωση: $y=-\frac{3}{4}x-2017$

Δ1. **i)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε), η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ) και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Α με τεταγμένη 3.

Μονάδες 4

ii) Αν η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $3x+4y-12=0$ να βρείτε το σημείο τομής Β της ευθείας (ε) με τον άξονα x΄x.

Μονάδες 4

Δ2. Αν είναι Α(0,3) και Β(4,0) τότε:

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ αν ισχύει:

$$\overrightarrow{A\Delta}=\frac{9}{25}\overrightarrow{AB}$$

Μονάδες 5

ii) Αν είναι $\Delta\left(\frac{36}{25},\frac{48}{25}\right)$, να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΟΔ είναι το ύψος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΟΒ προς την υποτείνουσα.

Μονάδες 5

Δ3. Θεωρούμε το σημείο $\Gamma(3,0)$. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ ισχύει:

$$\left(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{O\Gamma}\right)^2=\left(3\left|\overrightarrow{OM}\right|\right)^2$$

Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2018
Α΄ ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Παρασκευή 5 Ιανουαρίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ και $\vec{\gamma}=(x_3,y_3)$ διανύσματα του επιπέδου Oxy να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$

Μονάδες 10

Α2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον τύπο που υπολογίζει τον συντελεστή διεύθυνσης λ μίας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ με $x_1\neq x_2$.

Μονάδες 5

Α3. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις, να γράψετε στο τετράδιό σας δίπλα από το κάθε γράμμα τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **ΛΑΘΟΣ,** αν είναι λανθασμένη.

(α) Αν $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ δύο σημεία του επιπέδου Oxy τότε οι συντεταγμένες (x,y) του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

(β) Αν $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ δύο ευθείες με συντελεστές διεύθυνσης λ_1,λ_2 αντίστοιχα, τότε ισχύει $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1\cdot\lambda_2=-1$.

(γ) Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ δύο διανύσματα του επιπέδου Oxy τότε:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2$$

(δ) Αν $\vec{\alpha}//x'x$ τότε δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

(ε) Η εξίσωση μιας κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ είναι η $x = x_0$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{u} = \left(\sqrt{3}, \kappa\right),\ \vec{v} = \left(3, -\sqrt{3}\right)$$ με $\kappa > 0$ τα οποία έχουν ίσα μέτρα.

Β1. Να δείξετε ότι $\kappa = 3$.

Μονάδες 8

Β2. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ είναι κάθετα.

Μονάδες 5

Β3. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} + \vec{v}$.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{u} + \vec{v}$ και $\vec{u}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(1,1)$, $B(2,3)$, $\Gamma(5,3)$

Γ1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

Μονάδες 8

Γ2. **(i)** Να αποδείξετε ότι το μέσο M της πλευράς $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ έχει συντεταγμένες $(3,2)$. (Μονάδες 3)

(ii) Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος της πλευράς $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ έχει εξίσωση $(\varepsilon): y = -2x + 8$. (Μονάδες 7)

Μονάδες 10

Γ3. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ του επιπέδου Oxy για το οποίο το $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y=|\vec{\alpha}|x+|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$ η οποία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,2)$. Αν για το διάνυσμα $\vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\beta}=\left(1,|\vec{\beta}|-1\right)$ να δείξετε ότι:

Δ1. (i) $|\vec{\alpha}|=1$ (Μονάδες 5)

(ii) $|\vec{\beta}|=1$ (Μονάδες 5)

Δ2. $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ (Μονάδες 8)

Δ3. Οι ευθείες $\varepsilon_1: y=2x-\lambda+2$ και $\varepsilon_2: y=\lambda x-\lambda^2+\lambda+2$ με $\lambda\in\mathbb{R}-\{2\}$ τέμνονται για κάθε $\lambda\neq 2$ σε σημείο το οποίο κινείται πάνω στην (ε). (Μονάδες 7)

Μονάδες 25

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2019
Α΄ ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Δευτέρα 7 Ιανουαρίου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Δίνεται ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και ένα σημείο αναφοράς Ο. Για την διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου Μ, του τμήματος ΑΒ, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

(8 Μονάδες)

Α2. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$;

(7 Μονάδες)

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι δυο μη μηδενικά διανύσματα τότε $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = -1$.

ii. Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι ίση με $(AB) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

iii. Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$ είναι ένα διάνυσμα με $x \neq 0$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσής του είναι $\lambda = \dfrac{y}{x}$.

iv. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι δυο μη μηδενικά διανύσματα τότε $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.

v. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ έχει εξίσωση $x = x_0$.

(10 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

B1. Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

(5 Μονάδες)

B2. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $(\vec{\beta} + \lambda\vec{\alpha})(\lambda\vec{\beta} - \vec{\alpha}) = 3$.

(6 Μονάδες)

B3. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ το διάνυσμα $\vec{x} = \left(\vec{\alpha}(\vec{\alpha} + \vec{\beta}), \vec{\beta}(2\vec{\alpha} - \vec{\beta})\right)$.

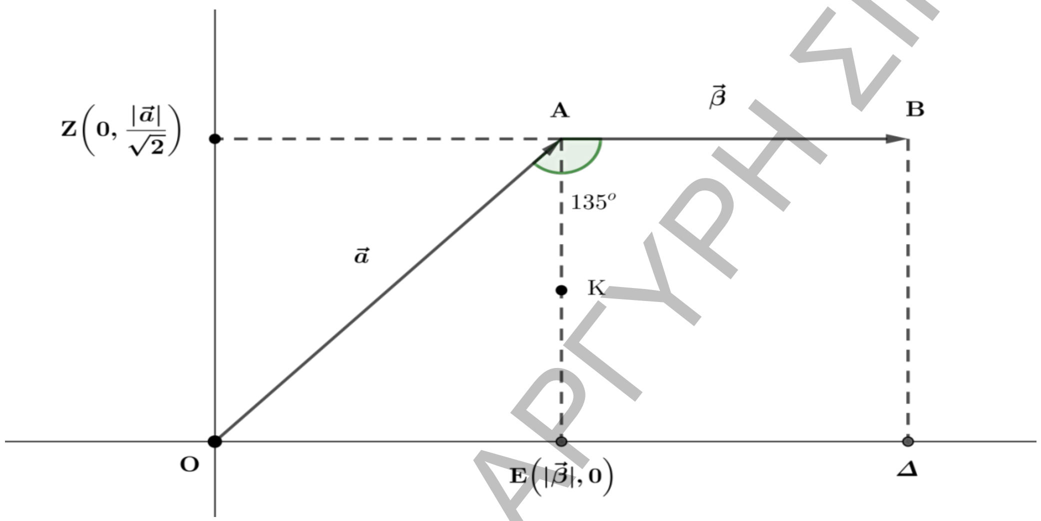
(7 Μονάδες)

B4. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|\vec{\beta} + |2\vec{\alpha} + \vec{\beta}|\vec{\alpha}$ και $\vec{v} = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|\vec{\beta} - |2\vec{\alpha} + \vec{\beta}|\vec{\alpha}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

(7 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ορθοκανονικού συστήματος ,όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=4$, Κ είναι το μέσο του ΑΕ και το ΟΑΒΔ είναι τραπέζιο με $\widehat{B}=\widehat{\Delta}=90°$.



Γ1. Να δείξετε ότι $|\vec{\beta}|=2$ και $\vec{\alpha}=(2,2)$.

(8 Μονάδες)

Γ2 Να δείξετε ότι σημείο Κ έχει συντεταγμένες $(2,1)$ και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο, Κ και Β είναι συνευθειακά.

(7 Μονάδες)

Γ3 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1) που διέρχεται από το σημείο Κ και είναι κάθετη στην ευθεία ΟΑ.

(6 Μονάδες)

Γ4. Να βρείτε το συμμετρικό του Κ ως προς την ευθεία ΟΑ.

(4 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και η ευθεία $(\varepsilon): \frac{x}{|\vec{\alpha}|} - \frac{y}{|\vec{\beta}|} = 1$ η οποία σχηματίζει με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ ισοσκελές τρίγωνο AOB.

Δ1. Να βρείτε τα σημεία τομής Α, Β της ευθείας (ε) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα και να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$.

(8 Μονάδες)

Δ2. Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΒΜ του τριγώνου ΑΟΒ.

(5 Μονάδες)

Δ3. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της ευθείας $y = -x$ ισαπέχει από τα σημεία Α και Β

(5 Μονάδες)

Δ4. Αν η ευθεία $(\eta): (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})x - |\vec{\alpha}|^2 y + 2019|\vec{\alpha}|^2 = 0$ είναι κάθετη στην (ε) τότε να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα.

(7 Μονάδες)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020
Α΄ ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Τρίτη 7 Ιανουαρίου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και (x,y) οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ τότε να αποδείξετε ότι $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

10 Μονάδες

Α2. Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq 0$ και $\vec{\alpha}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Να ορίσετε το γινόμενο του λ με το $\vec{\alpha}$.

5 Μονάδες

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

2. Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

3. Αν $A = (x_1, y_1)$ και $B = (x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ τότε η κλίση της ευθείας ΑΒ ισούται με $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

4. Η διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$ είναι η ευθεία $\varepsilon:\ y = x$.

5. Η ευθεία $\varepsilon:\ y = \lambda x + \beta$ τέμνει τον yy' στο σημείο $(0, \beta)$.

10 Μονάδες

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020
Α΄ ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$

Β1. Να δείξετε ότι το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$.

5 Μονάδες

Β2. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ ώστε τα μη μηδενικά διανύσματα $\lambda\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $3\lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

5 Μονάδες

Β3. Να βρεθούν τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

8 Μονάδες

Β4. Να βρεθεί η γωνία $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$.

7 Μονάδες

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κορυφές $\mathrm{A}(2,3)$, $\mathrm{B}(-1,1)$ και $\Gamma(4,-3)$

Γ1. Να δείξετε ότι $\Delta(7,-1)$.

7 Μονάδες

Γ2. Να βρεθούν οι εξισώσεις των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ.

6 Μονάδες

Γ3. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο Β και είναι παράλληλη στην ευθεία $\mathrm{A}\Gamma: y=-3x+9$.

5 Μονάδες

Γ4. Αν Μ είναι μέσο της ΒΓ να βρεθεί σημείο Λ της $\varepsilon: y=-3x-2$ τέτοιο ώστε τα σημεία Α, Μ, Λ να είναι συνευθειακά.

7 Μονάδες

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020
Α΄ ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η ευθεία ε: $y=\left(\dfrac{\left|3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right|-3|\vec{\alpha}|}{2}\right)x+|\vec{\alpha}|$, όπου $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα για τα οποία ισχύει $\left|\vec{\beta}\right|=2|\vec{\alpha}|$.

Δ1. Αν η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,0)$ να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

6 Μονάδες

Δ2. Αν οι ευθείες ε_1: $y=(2|\vec{\alpha}|+3)x+2019$ και ε_2: $y=(|\vec{\alpha}|+5)x-2020$ είναι παράλληλες τότε να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}|=2$ και ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-8$.

6 Μονάδες

Δ3. Να δείξετε ότι $\vec{\beta}=-2\vec{\alpha}$ και ότι η ευθεία ε έχει εξίσωση $y=-2x+2$.

7 Μονάδες

Δ4. Να βρεθεί το συμμετρικό Γ του σημείου $\mathrm{B}\left(\dfrac{5}{2},|\vec{\alpha}|\right)$ ως προς την ευθεία ε .

6 Μονάδες

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021
Α΄ ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Σάββατο 9 Ιανουαρίου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1 = \lambda_{\vec{\alpha}}$, $\lambda_2 = \lambda_{\vec{\beta}}$ αντίστοιχα και $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ∦y΄y.

Να αποδείξετε ότι : $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$.

8 Μονάδες

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: «Για δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει ότι $\vec{\alpha} \nearrow\swarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ αν είναι ψευδής.

2 Μονάδες

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

2 Μονάδες

Α3. Τι ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$;

3 Μονάδες

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση , τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Η εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 παριστάνει ευθεία για κάθε Α, Β, Γ∈R .
2. Αν $\vec{\alpha}$ διάνυσμα του επιπέδου, λ∈R,τότε ισχύει ότι: $\lambda\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$.
3. Ως **συντελεστή διεύθυνσης** μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$.
4. Το $|\vec{\alpha}|$ ενός διανύσματος $\vec{\alpha} = (x, y)$ με x, y ∈R του καρτεσιανού επιπέδου ισούται πάντα με $x^2 + y^2$.
5. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, x_1, y_1 ∈R και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, x_2, y_2 ∈R συναρτήσει των συντεταγμένων τους είναι $\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$.

10 Μονάδες

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Β(-2 , 4).

Β1. Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Α από την οποία διέρχονται οι ευθείες (ε_1) : 2x + y - 5 = 0 και (ε_2) : x - 4y + 2 = 0 .

8 Μονάδες

Β2. Αν η πλευρά ΒΓ είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ): 3x - y + 2021 = 0, να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η ΒΓ είναι η y = 3x+10.

8 Μονάδες

Β3. Αν Α(2 , 1) και το ύψος ΒΔ ανήκει στην ευθεία με εξίσωση x + y - 2 = 0, να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Γ.

9 Μονάδες

ΘΕΜΑ Γ

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία είναι $|\vec{\alpha}|$=1, $|\vec{\beta}|$=5, $\eta\mu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{3}{5}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$ ή $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -4$.

9 Μονάδες

Αν η γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$ είναι οξεία τότε :

Γ2. Να υπολογίσετε το $\left|5\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right|$.

8 Μονάδες

Γ3. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό x αν το διάνυσμα

$\vec{v} = \left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right)\vec{\alpha} - x\,\vec{\beta}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$.

8 Μονάδες

ΘΕΜΑ Δ

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία Β(-2 , 3) και Γ(0 , -3).

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας μ του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ είναι $y = \frac{1}{3}(x+1)$.

7 Μονάδες

Δ2. Να βρείτε το σημείο $A(x_A, y_A)$, με $x_A > 0$, του επιπέδου Oxy για το οποίο το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\widehat{A} = 90^o$.

9 Μονάδες

Δ3. Αν Μ είναι οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου Oxy, να αποδείξετε ότι:

$\overrightarrow{MB}\ \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{MA}^2 = \overrightarrow{MA}\ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}\ \overrightarrow{M\Gamma}$.

9 Μονάδες

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022
Α΄ ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Τετάρτη 5 Ιανουαρίου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1), \vec{\beta} = (x_2, y_2)$ και $\vec{\gamma} = (x_3, y_3)$ του επιπέδου Oxy να αποδείξετε ότι : $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

Μονάδες 7

Α2. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

Μονάδες 4

Α3. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{i}$ το μοναδιαίο διάνυσμα, δίνεται ο ισχυρισμός: «η παράσταση $\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\alpha}^2} \cdot \vec{i}$ είναι ίση με πραγματικό αριθμό».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό αυτό ως Σωστό ή Λάθος.

Μονάδες 1

β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Α4. Για κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιο σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ τότε για κάθε πραγματικό αριθμό λ ισχύει $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.
2. Οποιαδήποτε ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_o)$ έχει εξίσωση της μορφής $y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$.
3. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ τότε τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι πάντα ομόρροπα.
4. Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι ίση με $(AB) = \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}$.
5. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι πάντα $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ του οποίου η πλευρά ΑΒ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $A(2,0)$ και $B(0,2)$. Το κέντρο του τετραγώνου είναι η αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Β1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) πάνω στην οποία βρίσκεται η πλευρά ΑΒ του τετραγώνου.

Μονάδες 5

Β2. Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ του τετραγώνου και να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΔ έχει εξίσωση την διχοτόμο της 2ης και 4ης γωνίας των αξόνων.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται η πλευρά ΒΓ, καθώς και το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{B\Gamma}$.

Μονάδες 5

Β4. Να βρείτε τη γωνία φ που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$ άξονα και έπειτα τα εσωτερικά γινόμενα :

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$ 2) $\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{\Delta A}$ 3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ όπου $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{2}$ και $\overrightarrow{AM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{A\Gamma}$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x+1, x)$, $\vec{\beta} = (-4x, -x-1)$ και $\vec{\gamma} = (x, -2x)$ με $x \in \mathbb{R}$. Αν $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \perp \vec{\gamma}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $x = 1$.

Μονάδες 9

Για $x = 1$

Γ2. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\delta} = (-3,1)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}$ και διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$.

Μονάδες 5

Γ4. Αν η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες στα σημεία Β και Γ να βρείτε το εμβαδόν του *τριγώνου ΟΒΓ*.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ όπου για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν :

- $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3$
- $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 + 2 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3 = 0$
- η γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$ είναι αμβλεία.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -3$.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} = -4\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΒΜ αν Μ το μέσο της ΑΓ.

Μονάδες 8

Δ3. Αν για το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + \sqrt{7} \cdot \vec{\gamma} = \vec{0}$ να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 2$.

Μονάδες 5

Δ4. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{x} = \vec{\gamma}^2 \cdot \vec{\beta} - [\vec{\alpha}(\vec{\alpha} - \vec{\beta})] \cdot \vec{\alpha} - |\vec{\alpha}\vec{\beta}| \cdot \vec{\beta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και να αποδείξετε ότι $(\overrightarrow{AB} + \vec{x}) \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023
Α΄ ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Πέμπτη 5 Ιανουαρίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) Αν Μ το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και Ο σημείο αναφοράς στο χώρο να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

Μονάδες 9

β) Επιπλέον αν $A(x_1, x_2), B(x_2, y_2)$ και $M(x, y)$ να αποδείξετε ότι $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Μονάδες 6

Α2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό καθεμιάς από τις παρακάτω προτάσεις και δίπλα το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι σωστή, το γράμμα Λ αν η πρόταση είναι λάθος.

α) Για κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ αν ισχύει $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \mu \cdot \vec{\alpha}$ τότε $\lambda = \mu$.

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, x_2)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι $\lambda = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

γ) Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ ισχύει πάντα $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$.

δ) Οι ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $y = 0$ είναι κάθετες.

ε) Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| = 0$ τότε $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = 3 \cdot \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{\beta} = (5,3)$ και $\vec{\gamma}$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma} = \vec{\beta}$.

Β1. Να δείξετε ότι $\vec{\gamma} = (1,2)$.

Μονάδες 7

Β2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το $A(-1,4)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\gamma}$.

Μονάδες 4

Β3. Αν Β, Γ είναι τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται

(i) η διάμεσος ΟΜ του τριγώνου ΟΒΓ .

(ii) το ύψος ΟΚ του τριγώνου ΟΒΓ .

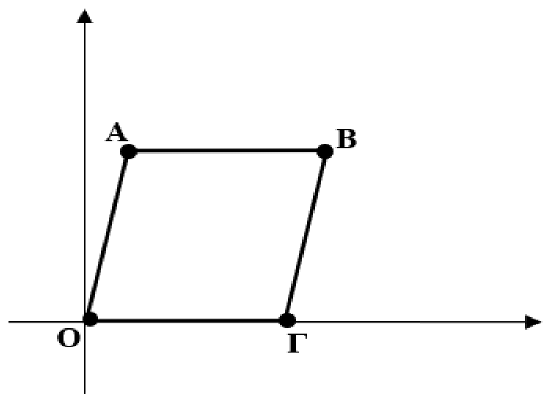
Μονάδες 14

ΘΕΜΑ Γ

Στο σχήμα δίνεται ρόμβος ΟΑΒΓ πλευράς 4cm

και η γωνία $\Gamma\hat{O}A = \dfrac{\pi}{3}$.

Γ1. Να δείξετε ότι το σημείο Α ανήκει στην ευθεία $y = \sqrt{3} \cdot x$ και ότι οι κορυφές του ρόμβου έχουν συντεταγμένες $A\left(2,2\sqrt{3}\right), B\left(6,2\sqrt{3}\right), \Gamma(4,0)$.



Μονάδες 7

Γ2. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου Κ του ρόμβου και τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές του.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα

i) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$, ii) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BA}$, iii) $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KB}$, iv) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AO}$

Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση $\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\left(\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{KB}\right)+\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{K\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}$ είναι ευθεία κάθετη στην ευθεία της διαγωνίου $A\Gamma$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|+2|\vec{\beta}|=5$ και τα παράλληλα διανύσματα $\vec{u}=\left(|\vec{\alpha}|,1\right),\vec{v}=\left(|\vec{\beta}|,2\right)$.

Δ1. Αποδείξτε ότι $|\vec{\alpha}|=1,|\vec{\beta}|=2$ και ότι $\vec{u}\uparrow\uparrow\vec{v}$.

Μονάδες 6

Αν επιπλέον ισχύει : $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\perp\left(5\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)$

Δ2. Να αποδείξετε ότι : (i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$ (ii) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y λύνοντας τις εξισώσεις

$$4\cdot\left|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|\cdot x=\sqrt{2}\cdot\left|\vec{v}-\vec{u}\right|$$

και

$$\frac{\vec{\alpha}\cdot\left(y\cdot\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right)}{\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|}\cdot\vec{\alpha}=\left(1-y\right)\cdot\vec{\alpha}$$

Μονάδες 8

Δ4. Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο του θετικού ημιάξονα $\overrightarrow{Ox}$ και το $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο να αποδείξετε ότι $\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{u}}\right)=\frac{\pi}{12}$

Μονάδες 5

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Κυριακή 17 Απριλίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $\vec{a},\vec{v}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{a}\neq\vec{0}$.

Δείξτε ότι για την προβολή του $\vec{v}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$ ισχύει $\vec{a}\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$.

(15 μονάδες)

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από το τύπο $(\text{ΑΒΓ})=\frac{1}{2}\det\left(\overrightarrow{\text{ΑΒ}},\,\overrightarrow{\text{ΑΓ}}\right)$.

Σ - Λ

β) Για τη γωνία φ, που σχηματίζει ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$ ισχύει $0\leq\varphi<2\pi$. **Σ – Λ**

γ) Η εξίσωση $x^2+y^2+\text{A}x+By+\Gamma=0$ **με** $\text{A}\cdot\text{B}\neq 0$ και $\text{A}^2+\text{B}^2-4\Gamma>0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $\text{K}\left(\frac{\text{A}}{2},\frac{\text{B}}{2}\right)$. **Σ – Λ**

δ) Η απόσταση της κορυφής μιας παραβολής από την εστία της είναι ίση με το μισό της απόστασης της εστίας από την διευθετούσα. **Σ – Λ**

ε) Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{a}\,//\,\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{\beta}\Leftrightarrow\det\left(\vec{a},\vec{\beta}\right)=0$, $\lambda\in R$ και $\vec{\beta}\neq\vec{0}$ **Σ – Λ**

(2x5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1,2)$ και $\vec{\beta} = -3\vec{j}$.

Β1. Δείξτε ότι το διάνυσμα $\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{\beta} = (-3,12)$ και βρείτε τον αριθμό $\gamma = \vec{v}\vec{a} + 4\vec{a}\vec{\beta}$.

(6 μονάδες)

Β2. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ η πλευρά ΑΒ διέρχεται από το σημείο Κ(3,3) και είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{v}$, ενώ η πλευρά ΒΓ έχει εξίσωση $y = \left(\vec{v}\vec{a} + 4\vec{a}\vec{\beta}\right)x - 2$ τότε βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών ΑΒ και ΒΓ και την κορυφή Β.

(7 μονάδες)

Β3. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας γραμμής, στην οποία βρίσκονται τα σημεία Μ(λ-1, 2λ+2), $\lambda \in \mathbb{R}$.

(6 μονάδες)

Β4. Αν η πλευρά ΑΓ είναι η ευθεία γραμμή που βρήκατε στο ερώτημα Β3 τότε να δείξτε ότι το μήκος του ύψους ΒΛ είναι $\frac{49\sqrt{5}}{55}$.

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κορυφή Α(2,-3) και τη πλευρά ΓΔ να έχει εξίσωση $2x - 3y + 5 = 0$. Μία πλευρά του βρίσκεται στην ευθεία

$$(\varepsilon):\ x + y = 0.$$

Γ1. Δείξτε ότι η πλευρά που βρίσκεται στην ευθεία (ε) είναι η ΒΓ, βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ και δείξτε ότι το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι Κ $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.

(7 μονάδες)

Γ2. Βρείτε την πλευρά ΑΒ και δείξτε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμουΑΒΓΔ είναι $\frac{18}{5}$ τ.μ.

(7 μονάδες)

Γ3. Δείξτε ότι η εξίσωση της παραβολής C, που έχει κορυφή Ο(0,0), άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και διέρχεται από το κέντρο Κ του παραλληλογράμμου είναι $x = \frac{1}{2}y^2$

(5 μονάδες)

Γ4. Δείξτε ότι η εφαπτομένη της παραβολής C στο σημείο Κ είναι $2x+2y+1=0$ και μετά βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{\text{ΕΚΘ}}$, όπου Ε η εστία και $\overrightarrow{\text{ΚΘ}} \nearrow\nearrow \overrightarrow{\text{ΟΕ}}$.

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: \alpha x+\beta y=0$.

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2+y^2-4ax-4\beta y=0$ παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ.

(7 μονάδες)

Δ2. Ποια είναι η σχετική θέση της ευθείας και του κύκλου.

(5 μονάδες)

Δ3. Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει $3a^2+4\beta^2=3$ τότε να δείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται στην έλλειψη $3x^2+4y^2=12$, της οποίας να βρείτε τα μήκη των αξόνων και την εκκεντρότητα.

(6 μονάδες)

Δ4. Δείξτε ότι η εφαπτομένη της έλλειψης σε σημείο $\text{Ν}(x_1, y_1)$ διαφορετικό των κορυφών της, που διέρχεται από το Ζ(-2,3) είναι $x+2y-4=0$. Μετά δείξτε ότι τα σημεία Ζ, Ο(0,0) και το μέσο του $\text{ΝΑ}'$ είναι συνευθειακά, όπου Α΄ η κορυφή της έλλειψης στον άξονα Οχ΄

(7 μονάδες)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 8 Απριλίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ε είναι $xx_1 + yy_1 = \rho^2$

Μονάδες 15

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι αριθμός.
β) Κάθε εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο.
γ) Στην παραβολή $y^2 = 2px$ τα p και x (με $x \neq 0$), είναι ομόσημα.
δ) Μία ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ έχει πάντοτε συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
ε) Ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι το διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, B)$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α (–1,1), Β (4,1) και Γ (1,5).

Β1. Αν Μ είναι το μέσον της ΑΓ, να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Β και Μ είναι η $x + 2y = 6$.

Μονάδες 8

B2. Δίνεται η εξίσωση της ευθείας ζ: $4x+3y=-1$, η οποία διέρχεται το σημείο Α και είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Β και Γ.
Να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο τομής Δ των ευθειών ε και ζ είναι το Δ (-4,5)

Μονάδες 3

ii. Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 6

B.3. Να βρείτε την παράμετρο p και την εστία Ε της παραβολής C με εξίσωση $x^2=2py$, της οποίας η διευθετούσα είναι η οριζόντια ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $|\vec{\beta}-2\vec{\alpha}|x+\vec{\alpha}\vec{\beta}y-8=0$ $x,y\in\mathbb{R}$ (1) όπου $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ διανύσματα με $|\vec{\alpha}|=2$ και $|\vec{\beta}|=4$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.

Μονάδες 8

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που προκύπτει από την (1) αν η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίση με 60^0.

Μονάδες 7

Γ3. Έστω C ο κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ ο οποίος εφάπτεπται στην ευθεία ζ που έχει εξίσωση $x+y-2=0$, στο σημείο N.
Να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες του σημείου N.

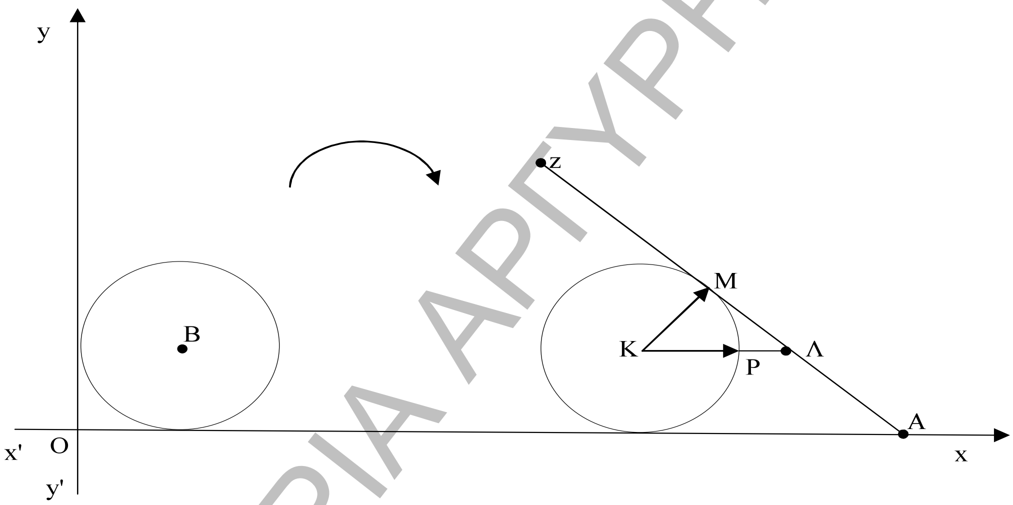
Μονάδες 7

ii. Την εξίσωση του κύκλου C.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Δ

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε ότι ο ημιάξονας Oy είναι ένας κατακόρυφος τοίχος και ο ημιάξονας Ox είναι το έδαφος επί του οποίου μπορεί να κυλιέται ένα σύρμα σχήματος κύκλου με ακτίνα $\rho = 1$. Η αρχική θέση του κυκλικού σύρματος είναι τέτοια ώστε να εφάπτεται ταυτοχρόνως στους ημιάξονες Ox και Oy και τότε έχει κέντρο το σημείο B. Κάποια στιγμή αρχίζει να κυλιέται προς τα δεξιά μέχρι τη στιγμή που προσκρούει στο κεκλιμένο επίπεδο Az οπότε και ακινητοποιείται όπως φαίνεται στο σχήμα.



Η τετμημένη του σημείου A είναι $9+\sqrt{2}$. Τα σημεία K και M αφορούν στην τελική θέση του κυκλικού σύρματος και είναι αντιστοίχως το κέντρο του και το σημείο επαφής του με το επίπεδο Az. Αν P σημείο αυτού του κύκλου τέτοιο ώστε $\overrightarrow{KP}//Ox$ για το οποίο ισχύει: $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{KP} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ τότε:

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{MKP} = \widehat{K\Lambda M} = \widehat{OAZ} = 45°$ όπου Λ το σημείο τομής της προέκτασης του KP με το επίπεδο Az.

Μονάδες 4

β) Η εξίσωση της ευθείας ε που ορίζει το κεκλιμένο επίπεδο Az είναι $x+y-9-\sqrt{2}=0$.

Μονάδες 4

γ) Οι συντεταγμένες του κέντρου K είναι $K(8,1)$.

Μονάδες 5

Δ2. Θεωρούμε ότι η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με $A^2+B^2-4\Gamma>0$ παριστάνει την οικογένεια των κύκλων που περιλαμβάνει όλες τις θέσεις από τις οποίες διέρχεται το κυκλικό σύρμα κατά την διάρκεια της συνολικής διαδρομής του.
Να αποδείξετε ότι:

α) $B=-2$

Μονάδες 3

β) $A=-2\sqrt{\Gamma}$

Μονάδες 4

γ) $1\leq\Gamma\leq 64$

Μονάδες 5

- Να θεωρήσετε τη διάμετρο (πάχος) του σύρματος αμελητέα
- Οι αριθμοί που αφορούν σε μήκη είναι σε cm

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2018
Β΄ ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 14 Απριλίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Δείξτε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

Μονάδες 15

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Η εξίσωση $x^2 + y^2 = \alpha$ με $\alpha \neq 0$ παριστάνει πάντα κύκλο.
2. Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0}$
3. Το $\vec{\delta} = (B, A)$ είναι παράλληλο στην ε: $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.
4. Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ διανύσματα αντίρροπα.
5. Η εξίσωση $y=4x^2$ παριστάνει παραβολή.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy όπου O(0,0) η αρχή των αξόνων θεωρούμε τα σημεία A(1, 0), B(3, 2) και $\Gamma(x_0, 0)$ σημείο του άξονα x΄x τέτοια ώστε $A\hat{B}\Gamma = 90^o$.

Β1. Να βρεθεί το $\overrightarrow{AB}$ και το $|\overrightarrow{AB}|$.

Μονάδες 6

Β2. Να δείξετε ότι Γ(5, 0).

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές.

Μονάδες 6

Β4. Αν Κ σημείο του επιπέδου Oxy ώστε Γ μέσο του ΒΚ, να υπολογίσετε το εμβαδόν του $\overset{\Delta}{ABK}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η ευθεία ε: x + y + 3 = 0 και σημείο Α(0, -5) του επιπέδου. Να βρείτε:

Γ1. την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ε.

Μονάδες 6

Γ2. το συμμετρικό Α΄ του Α ως προς την ευθεία ε.

Μονάδες 8

Γ3. **(α)** τις εξισώσεις των κύκλων C, C΄ με κέντρα τα σημεία Α, Α΄ αντίστοιχα που εφάπτονται στην ε.

(β) τη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση που μπορεί να έχουν ένα σημείο του κύκλου C από ένα σημείο του κύκλου C΄.

Μονάδες 6

Γ4. τις εξισώσεις των κοινών εφαπτόμενων ευθειών των κύκλων C, C΄.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τις εξισώσεις: $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ (1)

και: $(2\lambda+1)x+(1-\lambda)y+3=0$. (2)

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

i. Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ.

Μονάδες 2

ii. Για κάθε τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία γραμμή και ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (2) διέρχονται από το ίδιο σημείο Τ το οποίο και να βρείτε.

Μονάδες 4

Αν είναι Κ(1,-2) και ρ=2 τότε:

Δ2. Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε ευθεία της οικογένειας ευθειών (2) για $\lambda\neq1$ τέμνει τον κύκλο C σε δύο σημεία.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ευθεία (ε) ορίζει στον κύκλο C χορδή μήκους $2\sqrt{2}$.

Μονάδες 6

Δ4. Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες του κύκλου C που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2019
Β΄ ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 4 Μαΐου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) του κύκλου $C: x^2+y^2=\rho^2$ σε ένα σημείο του $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ είναι $(\varepsilon): xx_1+yy_1=\rho^2$.

Μονάδες 11

Α.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η εξίσωση $y=\frac{1}{2p}x^2$ με $p>0$ παριστάνει παραβολή με άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

β. Η εξίσωση $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$, παριστάνει μια ευθεία για κάθε $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma \in \mathbb{R}$.

γ. Τα διανύσματα $\vec{i}=(1,0)$ και $\vec{j}=(0,1)$ είναι ίσα.

δ. Η απόσταση του σημείου $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία ε με εξίσωση $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ είναι ίση με $d(\mathrm{M}_0, \varepsilon)=\frac{|\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$.

ε. Η εξίσωση $x^2+y^2=a$, παριστάνει κύκλο για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

Α.3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: «Αν δυο διανύσματα έχουν ίσα μέτρα, τότε είναι ίσα».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α** αν είναι αληθής ή το γράμμα **Ψ** αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

β. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας στο ερώτημα α.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Β

Στον εναέριο χώρο της Ελλάδας κινούνται δύο αεροπλάνα που ακολουθούν τις παρακάτω πορείες:

- Το πρώτο αεροπλάνο κινείται στη γραμμή γ_1 όπου κάθε σημείο της σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων (στο χάρτη) είναι της μορφής $\mathrm{A}(\lambda+1,\lambda+3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Το δεύτερο αεροπλάνο κινείται στη ευθεία γ_2 που περνάει από το αεροδρόμιο των Ιωαννίνων με συντεταγμένες $\mathrm{I}(-2,-2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v}=(-2,2)$.

Β.1. Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής γ_1.

Μονάδες 4

Β.2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας γ_2.

Μονάδες 7

Β.3. Στο σημείο $\mathrm{O}(0,0)$ βρίσκεται το αεροδρόμιο Αθηνών. Αν οι γραμμές είναι οι ευθείες $\gamma_1 : y = x+2$ και $\gamma_2 : y=-x-4$.

α. ποιο αεροπλάνο θα περάσει πιο κοντά από το αεροδρόμιο Αθηνών;

Μονάδες 7

β. να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΙΟΝ όπου Ν το σημείο τομής μεταξύ των γ_1 και γ_2.

Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2019
Β΄ ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραβολή $C_1: y^2 = 2\vec{\beta}\left(\vec{\beta}-2\vec{a}\right)x$ και ο κύκλος $C_2: x^2+y^2-\left|\vec{\beta}\right|\left(x+4\left(\vec{a}\cdot\vec{\beta}\right)y\right)+15=0$, όπου $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ διανύσματα για τα οποία ισχύουν $\left|\vec{a}\right|=1$, $\left|\vec{\beta}\right|=2$ και $\left(\vec{a}+\vec{\beta}\right)\left(3\vec{a}-\vec{\beta}\right)=1$.

Γ.1. Να αποδείξετε ότι $\vec{a}\vec{\beta}=1$ και $\left(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$

Μονάδες 6

Γ.2. Να βρείτε την εστία Ε και την εξίσωση της διευθετούσας (δ) της παραβολής C_1, καθώς επίσης το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ του κύκλου C_2.

Μονάδες 7

Γ.3. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της παραβολής C_1 στο σημείο της $\mathrm{A}(1,2)$ εφάπτεται και στο κύκλο C_2.

Μονάδες 6

Γ.4. Να βρεθεί η μέγιστη και ελάχιστη απόσταση της εστίας Ε(1,0) από το κύκλο C_2.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση

$\left(\lambda^4+\lambda^2\right)x^2+\left(-\lambda^3+2\lambda^2-\lambda+2\right)y^2-6\lambda\left(\lambda^2+1\right)x-\left(8\lambda^2+8\right)y+16\lambda^2+16\lambda^4=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Δ.1. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο C αν και μόνο αν $\lambda=1$.

Μονάδες 4

Δ.2. Αν $\lambda=1$, τότε:

α. Να βρείτε το κέντρο Θ και την ακτίνα ρ του κύκλου C.

Μονάδες 4

β. Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση των σημείων του κύκλου C, από την ευθεία $(\eta): 3x+4y+15=0$.

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που διέρχονται από την αρχή των αξόνων Ο.

Μονάδες 8

δ. Έστω Κ και Λ σημεία του κύκλου C για τα οποία ισχύει $\mathrm{K\Lambda}=6$. Να βρείτε το μέτρο $\left|\overrightarrow{\mathrm{OK}}+\overrightarrow{\mathrm{O\Lambda}}\right|$.

Μονάδες 4

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020
Β΄ ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Κυριακή 24 Μαΐου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ είναι $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Μονάδες 10

Α2. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δυο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$.

β) Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ και $B \neq 0$ παριστάνει ευθεία.

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ όπου $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνεται από τον τύπο $\lambda = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

δ) Η ευθεία με εξίσωση $2x + 3y + 5 = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (3,5)$.

ε) Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ τότε είναι $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$.

Μονάδες 10

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020
Β΄ ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ με κορυφές $Α(-3,2)$, $Β(4,6)$ και $Γ(8,-1)$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της πλευράς ΑΒ είναι $4x - 7y + 26 = 0$.

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι $Δ(1,-5)$.

Μονάδες 6

Β3. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΒ όπου Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ.

Μονάδες 7

Β4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Δ και είναι κάθετη στην ευθεία ΑΜ είναι $18x + y = 13$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $y^2 + x^2 - 2xy + y - x - 2 = 0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει τις παράλληλες ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_1): y = x + 1$ και $(\varepsilon_2): y = x - 2$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

Μονάδες 6

Γ3. Να βρεθεί η απόσταση των δυο ευθειών (ε_1) και (ε_2).

Μονάδες 6

Γ4. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες στην ευθεία (ε_1) και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 8 τμ .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι εξισώσεις $(\varepsilon_1): (\lambda + |\vec{\alpha}|)x + (\lambda - 4)y + \lambda(\lambda - 3) + 2 = 0$ και

$(\varepsilon_2): (\lambda + |\vec{\beta}|)x + 3\lambda y + \lambda - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} = 0$ όπου $\lambda \in \Re$ και $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δυο διανύσματα

για τα οποία ισχύουν : $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| = 3$ και $(2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020
Β΄ ΦΑΣΗ

Δ1. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\beta}| = 2$ και $\vec{\alpha}\vec{\beta} = 2$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (ε_1) και (ε_2) παριστάνουν ευθείες για κάθε $\lambda \in \Re$ και να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε οι ευθείες αυτές να είναι κάθετες.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε_2) διέρχεται από σταθερό σημείο το οποίο και να βρεθεί.

Μονάδες 7

Δ4. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ που εφάπτεται στην ευθεία (ε_2) για $\lambda = 1$.

Μονάδες 6

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021
Β΄ ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 5 Μαΐου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $\vec{\alpha} = (x, y)$ ένα διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου. Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος δίνεται από τον τύπο $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

10 Μονάδες

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: «Η εξίσωση $y-y_o = \lambda(x-x_o), \lambda\in R$ παριστάνει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο $M(x_o, y_o)$ »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ αν είναι ψευδής.

2 Μονάδες

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

3 Μονάδες

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση , τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Η απόσταση των σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

2. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2,y_2)$ διανύσματα του επιπέδου τότε το εσωτερικό γινόμενο είναι : $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$.

3. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας η οποία διέρχεται από δύο σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$, με $x_1 \neq x_2$ είναι $\lambda = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

4. Η απόσταση του σημείου $M(x_o, y_o)$ από την ευθεία $(\varepsilon) : Ax + By + \Gamma = 0$, δίνεται σε κάθε περίπτωση από τον τύπο $d(M,\varepsilon) = \frac{Ax_o+By_o+\Gamma}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

5. Αν $\vec{\alpha} = (x_1,y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2,y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ , τότε $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}$.

10 Μονάδες

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία Α (1,1) , Β (2,-2) , Γ (0,4) και Ο(0,0).

Β1. Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε την παράσταση $\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2$.

8 Μονάδες

Β2. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

5 Μονάδες

Β3. Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου ΟΜ του τριγώνου ΟΒΓ .

6 Μονάδες

Β4. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά .

6 Μονάδες

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι εξισώσεις $\lambda x + (\lambda -1)y + 5 - 10\lambda = 0$ (1) και

$(\lambda+2)x + \lambda y - 5\lambda = 0$ (2) , $\lambda\in R$.

Γ1. Να δείξετε ότι καθεμία από τις εξισώσεις (1) και (2) παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή του λ.

6 Μονάδες

Αν (ε_1) και (ε_2) οι ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις (1) και (2) αντίστοιχα είναι παράλληλες :

Γ2. Να δείξετε ότι $\lambda = 2$.

5 Μονάδες

Γ3. Να βρείτε το σημείο της ευθείας (ε_1) το οποίο απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων και στη συνέχεια να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το O(0 ,0) ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία (ε_2).

8 Μονάδες

Γ4. Να βρεθεί το εμβαδόν που ορίζεται από τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) και τους ημιάξονες Οx και Οy .

6 Μονάδες

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $2x^2 + 2y^2 + Ax + 4y + 3 = 0$, $A < 0$ και η ευθεία (ε) : $y = x - 1$. Αν η ευθεία ε εφάπτεται στον κύκλο C τότε :

Δ1. Να δείξετε ότι $A = -4$.

6 Μονάδες

Δ2. Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ του κύκλου C .

5 Μονάδες

Αν Κ(1, -1) και $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$, να αποδείξετε ότι :

Δ3. Η ευθεία (η) : y = - x -1 εφάπτεται στον κύκλο C.

5 Μονάδες

Δ4. Το τετράπλευρο ΜΝΛΚ είναι τετράγωνο , όπου Μ το σημείο επαφής της (ε) με τον C , Ν είναι το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (η) και Λ είναι το σημείο επαφής της ευθείας (η) με τον κύκλο C .

9 Μονάδες

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022
Β΄ ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 20 Απριλίου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ε του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $M(x_1, y_1)$ είναι $\varepsilon : xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

Μονάδες 7

Α2. Τι ονομάζουμε παραβολή με διευθετούσα ευθεία δ και εστία Ε σημείο εκτός της δ;

Μονάδες 4

Α3. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός:
«Τα σημεία της παραβολής $x^2 = 2py$ με $p < 0$ και $y \neq 0$ βρίσκονται στο 1ο και 2ο τεταρτημόριο του καρτεσιανού συστήματος αξόνων xOy».
α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως Σωστό ή Λάθος.

Μονάδες 1

β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Η ευθεία με εξίσωση $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$.

2. Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ τότε για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ θα ισχύει υποχρεωτικά $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$.

3. Η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχει εφαπτομένη στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ την ευθεία $\frac{yy_1}{\alpha^2} + \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$.

4. Η υπερβολή $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$.

5. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο αν και μόνο αν $\Gamma < 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$, $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = 120^o$, $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = -3$ και η παραβολή $y^2 = -4\vec{\alpha}\vec{\beta} \cdot x$.

Β1. α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -3$ και $|\vec{\beta}| = 2 \cdot \sqrt{3}$.

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(3,0)$ και να βρείτε την εξίσωση της διευθετούσας δ.

Μονάδες 4

Β2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της παραβολής στο σημείο της $A(1, 2\sqrt{3})$ καθώς και την γωνία που αυτή σχηματίζει με τον $x'x$ άξονα.

Μονάδες 6

Β3. Αν Β είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ε με τον άξονα $x'x$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 4

Β4. Να δείξετε ότι $\varepsilon \,//\, \Gamma E$ όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας OA και της διευθετούσας δ.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x - y - 1 = 0$, $\varepsilon_2 : 2x + y + 6 = 0$ και το τρίγωνο ΚΛΜ όπου Κ το σημείο τομής των ε_1, ε_2 και Λ, Μ τα συμμετρικά σημεία του Κ ως προς τον $x'x$ και $y'y$ άξονα αντίστοιχα.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $K(-1, -4)$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΛM και να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΚΛΜ.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2.

Μονάδες 6

Γ3. Αν Γ είναι το σημείο τομής της ε_2 με τον $x'x$, να βρείτε σημείο A της ε_1 ώστε τα σημεία Γ, Λ και A να είναι συνευθειακά.

Μονάδες 7

Γ4. Αν $M(x, y)$ σημείο της ευθείας ε_1 ή της ε_2 να αποδείξετε ότι ισχύει

$$6x^2 - y^2 + xy + 16x - 7y - 6 = 0.$$

Μονάδες 6

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022
Β΄ ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (\lambda + 6)x + (3\lambda + 4)y + 3 - \lambda = 0$ (1).

Δ1. Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq -2$, να βρείτε το κέντρο, την ακτίνα και να αποδείξετε ότι το σημείο Α(-2,1) είναι κοινό σημείο όλων των κύκλων της μορφής (1).

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση (1) είναι τα σημεία της ευθείας $y = 3x + 7$ εκτός του σημείου της Α.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1 που ορίζει η εξίσωση (1), ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία $\zeta: y = -\frac{1}{3}x + 7$.

Μονάδες 7

Δ4. Να βρείτε τα σημεία του άξονα $x'x$ των οποίων η μέγιστη απόσταση από τον κύκλο C_1 είναι μεγαλύτερη από $5 + \sqrt{10}$.

Μονάδες 6

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023
Β΄ ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Τετάρτη 19 Απριλίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α.

Α1. **(α)** Τι ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης λ ενός διανύσματος $\vec{\alpha}=(x,y)$ με $x\neq 0$.

Μονάδες 3

(β) Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1),\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ διανύσματα με $\vec{\alpha},\vec{\beta} \nparallel y'y$ και λ_1,λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1\cdot\lambda_2=-1$.

Μονάδες 6

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) Η εξίσωση $y-y_0=\lambda(x-x_0),\lambda\in\mathbb{R}$ παριστάνει για τις διάφορες τιμές του λ όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο $M(x_0,y_0)$.

(β) Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διεύθυνσης.

(γ) Η εξίσωση $x^2+y^2+\kappa\cdot x+\lambda\cdot y=0$ με $\kappa\neq 0$ ή $\lambda\neq 0$, παριστάνει πάντα κύκλο.

(δ) Όλα τα σημεία της παραβολής $y^2 = 2\rho x,\ \rho < 0$, εκτός του O(0, 0) έχουν θετική τετμημένη.

(ε) Η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εφαπτομένη με εξίσωση $\beta^2 \cdot x_1 \cdot x + \alpha^2 \cdot y_1 \cdot y = \alpha^2 \cdot \beta^2$

Μονάδες 10

Α3. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό καθεμιάς από τις παρακάτω ημιτελείς προτάσεις και δίπλα σε αυτόν το γράμμα που αντιστοιχεί στη σχέση ή πρόταση που την συμπληρώνει σωστά.

1. Αν Ε΄, Ε οι εστίες μιας έλλειψης με μεγάλο άξονα μήκους 2α και Μ τυχαίο σημείο της έλλειψης, τότε

Α. $(ME') - (ME) = 2\alpha$ **Β.** $(ME') + (ME) = \alpha$

Γ. $(ME') + (ME) = 2\alpha$ **Δ.** $(ME') - (ME) = \alpha$

2. Έστω ευθεία (ε) που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ με $\alpha \cdot \beta \neq 0$. Τότε η εξίσωση της ευθείας είναι

Α. $\frac{y - y_0}{\beta} = \frac{x - x_0}{\alpha}$ **Β.** $y - y_0 = \beta(x - x_0)$

Γ. $\frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{\beta}{\alpha}$ **Δ.** $y - y_0 = -\frac{\beta}{\alpha}(x - x_0)$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία $A(0,8)$ και $B(4,0)$ του τριγώνου ΟΑΒ όπου Ο η αρχή των αξόνων.

Β1. Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΒ και τις συντεταγμένες του μέσου της Μ.

Μονάδες 7

Β2. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου (ε) της πλευράς ΑΒ και το σημείο Γ που η (ε) τέμνει τον $x'x$ άξονα.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε σημείο Δ του επιπέδου ώστε το τετράπλευρο ΓΜΒΔ να είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 6

Β4. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ο κύκλος C_1 με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και ακτίνα 2 καθώς και η εξίσωση $C_2: x^2+y^2-8x-6y+\alpha=0$ με $x,y,\alpha\in\mathbb{R}$.

Γ1. (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση C_2 παριστάνει κύκλο όταν $\alpha<25$

Μονάδες 3

(β) Να γράψετε για τον κύκλο με εξίσωση C_2

i) το κέντρο του.

ii) την ακτίνα του, συναρτήσει της παραμέτρου α.

Μονάδες 2

Γ2. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C_1 και να βρείτε για ποια τιμή του α οι κύκλοι C_1, C_2 εφάπτονται εξωτερικά.

Μονάδες 5

Για $\alpha = 16$

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της διακέντρου και να αποδείξετε ότι η εξίσωση της κοινής τους εφαπτομένης στο κοινό τους σημείο είναι η $\varepsilon: 4x + 3y - 10 = 0$.

Μονάδες 8

Γ4. α) Να κάνετε ένα πρόχειρο σχήμα χαράζοντας τους δύο κύκλους C_1, C_2 και την ευθεία (ε)

Μονάδες 2

β) Αν η εφαπτομένη ε τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε το συνολικό εμβαδόν των περιοχών του επιπέδου που βρίσκονται εντός του τριγώνου ΟΑΒ και εκτός του κύκλου C_1, όπου $O(0,0)$ η αρχή των αξόνων.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\kappa - 3, -2)$ και $\vec{\beta} = (-1, 3)$ με $1 < \kappa < 7$

και η παραβολή $(C_1): y = (1 - 2\kappa) \cdot x^2$.

Δ1. Αν $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = 135^\circ$ να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$.

Μονάδες 8

Για $\kappa = 2$

Δ2. α) Να βρείτε την παράμετρο ρ της παραβολής C, την εστία της E και την εξίσωση της διευθετούσας της δ.

Μονάδες 3

β) Να χαράξετε πρόχειρα τη γραφική παράσταση της παραβολής C επισημαίνοντας την εστία E και τη διευθετούσα δ.

Μονάδες 2

Δ3. Αν είναι $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$ με A, B σημεία της παραβολής, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B.

Μονάδες 7

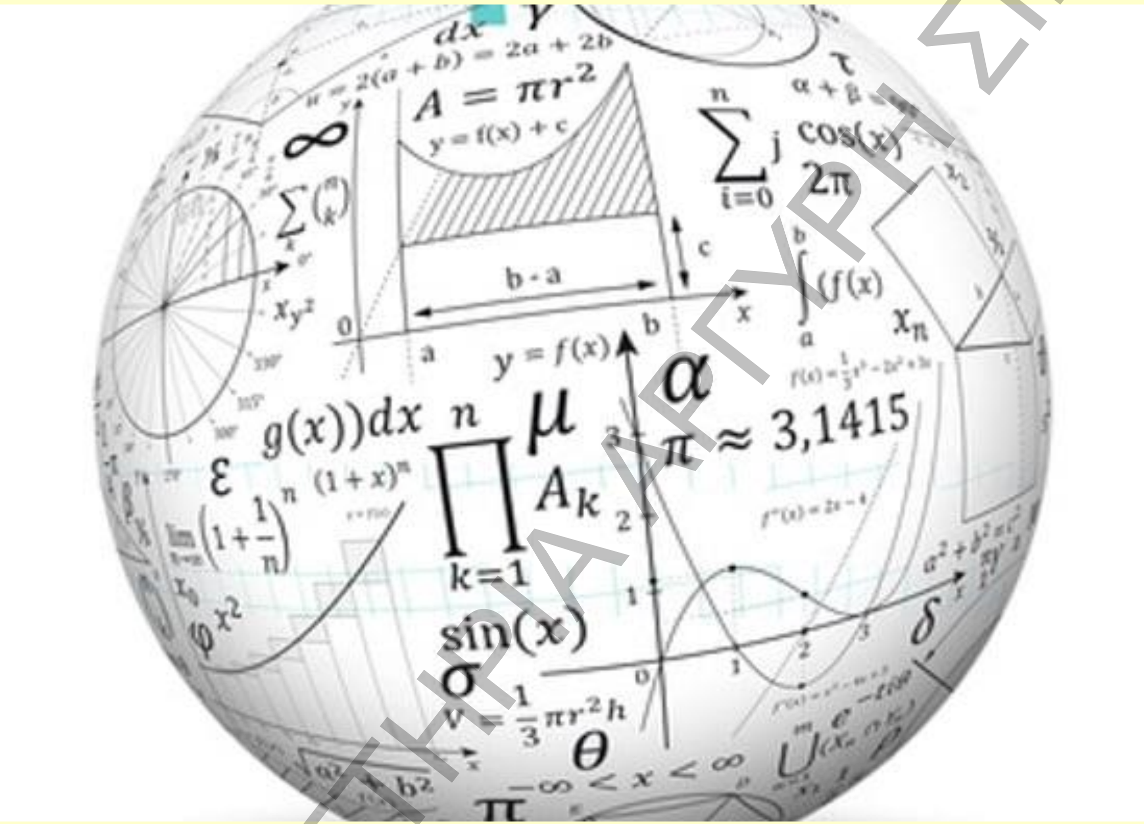
Δ4. Αν Δ η προβολή του σημείου A στη διευθετούσα δ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές, όπου E η εστία της παραβολής.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΙΜΑΣΤΕ ΜΕΣΑ

12



2018-19-20-21-22-2023

Α΄-Β΄ ΦΑΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Παρασκευή 5 Ιανουαρίου 2018 | Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$. Να δείξετε ότι ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$.

Μονάδες 10

Α2. Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ***Σωστό,*** αν η πρόταση είναι σωστή, ή ***Λάθος*** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}\neq\vec{0}$ και ισχύει $\det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)\neq 0$, τότε $\vec{\alpha}\cdot x+\ \vec{\beta}\neq\vec{0}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

β) Το διάνυσμα $\vec{\alpha}=4\vec{j}-3\vec{i}$ ισούται με το διάνυσμα θέσης του σημείου $\mathrm{A}\left(4,-3\right)$.

Μονάδες 2

γ) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}\neq\vec{0}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία $\vec{\alpha}=\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}^2=\vec{\beta}^2$.

Μονάδες 2

δ) Κάθε ευθεία που διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$ έχει εξίσωση της μορφής $\alpha x+\beta y=0$ με $|\alpha|+|\beta|>0$.

Μονάδες 2

ε) Η ευθεία $3x+\sqrt{3}y-2=0$ σχηματίζει με τον άξονα yy' οξεία γωνία 60^o.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})=\varphi$ και τα διανύσματα $\vec{v}=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}, |\vec{\alpha}|)$ και $\vec{w}=(|\vec{\beta}|, \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$.

Β1. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $\vec{v}\perp\vec{w}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $|\vec{v}|=|\vec{w}|\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$

Μονάδες 6

Β3. Να δείξετε ότι αν $\vec{v}=2\vec{w}$ τότε $|\vec{\alpha}|=4|\vec{\beta}|$.

Μονάδες 6

Β4. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $\vec{v}\,//\,\vec{w}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\varphi=\dfrac{1}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με $\mathrm{A}(\alpha,\ \beta)$, $\mathrm{B}(4,\ -1)$, $\Gamma(\text{-}3\beta,\ \alpha+8)$ και $\Delta(-1,\ 4)$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha=-3$ και $\beta=-2$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το συνημίτονο της οξείας γωνίας των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ του ΑΒΓΔ.

Μονάδες 5

Γ3. Έστω ευθεία (ε) που διέρχεται από την κορυφή Δ του παραλληλογράμμου η οποία είναι παράλληλη προς τη διαγώνιο ΑΓ και τέμνει την ευθεία ΒΓ στο Ε.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ε.

Μονάδες 6

β) Αν Ζ είναι το συμμετρικό του Β ως προς τη διαγώνιο ΑΓ, τότε να δείξετε ότι τα σημεία Δ, Ζ, Ε είναι συνευθειακά.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η εξίσωση $(2\lambda^2+\lambda-3)x-(\lambda^2+\lambda-2)y-5\lambda^2-3\lambda+8=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$ (1)

Δ1. Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ η ευθεία με εξίσωση της παραπάνω μορφής διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 5

Δ2. Δείξτε ότι οι ευθείες που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από σταθερό σημείο Μ το οποίο και να βρείτε.

Μονάδες 7

Δ3. Αν $M(2,-1)$, να βρείτε την ευθεία (ε) της παραπάνω οικογένειας ευθειών, η οποία τέμνει τους άξονες xx'και yy' στα σημεία Α, Β αντίστοιχα με Μ μέσο του ΑΒ.

Μονάδες 6

Δ4. Βρείτε την ευθεία της παραπάνω οικογένειας ευθειών που σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες xx' και yy'.

Μονάδες 7

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Σάββατο 5 Ιανουαρίου 2019 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α. Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ διανύσματα με $\vec{\alpha},\vec{\beta} \not\parallel y'y$ και λ_1, λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε τις ισοδυναμίες:

- $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

(Μονάδες 10)

Β. Να γράψετε τον ορισμό του συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας ε.

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη *Σωστό*, αν η πρόταση είναι σωστή, ή *Λάθος*, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

1. Για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει η ισοδυναμία: $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$.

2. Αν η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι οξεία τότε ισχύει: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} > |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.

3. Αν $\vec{\alpha} = -4 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}$ και $\vec{\beta} = 6 \cdot \vec{i} + 8 \cdot \vec{j}$ τότε $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

4. Οι ευθείες $\varepsilon_1: y = 2x - 1$ και $\varepsilon_2: y = -2x + 4$ σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ ισοσκελές τρίγωνο.

5. Κάθε ευθεία $\varepsilon: Ax + By = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ Β

Α. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{\beta} = -\vec{i}$ και $\vec{\gamma} = 4\vec{j} - 4\vec{i}$.

i. Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} // \vec{\gamma}$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 6)

Β. Δίνονται τα σημεία $A(1, -1)$, $B(-1, 0)$, $\Gamma(-4, 4)$.

i. Να βρείτε σημείο Δ του επιπέδου τέτοιο ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 6)

ii. Αν K το κέντρο του παραλληλόγραμμου $AB\Gamma\Delta$ του ερωτήματος **i** και E το σημείο τομής της $A\Delta$ με τον άξονα $y'y$, να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{KE}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Α. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - y^2 - 2x + 8y = 15$ (1) παριστάνει δύο ευθείες ε_1, ε_2 κάθετες μεταξύ τους.

(Μονάδες 7)

Β. Αν ε_1: $x - y + 3 = 0$ και ε_2: $x + y - 5 = 0$ οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση (1), A είναι το σημείο τομής τους και B, Γ τα σημεία τομής των ε_1, ε_2 αντίστοιχα με τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι το τρίγωνο $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

(Μονάδες 5)

Γ. Αν $A(1, 4)$ το σημείο τομής των ε_1, ε_2, Δ το συμμετρικό του A ως προς τον άξονα $x'x$ και Δ' το συμμετρικό του Δ ως προς την ευθεία ε_2, να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το Δ' και είναι παράλληλες στις ε_1 και ε_2.

(Μονάδες 7)

Δ. Αν $M\left(1-\alpha, \dfrac{3\alpha-5}{2}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ σημείο του επιπέδου, να βρείτε τη γραμμή στην οποία κινείται το σημείο M.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Α. Να δείξετε ότι οι εξισώσεις $(\lambda + 3) \cdot x - (\lambda + 4) \cdot y = 5 \cdot \lambda$ (1)

$$(2\lambda + 5) \cdot x - 2 \cdot \lambda \cdot y - 1 = 0 \quad (2)$$

παριστάνουν ευθείες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Β. Να βρεθούν τα σταθερά σημεία A και B από τα οποία διέρχονται όλες οι ευθείες των εξισώσεων (1) και (2) αντίστοιχα.

(Μονάδες 6)

Γ. Να βρείτε την ακέραια τιμή του λ για την οποία οι ευθείες των εξισώσεων (1) και (2) είναι κάθετες.

(Μονάδες 5)

Δ. Για την τιμή του λ που βρέθηκε στο **Γ** ερώτημα, να βρεθεί το σημείο τομής των δύο ευθειών.

(Μονάδες 4)

Ε. Έστω ε_1, ε_2 οι δύο ευθείες του ερωτήματος **Γ.**

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$ που είναι παράλληλα στις ε_1, ε_2 αντιστοίχως. Να βρείτε γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με μέτρο 1 που διχοτομεί τη γωνία τους.

(Μονάδες 5)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Σάββατο 18 Ιανουαρίου 2020 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α. **1)** Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της παραπάνω μορφής παριστάνει ευθεία γραμμή.

(7 μόρια)

2) Να βρείτε δύο διανύσματα ένα παράλληλο κι ένα κάθετο στην ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

(6 μόρια)

Β. Να σημειώσετε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί (Σ) και ποιοι λάθος (Λ), δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

(3+3 μόρια)

i) Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (2, 3)$ είναι παράλληλο στην ευθεία $3x + 2y - 4 = 0$.

ii) Μια ευθεία κάθετη στον yy' έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 0$.

iii) Η ευθεία $2x + 5y = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Γ. Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα της πρώτης στήλης με μια ευθεία της δεύτερης στήλης, στην οποία το διάνυσμα είναι κάθετο.

(6 μόρια)

ΣΤΗΛΗ Α	***ΣΤΗΛΗ Β***
ΔΙΑΝΥΣΜΑ	***ΕΥΘΕΙΑ***
$\vec{\delta}_1 = (0,-1)$	ε_1: $3x - 5y + 2 = 0$
$\vec{\delta}_2 = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$	ε_2: $y = -2$
$\vec{\delta}_3 = (5, 0)$	ε_3: $3x - 10y = 0$
$\vec{\delta}_4 = (2, 4)$	ε_4: $x + 2y - 1 = 0$
	ε_5: $x = 7$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x + (\lambda + 1)y = 3\lambda + 5$ (1) και η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$ (2).

1. **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

(5 μόρια)

ii) Βρείτε (αν υπάρχει) το κοινό σημείο όλων των παραπάνω ευθειών.

(5 μόρια)

2. **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (2) παριστάνει ένα ζευγάρι κάθετων ευθειών.

(4 μόρια)

ii) Βρείτε το σημείο τομής τους.

(4 μόρια)

3. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ, όταν:

i) Η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία κάθετη στον xx'.

(3 μόρια)

ii) Η εξίσωση (1) να σχηματίζει με τον xx' γωνία $\pi/4$.

(4 μόρια)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με $\left|\vec{AB}\right| = 2\cdot\left|\vec{AΔ}\right|$. Έστω $\vec{AΔ} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AB} = \vec{\beta}$ με M το μέσο της πλευράς $ΓΔ$, και N το μέσο της πλευράς AM.

i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{AM}$ και $\vec{ΔN}$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

(4+4 μόρια)

ii) Να αποδείξετε ότι $\vec{ΔN} \perp \vec{AM}$

(6 μόρια)

iii) Αν $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 120^0$ τότε:

α. Να αποδείξετε ότι γωνία $MAB = 60^0$.

(4 μόρια)

β. Να αποδείξετε ότι $\left|\vec{AM}\right| = \left|\vec{\alpha}\right|$

(7 μόρια)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν:

$\vec{\alpha} = (1, 8 - \vec{\alpha}\vec{\beta})$ και $\vec{\beta} = \left(2, \frac{\sqrt{5}}{5}|\vec{\beta}|\right)$

i) Να αποδείξετε ότι $\left|\vec{\beta}\right| = \sqrt{5}$

(4 μόρια)

ii) Να αποδείξετε ότι το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=5$

(3 μόρια)

iii) Να αποδείξετε ότι η γωνία των $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

(3 μόρια)

iv) Να βρείτε το συμμετρικό σημείο A' του $A(2,\ 0)$ ως προς την ευθεία που είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$ και διέρχεται από το σημείο $M(1,\ 1)$.

(7 μόρια)

v) Βρείτε ένα γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με μέτρο $2\sqrt{5}$, που να είναι διάνυσμα αντίρροπο στο διάνυσμα $\vec{\gamma}=(1,-2)$

(8 μόρια)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Σάββατο 13 Φεβρουαρίου 2021 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ με συντελεστή διεύθυνσης λ είναι η ε: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

(8 μόρια)

Β. **i)** Δώστε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στον xx' στο σημείο $M(x_0, 0)$.

ii) Δώστε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στον yy' στο σημείο $N(0, y_0)$.

iii) Τι σχέση έχουν μεταξύ τους οι παραπάνω ευθείες και ποια η σχέση του των συντελεστών τους διεύθυνσης (αν αυτοί έχουν νόημα).

(9 μόρια)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Σ ή το γράμμα Λ, στη σωστή ή λανθασμένη αντίστοιχα πρόταση.

α) Η ευθεία $x = 3$ είναι κάθετη στον άξονα yy'.

β) Για δύο οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του επιπέδου ισχύει: $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$

γ) Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, μη παράλληλα στους άξονες xx' και yy', ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$, τότε οι συντελεστές διεύθυνσής τους είναι αντίθετοι αριθμοί.

δ) Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + Γ = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, είναι παράλληλη στο διάνυσμα $(-B, A)$.

(8 μόρια)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $x + 2y = 3$

Α. **i)** Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία είναι κάθετη στην ευθεία (ε) και διέρχεται από το σημείο $A(3, 1)$

(6 μόρια)

ii) Αν το σημείο $B(-1, \alpha)$ ανήκει στην (ε) βρείτε το α

(4 μόρια)

iii) Βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB

(4 μόρια)

Β. Σημείο $Γ$ βρίσκεται στη διχοτόμο $2^{ου}$ και $4^{ου}$ τεταρτημόριου και σχηματίζει με τα σημεία A και B ισοσκελές τρίγωνο με κορυφή το $Γ$.

i) Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $Γ$.

(7 μόρια)

ii) Βρείτε την απόσταση του $Γ$ από τους άξονες xx' και yy'.

(4 μόρια)

ΘΕΜΑ Γ

Μια φωτεινή ακτίνα ξεκινά από το σημείο $A(\kappa, \sqrt{3})$ και κινείται κατά μήκος της ευθείας ε: $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$, έως όταν ανακλασθεί πάνω στον άξονα xx', στο σημείο Β, σχηματίζοντας γωνία 30^{o} μ' αυτόν.

i) Βρείτε το σημείο A.

(3 μόρια)

ii) Βρείτε την εξίσωση της ανακλώμενης ακτίνας (η)

(4 μόρια)

iii) Αν η εξίσωση της (η) είναι η $x-\sqrt{3}y-1=0$ και η ακτίνα σταματά στο σημείο K, το οποίο απέχει από το σημείο της ανάκλασης απόσταση $2\sqrt{3}$, βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου K.

(6 μόρια)

iv) **α)** Να κάνετε μια γραφική παράσταση της άσκησης.

(7 μόρια)

β) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\left(\overset{\Delta}{ABK}\right)$.

(5 μόρια)

ΘΕΜΑ Δ

Δύο αεροπλάνα της Aegean A_1 και A_2 κάθε χρονική στιγμή βρίσκονται στα σημεία $A_1(2t+1,\ t-1)$ και $A_2(t+1,\ 3t+2)$ αντίστοιχα.

Α. **i)** όταν το A_1 βρίσκεται στο σημείο $(-1,-2)$ που βρίσκεται το A_2;

(5 μόρια)

ii) Να αποδείξετε ότι οι πορείες των δύο αεροπλάνων είναι ευθείες γραμμές και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

(5 μόρια)

iii) α. Υπάρχει περίπτωση να συγκρουστούν τα δύο αεροπλάνα;

(5 μόρια)

β. Ποια είναι η γωνία των δύο πορειών τους;

Β. **i)** Να εξετάσετε αν η εξίσωση $(3\lambda+1)x-(\lambda+1)y-\lambda-3=0$ παριστάνει οικογένεια ευθειών και αν ναι βρείτε το κοινό τους σημείο.

(5 μόρια)

ii) Η ευθεία η: $5x-4y+6=0$ ανήκει στην παραπάνω οικογένεια;

(4 μόρια)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Σάββατο 22 Ιανουαρίου 2022 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}=(x,y)$ είναι ίσο με: $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Μονάδες 5

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Αν $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=1$.

ii. Αν το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι θετικός αριθμός, τότε η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι οξεία.

iii. Συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε) είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$.

iv. Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$, $A\neq0$ ή $B\neq0$, είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,A)$.

v. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.

Μονάδες 10

Α3. Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνθήκη της στήλης Α με την αντίστοιχη ισοδύναμη συνθήκη από τη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$	**α.** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$
2. $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$	**β.** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert$
3. $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$	**γ.** $\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$
4. $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$	**δ.** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert$
5. $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=60^o$	**ε.** $2\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το τρίγωνο $ΑΒΓ$ με κορυφές $A(1,2)$, $Γ(-5,0)$ και $\varepsilon:\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot x-\lvert\vec{\beta}\rvert\cdot y-10=0$ η μεσοκάθετος της πλευράς $ΑΒ$, με $\vec{\alpha}=(-1,2)$ και $\vec{\beta}=(3,4)$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) έχει εξίσωση: $x-y-2=0$.

Μονάδες 5

Β2. Να δείξετε ότι το σημείο Β έχει συντεταγμένες $(4,-1)$.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου $ΑΒΓ$.

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε σημείο $Δ$ του επιπέδου ώστε το $ΑΒΓΔ$ να είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η εξίσωση $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|\cdot x+|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\cdot y+(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})-10=0$ (1), τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-1)$ $\vec{\beta}=(\lambda,\lambda+2)$ με $\lambda\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $(\delta): x+y+2022=0$.

Γ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία (ε) για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ2. Αν $(\varepsilon)//(\delta)$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ και να δείξετε ότι $\lambda=2$.

Μονάδες 8

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $K(0,-4)$.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το σημείο τομής Λ των (ε) και (η) και το εμβαδόν του τριγώνου $OK\Lambda$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2y^2+xy-3\lambda(x-y)=0$ (1).

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες (ε) και (δ) των οποίων να βρείτε τις αντίστοιχες εξισώσεις.

Μονάδες 5

Δ2. Αν η ευθεία (ε) έχει εξίσωση $x-y=0$, ενώ η ευθεία (δ) έχει εξίσωση $x+2y-3\lambda=0$.

α) να βρείτε το σημείο τομής M των παραπάνω ευθειών και

β) να δείξετε ότι «κινείται» στη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε το συνημίτονο της οξείας γωνίας των (ε) και (δ).

Μονάδες 5

Δ4. Για $\lambda=1$ και $\lambda=3$, να βρείτε τους τύπους των ευθειών (δ_1) και (δ_2) αντίστοιχα και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου που σχηματίζεται από τις (δ_1), (δ_2) και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 5

Δ5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και μπορεί να είναι φορέας ύψους του τραπεζίου.

Μονάδες 5

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Σάββατο 21 Ιανουαρίου 2023 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_o, y_o)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_o = \lambda(x - x_o)$.

Μονάδες 15

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = \lambda|\vec{\beta}|$, τότε υποχρεωτικά $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

ii. Αν $A \neq B$, τότε η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει πάντοτε ευθεία.

iii. Αν $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) > \frac{\pi}{2}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$.

iv. Όταν ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας δεν ορίζεται, τότε η εξίσωσή της είναι της μορφής $x = x_o$.

v. Η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_1, y_2)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης μηδέν.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές $A(6,-10)$, $B(-6,-5)$ και $\Gamma(1-\lambda, 2\lambda+3)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι το σημείο Γ κινείται πάνω στην ευθεία (ε): $y=-2x+5$

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε την ευθεία (δ) που διέρχεται από το μέσο Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και είναι παράλληλη στην ευθεία (ε)

Μονάδες 6

Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Β,

Β3. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Β4. Για $\lambda = 2$, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ, είναι ισοσκελές.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x,y)$ και $\vec{\beta}=(2\lambda,-\lambda-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=3\lambda-1$, παριστάνει τις ευθείες $\varepsilon_\lambda: 2\lambda x-(\lambda+1)y-3\lambda+1=0$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω ευθείες (ε_λ), διέρχονται από σταθερό σημείο Κ το οποίο να βρείτε.

Μονάδες 7

Γ3. Αν επιπλέον μια από τις (ε_λ) διέρχεται από το μέσο Μ των σημείων $A(1,7)$ και $B(5,-3)$, να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ4. Για $\lambda=1$, να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}=(3,1)$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-2,8)$ και $\vec{\beta}=(\mu,2\mu+3)$, με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=5\mu+15$, $\mu\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να βρείτε την τιμή του αριθμού $\mu\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Για $\mu=-1$ και $\overrightarrow{OK}=3\vec{\beta}-\vec{\alpha}$, όπου O η αρχή των αξόνων,

Δ2. Να βρείτε την ευθεία (ε) που διέρχεται από το Κ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}=\vec{\beta}^2\cdot\vec{\alpha}-\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\beta}$.

Μονάδες 6

Αν $\varepsilon: y=x-4$

Δ3. Να βρείτε ευθεία (δ) κάθετη στην (ε) που διέρχεται από το σημείο Β στο οποίο η (ε) τέμνει τον $y'y$.

Μονάδες 5

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΑΓ όπου Α, Γ τα σημεία τομής των (ε) και (δ) αντίστοιχα με τον $x'x$

Μονάδες 5

Δ5. Αν Δ σημείο του επιπέδου ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο, να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών του τετραγώνου

Μονάδες 5

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Σάββατο 14 Απριλίου 2018 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $c: x^2 + y^2 = \rho^2$ κι ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στο A είναι της μορφής: $\varepsilon: xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

(μόρια 12)

Β. Να σημειώσετε τη σωστή (Σ) και τη λανθασμένη (Λ) απάντηση στα παρακάτω:

i. Το μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\delta} = (\alpha, 0)$ είναι κάθετο στον yy'.

ii. Όλες οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων είναι της μορφής:
$y = \lambda x$.

iii. Δίνεται ο κύκλος στη γενική του μορφή $c: x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$.

α) όταν $A = 0$ το κέντρο του βρίσκεται στον yy'.

β) όταν $\Gamma = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) το κέντρο του είναι της μορφής $K\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}\right)$.

(μόρια 5)

Γ. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση στα παρακάτω:

i. Η ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο $A(0, 4)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $3x - 4y = 8$ έχει εξίσωση:

α. $3x - 4y = 4$ **β.** $3x - 4y = -16$

γ. $3x + 4y = 4$ **δ.** $y = \frac{4}{3}x + 4$

ii. Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη στην ευθεία $y=\frac{3}{4}x+6$ και απέχει από αυτήν απόσταση 4, είναι της μορφής:

α. $y=\frac{3}{4}x+1$ **β.** $y=\frac{3}{4}x$

γ. $y=\frac{3}{4}x-\frac{2}{3}$ **δ.** $y=\frac{3}{4}x-1$

iii. Αν ο κύκλος c: $(x-1)^2+(y-3)^2=p^2$ εφάπτεται στον άξονα xx', η ακτίνα του είναι ίση με:

α. 1 **β.** 3 **γ.** 4 **δ.** 9

iv. Αν το κέντρο του κύκλου c: $x^2+y^2+Ax+By+2=0$ είναι το $K(4,-8)$ τότε το $A+B$ είναι ίσο με:

α. -4 **β.** 4 **γ.** 8 **δ.** -8

(μόρια 8)

ΘΕΜΑ Β

A. **i.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha}$, αν $\vec{\alpha}=\left(|\vec{\alpha}|-2,2|\vec{\alpha}|-2\right)$.

(μόρια 5)

ii. Αν $\vec{\alpha}=(-1,0)$ και $\vec{\beta}=(3,1)$ να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=(1,2)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(μόρια 4)

B. **i.** Δίνεται παραβολή με εστία $E(|\vec{\alpha}|,\ 0)$, όπου $\vec{\alpha}$ το διάνυσμα του Aii, το σημείο $K(2,\ -1)$ και η χορδή της AB με μέσο το σημείο K. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

(μόρια 7)

ii. Αν η παραβολή διέρχεται από το σημείο $M(1,\ 2)$, να βρείτε σημείο N της παραβολής διαφορετικό της αρχής των αξόνων, ώστε $\widehat{MON}=90°$

(μόρια 5)

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου MEN.

(μόρια 4)

ΘΕΜΑ Γ

Α. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}=\dfrac{2\pi}{3}$ για τα οποία ισχύουν $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})=2$ και $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=5$.

i. Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(μόρια 6)

ii. Αν τα διανύσματα $\vec{u}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}-\kappa\vec{\beta}$ είναι κάθετα, να υπολογίσετε τον αριθμό κ.

(μόρια 4)

Β. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)x+(\lambda+2)y-3=0$ (1).

i. Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθείες για κάθε $\lambda\in R$, οι οποίες διέρχονται από το ίδιο σημείο A, το οποίο και να βρείτε.

(μόρια 5)

ii. Θεωρούμε ευθεία ε της οικογένειας (1) η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία η: $x-2y+1=0$.

α. Να βρείτε τον αριθμό λ.

(μόρια 3)

β. Να βρείτε την μεσοπαράλληλη ευθεία των ε και η.

(μόρια 7)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-10+\lambda(3x+y-10)=0$ (1).

Α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in R$ με $\lambda\neq-2$. Τι παριστάνει η (1) για $\lambda=-2$;

(μόρια 4+1)

Β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των παραπάνω κύκλων.

(μόρια 3)

Γ. Αν $\lambda = 1$ τότε:

i. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου MN με μέσο το σημείο $B(1,2)$.

(μόρια 4)

ii. Να υπολογίσετε το μήκος του αποστήματος από το κέντρο K προς τη χορδή MN του κύκλου.

(μόρια 3)

Δ. Αν $\lambda = 0$ τότε:

i. Να βρείτε τις εφαπτόμενες που άγονται από το σημείο $\Gamma(5,5)$ προς τον κύκλο.

(μόρια 5)

ii. Να υπολογίστε το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν οι παραπάνω εφαπτόμενες ευθείες.

(μόρια 5)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Μ. Τετάρτη 24 Απριλίου 2019 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α. Θεωρούμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Να αποδείξετε ότι το μέσο M του AB έχει συντεταγμένες $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

(8 μόρια)

Β. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ):

i) Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $(A, -B)$.

ii) Η εξίσωση $(x - 2y + 5) + \lambda(3x + 2y + 7) = 0$ παριστάνει ευθεία γραμμή η οποία για κάθε λ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii) Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2px$ έχει άξονα συμμετρίας τον yy' και διευθετούσα την ευθεία $x = -p/2$.

iv) Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 \neq 0$.

v) Το εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων είναι πάντα θετικός αριθμός.

(10 μόρια)

Γ. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου, βρείτε το συνθ, όπου θ η γωνία που σχηματίζουν.

(7 μόρια)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=2\vec{i}-\vec{j}$ και $\vec{\beta}=\vec{i}-2\vec{j}$.

i) Βρείτε το γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και τα μέτρα των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(4 μόρια)

ii) Βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\vec{v}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

(5 μόρια)

iii) Αν $\vec{\gamma}=4\vec{\alpha}-\kappa\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}\perp\vec{\gamma}$ τότε:

α) βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ

(4 μόρια)

β) να γράψετε το $\vec{\gamma}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{u}$ και $\vec{v}$

(6 μόρια)

iv) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\left|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|\cdot x+2\left|\alpha+\beta\right|y+1=0$ παριστάνει ευθεία για κάθε x, $y\in\mathbb{R}$ με $\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\beta}\right|=\sqrt{5}$.

(6 μόρια)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα σημεία $K(\kappa, 0)$ και $\Delta(0, \lambda)$ με $\kappa, \lambda > 0$ και $\kappa + \lambda = 2$.

i) Να δειχθεί ότι ο κύκλος C με διάμετρο ΚΛ, διέρχεται από δύο σταθερά σημεία $O(0, 0)$ και $B(1, 1)$.

(6 μόρια)

ii) Αν $\kappa = \lambda = 1$, να βρείτε τις εφαπτόμενες ε_1 και ε_2 του κύκλου C_1 οι οποίες περνάνε από το σημείο $P(1, -1)$.

(5 μόρια)

iii) Υπολογίστε το συνημίτονο της αμβλείας γωνίας των ευθειών ε_1 και ε_2.

(4 μόρια)

iv) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1, ε_2 και ο xx'.

(4 μόρια)

v) Αποδείξετε ότι το $O(0, 0)$ είναι συμμετρικό του B ως προς την $K\Lambda$.

(6 μόρια)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση $(x+2\mu)x+(y-4\mu-4)y+4(2\mu+1)=0$ (1).

i) Να δειχθεί ότι η (1) παριστάνει κύκλο C_μ για κάθε $\mu \neq 0$. Τι γίνεται αν $\mu = 0$;

(6 μόρια)

ii) Βρείτε τη γραμμή που διαγράφουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων.

(5 μόρια)

iii) Για ποια τιμή του μ ο αντίστοιχος κύκλος C_μ, διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

(3 μόρια)

iv) Αν $C_{(-1/2)}$ είναι ο κύκλος που προκύπτει για $\mu = -1/2$ και (ε) η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + 2$, να βρείτε το λ ώστε η (ε) να τέμνει τον $C_{(-1/2)}$ σε δύο σημεία A, B ώστε $A\hat{O}B = 90^\circ$.

(6 μόρια)

v) Ένα πλοίο Π βρίσκεται στην εστία της παραβολής με εξίσωση $x = \frac{1}{4}y^2$. Αν ένας φάρος $Φ_1$ βρίσκεται στο κέντρο του κύκλου C_1 (που προκύπτει για $\mu = 1$), να εξετάσετε αν ο φάρος αυτός είναι ορατός από το πλοίο Π. (Ο φάρος $Φ_1$ εκπέμπει σήματα ορατά σε ένα κυκλικό δίσκο, με ακτίνα ίση με την ακτίνα του C_1.

(5 μόρια)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Σάββατο 23 Μαΐου 2020 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο το $K(x_0,\ y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση c: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$

(7 μόρια)

Β. **i)** Έστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy και ένα σημείο $A(x_0,y_0)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι ε: $y-y_0=\lambda(x-x_0)$.

(5 μόρια)

ii) Ποια είναι η εξίσωση της κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το $A(x_0,\ y_0)$;

(3 μόρια)

Γ. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:

i) Δίνεται ο κύκλος c: $x^2+y^2=10$ και το σημείο $M(1,\ -3)$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο M έχει εξίσωση:

Α. $x+3y=10$ **Β.** $5x-y=8$ **Γ.** $x-3y=10$

Δ. $3x+2y=3$ **Ε.** $\frac{1}{2}x+y=5$

(4 μόρια)

ii) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας (Σ) για τη σωστή απάντηση ή (Λ) για την λανθασμένη.

α) Η ευθεία ε: $y = 2x$ και ο κύκλος c: $x^2 + y^2 = 4$ εφάπτονται.

β) Η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ και $B \neq 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{u} = (A, -B)$

γ) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha_1} = (\lambda, \lambda - 1)$, $\vec{\alpha_2} = (4, -\lambda)$ με λ ≠ 0 είναι κάθετα, τότε $\lambda = -3$.

(??? μόρια)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 = \lambda(6x - 2y)$, $\lambda \in \mathbf{R}$ (1).

i) Για ποια τιμή του λ η (1) παριστάνει κύκλο;

(3 μόρια)

ii) Βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

(3 μόρια)

iii) Που ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων; Βρείτε την εξίσωση της γραμμής των κέντρων αυτών.

(5 μόρια)

iv) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι της εξίσωσης (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

(6 μόρια)

v) Να αποδείξετε ότι όλοι οι παραπάνω κύκλοι έχουν κοινή εφαπτόμενη στο κοινό τους σημείο. Ποια είναι η εξίσωσή της;

(4+4= 8 μόρια)

ΘΕΜΑ Γ

1. Να δειχθεί ότι τα σημεία $A(-2, 1)$, $B(1, 1)$ και $\Gamma(3, -1)$ είναι κορυφές τριγώνου.

(4 μόρια)

2. Αν $\vec{u} = 2\vec{AB} - \vec{A\Gamma}$ και $\vec{v} = (\lambda^2, \lambda + 1)$. Να βρείτε τη τιμή του, ώστε αυτά να είναι παράλληλα.

(4 μόρια)

3. Να βρείτε την ευθεία AB και την απόσταση του Γ από αυτήν.

(2+2=4 μόρια)

4. Βρείτε σημείο Δ έτσι ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο, και υπολογίστε το εμβαδόν του.

(3+2=5 μόρια)

5. Βρείτε ευθεία που διέρχεται από το σημείο $\Lambda\left(|AB|, \vec{AB} \cdot \vec{B\Gamma}\right)$ και σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα xx'.

(4 μόρια)

6. Βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το (0,0) που εφάπτεται στο μέσο της AB.

(6 μόρια)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι κύκλοι C_1: $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ (1) και C_2: $2x^2 + 2y^2 - 12x + 10 = 0$ (2)

i) Βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κάθε κύκλου K_1, ρ_1 και K_2, ρ_2 αντίστοιχα.

(4 μόρια)

ii) Να δειχτεί ότι η εφαπτόμενη (ε) του κύκλου (C_1) στο σημείο του $A(1, 2)$ με $\lambda>0$ είναι η ευθεία $y = 2$.

(5 μόρια)

iii) Να δειχθεί ότι η ευθεία (ε) είναι κοινή εφαπτομένη των κύκλων C_1 και C_2.

(4 μόρια)

iv) Υπάρχει άλλη κοινή εφαπτόμενη των C_1 και C_2; Αν ναι, βρείτε την εξίσωσή της.

(5 μόρια)

v) Να κάνετε μια γραφική παράσταση της άσκησης.

(7 μόρια)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Μ. Τετάρτη 28 Απριλίου 2021 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α. Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$

(μόρια 7)

Β. **i)** Έστω ευθεία (ε) με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ και $M_0(x_0, y_0)$ ένα σημείο εκτός αυτής. Γράψτε τη σχέση που δίνει την απόσταση του M_0 από την ευθεία (ε).

(μόρια 4)

ii) Έστω $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$, τρία σημεία του καρτεσιανού επιπέδου. Γράψτε τη σχέση που δίνει το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(μόρια 4)

Γ. Να γράψετε τη σωστή απάντηση σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις.

i) Η εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-2, 3)$ και είναι κάθετη στον άξονα yy' είναι η:

Α. $x = -2$ Β. $x = 2$ Γ. $y = 3$ Δ. $y = -3$

Ε. καμία από τις παραπάνω.

ii) Η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία AB με $A(1, 1)$ και $B(3, 3)$ με τον άξονα xx' είναι η:

Α. $\omega = \pi/2$ Β. $\omega = \pi/6$ Γ. $\omega = \pi/4$ Δ. $\omega = \pi$

Ε. καμία από τις παραπάνω.

iii) Η ευθεία ε: $2x - y + 4 = 0$ είναι παράλληλη με το διάνυσμα:

Α. $\vec{\delta} = (1,4)$ Β. $\vec{\delta} = (2,-1)$ Γ. $\vec{\delta} = (2,1)$ Δ. $\vec{\delta} = (1,2)$

Ε. κανένα από τα παραπάνω

iv) Ο κύκλος C: $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 1 = 0$ έχει ακτίνα ίση με:

Α. $\frac{3}{2}$ Β. $\frac{2}{3}$ Γ. $\frac{4}{3}$ Δ. $\sqrt{17}$

Ε. καμία από τις παραπάνω

v) Η απόσταση του σημείο $M(-1, 2)$ από την ευθεία ε: $x - 3y + 1 = 0$ είναι ίση με:

Α. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ Β. $\frac{3}{5}$ Γ. 3 Δ. $\frac{1}{3}$

Ε. καμία από τις παραπάνω

(10 μόρια)

ΘΕΜΑ Β

Έστω (ε) η ευθεία που περνάει από το σημείο $K(1, -2)$ και τέμνει τους άξονες xx' και yy' στα σημεία A και B αντίστοιχα, ώστε το K να είναι μέσο του AB.

α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

(μόρια 6)

β) Ευθεία (n) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι παράλληλη στην AB.

i) Να βρείτε την ευθεία (n)

(μόρια 3)

ii) Βρείτε σημείο Γ της παραπάνω ευθείας (n), έτσι ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές

(μόρια 6)

γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ αν $\Gamma\left(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}\right)$

(μόρια 6)

δ) Ποια είναι η προβολή της αρχής των αξόνων πάνω στην ευθεία AB;

(μόρια 4)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2(\lambda + 2)y + 2(\lambda + 1)^2 = 0, \lambda \in R$ (1)

1) Να δειχτεί ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in R$, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(μόρια 5)

2) Αν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται στην ευθεία $x + y + 2 = 0$:

α) να δείξετε ότι οι κύκλοι που παριστάνει η (1) εφάπτονται σε 2 σταθερές ευθείες παράλληλες στην (ε).

(μόρια 6)

β) Αν $\lambda = -1$,

i) βρείτε την εφαπτόμενη του κύκλου στο $A(0, -2)$

(μόρια 6)

ii) αν οι σταθερές ευθείες εφάπτονται στο κύκλο στα σημεία M και N βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου MAN

(μόρια 4)

iii) να κάνετε μια γραφική παράσταση της άσκησης

(μόρια 4)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα σημεία $K(\eta\mu\alpha, \sigma\upsilon\nu\alpha)$ και $\Lambda(-\eta\mu\alpha, -\sigma\upsilon\nu\alpha)$, $\alpha \in R$

1) Να δειχτεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$, για τα οποία ισχύει $(MK) = \sqrt{2}(M\Lambda)$ είναι κύκλος. Βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

(μόρια 5+1)

2) Ποιος ο γεωμετρικός τύπος του κέντρου του παραπάνω κύκλου;

(μόρια 3)

3) Από το σημείο $P(0, 6)$ ξεκινούν δυο εφαπτόμενες n_1, n_2 προς τον κύκλο c: $x^2 + y^2 = 9$.

α) βρείτε τις ευθείες n_1 και n_2.

(μόρια 6)

β) ποια γωνία σχηματίζουν μεταξύ τους;

(μόρια 4)

4) Υπάρχουν κύκλοι του ερωτήματος i) που να εφάπτονται ταυτόχρονα στους άξονες xx' και yy';

(μόρια 6)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Πέμπτη 28 Απριλίου 2022 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α.α. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου c: $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο Α(x_1, y_1) έχει εξίσωση: $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

(8 μονάδες)

Α.β. Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Να αποδείξετε την ισοδυναμία: $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.

(7 μονάδες)

Α.γ. Να Χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

i) Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y = 0$ έχει ως κέντρο την αρχή των αξόνων Ο(0, 0).

ii) Η ευθεία $2x + y - 3 = 0$ σχηματίζει με τον άξονα xx' αμβλεία γωνία.

iii) Το συμμετρικό του σημείου Ρ$(-1, 2)$ ως προς τον άξονα yy' είναι το Ρ΄$(2, -1)$.

iv) Η παραβολή με εξίσωση $x = 2y^2$ έχει εστία Ε$(0, 1/2)$.

v) Η ευθεία $2x + 3y - 1 = 0$ και το διάνυσμα $\vec{u} = (3,2)$ είναι μεταξύ τους κάθετα.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\lambda x + 6\lambda y + 13\lambda^2 - 9 = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ίσους κύκλους.

(5 μονάδες)

ii) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των παραπάνω κύκλων.

(5 μονάδες)

iii) **α)** Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω κύκλοι εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες.

(6 μονάδες)

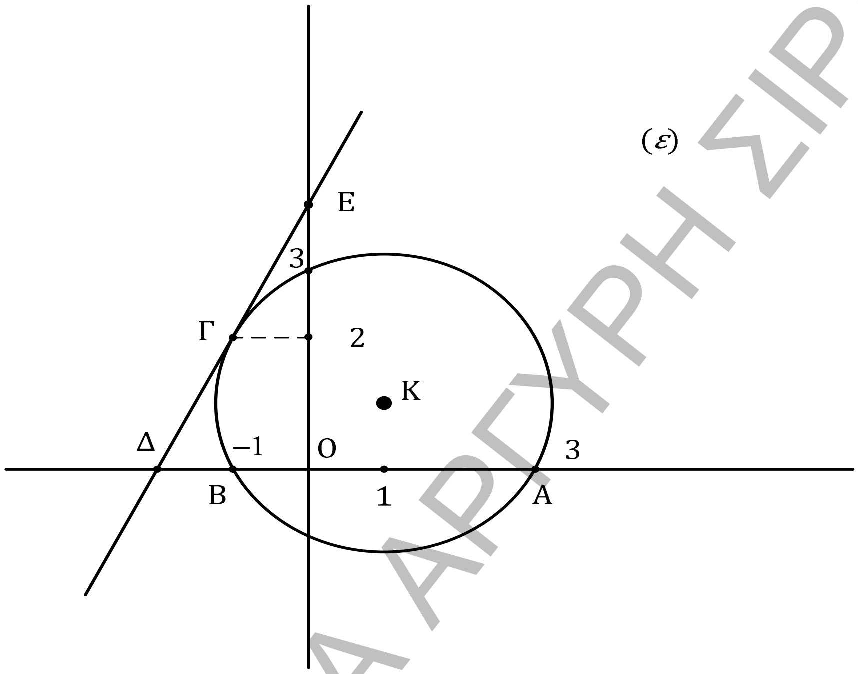
β) Να βρείτε την απόσταση των δύο παραπάνω ευθειών.

(3 μονάδες)

iv) Αν $\lambda = 0$ βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που άγονται από το σημείο Α(0, 5).

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ



Γ.α. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου στο παραπάνω σχήμα.

(6 μονάδες)

Γ.β. Αν η εξίσωση του κύκλου c_1 είναι $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$

i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Γ είναι αντιδιαμετρικά.

(2 μονάδες)

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου c_1 που άγονται από το σημείο Δ.

(5 μονάδες)

iii) Να βρείτε τη γωνία των παραπάνω εφαπτομένων.

(6 μονάδες)

iv) Να βρείτε ποιο σημείο του κύκλου c_1 απέχει από το Δ τη μικρότερη και ποιο τη μεγαλύτερη απόσταση.

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η ευθεία (ε) $4\lambda x - 4y + 1 = 0$ και η παραβολή c: $y = x^2$.

i) Να βρείτε την εστία Ε και τη διευθετούσα (δ) της παραβολής.

(3 μονάδες)

ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει την παραβολή σε 2 σημεία, έστω Α και Β.

(4 μονάδες)

iii) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της c στα σημεία Α και Β είναι μεταξύ τους κάθετες.

(6 μονάδες)

iv) Να αποδείξετε αν το κοινό σημείο των εφαπτομένων της c στα σημεία Α και Β ανήκει στην ευθεία $y = -\frac{1}{4}$.

(6 μονάδες)

v) Αν $\lambda > 0$ να κάνετε μια γραφική παράσταση της άσκησης.

(6 μονάδες)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Πέμπτη 20 Απριλίου 2023 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ, έχει εξίσωση C: $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Μονάδες 10

Α2. Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου με κέντρο Κ (x_0, y_0) και ακτίνα ρ;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

i) Η ευθεία με εξίσωση $2x - 3y + 1 = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (2,-3)$.

ii) Η απόσταση των σημείων Α (x_1, y_1) και Β (x_2, y_2) είναι: $(\mathrm{AB}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

iii) Η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον yy' έχει εξίσωση $x = \frac{1}{2\rho} \cdot y^2$, $\rho \neq 0$.

iv) Η απόσταση του σημείου Μ (x_0, y_0) από την ευθεία ε: $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ δίνεται από τον τύπο: $d(M,\varepsilon) = \frac{|Ax^2 + By^2 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

v) Η αρχή των αξόνων Ο$(0, 0)$ ανήκει στον κύκλο C: $x^2 + y^2 = 1$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ (1)

Β1. Να δείξετε ότι παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Μονάδες 6

Β2. Το σημείο Α (2, 4) είναι εσωτερικό, εξωτερικό ή εφάπτεται στον κύκλο; Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας αλγεβρικά.

Μονάδες 5

Β3. Να βρείτε το συμμετρικό σημείο Κ΄ του κέντρου Κ του κύκλου ως προς την ευθεία $\varepsilon: y = 2x$.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $K\overset{\Delta}{O}A$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $x(x-2) + y(y-4\lambda) = 0$ (1)

Γ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Μονάδες 3+3

Γ2. Να βρείτε που ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων

Μονάδες 3

Γ3. α) Αν ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: y = x$, βρείτε το λ.

Μονάδες 6

β) Βρείτε τα σημεία Α και Β εκτός της αρχής των αξόνων όπου ο κύκλος τέμνει του άξονες xx' και yy' αντίστοιχα.

Μονάδες 6

γ) Είναι τα σημεία Α και Β αντιδιαμετρικά του κύκλου;

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α) Δίνεται η παραβολή με εξίσωση C: $y^2 = x$. Βρείτε την εστία και την διευθετούσα της.

Μονάδες 3

β) Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της παραβολής που περνούν από το σημείο Μ $(-1, 0)$ και εφάπτονται σε αυτήν στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

Μονάδες 6

Δ2. α) Κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων εφάπτεται στη διευθετούσα της παραβολής. Να βρείτε την εξίσωσή του.

Μονάδες 4

β) Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη απόσταση του σημείου Μ από τον κύκλο.

Μονάδες 4

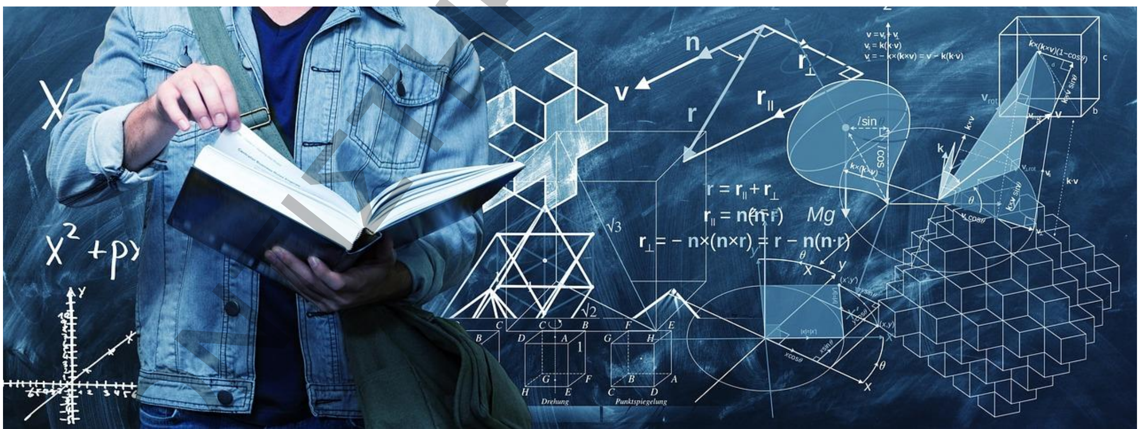
γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΑΒ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 3

Δ3. Να κάνετε μια γραφική παράσταση του θέματος.

Μονάδες 5

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ 25



ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2024

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ ΕΦΟΛΗΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ 2024

1

25

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν δύο διανύσματα είναι κάθετα τότε το εσωτερικό τους γινόμενο είναι ίσο με το μηδέν.

β. Δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης για ευθείες παράλληλες στον άξονα x΄x.

γ. Αν είναι $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

δ. Η απόσταση του σημείου $P(x_0, y_0)$ από την ευθεία $(\varepsilon): Ax+By+\Gamma=0$ δίνεται από τον τύπο $d(P,\varepsilon)=\dfrac{Ax_0+By_0+\Gamma}{\sqrt{A^2+B^2}}$

ε. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0 \quad \text{με} \quad A^2+B^2-4\Gamma>0.$$

Μονάδες 5x2=10

A2. Έστω τα διανύσματα

$$\vec{\alpha}=(x_1, y_1) \quad \text{και} \quad \vec{\beta}=(x_2, y_2) \quad \text{όπου} \quad x_1, x_2 \neq 0$$

Να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1\cdot\lambda_2=-1$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.5 14586

Δίνονται τα σημεία Α(1, 2), Β(3, 4) και $\Gamma(5,-2)$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.

β. Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ, να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

γ. Να γραφεί το $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AM}$.

Μονάδες (9+8+8)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $(\alpha+1)\cdot x+(\alpha-3)\cdot y+\alpha-7=0$ (1) , $\alpha\in\mathbb{R}$ και το σημείο $M(2\lambda-3\,,6\lambda-14)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Γ1. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματικό αριθμό α.

Γ2. Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας (1) διέρχονται από σταθερό σημείο Κ το οποίο και να βρείτε

Γ3. Να δείξετε ότι το σημείο Μ , για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ, κινείται σε ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο Κ της οικογένειας (1).

Γ4. Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο Μ στην αρχή των αξόνων Ο(0,0)

Μονάδες (5+5+10+5)=25

ΘΕΜΑ Δ 3.1 15080

Δίνονται οι εξισώσεις $C_1: x^2+y^2-2x-8=0$ (1) και $C_2: x^2+y^2-6x+8=0$ (2).

α. Να δείξετε ότι οι (1) και (2) είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα $K(1,0)$, $\Lambda(3,0)$ και ακτίνες $\rho_1=3$, $\rho_2=1$ αντίστοιχα.

β. **i.** Να βρείτε το μήκος της διακέντρου $(K\Lambda)$.

ii. Να δείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1.

γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου C_1 που εφάπτονται στον κύκλο C_2.

Μονάδες [6+(5+5)+9]=25

2

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ τότε $\vec{\alpha}\,/\!/\,\vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=1$.

β. Κάθε ευθεία του επιπέδου της μορφής Αx+Γ=0 με Α≠0 είναι κάθετη με τον άξονα y'y.

γ. Η εφαπτομένη της παραβολής $x^2=2py$ στο σημείο $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$xx_1 = p(y + y_1).$$

δ. Οι εστίες της υπερβολής $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$ βρίσκονται στον άξονα $x'x$.

ε. Οι κύκλοι με εξισώσεις $(x-2)^2+(y+3)^2=16$ και $x^2+y^2-4x+6y+7=0$ είναι ομόκεντροι.

Μονάδες 5x2=10

A2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου C: $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$, έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\rho^2$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.5 15038

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}|=3, |\vec{\beta}|=4$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$.

α. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

β. Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$.

γ. Να αποδείξετε ότι $(3\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})=15$.

Μονάδες (9+6+10)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $A(-2,4)$, $B(2,6)$ και $\Gamma(4,4)$. Να βρείτε:

Γ1. Το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ που άγεται από την κορυφή Α .

Γ2. Τις συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου Α ως προς την πλευρά ΒΓ του τριγώνου

Γ3. Τις εξισώσεις δύο παραλλήλων ευθειών που απέχουν απόσταση 8 μονάδες και έχουν μεσοπαράλληλη την πλευρά ΒΓ του τριγώνου.)

Γ4. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ .

Μονάδες (5+8+7+5)=25

ΘΕΜΑ Δ 3.1 15432

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4\kappa x-2\kappa y+4=0$ (1) με $\kappa\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο.

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κάθε κύκλου.

γ. Να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων.

δ. Για $\kappa=1$ να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του αντίστοιχου κύκλου της εξίσωσης (1) στο σημείο $\Gamma(2,2)$.

Μονάδες (7+3+7+8)=25

3

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$.

β. $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα του επιπέδου.

γ. Η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, A)$.

δ. Η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$, $\rho > 0$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$, έχει εξίσωση $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$.

ε. Η παράμετρος p της εξίσωσης της παραβολής $y^2 = 2px$, παριστάνει την απόσταση της εστίας E από τη διευθετούσα δ της παραβολής.

Μονάδες 5x2=10

Α2. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες (x, y) του διανύσματος με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις $x = x_2 - x_1$ και $y = y_2 - y_1$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.5 15073

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

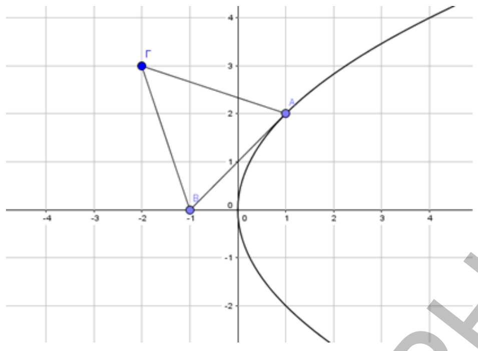
β. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

γ. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

Μονάδες (8+8+9)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το παρακάτω σχήμα.



Γ1. Να αποδείξετε πως η παραβολή του σχήματος έχει εξίσωση $y^2 = 4x$ και στη συνέχεια να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα της δ.

Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Γ3. Να βρείτε τις εξισώσεις όλων των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Γ

Γ4. Από τις ευθείες του προηγούμενου ερωτήματος να προσδιορίσετε αυτή που είναι κάθετη στην διευθετούσα δ της παραβολής.

Μονάδες $(8+5+7+5)=25$

ΘΕΜΑ Δ 2.3 14984

Θεωρούμε τα σημεία $A(-2,-3)$ και $B(7,9)$. Έστω S το σύνολο των σημείων M που είναι κορυφές των τριγώνων AMB ώστε $(AMB)=12$ τ.μ.

α. Να αποδείξετε ότι το S αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών $(\varepsilon_1): 4x-3y-9=0$ και $(\varepsilon_2): 4x-3y+7=0$.

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι η μεσοπαράλληλη των (ε_1) και (ε_2).

γ. Θεωρούμε ένα σημείο M_1 στην (ε_1) και ένα σημείο M_2 στην (ε_2) ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο AM_1BM_2. Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα $AXBY$ υπάρχουν, αν το X πρέπει να είναι σημείο της (ε_1) και το Y σημείο της (ε_2), που έχουν το ίδιο εμβαδό με το AM_1BM_2; Εξηγήστε.

Μονάδες $(9+9+7)=25$

4

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι: $y-y_0=\lambda(x-x_0)$.

β. Αν $\vec{\alpha}=(x,y)$, τότε $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

γ. Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής Μ διχοτομεί την γωνία $E'ME$, όπου E', E οι εστίες της έλλειψης.

δ. Η εστία της παραβολής $y^2=2px$ είναι το σημείο $E(0,\frac{p}{2})$.

ε. Ονομάζουμε εκκεντρότητα της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ το λόγο $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}$.

Μονάδες 5x2=10

Α2. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $\vec{\alpha}\ //\ \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.5 15186

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(6,3)$, $\Delta(1,-2)$ και $\Gamma(9,2)$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες $(4,2)$ και το μέσο Ν του τμήματος ΓΔ έχει συντεταγμένες $(5,0)$.

β. $\overrightarrow{MN}=(1,-2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(8,4)$.

γ. $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

Μονάδες (8+8+9)=25

ΘΕΜΑ Γ

Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ η κορυφή του Α έχει συντεταγμένες (6,4) και τα δύο ύψη του έχουν εξισώσεις (υ_1): $y=-3x+10$ και (υ_2): $5x-3y+6=0$ αντιστοίχως.

Να βρείτε:

Γ1. την εξίσωση της πλευράς ΑΒ και τις συντεταγμένες της κορυφής Β.

Γ2. την εξίσωση της πλευράς ΑΓ και τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.

Γ3. το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ αν Α(6, 4), Β(1, 7) και Γ(0, 2).

Μονάδες (9+9+7)=25

ΘΕΜΑ Δ 3.1 15993

Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2+1$ (1), όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β. Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

γ. Αν $A(1,0)$ και $B(3,0)$ είναι τα μοναδικά σημεία από τα οποία διέρχονται όλοι οι κύκλοι, τότε να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων.

δ. Αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha\beta=0$

Μονάδες (3+10+7+5)=25

5

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, τότε $(\vec{\alpha}, \widehat{\ } \vec{\beta}) = 0$.

β. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

γ. Η ευθεία $9x - 3y = 2024$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}(3, -1)$.

δ. Το κέντρο του κύκλου $C: (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$ είναι το σημείο $K(1, -1)$.

ε. Η παραβολή $x^2 = 2py$ έχει εστία $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ και διευθετούσα $\delta: y = -\frac{p}{2}$.

Μονάδες 5x2=10

Α1. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ενός επιπέδου. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\left(\vec{\beta} + \vec{\gamma}\right) = \vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}\vec{\gamma}$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.5 15825

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$, $(\vec{\alpha}, \widehat{\ } \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

α. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$.

β. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$.

γ. Να βρείτε τη $\left(\vec{\alpha}, \widehat{\ } \vec{\gamma}\right)$.

Μονάδες (8+10+7)=25

ΘΕΜΑ Γ 2.2 15178

Δίνεται η εξίσωση $(\mu+1)x+(\mu+2)y=0,\ \mu\in\mathbb{R}\ \ (1)$.

α. **i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

β. **i.** Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης 0; Ποια είναι η εξίσωσή της;

ii. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης; Ποια είναι η εξίσωσή της;

γ. Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού μ, προκύπτει ευθεία η οποία σχηματίζει γωνία $45°$ με τον άξονα $x'x$. Ποια είναι η εξίσωσή της;

Μονάδες $[(8+2)+(3+3)+9]=25)$

ΘΕΜΑ Δ 3.1 18415

Δίνεται η εξίσωση $(x-3\lambda)^2+(y+2\lambda)^2=1$ (1) όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x+3y=0$.

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την (1) ανήκουν στην ευθεία ε.

β. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ που απέχουν μεταξύ τους 2 μονάδες και έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία ε.

γ. Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες.

δ. Να βρείτε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ αντίστοιχα.

Μονάδες $(6+7+6+6)=25$

6

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\lambda\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ για κάθε $\lambda\in R$.

β. Αν $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι δυο σημεία του επιπέδου τότε $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

γ. Η εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ με $A, B, \Gamma\in\mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία όταν $A\neq 0$ και $B\neq 0$.

δ. Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία

$A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ με $x_1\neq x_2$ ισούται με $\lambda=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

ε. Ο κύκλος $x^2+y^2=1$ περνά από την εστία της παραβολής $y^2=4x$.

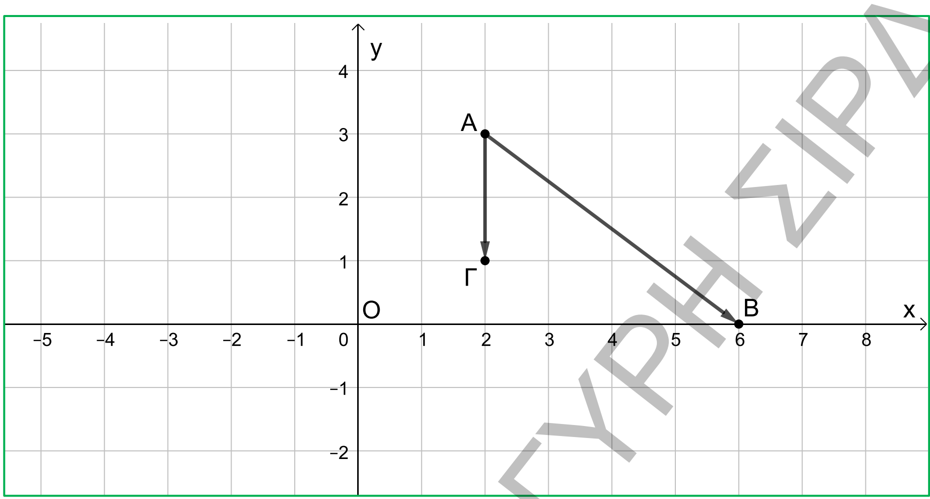
Μονάδες 5x2=10

Α2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ε του κύκλου $C: x^2+y^2=\rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1,y_1)$ δίνεται από την εξίσωση (ε) : $xx_1+yy_1=\rho^2$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.5 17075

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.



α. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}=(4,\,-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(0,\,-2)$.

β. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

Μονάδες (12+13)=25

ΘΕΜΑ Γ

Οι συντεταγμένες τυχαίου σημείου $M(x,y)$ του επιπέδου ικανοποιούν την εξίσωση:

$$(x-2)(x-4)+(y+3)(y+5)=2.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο.

Γ2. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου Κ και την ακτίνα ρ του κύκλου αυτού.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): 4x+3y=10$ εφάπτεται με τον παραπάνω κύκλο.

Γ4. Να βρείτε τα σημεία τομής Α , Β της ευθείας (ε) με τους άξονες συντεταγμένων $x'x$ και $y'y$ και στην συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

Μονάδες (6+5+7+7)=25

ΘΕΜΑ Δ **2.2** **15004**

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που διέρχεται από τα σημεία $A(4,2)$ και $B(8,5)$

β. Αν $\varepsilon_1: 3x-4y-4=0$, να δείξετε ότι η οξεία γωνία που σχηματίζει με την ευθεία $\varepsilon_2: 7x-y-1=0$ είναι $\hat{\varphi}=45^o$.

γ. Να βρείτε το σημείο τομής των ε_1 και ε_2.

δ. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ε_3 τέτοιας ώστε η ε_2 να διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_3.

Μονάδες (6+4+8+7)=25

7

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ είναι εξίσωση κύκλου αν και μόνον αν

$$A^2+B^2-4\Gamma>0$$

β. Η απόσταση του σημείου $M_0(x_0,\ y_0)$ από την ευθεία ε: Αx+Βy+Γ=0 είναι:

$$d=(M_0,\ \varepsilon)=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2-B^2}}$$

γ. Η εξίσωση $x^2+4y=4$ παριστάνει έλλειψη.

Α2. Αν $y^2=8x$ τότε η εστία είναι:

i. Ε(–2, 0) **ii.** Ε(4, 0), **iii.** Ε(0, –2) , **iv.** Ε(2, 0)

Α3. $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$, $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$ τότε $\vec{\alpha}\vec{\beta}$ είναι:

i. -1, **ii.** $\frac{1}{2}$, **iii.** 1, **iv.** 2

Μονάδες 5x2=10

Α2. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Να αποδείξετε την ισοδυναμία: $\vec{\alpha}\ //\ \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 2.2 22072

Δίνονται οι εξισώσεις (1): $\lambda x+(\lambda-1)y-4=0$ και (2): $(3\lambda+1)x-2\lambda y-7=0$ με $\lambda\in R$.

α. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε $\lambda\in R$.

β. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$, ώστε οι ευθείες με εξισώσεις τις (1) και (2) να είναι μεταξύ τους κάθετες.

Μονάδες (15+10)=25

ΘΕΜΑ Γ 1.4 18243

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=4$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα

$$\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\beta} \text{ και } \vec{\delta}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}.$$

α. Να βρείτε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

β. Να βρείτε το $\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}$.

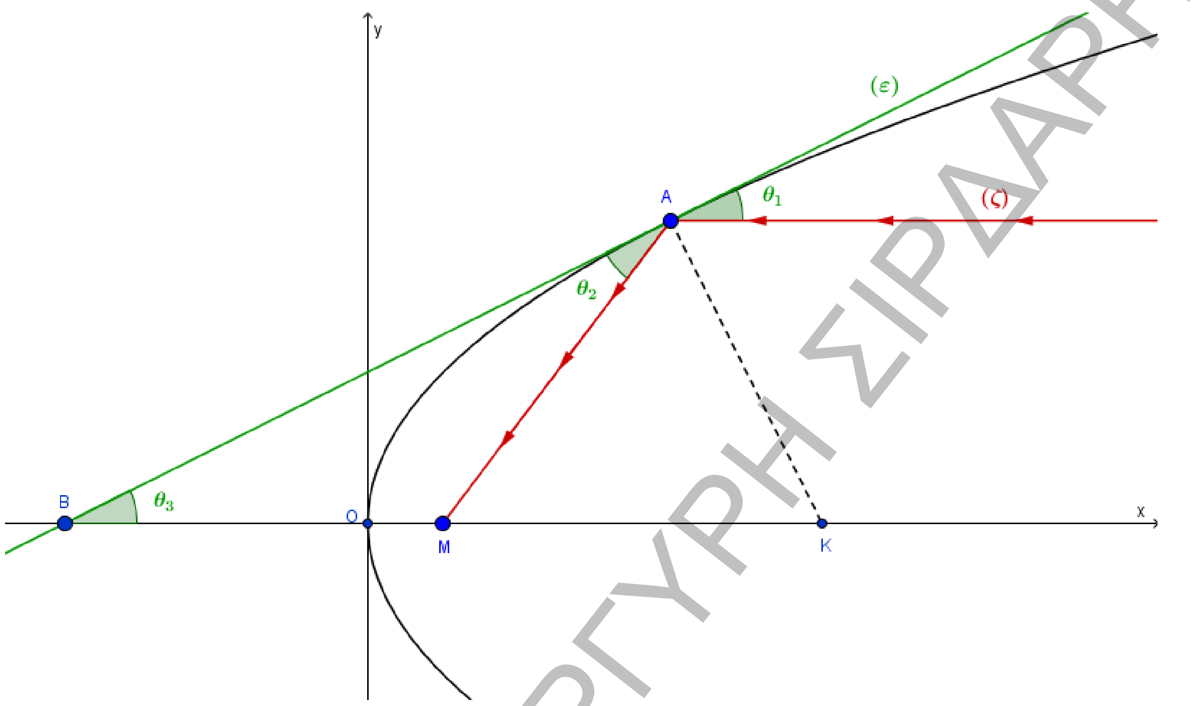
γ. Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|,|\vec{\delta}|$

δ. Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\delta}})$.

Μονάδες (5+7+8+5)=25

ΘΕΜΑ Δ 3.2 18870

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $y^2=4x$, η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο $A(4,4)$ και η AK κάθετη στην (ε). Μία φωτεινή ακτίνα (ζ), ακολουθώντας πορεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, προσπίπτουσα στο σημείο A και ανακλώμενη πάνω στην καμπύλη (που αντιστοιχεί σε παραβολικό κάτοπτρο) διέρχεται από το σημείο M. Αν γνωρίζετε ότι η γωνία θ_1 που σχηματίζει η προσπίπτουσα φωτεινή ακτίνα (ζ) με την (ε) και η γωνία θ_2 που σχηματίζει η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα AM με την (ε) είναι ίσες, τότε:



α. Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και το σημείο B στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$.

γ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές.

δ. Να αποδείξετε ότι το σημείο M ταυτίζεται με την εστία της παραβολής.

Μονάδες $(6+6+7+6)=25$

8

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Οι συντεταγμένες (x , y) του μέσου Μ τμήματος ΑΒ με

$\mathrm{A}(x_1, y_1)$ και $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ είναι $x = \dfrac{x_1 - x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 - y_2}{2}$

β. Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$ τότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο με ακτίνα **ρ=**$\sqrt{\dfrac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{2}}$

γ. $(\mathrm{AB\Gamma}) = \dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\right)\right|$

δ. Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$

ε. Ο κύκλος $(x-1)^2 + y^2 = 1$ και η παραβολή $y^2 = -2x$ εφάπτονται.

Μονάδες 5x2=10

Α2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση Αx+Βy+Γ=0 με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ και κάθετη $\vec{\eta} = (A, B)$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.5 22170

Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha}=(-1,\,3),\ \vec{\beta}=\left(-2,\,-\frac{1}{2}\right)\quad \text{και}\quad \vec{v}=(x^2,\,x-1).$$

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.

β. Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{u}=(3,4)$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα.

γ. Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά;

Μονάδες (8+8+9)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ο κύκλος

$$(2x-4)^2+(2y+4)^2=32$$

Γ1. Βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ του κύκλου.

Γ2. Βρείτε την γωνία του διανύσματος $\overrightarrow{OK}$ με τον άξονα $x'x$.

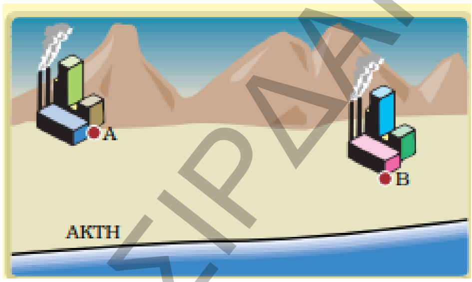
Γ3. Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ , όπου Μ το μέσο της κάθε χορδής που διέρχεται από το σημείο Α(1,-1).

Γ4. Βρείτε την εφαπτομένη (ε) του κύκλου , η οποία να είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε_1): $y=x+3$

Μονάδες (5+5+7+8)=25

ΘΕΜΑ Δ **2.2** **15475**

Δύο εργοστάσια Α και Β τα οποία σε ένα σύστημα συντεταγμένων έχουν συντεταγμένες $\text{Α}(2, 1)$, $\text{Β}(4, 3)$ βρίσκονται κοντά σε μια ακτή που πρόκειται να κατασκευαστεί μια αποβάθρα και θα εξυπηρετεί τα δύο εργοστάσια.



α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια.

β. Αν η ακτή είναι ευθύγραμμη με εξίσωση $\varepsilon\colon y = 2x - 7$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της ακτής στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα ώστε να απέχει εξ ίσου από τα δύο εργοστάσια.

γ. Αν το ζητούμενο σημείο του ερωτήματος β) είναι $\text{Ν}(4, 1)$, να βρείτε πόσο απέχει το κάθε εργοστάσιο από το σημείο αυτό.

Μονάδες (8+10+7)=25

9

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει $\vec{\alpha}=\vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$

β. Η εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, όπου $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$, παριστάνει έλλειψη με εστίες Ε΄(-γ,0) και Ε(γ,0) και σταθερό άθροισμα 2α.

γ. Η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ παριστάνει κύκλο αν ισχύει

$$A^2+B^2+4\Gamma>0$$

δ. Το διάνυσμα $\vec{\delta}=(-A,B)$ είναι παράλληλο στην ευθεία

$$\varepsilon:\ Ax+By+\Gamma=0,\quad A\neq 0 \text{ ή } B\neq 0$$

ε. Αν μια ευθεία και ένα διάνυσμα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης , τότε σχηματίζουν ίσες γωνίες με τον άξονα xx'.

Μονάδες 5x2=10

Α2. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου, να γράψετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$ με λ,μ πραγματικούς αριθμούς.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.5 22554

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy, με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$, $y'y$ τα $\vec{i}$, $\vec{j}$ αντίστοιχα, τα σημεία Α και Β έχουν διανύσματα θέσεως $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}+2\vec{j}$ και $\overrightarrow{OB}=6\vec{i}-\vec{j}$.

Έστω Μ ένα σημείο τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{5}\left(2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}-3\vec{j}$,

ii. $\overrightarrow{OM}=\vec{j}$.

β. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OM}$.

Μονάδες (8+8+9)=25

ΘΕΜΑ Γ

Έστω τα σημεία

$$M(1+\eta\mu\varphi\ ,\ 2-\sigma\upsilon\nu\varphi)\ ,\ \varphi\in[0,2\pi]$$

Γ1. Να δείξετε ότι τα σημεία Μ κινούνται σε κύκλο , του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Γ2. Δίνεται ο κύκλος $(x-1)^2+(y-2)^2=1$

Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που άγονται από το σημείο Ο(0,0).

Γ3. Αν Α,Β είναι τα σημεία επαφής του **(β)** ερωτήματος , να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB}}\right)$,

όπου Κ το κέντρο του κύκλου.

Μονάδες (8+9+8)=25

ΘΕΜΑ Δ **2.2** **21652**

Δίνονται οι εξισώσεις $\lambda x + y = 2\lambda$ (1) και $x + \lambda y = \lambda + 1$ (2), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν ευθείες ε_λ και η_λ αντίστοιχα.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι ευθείες ε_λ και η_λ τέμνονται.

γ. Για $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$

i. να βρείτε συναρτήσει του λ τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των ε_λ και η_λ

ii. αν $M\left(\dfrac{2\lambda+1}{\lambda+1}, \dfrac{\lambda}{\lambda+1}\right)$ να αποδείξετε ότι το M κινείται στην ευθεία $\zeta: x - y = 1$.

Μονάδες $[6+6+(7+6)]=25$

10

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ και αντίστροφα.

β. Η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το σημείο $B(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση $x = x_o$.

γ. Η ευθεία με εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο όταν

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$.

δ. Η εφαπτόμενη της υπερβολής στο σημείο $A(x_1, y_1)$ με εστίες στον $x'x$ είναι

$$\frac{yy_1}{\alpha^2} - \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$$

ε. Μια ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n} = (A, B)$.

Μονάδες 5x2=10

Α2. Έστω δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

Αν (x, y) είναι οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ, να αποδείξετε ότι :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.5 20732

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,1)$ και $\vec{\beta}=(-8,\,-4)$.

α. Να δείξετε ότι τα διάνυσμα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{\beta}|=4|\vec{\alpha}|$.

β. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}<0$.

Μονάδες (12+6+7)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η ευθεία ε: $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$.

Γ1. Να βρείτε τα σημεία τομής Α και Β της ευθείας ε με τους άξονες συντεταγμένων.

Γ2. Να δείξετε ότι ένας κύκλος που έχει διάμετρο το τμήμα ΑΒ διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο. Να βρείτε το αντιδιαμετρικό σημείο του Ο.

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται στην ευθεία ΑΒ.

Μονάδες (7+9+9)=25

ΘΕΜΑ Δ 2.2 15253

Δίνεται η εξίσωση $(\mu^2-1)x+(3\mu^2-2\mu-1)y-5\mu^2+4\mu+1=0$ (1), όπου $\mu\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η (1) παριστάνει ευθεία ε.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του μ οι ευθείες ε:

- **i.** είναι παράλληλες στον $x'x$.
- **ii.** είναι παράλληλες στον $y'y$.
- **iii.** διέρχονται από το $(0,0)$.

γ. Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες ε που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

Μονάδες [5+(4+4+4)+8]=25

11

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ είναι $xx_1 + yy_1 = \rho$

β. Η ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$, είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, A)$

γ. Η ευθεία $y = y_0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=0$

δ. Οι ευθείες $y=\frac{1}{\lambda}x$, $\lambda \neq 0$ και $y = \lambda^2 x - 1$ είναι κάθετες για $\lambda = -1$.

ε. Η έλλειψη $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ έχει εστίες $E(3, 0)$ και $E'(-3, 0)$

Μονάδες 5x2=10

Α2. Αν Μ είναι το μέσον ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο Ο ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Β 2.2 22092

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφή $A(1,4)$.

Η πλευρά ΑΔ έχει εξίσωση $3x-2y+5=0$ και η διαγώνιος ΒΔ έχει εξίσωση $y=x+2$.

α. Να αποδείξετε ότι η κορυφή Δ έχει συντεταγμένες $\Delta(-1,1)$.

β. Αν οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα, να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου ΑΓ.

Μονάδες (12+13)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με

$$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2 \text{ και } (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 120^0$$

Γ1. Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}, \quad 3\vec{\alpha}\cdot(-2\vec{\beta})$$

Γ2. Να υπολογιστούν τα μέτρα των διανυσμάτων

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}, \quad \vec{\alpha}+2\vec{\beta}$$

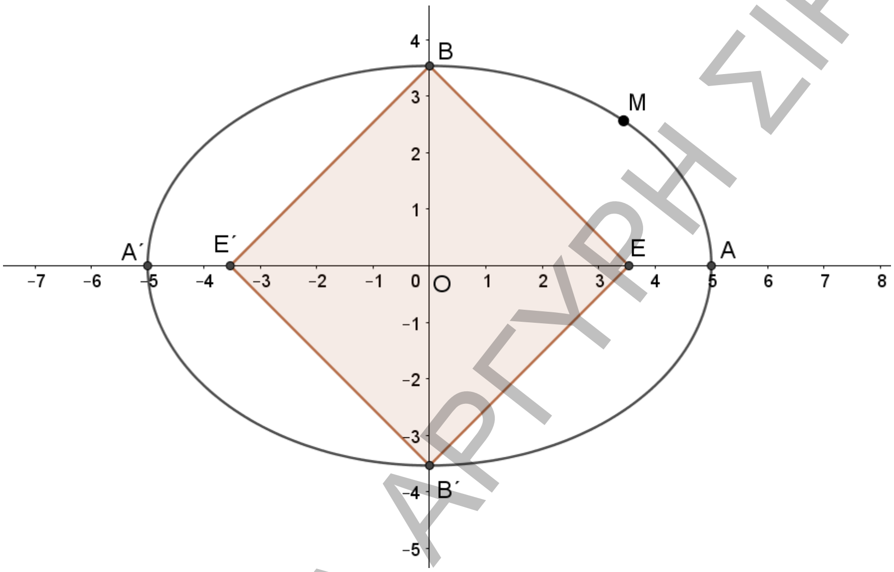
Γ3. Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ με } \vec{u}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}, \quad \vec{v}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$$

Μονάδες (8+9+9)=25

ΘΕΜΑ Δ **3.3** **21655**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η έλλειψη C με κέντρο το $O(0,0)$, εστίες τα σημεία E, E' και κορυφές τα σημεία $A(5,0), A'(-5,0), B, B'$. Αν είναι γνωστό ότι το τετράπλευρο $BEB'E'$ είναι τετράγωνο, να βρείτε:



α. τις συντεταγμένες των σημείων B, B', E, E'.

β. την εξίσωση της έλλειψης C.

γ. Έστω M τυχαίο σημείο της C, που δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα A, A'.

i. να αποδείξετε ότι όλα τα τρίγωνα EME' έχουν την ίδια περίμετρο την οποία να προσδιορίσετε.

ii. να βρείτε τις συντεταγμένες του M για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου EME' παίρνει τη μέγιστη τιμή του, την οποία και να προσδιορίσετε.

Μονάδες [8+7+(5+5)]=25

12

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $A(x_1,\ y_1)$ και $B(x_2,\ y_2)$, τότε $(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

β. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,\ y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,\ y_2)$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1y_1+x_2y_2$

γ. Η απόσταση του σημείου $M(x_0,\ y_0)$ από τη ευθεία ε: $Ax+By+\Gamma=0$ δίνετε από τον τύπο:

$$d(M,\ \varepsilon)=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

δ. Η εξίσωση $(x+x_0)^2+(y+y_0)^2=\rho^2$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(x_0,\ y_0)$ και ακτίνα ρ.

ε. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής: $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι οι ευθείες: $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ και $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$

Μονάδες 5x2=10

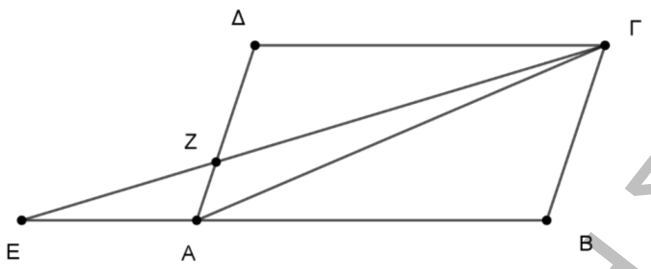
Α2. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Ο(0,0) και ακτίνα ρ έχει εξίσωση

$$x^2+y^2=\rho^2$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.2 21165

Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}$.



Τα σημεία Ε και Ζ είναι τέτοια ώστε

$$\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AZ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A\Delta}.$$

α. Να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{EZ}=\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{Z\Gamma}=\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\vec{\beta}.$$

β. Να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{Z\Gamma}=2\overrightarrow{EZ}.$$

γ. Να δείξετε ότι τα σημεία Ζ, Ε και Γ είναι συνευθειακά.

Μονάδες (10+9+6)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνετε ο κύκλος $C_1: x^2+y^2=25$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(4,\ 3)$ ανήκει στον παραπάνω κύκλο.

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) του παραπάνω κύκλου στο σημείο του $M(4,\ 3)$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται και του κύκλου $(x-10)^2+(y-5)^2=36$.

Μονάδες (4+8+13)=25

ΘΕΜΑ Δ 2.3 15194

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1)$, $B(4,4)$ και $\Gamma(3,1)$.

α. Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο.

β. Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$ είναι η ευθεία (ε): $y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$.

γ. Να βρείτε σημείο K της ευθείας (ε) του β) ερωτήματος τέτοιο ώστε $(KA)=(KB)$.

Τι ιδιότητα έχει το σημείο K;

Μονάδες (7+9+9)=25

13

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, τότε ισχύει πάντα $\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.

β. Η ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(-B,A)$.

γ. Η απόσταση της εστίας Ε της παραβολής $x^2=2py$ από τη διευθετούσα της δ είναι ίση με $|p|$.

δ. Η εξίσωση $y=\lambda x$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, παριστάνει όλες τις ευθείες του επιπέδου που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

ε. Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι μεγαλύτερη της μονάδας.

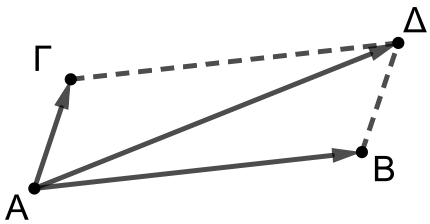
Μονάδες 5x2=10

Α2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με $A^2+B^2-4\Gamma>0$, παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.4 16580

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(2, 4)$, $B(11, 5)$, $\Gamma(3, 7)$ και ένα σημείο Δ ώστε το $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.



Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

α. των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

β. του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$.

γ. του σημείου Δ.

Μονάδες (12+8+5)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση C_1: $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ (1)

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση παραβολής C_2, της οποίας η εστία Ε ταυτίζεται με το κέντρο του κύκλου και η παράμετρος p της παραβολής με την ακτίνα του κύκλου.

Γ3. Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(3, 2\sqrt{3})$ είναι σημείο της παραπάνω παραβολής.

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής C_2 στο σημείο $A(3, 2\sqrt{3})$ εφάπτεται και του κύκλου.

Μονάδες (6+8+3+8)=25

ΘΕΜΑ Δ **2.3** **15380**

Δίνονται τα σημεία $A(1, 3)$, $B(-2, 2)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 3x + y + \alpha = 0$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε για ποια τιμή του α, η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β είναι ίση με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.

β. Για α=4

i. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$.

ii. Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες [8+(8+9)]=25

14

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας και να τον συμπληρώσετε.

Εξίσωση κωνικής	**Γραφή της κωνικής στην κανονική της μορφή**	**Χαρακτηρισμός κωνικής (κύκλος, παραβολή, έλλειψη, υπερβολή)**
α. $4x^2 = 36 + 9y^2$		
β. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$		
γ. $9x^2 = 100 - 25y^2$		
δ. $y^2 - 12x = 0$		

Μονάδες 4x2=8

Α2. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος την παρακάτω πρόταση.

α. Η υπερβολή $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες με εξισώσεις $y = \pm\frac{\beta}{\alpha}x$

Μονάδες 2

Α3. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής

$$Ax + By + \Gamma = 0 \quad \text{με } A \neq 0 \text{ ή } B \neq 0 \quad (1)$$

και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.4 19038

Δίνεται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,3)$, $\vec{\beta}=(-1,1)$ και $\vec{\gamma}=(-5,-5)$.

α. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$.

β. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}|=5|\vec{\beta}|$.

γ. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$.

Μονάδες (9+8+8)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα σημεία $A(1,\ 2)$, $B(-3,\ 8)$ και $\Gamma(5,\ -6)$

Γ1. Να αποδείξετε ότι δεν είναι συνευθειακά.

Γ2. Να βρείτε τα μέσα Μ και Ν των τμημάτων ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα .

Γ3. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΜΝ.

Γ4. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε που είναι παράλληλες στην ΜΝ και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση $d=2$.

Μονάδες (5+4+4+12)=25

ΘΕΜΑ Δ 3.1 15082

Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις:

$$C_1:(x-2)^2+(y-3)^2=8 \text{ και } C_2:(x-7)^2+(y+2)^2=18.$$

α. Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $(K\Lambda)$, όπου K,Λ τα κέντρα των κύκλων C_1, C_2 αντίστοιχα. Ακολούθως να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

β. **i.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $K\Lambda$.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $K\Lambda$ με τον κύκλο C_1 και το σημείο επαφής των δύο κύκλων.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των κύκλων.

Μονάδες [5+(5+7)+8]=25

15

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η εξίσωση $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ $(\alpha\cdot\beta\neq 0)$ παριστάνει υπερβολή.

β. Η παραβολή με εξίσωση $x^2=2py$ έχει την εστία της πάνω στον άξονα $x'x$.

γ. Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{\delta}=(A,\ -B)$.

δ. Για δύο οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$.

ε. Η εξίσωση $(x-x_o)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ παριστάνει πάντα κύκλο.

Μονάδες 5x2=10

Α2. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ δύο διανύσματα με συντελεστές διεύθυνσης λ_1,λ_2 αντίστοιχα, να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$$\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 2.3 20926

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : x-2y=1$ και τα σημεία $A(0,2)$, $B(1,0)$.

α. Να αποδείξετε ότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία ε ενώ το σημείο A δεν είναι σημείο της ε.

β. Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε.

γ. Να υπολογίσετε την απόσταση του A από το B και να αποδείξετε ότι η προβολή του A στην ευθεία ε είναι το B.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι

$$|\vec{\beta}| = 3, \quad (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 120^\circ \quad \text{και} \quad (3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \perp (6\vec{\alpha} + 5\vec{\beta})$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 2$.

Γ2. Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.
Να βρείτε :

i. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

ii. Τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}})$.

Μονάδες $(9+8+8)=25$

ΘΕΜΑ Δ 3.1 15177

Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$ και $B(0,-1)$ και ο κύκλος c_1 με εξίσωση

$$c_1:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=2.$$

α. Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων $N(x,y)$ του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση $\overrightarrow{NA}^2-\overrightarrow{NB}^2=4$, ανήκουν στην ευθεία (ε) με εξίσωση $y=-x-2$.

β. Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων P του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση $2x^2+2y^2+10x+14y+21=0$, ανήκουν σε κύκλο c_2 κέντρου $\Lambda\left(-\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνας $R=2\sqrt{2}$.

γ. **i.** Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι c_1 και c_2 εφάπτονται εξωτερικά και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση των σημείων τους.

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) είναι η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων c_1 και c_2 .

Μονάδες [7+6+(6+6)]=25

16

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ομόρροπα διανύσματα τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

β. Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(-B,\ A)$

γ. Μια ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_o,\ y_o)$ και είναι παράλληλη στον $x'x$ έχει εξίσωση $y=y_o$.

δ. Η παραβολή με εξίσωση $y^2=2px$ έχει εστία $E\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$

ε. Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες $E'(-\gamma,\ 0)$ και $E(\gamma,\ 0)$ και μήκος μεγάλου άξονα $2\alpha>2\gamma$ είναι $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$ με $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$

Μονάδες 5x2=10

Α2. Για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$,$\vec{\beta}$ που δεν είναι παράλληλα στον άξονα y΄y, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow \lambda_1\cdot\lambda_2=-1$$

όπου λ_1 και λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.5 20685

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(1,1)$, $\vec{w}=(-10,2)$ και τα σημεία $A(-1,2)$, $B(\beta,0)$, $\Gamma(0,\gamma)$. Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και να αποδείξετε ότι $\beta=1$.

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι $\gamma=\frac{9}{5}$.

γ. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

Μονάδες (9+9+7)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι συντεταγμένες των κορυφών του Α(6, 1) και Γ(2, 3). Αν το ύψος του ΑΔ έχει εξίσωση $x-2y-4=0$ και η διάμεσός του ΒΛ έχει εξίσωση $y=-x+6$, να βρείτε:

Γ1. Την εξίσωση της πλευράς ΒΓ

Γ2. Την εξίσωση της πλευράς ΑΓ

Γ3. Τις συντεταγμένες της κορυφής Β

Γ4. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΛ, όπου Λ το μέσο της ΑΓ

Μονάδες (7+7+5+6)=25

ΘΕΜΑ Δ 3.4 21656

Έστω υπερβολή C με κέντρο το $(0,0)$, εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και κορυφές τα σημεία $A(4,0), A'(-4,0)$.

α. Να βρείτε:

i. τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής C.

ii. την εξίσωση της υπερβολής C.

β. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα, την υπερβολή C, τις ασύμπτωτες της C και το ορθογώνιο βάσης της C.

γ. Αν M τυχαίο σημείο της C, να βρείτε την τιμή της παράστασης $(ME)-(ME')$.

δ. Αν $M(\sqrt{80},6)$ σημείο της C, να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $E\hat{M}E'$.

Μονάδες [(3+3)+9+5+5]=25

17

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta},\ \lambda\in R$

β. Αν $\varepsilon: Ax+By+\Gamma=0$ ευθεία και σημείο $M_0(x_0,y_0)$ εκτός αυτής τότε:

$$d(M_0,\ \varepsilon)=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$$

γ. Η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ παριστάνει πάντα κύκλο .

δ. Οι ευθεία $y-x=0$ διχοτομεί την 1^{η} γωνία των αξόνων.

ε. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy με αρχή O η εξίσωση $x^2 = 2py$ με $p\neq 0$ παριστάνει παραβολή, με κορυφή το σημείο O.

Μονάδες 5x2=10

Α2. Αν $\vec{\alpha}=(x,y)$, να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.5 15852

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,2)$, $\vec{\beta}=(-2,1)$.

Να υπολογίσετε:

α. το διάνυσμα $\vec{v}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$.

β. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

γ. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}$.

Μονάδες (8+8+9)=25

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων όταν διέρχεται από το Μ $(1, \sqrt{3})$

Γ2. Αν $P(x_1, y_1)$ σημείο του κύκλου του προηγούμενου ερωτήματος , με $x_1 > 0$ και $y_1 > 0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο P και τα σημεία Α και Β που αυτή τέμνει τους άξονες (συναρτήσει των x_1 και y_1)

Γ3. Να βρείτε το σημείο P τέτοιο ώστε η εφαπτομένη του κύκλου στο P να τέμνει τους άξονες σε δύο σημεία Α και Β ώστε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ να έχει μήκος 4.

Μονάδες (7+6+12)=25

ΘΕΜΑ Δ 2.3 16057

Δίνονται τα σημεία $A(2, 0)$, $B(3, 4)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. **i.** Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο Α και έχουν κλίση λ.

ii. Να αποδείξετε οτι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο Α, έχει κλίση λ και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο Β, έχει εξίσωση $(\varepsilon): 15x - 8y - 30 = 0$.

β. Να αποδείξετε οτι υπάρχει και άλλη ευθεία (ζ), εκτός από την (ε), η οποία διέρχεται από το σημείο Α και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο Β.

γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ).

Μονάδες [(5+8)+5+7]=25

18

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\vec{\alpha}=(x,\ y)$ τότε $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

β. Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

γ. Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,\ A)$.

δ. Η παραβολή με εστία $E\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ και διευθετούσα $\delta: x=-\frac{p}{2}$ έχει εξίσωση $x^2=2py$.

ε. Όταν η εκκεντρότητα μιας έλλειψης τείνει στη μονάδα, τότε η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος.

Μονάδες 5x2=10

Α2. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ, να αποδείξετε ότι: συνθ= $\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.5 20773

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1\,,-2)$ και $\vec{\beta}=(2\,,3)$

α. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

β. Αν $\vec{u}=(4\,,-1)$ να βρείτε την τιμή του $\kappa\in R$ ώστε το διάνυσμα $\vec{u}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{v}=(1\,,\kappa)$.

γ. Για $\kappa=4$ να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}$ του προηγούμενου ερωτήματος.

Μονάδες (8+9+8)=25

ΘΕΜΑ Γ

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\Gamma(2,\ 3)$. Έστω ότι το ύψος και η διάμεσος που άγονται από την κορυφή Α έχουν εξισώσεις $3x-5y+6=0$ και $x-11y+2=0$ αντίστοιχα.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α έχει συντεταγμένες $(-2,\ 0)$.

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

Γ3. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του Β είναι $(5,\ -2)$.

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες (6+6+6+7)=25

ΘΕΜΑ Δ 3.2 18245

Δίνεται η παραβολή $C:\ y^2=4x$ και η εξίσωση $(\lambda^2-1)x+2\lambda y+\lambda^2+1=0$ (1), $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας Ε και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής C.

β. Να αποδείξετε ότι η (1) για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία ε_λ που δεν διέρχεται από το $O(0,0)$.

γ. Να αποδείξετε ότι η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ.

δ. Έστω $M(\alpha,\beta)$ σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στην παραπάνω διευθετούσα δ. Αν από το Μ διέρχεται μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών ε_λ, να δείξετε ότι το Μ ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο την κορυφή της παραβολής C και διέρχεται από την εστία της Ε.

Μονάδες (6+6+6+7)=25

19

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

β. Το διάνυσμα $\vec{\delta}=(\mathrm{B},-\mathrm{A})$ είναι παράλληλο στην ευθεία:

$$\varepsilon:\ \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0,\ \mathrm{A}\neq 0 \text{ ή } \mathrm{B}\neq 0$$

γ. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται πάντα από τον τύπο: $(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\cdot\det\left(\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}},\overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}}\right)$

δ. Σε κάθε έλλειψη με εστιακή απόσταση 2γ και μήκος μεγάλου άξονα 2α ισχύει ότι :

$\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$.

ε. Κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(x_0,\ y_0)$ έχει εξίσωση της μορφής $y-y_0=\lambda(x-x_0)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Μονάδες 5x2=10

Α2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ και $\vec{\gamma}=(x_3,y_3)$.

Να αποδείξετε ότι ισχύει: $\vec{\alpha}(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}.\vec{\beta}+\vec{\alpha}.\vec{\gamma}$ (Επιμεριστική ιδιότητα).

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.5 15463

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,1)$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=(3,-1)$.

α. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=(1,-2)$.

β. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$.

γ. Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}|$.

Μονάδες (8+9+8)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \ (\kappa+2)x-3y-24\kappa=0$ και $\varepsilon_2: 4x-3y+2=0, \ \kappa\in\mathbb{R}$

Γ1. Να βρείτε το κ ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1, \ \varepsilon_2$ να είναι παράλληλες.

Γ2. Για $\kappa=2$

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας δ, η οποία είναι κάθετη στην ε_2 στο σημείο της $A(1, \ 2)$ και το σημείο τομής της B με την ε_1 .

β. Να βρείτε την απόσταση των ευθειών $\varepsilon_1, \ \varepsilon_2$.

γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C ο οποίος εφάπτεται στις ευθείες $\varepsilon_1, \ \varepsilon_2$ στα σημεία B, A

Μονάδες [5+(10+5+5)]=25

ΘΕΜΑ Δ 3.3 20722

Έστω $K(x,y)$ μεταβλητό σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει $(KE)+(KE')=10$, όπου $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$.

α. Να βρείτε το είδος της καμπύλης C πάνω στην οποία κινείται το σημείο K και να γράψετε την εξίσωσή της, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Έστω $C: \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ και $(\varepsilon): 3x+5y=25$.

β. Να αποδείξετε ότι C και (ε) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο M και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M.

γ. Να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος γ) και να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα την έλλειψη C και την ευθεία ε.

δ. Να σχεδιάσετε τη διχοτόμο της γωνίας $E\hat{M}E'$ και να βρείτε την εξίσωσή της .

Μονάδες (6+7+6+6)=25

20

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στη κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Έστω η ευθεία (ε) με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ με $A,B,\Gamma>0$ και ένα σημείο $K\left(\frac{1}{A},-\frac{1}{B}\right)$.

Τότε η απόσταση του Κ από την (ε) είναι $\frac{\Gamma}{\sqrt{B^2+A^2}}$.

β. Το διάνυσμα $\vec{\delta}_1=(2,4)$ είναι παράλληλο στην ευθεία με εξίσωση $2x+4y+2024=0$.

γ. Η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ έχει μεγάλο άξονα με μήκος 4.

δ. Αν ισχύει η σχέση $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$, τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

ε. Οι κύκλοι $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ και $(x-2)^2+(y+1)^2=10$ εφάπτονται εξωτερικά

Μονάδες 5x2=10

Α2. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2.$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 2.3 20885

Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(-3,\ -1)$ και σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.

β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου, που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες x'x και y'y, είναι: Ε = 8.

Μονάδες (12+13)=25

ΘΕΜΑ Γ

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=(4,-2)$ και $\vec{\alpha}-3\vec{\beta}=(-7,8)$.

Γ1. Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}=(-1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,-2)$.

Γ2. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό κ, ώστε τα διανύσματα $\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους.

Γ3. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=(3,\ -1)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Γ4. Να υπολογίσετε την γωνία του διανύσματος $\vec{\beta}$ με τον άξονα x'x.

Μονάδες (6+7+6+6)=25

ΘΕΜΑ Δ 3.2 18570

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2-4x-8y-5=0$ και η ευθεία (ε): $3x-4y=\mu$, $\mu\in R$.

α. Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του.

β. Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία Α, Β

i. Να αποδείξετε ότι $-35<\mu<15$.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του.

iii. Να βρεθεί σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε, το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή ΑΒ.

Μονάδες [5+(7+4+9)]=25

21

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στη κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας παράλληλης στον άξονα των x δεν ορίζεται.

β. Δύο κάθετα διανύσματα έχουν εσωτερικό γινόμενο ίσο με 0.

γ. Η ευθεία Αx + Βy + Γ = 0 είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{\delta} = (-B, A)$.

δ. Η εξίσωση $y^2 = 2px$ είναι παραβολή με άξονα συμμετρίας τον άξονα των y.

ε. Τα σημεία που ανήκουν σε μία έλλειψη έχουν σταθερή απόσταση από κάθε εστία της έλλειψης.

Μονάδες 5x2=10

Α2. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες (x, y) του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις: $x = x_2 - x_1$ και $y = y_2 - y_1$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β 2.3 18240

Δίνεται το σημείο $A(1,2)$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = x + 3$.

α. Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε).

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην (ε).

γ. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες $(\eta), (\varepsilon)$.

Μονάδες (7+8+10)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$.

Γ1. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

Γ2. Αν για το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ισχύει η σχέση: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}=\vec{0}$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $|\vec{\gamma}|=\sqrt{7}$.

ii. Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$.

iii. Αιτιολογήστε ότι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι οξεία.

Μονάδες [7+(6+6+6)]=25

ΘΕΜΑ Δ 3.2 20092

Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$, το σημείο της $M(\frac{1}{4}, 1)$ και η ευθεία ε του επιπέδου με εξίσωση

$$\varepsilon: \frac{x}{3}-\frac{y}{4}+1=0.$$

α. **i.** Να δείξετε ότι η ευθεία ε δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόστασή του σημείου Μ από την ε.

ii. Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x'x και y'y στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι (ΜΓΔ) = 5 τ.μ.

β. **i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθεία ζ της παραβολής με ζ παράλληλη στην ε.

ii. Ποια είναι η απόσταση των ευθειών ζ και ε;

Μονάδες [(7+5)+(8+5)]=25

22

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στη κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = \frac{1}{|\lambda|}x$ και $(\varepsilon_2): y = -\lambda x$ είναι κάθετες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β. Αν ο συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος $\vec{\alpha}$ είναι $\frac{3}{4}$ τότε : $\vec{\alpha} = (3,4)$.

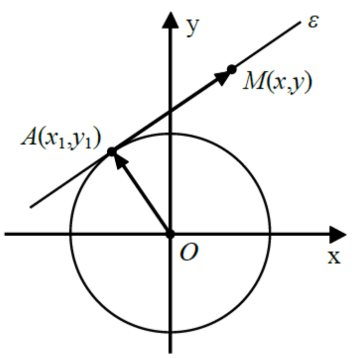
γ. οι κύκλοι $(C_1): x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0$ και $(C_2): x^2 + y^2 + 2x + 3y + \sqrt{2} = 0$ είναι ομόκεντροι

δ. Η έλλειψη $(C): 2x^2 + 3y^2 = 6$ έχει τις εστίες της στον άξονα $x'x$

ε. Η εφαπτομένη της παραβολής : $x^2 = 2py$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ είναι η $y = \frac{x_1 x}{p} - y_1$

Μονάδες 5x2=10

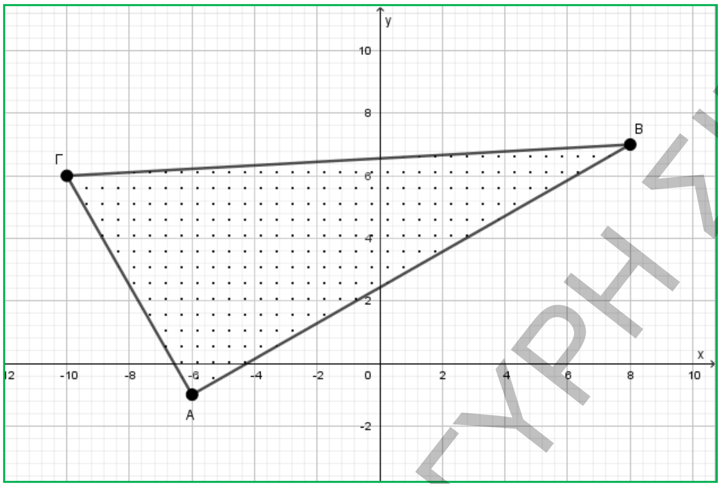
A2. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $(C): x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση: $(\varepsilon): xx_1 + yy_1 = \rho^2$.



Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.5 15996

Δίνονται τα σημεία $A(-6,-1)$, $B(8,7)$, $\Gamma(-10,6)$, τα οποία ορίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$.



α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}$ και του αθροίσματος τους $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$.

β. Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού.

Μονάδες (10+15)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2x+4y=0$ (1) και η παραβολή $(C_1): y^2=-2x$ (2)

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε_1) του κύκλου στο σημείο $B(2,0)$

Γ3. Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής (2).

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε_2) της παραβολής στο σημείο της $M(-2,2)$ και να βρείτε τη σχετική της θέση με την ευθεία (ε_1)

Μονάδες (7+8+4+6)=25

ΘΕΜΑ Δ **2.3** **15273**

Θεωρούμε τα σταθερά σημεία $A(3,4), B(2,5)$ και $\Gamma(-2,2)$ και το μεταβλητό σημείο $M(4\alpha-1, 3\alpha+1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι τα A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.

γ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία M κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην $B\Gamma$.

δ. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου M ισχύει

$$(MB\Gamma) = (AB\Gamma).$$

Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά;

Μονάδες (5+5+7+8)=25

23

1. ΘΕΜΑ Α 21152

Α1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε διάνυσμα στον χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.

ii. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0,\ y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $x = x_0$.

iii. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$.

iv. Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ έχει εστία το σημείο $E(1,0)$.

v. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

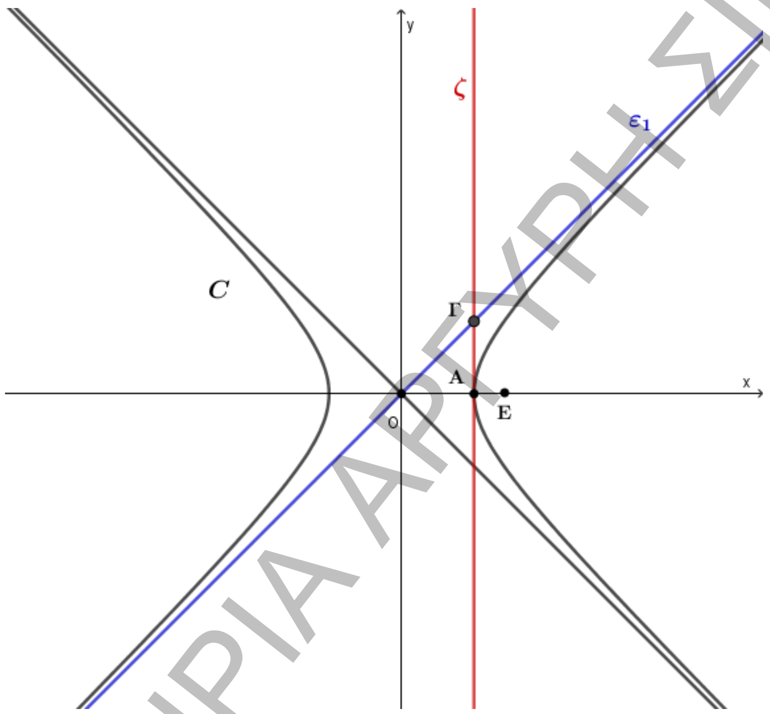
Μονάδες 10

Α2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0,\ y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β **3.4** **20869**

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται η υπερβολή $C: x^2 - y^2 = 1$, η εστία της E, η εφαπτομένη της ζ στο σημείο $A(1,0)$ και το σημείο Γ στο οποίο αυτή τέμνει την ασύμπτωτη ευθεία ε_1 της υπερβολής.



α. Να βρείτε τις εστίες E', E και τις ασύμπτωτες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της υπερβολής.

β. **i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ζ.

ii. Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(1,1)$.

Μονάδες [10+(7+8)]=25

ΘΕΜΑ Γ 2.3 15152

Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x+y+\alpha=0$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β.

β. Για ποιες τιμές του α, η απόσταση ΑΒ είναι ίση με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.

γ. Για $\alpha=4$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$.

Μονάδες (5+8+12)=25

ΘΕΜΑ Δ 1.4 17076

Δίνονται τα σημεία $A(-3,-1)$, $B(0,3)$ και $M(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$.

β. Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$.

γ. Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{MB}| \geq 5$.

δ. Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=4$$

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (6+6+7)=25

24

ΘΕΜΑ Α 21973

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = \lambda|\vec{\beta}|$ τότε υποχρεωτικά $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

ii. Η εφαπτομένη του κύκλου C: $x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του Α (x_1, y_1), έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

iii. Η διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 2px$, έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$.

iv. Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης είναι μικρότερη της μονάδας.

v. Η εξίσωση: $x^2 + y^2 = \alpha^2$ είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής.

Μονάδες 10

A2. Να αποδείξετε ότι κάθε εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ παριστάνει ευθεία γραμμή..

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.5 20733

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ και $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

α. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$ συναρτήσει του διανύσματος $\vec{\beta}$.

β. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$.

γ. Να αιτιολογήσετε γιατί τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

Μονάδες (10+10+5)

ΘΕΜΑ Γ **1.4** **17944**

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση της μορφής $(C): \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, εστιακή απόσταση

$EE' = 2\sqrt{7}$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2, \beta = \sqrt{3}$.

β. **i.** Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών A, A' της υπερβολής (C).

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής (C).

γ. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την υπερβολή (C), τις ασύμπτωτές της, τις εστίες της και τις κορυφές της.

Μονάδες [8+(4+4)+9]=25

ΘΕΜΑ Δ **2.2** **14978**

Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$, $B(3, 3)$.

α. Αν $M(x, y)$ σημείο του επιπέδου, να βρείτε τις αποστάσεις d_1, d_2 του Μ από τα Α και Β αντίστοιχα.

β. Να γράψετε τη σχέση που πρέπει να πληρούν οι d_1, d_2, ώστε το σημείο Μ να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ΑΒ.

δ. Να βρείτε σημείο Σ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΣΑΒ να είναι ισόπλευρο.

Μονάδες (6+4+8+7)=25

25

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, όπου $A, B, \Gamma \in IR$, παριστάνει πάντοτε ευθεία γραμμή του επιπέδου.

2. Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ όπου $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$

Μονάδες 2x2=4

Α2. Στις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους **(Α2 3, Α2 4, Α2 5)** και, δίπλα ακριβώς, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

3. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ του καρτεσιανού επιπέδου είναι $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$, τότε ισχύει:

α) $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=2$ **β)** $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0$ **γ)** $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=-1$ **δ)** $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})\neq 0$

4. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ του καρτεσιανού επιπέδου είναι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, τότε ισχύει:

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\neq 0$ **β)** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-1$ **γ)** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ **δ)** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2$

5. Η εξίσωση του κύκλου C με κέντρο την αρχή O(0,0) ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων Oxy του επιπέδου και ακτίνα ρ είναι:

α) $(x-1)^2 + y^2 = \rho^2$ **β)** $x^2 + (y-1)^2 = \rho^2$ **γ)** $x^2 + y^2 = (\rho-1)^2$ **δ)** $x^2 + y^2 = \rho^2$

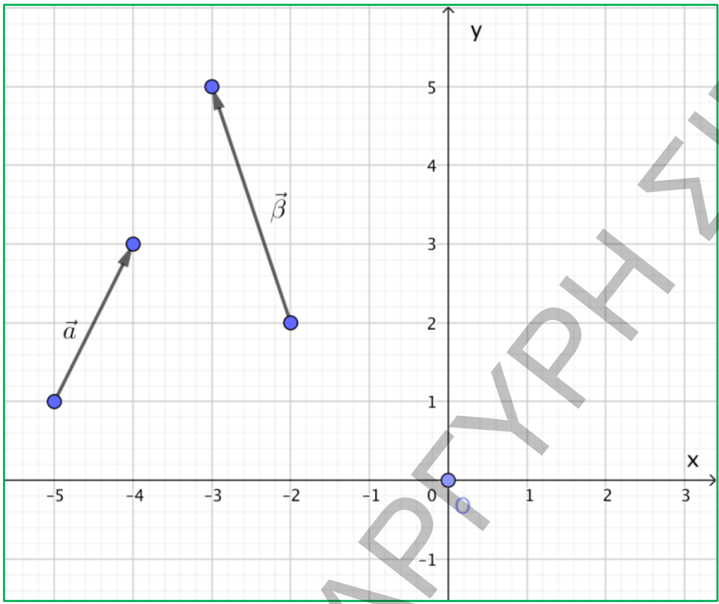
Μονάδες 3x2=6

Α3. Με το $\vec{\alpha}^2$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}$ και με το $|\vec{\alpha}|$ συμβολίζουμε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.1 20914

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.



α. Να σημειώσετε πάνω στο σχήμα τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ όπου O η αρχή των αξόνων.

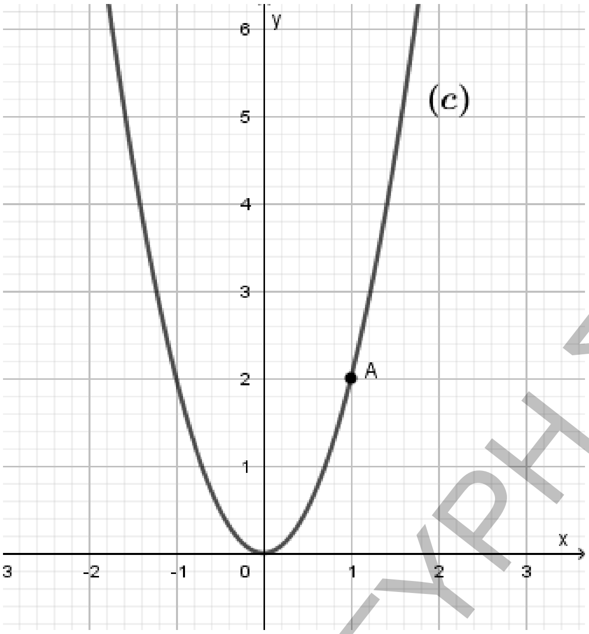
β. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AB}$.

γ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο.

Μονάδες (8+8+8)=25

ΘΕΜΑ Γ 3.2 20866

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραβολής (c), που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.



α. Να βρείτε την εξίσωση, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

β. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα της παραβολής.

γ. **i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο $A'(-1,2)$.

ii. Να βρείτε το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα $y'y$ και στη συνέχεια να την σχεδιάσετε.

Μονάδες $[6+4+(8+7)]=25$

ΘΕΜΑ Δ **2.3** **15273**

Θεωρούμε τα σταθερά σημεία $A(3,4), B(2,5)$ και $\Gamma(-2,2)$ και το μεταβλητό σημείο $M(4\alpha-1, 3\alpha+1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι τα A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.

γ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία M κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην $B\Gamma$.

δ. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου M ισχύει $(MB\Gamma)=(AB\Gamma)$. Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά;

Μονάδες $(5+5+7+8)=2$