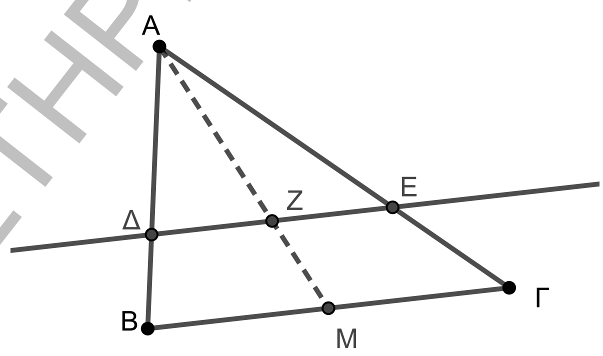
Κεφάλαιο 7

ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

7.7 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΗ (6)

1. ΘΕΜΑ Β 7.7 14534

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=6 και ΑΓ=9. ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου και το σημείο Ζ εσωτερικό στην ΑΜ ώστε να σχηματίζει λόγο $\frac{AZ}{AM} = \frac{2}{3}$. Από το σημείο Ζ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.



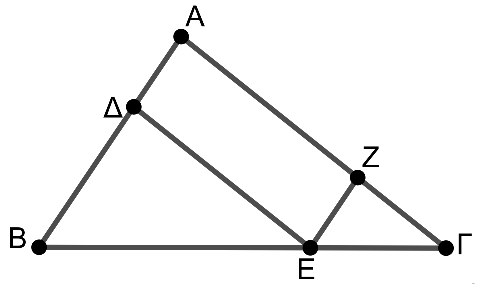
α. Να αποδείξετε ότι : $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{E\Gamma} = 2$.

β. Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΑΔ και ΕΓ.

Μονάδες (15+10)=25

2. **Θ Ε Μ Α Β** **7.7** **14579**

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στην ΑΓ. Επίσης ΑΒ = 3ΑΔ.



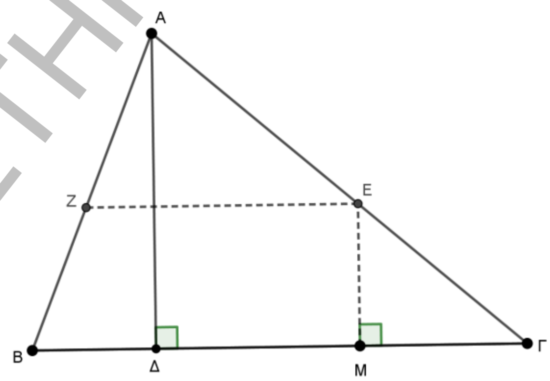
α. Να βρείτε τους λόγους $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΔ}}$ και $\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΕΓ}}$

β. Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ΑΓ = 3,9 και ΓΖ = 1,3 να αποδείξετε ότι η ΖΕ είναι παράλληλη της ΑΒ.

Μονάδες (15+10)=25

3. **Θ Ε Μ Α Β** **7.7** **15830**

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου. Η κάθετος στην πλευρά ΒΓ σε ένα άλλο σημείο της Μ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ.



Να αποδείξετε ότι:

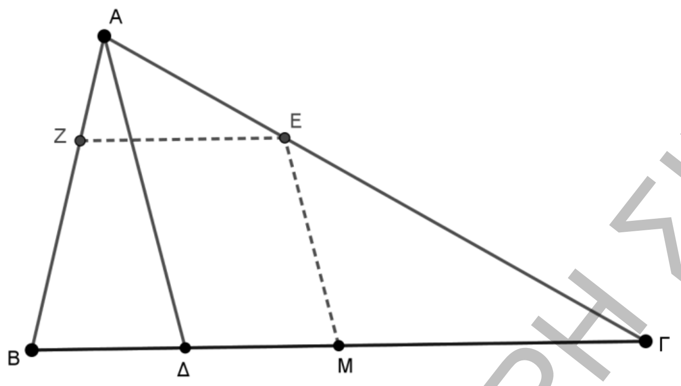
α. $\frac{\text{ΖΑ}}{\text{ΖΒ}} = \frac{\text{ΕΑ}}{\text{ΕΓ}}$.

β. $\frac{\text{ΖΑ}}{\text{ΖΒ}} = \frac{\text{ΜΔ}}{\text{ΜΓ}}$

Μονάδες (15+10)=25

4. ΘΕΜΑ Β 7.7 15831

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, το Μ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ και το Δ είναι το μέσο του ΜΒ. Από το Μ φέρνουμε παράλληλη στην ΑΔ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ.



Να αποδείξετε ότι:

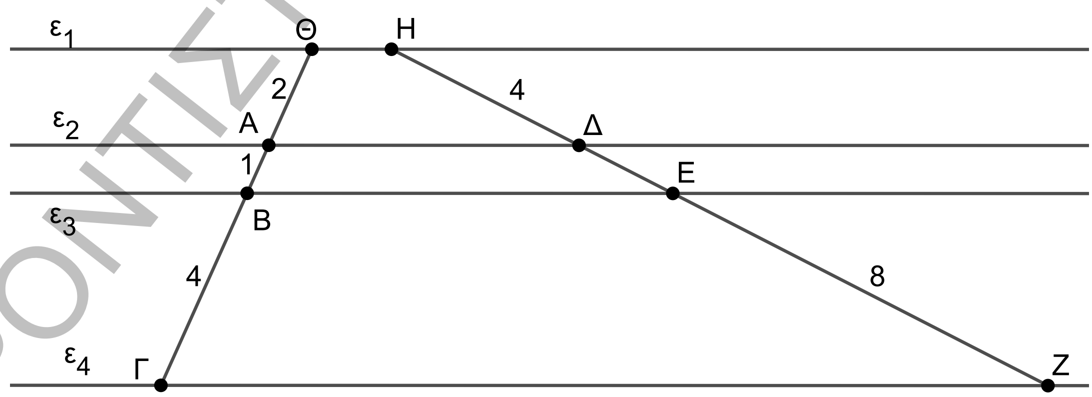
α. $\frac{ΕΑ}{ΕΓ} = \frac{1}{2}$

β. $\frac{ΖΑ}{ΖΒ} = \frac{1}{2}$

Μονάδες (15+10)=25

5. ΘΕΜΑ Β 7.7 21987

Οι ευθείες ΓΘ και ΖΗ τέμνουν τις παράλληλες ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και $ε_3$ στα σημεία Θ, Α, Β και Η, Δ, Ε αντίστοιχα και την ευθεία $ε_4$ στα σημεία Γ και Ζ όπως στο παρακάτω σχήμα.



Επίσης δίνονται τα μήκη $ΘΑ = 2$, $ΑΒ = 1$, $ΒΓ = ΗΔ = 4$ και $ΕΖ = 8$.

α. Να αποδείξετε ότι $ΔΕ = 2$

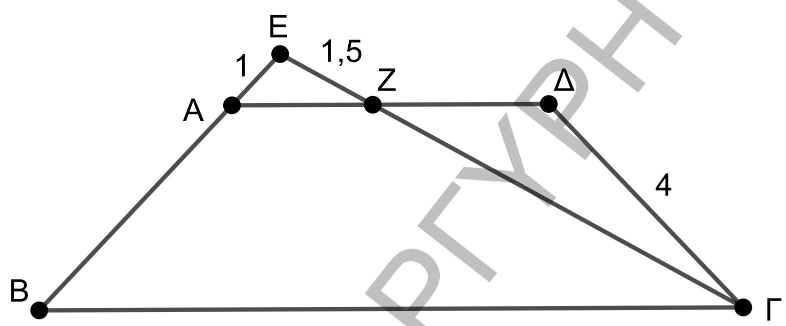
β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $ε_4$ είναι παράλληλη στις ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και $ε_3$.

γ. Να σχεδιάσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΘΖ το οποίο τέμνει την ευθεία ε_2 στο Κ και την ευθεία ε_3 στο Λ και να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{\Lambda Z}{K\Lambda}$.

Μονάδες (10+5+10)=25

6. **ΘΕΜΑ Β** **7.7** **22132**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB = \Gamma\Delta = 4$ και με βάσεις ΑΔ και ΒΓ. Στην προέκταση της πλευράς ΒΑ προς το Α παίρνουμε σημείο Ε, ώστε $EA = 1$. Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΓ τέμνει την ΑΔ στο σημείο Ζ και $EZ = 1,5$.



α. Να αποδείξετε ότι $Z\Gamma = 1,5AB$.

β. Να υπολογίσετε το μήκος του ΖΓ.

γ. Αν επιπλέον $B\Gamma = 10$, να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΖ του τριγώνου ΕΑΖ.

Μονάδες (10+5+10)=25

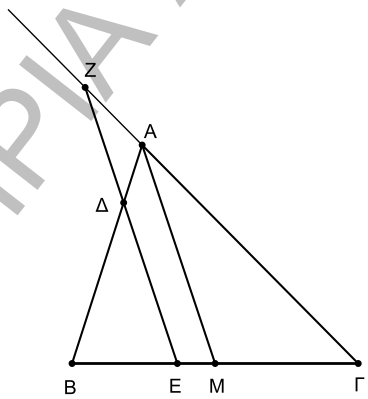
Κεφάλαιο 7

ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

7.7 ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ (1)

1. ΘΕΜΑ Δ 7.7 14499

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε ΑΜ τη διάμεσό του και Ε τυχαίο σημείο του τμήματος ΒΜ. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΜ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ζ.



α. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

i. $\dfrac{\Delta E}{\cdots} = \dfrac{\cdots}{BM} = \dfrac{B\Delta}{\cdots}$.

ii. $\dfrac{\cdots}{AM} = \dfrac{\Gamma E}{\cdots} = \dfrac{\cdots}{\Gamma A}$

β. Να αποδείξετε ότι $\Delta E + EZ = 2AM$ για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ.

Μονάδες (13+12)=25

Κεφάλαιο 8

ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

8.2 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ (13)

1. ΘΕΜΑ Β 8.2 14535

Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

$$AB = 9,\ A\Gamma = 15 \text{ και } \hat{A} = 48^o,\ Z\Delta = 12,\ ZE = 20 \text{ και } \hat{Z} = 48^o.$$

α. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.

β. **i.** Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

ii. Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

Μονάδες (13+12)=25

2. ΘΕΜΑ Β 8.2 14536

Για δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ΕΔΖ (ΕΔ = ΕΖ) γνωρίζουμε ότι:

$$\hat{A} = 48^o,\ \hat{Z} = 66^o \text{ και } AB = 3\cdot E\Delta.$$

α. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΖ είναι όμοια.

β. **i.** Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των δυο τριγώνων

ii. Να βρείτε το λόγο των βάσεων των δυο τριγώνων.

Μονάδες (13+12)=25

3. ΘΕΜΑ Β 8.2 14537

Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

$$\hat{A} = 48^o,\ B = 53^o,\ \hat{E} = 79^o \text{ και } \hat{Z} = 48^o.$$

α. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.

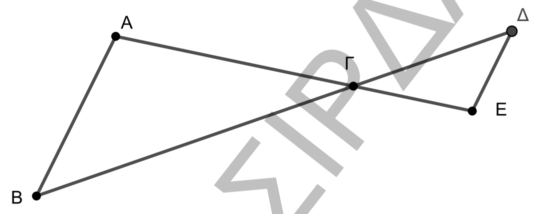
β. **i.** Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων;

ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

Μονάδες [10+(9+6)]=25

4. ΘΕΜΑ Β 8.2 14538

Στο διπλανό σχήμα τα τμήματα ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλα και τα τμήματα ΑΓ και ΓΕ είναι τέτοια, ώστε ΑΓ=2ΓΕ.



α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια.

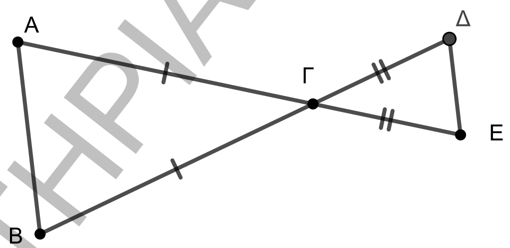
β. **i.** Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων.

ii. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων;

Μονάδες [13+(6+6)]=25

5. ΘΕΜΑ Β 8.2 14546

Στο παρακάτω σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο Γ, τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ που σχηματίζονται είναι ισοσκελή και οι βάσεις τους ΑΒ και ΔΕ είναι τέτοιες, ώστε ΑΒ=2·ΔΕ.



α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ είναι όμοια.

β. **i.** Να γράψετε την ισότητα των λόγων που προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων του ερωτήματος α).

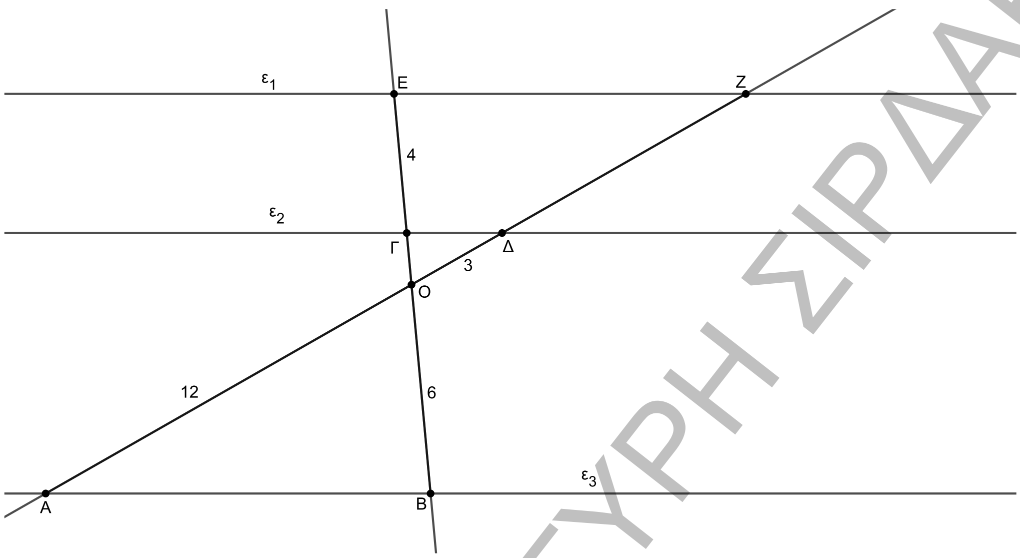
ii. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές ΑΓ και ΓΕ των δύο τριγώνων;

Μονάδες (13+12)=25

6. ΘΕΜΑ Β 8.2 16086

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3 είναι παράλληλες.

Δίνονται ότι ΓΕ = 4, ΟΔ = 3, ΟΑ = 12, ΟΒ = 6.



α. Να υπολογίσετε τα τμήματα ΟΓ και ΔΖ.

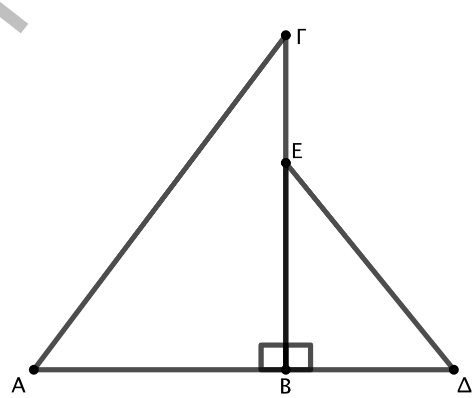
β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΕΖ και ΟΒΑ είναι όμοια.

γ. Αν ΟΓ = 1.5 και ΔΖ = 8, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{ΕΖ}{ΑΒ}$.

Μονάδες (10+9+6)=25

7. ΘΕΜΑ Β 8.2 16099

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ότι $\hat{A}=\hat{\Delta}$, $ΑΓ=36$, $ΒΔ=16$ και $ΕΔ=24$.



α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια.

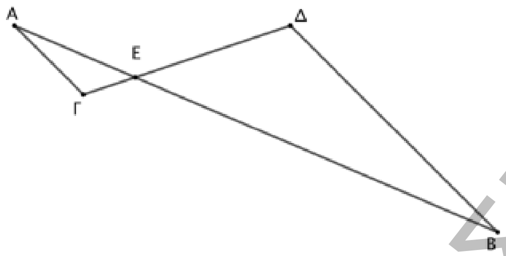
β. Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ.

Μονάδες (15+10)=25

8. **ΘΕΜΑ Β** **8.2** **16100**

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ότι

$$ΑΕ=5,\ ΑΓ=4,\ ΕΓ=2,\ ΔΕ=6,\ ΒΕ=15 \text{ και } ΒΔ=12.$$



α. Να υπολογίσετε τους λόγους

$$\frac{ΒΔ}{ΑΓ},\frac{ΔΕ}{ΕΓ},\frac{ΒΕ}{ΑΕ}$$

β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια.

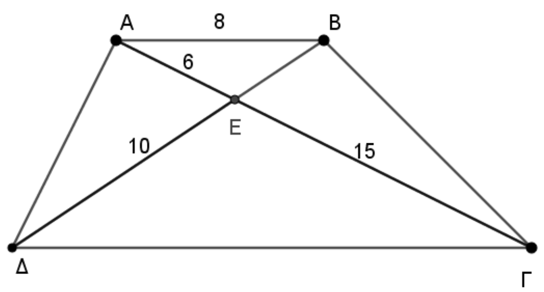
γ. Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΓ και ΒΕΔ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$$\hat{Α} = \ldots. \ ,\ \hat{Γ} = \ldots.. \ ,\quad Α\hat{Ε}Γ = \ldots..$$

Μονάδες (9+8+8)=25

9. **ΘΕΜΑ Β** **8.2** **16113**

Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΔΓ, Ε σημείο τομής των διαγώνιων, ΑΕ = 6, ΑΒ = 8, ΓΕ = 15 και ΔΕ = 10.



α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΓΕΔ είναι όμοια.

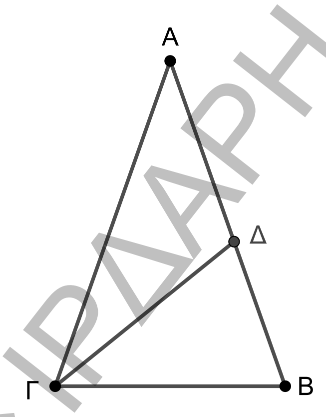
β. Να γράψετε την αναλογία των ομόλογων πλευρών τους.

γ. Να υπολογίστε τα τμήματα ΒΕ και ΓΔ.

Μονάδες (9+9+7)=25

10. ΘΕΜΑ Β 8.2 16126

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ = 36$ και $ΒΓ = 24$. Το σημείο Δ της πλευράς ΑΒ είναι τέτοιο ώστε $ΒΔ = 16$.



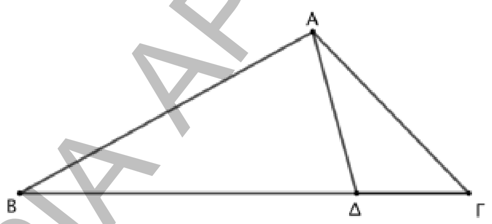
α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΒΔ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{3}{2}$.

β. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ.

Μονάδες (13+12)=25

11. ΘΕΜΑ Β 8.2 16755

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = 2ΑΓ$ και σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ τέτοιο ώστε $ΑΓ = 2ΓΔ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{ΒΓ}{ΑΓ}$ και $\frac{ΑΓ}{ΓΔ}$

β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια.

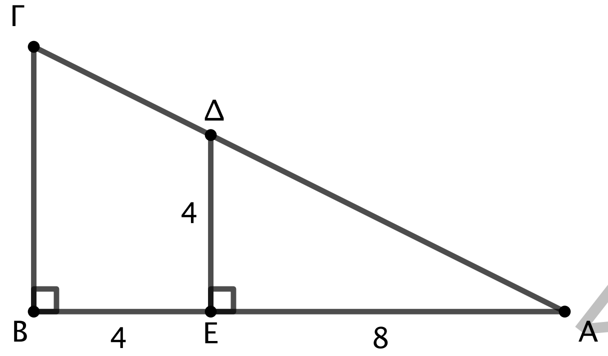
γ. Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΑΓ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$$Β\hat{Α}Γ = ... \; , \; \hat{Β} = ...$$

Μονάδες (8+9+8)=25

12. ΘΕΜΑ Β 8.2 21350

Στο σχήμα δίνονται ότι $\widehat{B} = \widehat{E} = 90^o$, ΑΕ = 8, ΕΒ = 4 και ΔΕ = 4.



α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ είναι όμοια.

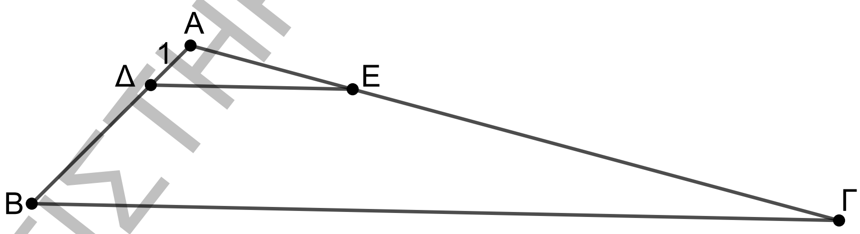
β. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΔ και ΑΒΓ.

γ. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.

Μονάδες (10+10+5)=25

13. ΘΕΜΑ Β 8.2 21986

Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στην ΒΓ και ΑΔ = 1, όπως στο σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι $ΑΕ \cdot ΒΔ = ΓΕ$.

β. Αν επιπλέον ΒΔ = ΑΕ και ΓΕ = 9:

i. Να αποδείξετε ότι ΒΔ = 3 και ΑΒ = 4.

ii. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια και να υπολογίσετε το λόγο ομοιότητάς τους.

Μονάδες (10+10+5)=25

Κεφάλαιο 8

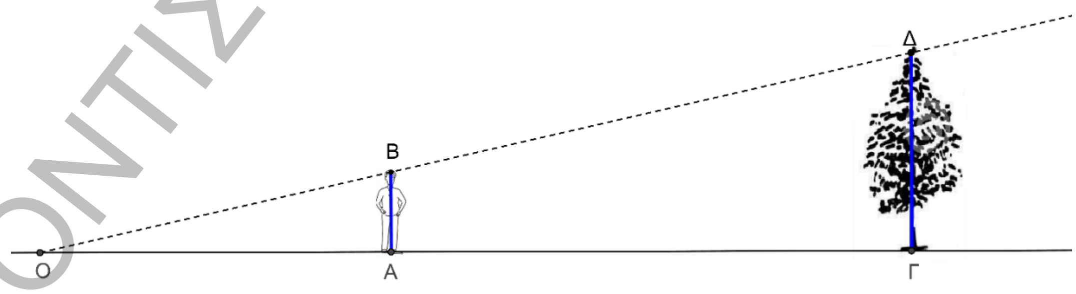
ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

8.2 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ (2)

1. ΘΕΜΑ Δ 8.2 22102

Για να βρει το ύψος ενός δέντρου, ένας μαθητής ύψους 1,60 m σκέφτηκε να μετρήσει το μήκος της σκιάς του δέντρου και το μήκος της δικιάς του σκιάς πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο κάποια χρονική στιγμή μιας ηλιόλουστης ημέρας. Στέκεται σε θέση έτσι ώστε, η άκρη της σκιάς του να συμπίπτει με την άκρη της σκιάς του δέντρου. Ο μαθητής μετράει και βρίσκει ότι η σκιά του έχει μήκος 2m και η σκιά του δέντρου ότι έχει μήκος 5m.

Στο σχέδιο που ακολουθεί, τα τμήματα ΟΑ και ΟΓ, με κοινό άκρο Ο, αναπαριστάνουν τα μήκη των σκιών του μαθητή και του δέντρου αντίστοιχα και έχουν τον ίδιο φορέα ΟΓ, τα δε τμήματα ΑΒ και ΓΔ αναπαριστάνουν τα αντίστοιχα ύψη μαθητή και δέντρου και θεωρούνται κάθετα στην ΟΓ.



α. **i.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

ii. Να βρείτε το ύψος του δέντρου.

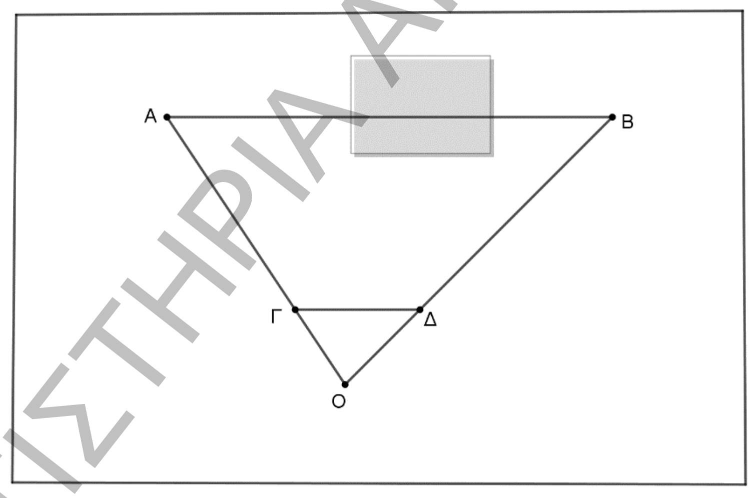
β. Μπορεί ο μαθητής να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο για να μετρήσει το ύψος του ίδιου δέντρου μια άλλη ώρα της ημέρας;
Ποια από τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος θα άλλαζαν στην περίπτωση αυτή;
Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)

Μονάδες (12+8+5)=25

2. **Θ Ε Μ Α Δ** **8.2** **22565**

Οι μαθητές θέλοντας να μετρήσουν την απόσταση των σημείων Α και Β στην αυλή του σχολείου τους μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται ένα κτίσμα και η απευθείας μέτρηση του μήκους ΑΒ είναι αδύνατη, εργάστηκαν ως εξής. Στην αυλή τους επέλεξαν σημείο Ο ώστε η μέτρηση των τμημάτων ΟΑ και ΟΒ να είναι εφικτή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μέτρησαν και βρήκαν ΟΑ=20m και ΟΒ=30m. Στις ΟΑ και ΟΒ πήραν σημεία Γ και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΟΓ=2m και ΟΔ=3m.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. η ΓΔ είναι παράλληλη με την ΑΒ,

ii. τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ είναι όμοια.

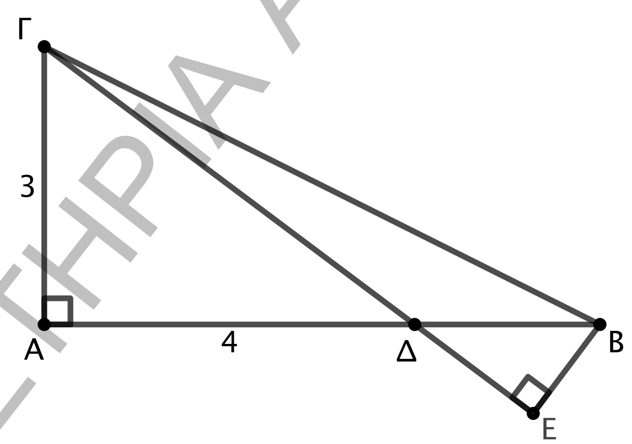
β. Ένας από τους μαθητές υποστηρίζει ότι μπορούν να υπολογίσουν την απόσταση των σημείων Α και Β αν γνωρίζουν την απόσταση των δύο σημείων Γ και Δ.
Είναι ο ισχυρισμός του μαθητή αληθής; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (8+7+10)=25

9.2 ΤΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ (6)

1. ΘΕΜΑ Β 9.2 16757

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^o$, $AB=6$ και $A\Gamma=3$. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ, τέτοιο ώστε $A\Delta=4$. Φέρουμε την απόσταση ΒΕ της κορυφής Β από την ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ.

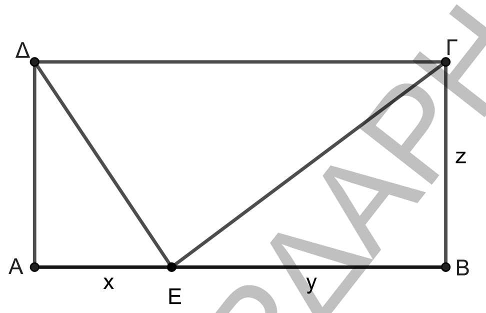
β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ είναι όμοια.

γ. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ.

Μονάδες (8+9+8)=25

2. **ΘΕΜΑ Β** **9.2** **16805**

Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 72 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.



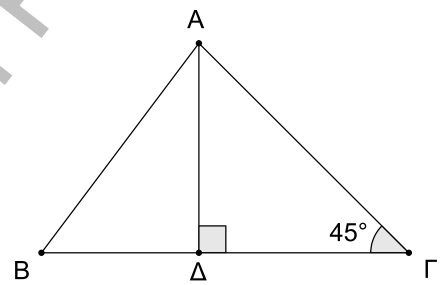
α. Να αποδείξετε ότι x= 8, y=16 και z= 12.

β. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ.

Μονάδες (13+12)=25

3. **ΘΕΜΑ Β** **9.2** **17342**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = 7$, $\hat{Γ} = 45^{o}$ και ύψος $ΑΔ = 4$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $ΓΔ = 4$.

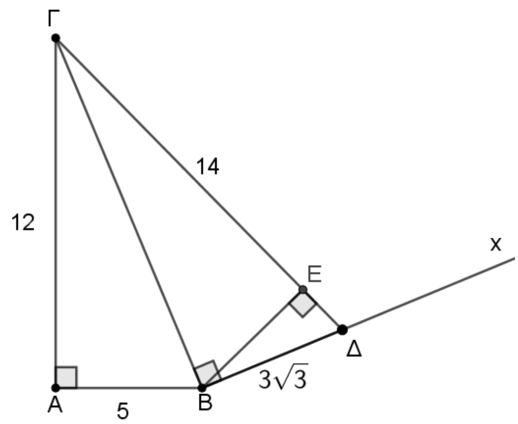
ii. $ΑΓ = 4\sqrt{2}$.

β. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ

Μονάδες [(5+8)+12]=25

4. **ΘΕΜΑ Β** **9.2** **21067**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} = 90^{o}$, ΑΓ = 12 και ΑΒ = 5.



α. Να αποδείξετε ότι ΒΓ = 13.

β. Φέρουμε ημιευθεία Bx κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Β και παίρνουμε σε αυτή σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΔΓ = 14, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι $ΒΔ = 3\sqrt{3}$.

ii. Να υπολογίσετε την προβολή της ΒΔ στην ΔΓ.

Μονάδες [8+(8+9]=25

5. **Θ Ε Μ Α Β** **9.2** **22130**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Αν οι πλευρές του τριγώνου είναι $ΒΓ = α$, $ΑΓ = β$ και $ΑΒ = γ$, τότε να αποδείξετε ότι:

α. $α = 2R$.

β. $α^2 + β^2 + γ^2 = 8R^2$.

Μονάδες (12+13)=25

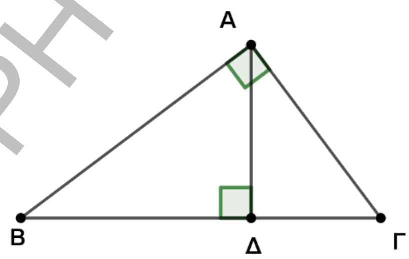
6. **Θ Ε Μ Α Β** **9.2** **22514**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) με ΒΓ = 5 και ΑΒ = 4. Να υπολογίσετε:

α. την πλευρά ΑΓ,

β. την προβολή της πλευράς ΑΒ πάνω στη ΒΓ,

γ. το ύψος ΑΔ.

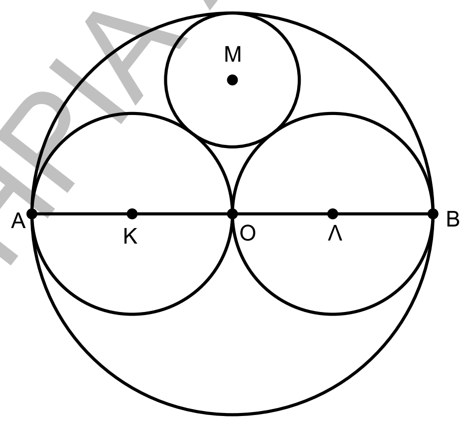


Μονάδες (9+8+8)=25

9.2 ΤΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ (5)

1. ΘΕΜΑ Δ 9.2 14500

Δύο ίσοι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ο. Ένας τρίτος κύκλος (Μ,ρ) εφάπτεται εξωτερικά με τους δύο κύκλους κέντρων Κ και Λ. Με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα 2R γράφουμε κύκλο, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά των 3 παραπάνω κύκλων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α. Στον παρακάτω πίνακα, στη στήλη Α είναι οι διάκεντροι ΚΜ, ΛΜ και ΟΜ των κύκλων με κέντρα Κ, Λ, Μ και Ο και στη στήλη Β τα μήκη των διακέντρων αυτών. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα αντίστοιχα της στήλης Β, γράφοντας στην κόλλα σας μόνο τις αντιστοιχίσεις.

Στήλη Α		Στήλη Β	
Διάκεντρος		Μήκος	
1.	ΚΛ	i.	R
2.	ΛΜ	ii.	2R
3.	ΟΜ	iii.	R+ρ
		iv.	2R-ρ

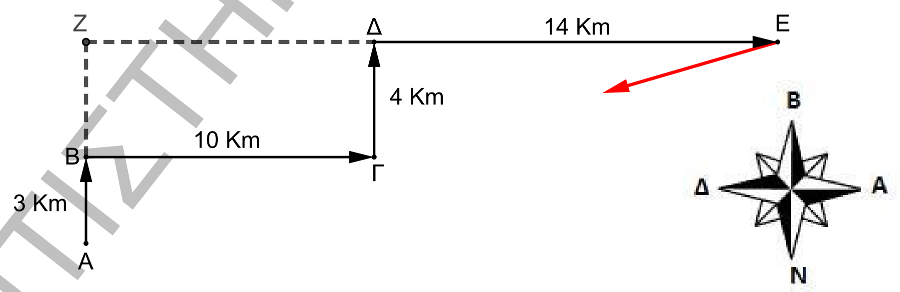
β. **i.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΚΛ είναι ισοσκελές και ότι το τμήμα ΜΟ είναι το ύψος προς τη βάση του.

ii. Να βρείτε την ακτίνα ρ του κύκλου κέντρου Μ ως συνάρτηση του R, όπου R η ακτίνα των κύκλων κέντρων Κ και Λ.

Μονάδες [6+(6+13)]=25

2. **ΘΕΜΑ Δ** **9.2** **14533**

Δύο κινητά βρίσκονται στο σημείο Α και σκοπεύουν να μεταβούν στο σημείο Ε, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε. Το δεύτερο κινητό ξεκινάει από το σημείο Α κινείται βόρεια μέχρι το σημείο Ζ και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο Ε. Όταν συναντιούνται στο σημείο Ε επιστρέφουν μαζί στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.



α. **i.** Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο Α στο σημείο Ε με τον τρόπο που κινήθηκε;

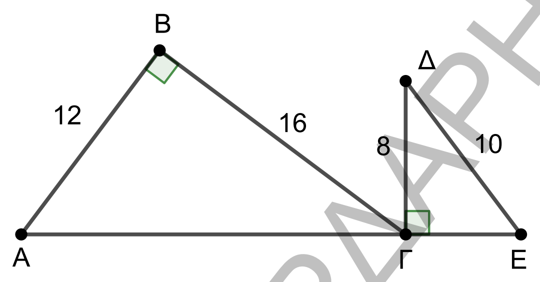
ii. Να βρείτε την απόσταση ΑΕ που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο Ε στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.

β. Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο Ε στο σημείο Α, θα περάσουν από το σημείο Γ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες [(5+12)+8]=25

3. **Θ Ε Μ Α Δ** **9.2** **16133**

Στο διπλανό σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔE έχουν μήκη αντίστοιχα $12, 16, 8$ και 10, οι γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $\Delta\hat{\Gamma}E$ είναι ορθές και τα σημεία A, Γ και E ανήκουν στην ίδια ευθεία.



α. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AE.

β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ είναι όμοια.

γ. Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών AB και $E\Delta$ είναι το Z και ZH είναι το ύψος του τριγώνου ZAE από την κορυφή του Z. Να αποδείξετε ότι:

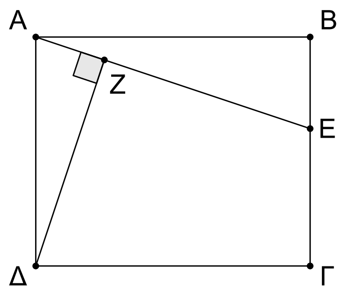
i. $EH = 13$,

ii. $ZH = \dfrac{52}{3}$.

Μονάδες $[7+7+(6+5)]=25$

4. **Θ Ε Μ Α Δ** **9.2** **17348**

Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $AB = 6$ και το E σημείο της πλευράς $B\Gamma$, ώστε $BE = 2$. Έστω ΔZ το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο Δ προς την AE.



α. Να αποδείξετε ότι $AE = 2\sqrt{10}$.

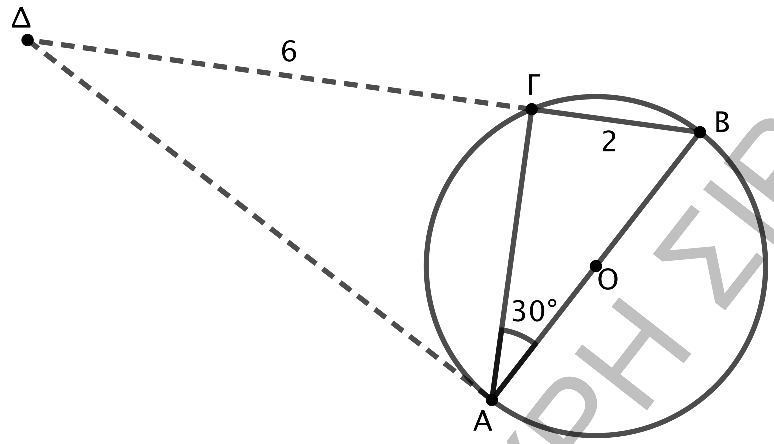
β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και ΔZA είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους.

γ. Αν $\Delta Z = ZE$, να υπολογίσετε το μήκος του $A\Delta$.

Μονάδες $(8+9+8)=25$

5. **Θ Ε Μ Α Δ** **9.2** **21149**

Σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε $B\widehat{A}\Gamma = 30^{o}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν $B\Gamma = 2$, τότε:



α. Να υπολογίσετε:

i. Την ακτίνα R.

ii Το μήκος της πλευράς ΑΓ.

β. Θεωρούμε σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = 6$.
Να εξετάσετε αν το τμήμα ΔΑ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (16+9)=25

9.4 ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ (9)

1. ΘΕΜΑ Β 9.4 14549

Τα μήκη των πλευρών α, β, γ του τριγώνου ΑΒΓ είναι : α=7, β=3 και γ=5.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

β. Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ και να υπολογίσετε το μήκος της.

Μονάδες (12+13)=25

2. ΘΕΜΑ Β 9.4 16080

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5, ΒΓ=$\sqrt{41}$ και ΑΓ = 8.

α. Να σχεδιάσετε την προβολή ΑΔ, της ΑΒ στην ΑΓ και να υπολογίσετε το μήκος της.

β. Αν ΑΔ = 3, να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΒΔ.

Μονάδες (13+12)=25

3. ΘΕΜΑ Β 9.4 16101

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 8, ΑΓ = 6 και ΒΓ = 11.

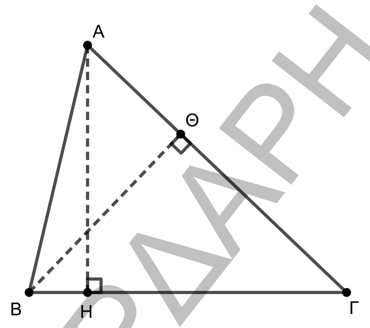
α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

β. Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην ΑΒ και να υπολογίσετε το μήκος της.

Μονάδες (10+15)=25

4. ΘΕΜΑ Β 9.4 16804

Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη του ΑΗ και ΒΘ.



α. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή της πλευράς ΒΓ στην πλευρά ΑΓ είναι το τμήμα …….

ii. Η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΒΓ είναι το τμήμα ......

iii. Το τμήμα ΗΓ είναι η προβολή της πλευράς …….. στην πλευρά …….

iv. Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς ……… στην πλευρά …….

v. $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ... - 2 \cdot ΒΓ \cdot ...$

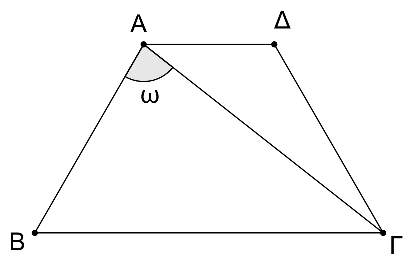
vi. $ΒΓ^2 = ... + ΑΓ^2 - 2 \cdot ... \cdot ΑΘ$

β. Αν ΑΒ = 4, ΒΓ=5 και ΑΓ = 6, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΘ.

Μονάδες (15+10)=25

5. ΘΕΜΑ Β 9.4 17343

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι $ΑΔ = 3$, $ΑΒ = ΓΔ = 5$, $ΒΓ = 8$ και $\hat{Δ} = 120^\circ$.



α. Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 7$.

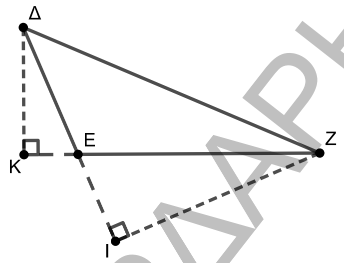
β. Να αποδείξετε ότι $συνω = \frac{1}{7}$, όπου ω είναι η γωνία $Β\hat{Α}Γ$.

Δίνεται ότι $συν120^\circ = -\frac{1}{2}$.

Μονάδες (10+15)=25

6. **ΘΕΜΑ Β** **9.4** **17354**

Στα διπλανό τρίγωνο ΔΕΖ φέρουμε τα ύψη του ΔΚ και ΖΙ.



α. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα …….

ii. Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα …….

iii. Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς …….. στην πλευρά …….

iv. Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς ……… στην πλευρά ……..

v. $ΔΖ^2 = ΔΕ^2 + ... + 2\cdot ΕΖ\cdot ...$

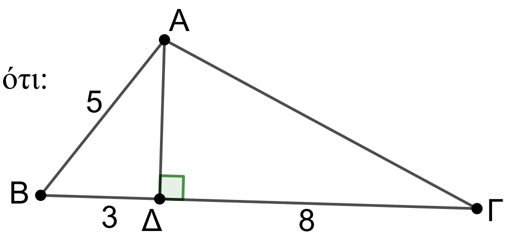
vi. $ΕΖ^2 = ... + ΔΖ^2 - 2\cdot ...\cdot ΔΙ$

β. Αν ΔΕ = 2, ΕΖ = 4 και ΔΖ = 5, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΙ.

Μονάδες (15+10)=25

7. **ΘΕΜΑ Β** **9.4** **21302**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5 και ΑΔ το ύψος του από την κορυφή Α. Αν ΒΔ = 3 και ΓΔ = 8 να αποδείξετε ότι:



α. $ΑΔ = 4$.

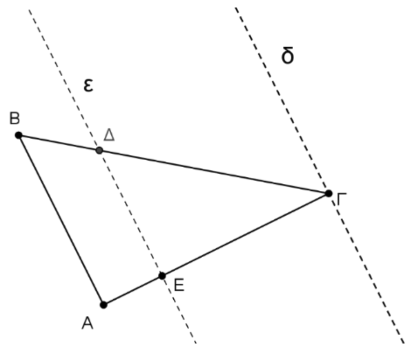
β. $ΑΓ = \sqrt{80}$.

γ. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

Μονάδες (7+8+10)=25

8. **ΘΕΜΑ Β** **9.4** **22248**

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 9, ΓΑ = 12 και ΓΒ = 15 και ευθείες ε, δ παράλληλες στην ΑΒ, όπως αυτές του σχήματος.



α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να βρείτε ποια πλευρά είναι η υποτείνουσά του.

β. Αν η ευθεία (ε) τέμνει τις πλευρές ΓΑ, ΓΒ σε σημεία Ε και Δ αντίστοιχα έτσι ώστε ΕΑ = 4 και η ευθεία (δ) διέρχεται από το σημείο Γ, τότε να υπολογίσετε:

i. το τμήμα ΔΒ,

ii. τις πλευρές του τριγώνου ΔΕΓ.

Μονάδες [8+(8+9)]=25

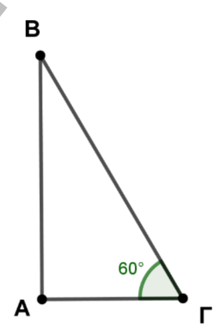
9. **Θ Ε Μ Α Β** **9.4** **22512**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 4, ΑΓ = 2 και $\hat{\Gamma} = 60^{\circ}$.

α. Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ.

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.



Μονάδες (8+9+8)=25

9.4 ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ (2)

1. ΘΕΜΑ Δ 9.4 21185

Τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα αυτά μπορούν να σχηματίσουν ορθογώνιο τρίγωνο.

β. Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ είναι σχεδιασμένα πάνω σε ένα χαρτί και αυτό το φωτοτυπήσουμε με μεγέθυνση λ%, να αποδείξετε ότι και με τα νέα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζεται πάλι ορθογώνιο τρίγωνο.

γ. Να εξετάστε αν μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο με πλευρές 10α, 8β και 6γ.

Μονάδες (8+10+7)=25

2. **Θ Ε Μ Α Δ** **9.4** **22400**

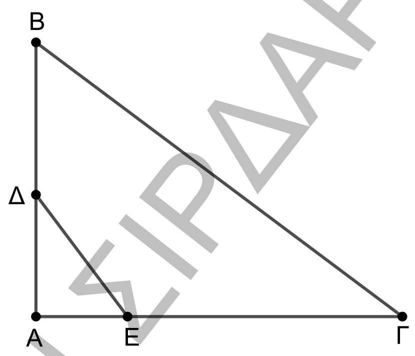
Τα Δ και E είναι σημεία των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ενός τριγώνου $AB\Gamma$. Δίνεται ότι $AB=9$, $A\Gamma=12$, $A\Delta=4$ και $AE=3$.

α. Έστω ότι στο παραπάνω τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B\Gamma=15$,.

Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

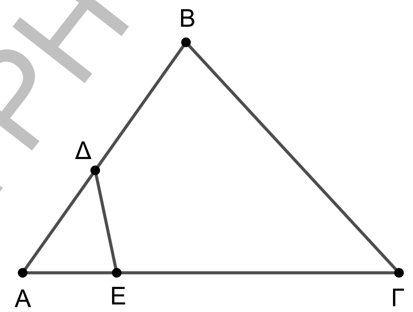
ii. $\Delta E=5$.



β. Έστω τώρα ότι στο αρχικό τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B\Gamma=10$. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ δεν είναι ορθογώνιο.

ii. $\Delta E=\dfrac{10}{3}$



Μονάδες [(7+6)+(6+6)]=25

10.2 ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ- ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ (3)

1. ΘΕΜΑ Δ 10.3 18562

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α.

α. Να αποδείξετε ότι το μήκος της διαγωνίου ΒΔ ισούται με $\alpha\sqrt{2}$ και να βρείτε το εμβαδό του.

β. **i.** Να σχεδιάσετε το τετράγωνο ΒΔΖΗ έτσι ώστε το σημείο Α να είναι εσωτερικό σημείο του και να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι το κέντρο του τετραγώνου ΒΔΖΗ.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΒΔΖΗ και να το συγκρίνετε με το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ.

γ. Επαναλαμβάνουμε το σχεδιασμό όπως περιγράφηκε παραπάνω και σχηματίζουμε νέο τετράγωνο, με πλευρά κάθε φορά, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου.
Δηλαδή με πλευρά τη διαγώνιο ΔΗ του τετραγώνου ΒΔΖΗ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο, το ΔΗΘΚ. Με πλευρά τη διαγώνιο ΗΚ του ΔΗΘΚ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο κ.ο.κ.
Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του θα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ, πόσες φορές ακόμη πρέπει να επαναλάβουμε το σχεδιασμό αυτό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες [5+(7+8)+5]=25

2. **Θ Ε Μ Α Δ** **10.3** **18564**

Ο παππούς του Πέτρου έχει έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου και θέλει να φυτέψει στον μισό διάφορα λουλούδια και στο υπόλοιπο γκαζόν. Λέει λοιπόν στον Πέτρο ότι έχει σκεφτεί κάποιους απλούς τρόπους να τον χωρίσει σε δύο κομμάτια που να έχουν το ίδιο εμβαδό.

α. Να σχεδιάσετε δύο (2) τρόπους με τους οποίους χωρίζεται ο κήπος σε δύο κομμάτια ίδιου εμβαδού και να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

β. Ο Πέτρος προτείνει στον παππού του έναν δικό του τρόπο για το χωρισμό.
Για να ορίσει το κομμάτι που θα φυτευτεί με λουλούδια χρησιμοποιεί τρεις πέτρες.
Τοποθετεί την πρώτη πέτρα σε ένα εσωτερικό σημείο της μιας πλευράς του κήπου και τις άλλες δύο στις απέναντι κορυφές του ορθογωνίου. Δείχνει στον παππού του το τρίγωνο που σχηματίζεται εξηγώντας του πως είναι το μισό του κήπου. Προτείνει δε στον παππού του, το τριγωνικό χωρίο που σχηματίζεται, να το μετακινήσει εκείνος σε όποια θέση νομίζει καλύτερα μετακινώντας μόνο την πρώτη πέτρα, χωρίς παρ' όλα αυτά να αλλάξει το εμβαδό του.

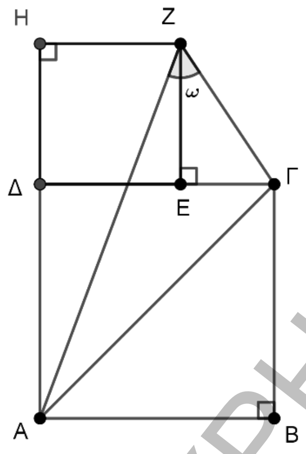
i. Να σχεδιάσετε τον τρόπο που προτείνει ο Πέτρος και να αποδείξετε ότι, το εμβαδό του σχηματιζόμενου τριγωνικού χωρίου είναι το μισό του κήπου.

ii. Τι εννοεί ο Πέτρος λέγοντας ότι «το τριγωνικό χωρίο μπορεί να μετακινηθεί όταν αλλάζει η θέση της πρώτης πέτρας σε εσωτερικό σημείο της πλευράς του κήπου και παρ' όλα αυτά δεν αλλάζει το εμβαδό του»; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες [10+(8+7)]=25

3. **ΘΕΜΑ Δ** **10.3** **21183**

Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά $\sqrt{2}$ και το τετράγωνο ΔΕΖΗ έχει πλευρά 1.



α. Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 2$.

β. Να αποδείξετε ότι:

i. $ΑΖ^2 = 4 + 2\sqrt{2}$.

ii. $ΓΖ^2 = 4 - 2\sqrt{2}$.

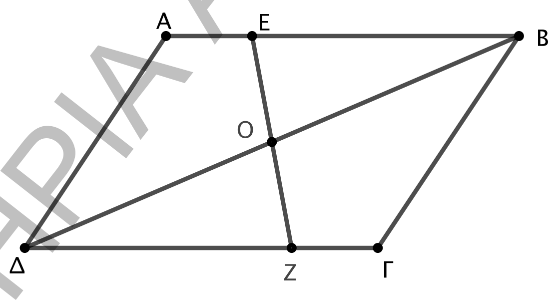
γ. Να υπολογίστε σε μοίρες το μέτρο της γωνίας $Α\hat{Ζ}Γ = \hat{ω}$.

Μονάδες [6+(7+7)+5]=25

10.3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ (15)

1. ΘΕΜΑ Β 10.3 16102

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από το κέντρο Ο φέρουμε ευθεία η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ όπως φαίνεται στο σχήμα.



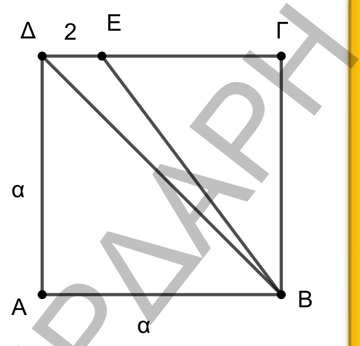
Να αποδείξετε ότι:

α. $(\Delta OZ) = (BOE)$.

β. $(\Delta OEA) = (B\Gamma ZO)$.

Μονάδες (10+15)=25

2. ΘΕΜΑ Β 10.3 16817



Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α, θεωρούμε σημείο Ε της πλευράς του ΔΓ έτσι ώστε ΔΕ = 2.

Αν γνωρίζουμε ότι: $(\text{ΒΕΔ}) = \dfrac{(\text{ΑΒΓΔ})}{8}$ τότε:

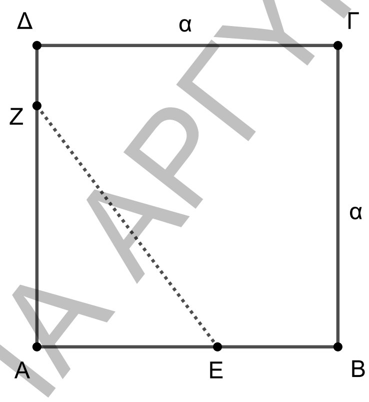
α. Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου α είναι ίση με 8.

β. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ.

Μονάδες (13+12)=25

3. ΘΕΜΑ Β 10.3 16821

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α.



Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε $\text{ΑΕ} = \dfrac{[illegible]}{5}$ ΑΒ, και στην πλευρά ΑΔ θεωρούμε σημείο Ζ έτσι ώστε $\text{ΑΖ} = \dfrac{4}{5}$ ΑΔ.

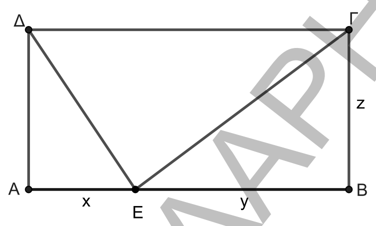
α. Να υπολογίσετε συναρτήσει του α τα εμβαδά, του τριγώνου ΑΕΖ και του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

β. Αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του πενταγώνου ΕΒΓΔΖ είναι ίσο με 76 να υπολογίσετε το μήκος α της πλευράς του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Μονάδες (12+13)=25

4. **ΘΕΜΑ Β** **10.3** **18550**

Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 36 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.



α. Να αποδείξετε ότι $x = 4$, $y = 8$ και $z = 6$.

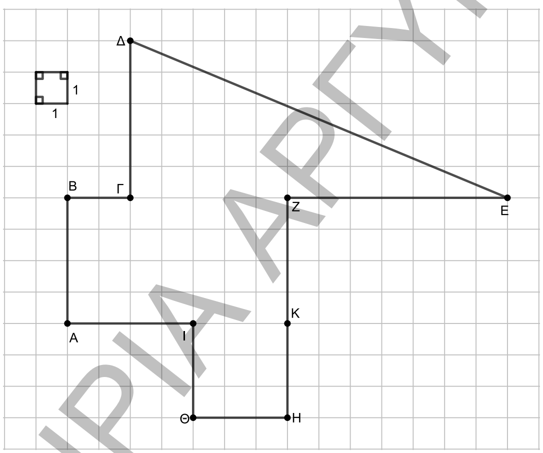
β. **i.** Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ.

ii. Να βρεθεί ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου ΓΔΕ προς το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

Μονάδες (13+12)=25

5. **ΘΕΜΑ Β** **10.3** **18558**

Στο παρακάτω σχήμα:



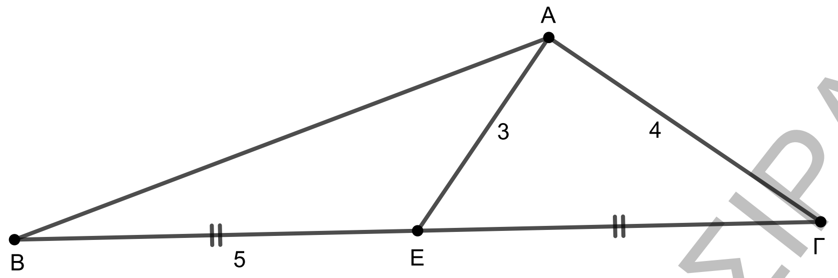
α. Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΔΕ.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την τεθλασμένη γραμμή Α-ΒΓΔΕΖΗΘΙΑ.

Μονάδες (10+15)=25

6. ΘΕΜΑ Β 10.3 18559

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ έχει μήκος 3 και η πλευρά ΑΓ είναι ίση με 4. Αν ΒΕ=5, τότε:



α. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΑΕ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΓ.

β. **i.** Να δικαιολογήσετε γιατί (ΑΒΕ)=(ΑΓΕ).

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες [10+(5+10)]=25

7. ΘΕΜΑ Β 10.3 18560

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Αν ΓΕ είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά ΑΒ και το τμήμα ΑΕ έχει μήκος 9, τότε:

α. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓΕ.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδό

i. του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

ii. του τραπεζίου ΑΕΓΔ.

Μονάδες (13+12)=25

8. ΘΕΜΑ Β 10.3 21101

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΒΓ = $\sqrt{3}$, ΑΒ = $\sqrt{2}$, ΑΓ = 1.

α. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90^o$.

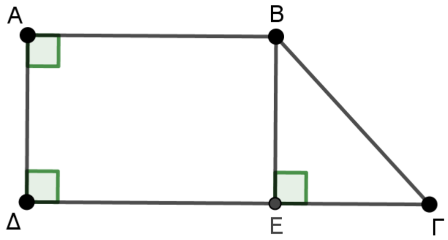
β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

γ. Να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ.

Μονάδες (9+7+9)=25

9. **ΘΕΜΑ Β** **10.3** **21823**

Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος, με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^0$ και ΑΔ = 4, ΑΒ = 5, ΔΓ= 8. Από την κορυφή Β του τραπεζίου, φέρνουμε την ΒΕ κάθετη στην πλευρά ΔΓ.



α. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΕΓ.

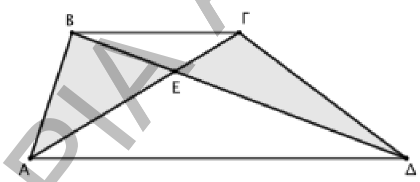
β. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ του τραπεζίου.

γ. Να υπολογίσετε το λόγο: $\dfrac{(\mathrm{B}\Delta\Gamma)}{(\mathrm{AB}\Gamma\Delta)}$

Μονάδες (8+9+8)=25

10. **ΘΕΜΑ Β** **10.3** **22032**

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ) και έστω Ε το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ.

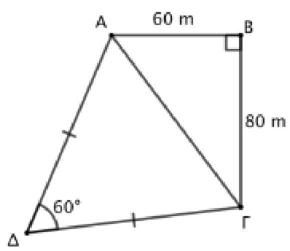


α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ισοδύναμα.

β. Να συγκρίνετε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων τριγώνων ΑΒΕ και ΔΓΕ.

Μονάδες (13+12)=25

11. **ΘΕΜΑ Β** **10.3** **22035**



Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος παριστάνει την κάτοψη ενός κτήματος με $\mathrm{AB} = 60\ \mathrm{m}$, $\mathrm{B}\Gamma = 80\ \mathrm{m}$, $\hat{\Delta} = 60^\circ$, $\hat{B} = 90^\circ$ και $\mathrm{A}\Delta = \Gamma\Delta$

α. Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου ΑΓ.

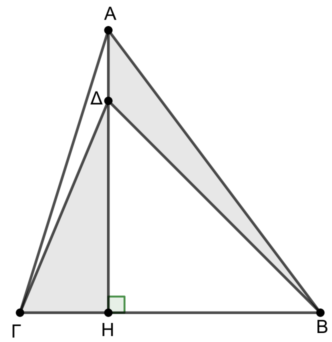
β. Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο.

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΓ.
Πόσο είναι το συνολικό εμβαδόν του κτήματος;

Μονάδες (9+4+12)=25

12. ΘΕΜΑ Β 10.3 22331

Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ του σχήματος το $ΑΗ$ είναι ύψος και το $Δ$ σημείο του $ΑΗ$. Δίνονται $ΑΒ=20$, $ΒΗ=12$, $ΓΗ=5$ και ότι το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΔ$ είναι $(ΑΒΔ)=24$.



α. Να αποδείξετε ότι $ΑΗ=16$.

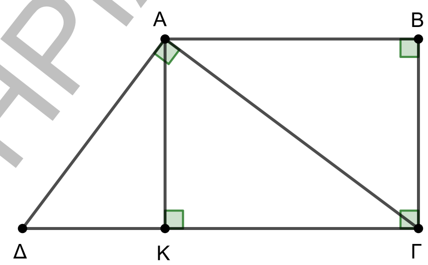
β. Να αποδείξετε ότι $ΑΔ=4$.

γ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $ΓΔΗ$.

Μονάδες (13+6+6)=25

13. ΘΕΜΑ Β 10.3 22338

Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $\hat{Β}=\hat{Γ}=90°$ και στο οποίο η πλευρά $ΑΔ$ και η διαγώνιος $ΑΓ$ είναι κάθετες. Έστω $Κ$ η προβολή της κορυφής $Α$ στην πλευρά $ΓΔ$, $ΚΔ=9$ και $ΚΓ=16$.



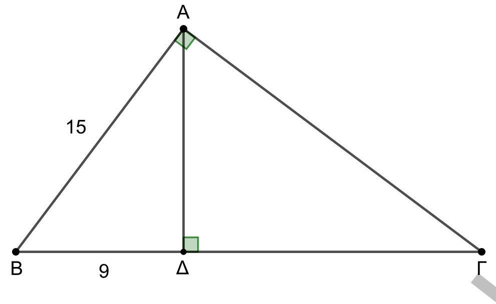
α. Να αποδείξετε ότι $ΑΚ=12$.

β. Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$.

Μονάδες (12+13)=25

14. ΘΕΜΑ Β 10.3 22339

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90°$ και έστω Δ η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα ΒΓ. Έστω επίσης $AB=15$ και $\Delta B=9$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $B\Gamma=25$.

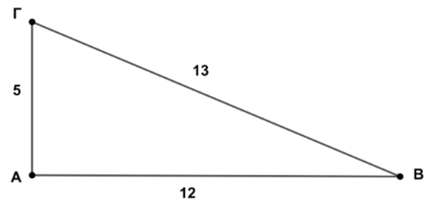
ii. $A\Gamma=20$.

β. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες [(9+9)+7]=25

15. ΘΕΜΑ Β 10.3 22513

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 12, ΑΓ =5 και ΒΓ =13.



α. Να αποδείξετε ότι $\hat{A}=90°$.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

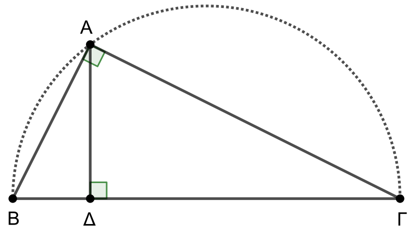
γ. Να υπολογίσετε το ύψος υ_α

Μονάδες (8+8+9)=25

10.3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ (16)

1. ΘΕΜΑ Δ 10.3 16135

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με υποτείνουσα $ΒΓ = 10$ και έστω ότι $Δ$ είναι η προβολή της κορυφής $Α$ στην $ΒΓ$



α. Αν $ΔΒ = 2$ να υπολογίσετε:

i. ο ύψος $ΑΔ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$,

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$.

β. Υποθέστε ότι το σημείο $Α$ κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $ΒΓ$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι $(ΑΒΓ) = 5ΑΔ$.

ii. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για όλες τις θέσεις του $Α$ πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $ΒΓ$, το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ δεν υπερβαίνει το 25».

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $[(7+5)+(7+6)]=25$

2. ΘΕΜΑ Δ 10.3 16807

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις ΑΒ = 24, ΒΓ = 12 και σημείο Ε στην ευθεία ΑΒ.

α. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ όταν :

i. Το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ.

ii. Το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α του ορθογωνίου.

β. Αφήνουμε το σημείο Ε να κινηθεί στην προέκταση του τμήματος ΑΒ προς το Β, απομακρυνόμενο από το σημείο Β.

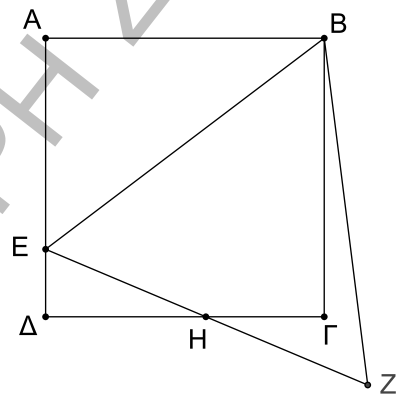
i. Να εξετάσετε αν η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ αυξάνεται ή μειώνεται.

ii. Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ συμβαίνει η ίδια μεταβολή με αυτή που απαντήσατε για την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ στο ερώτημα β)i.; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες [(8+8)+(5+4)]=25

3. **ΘΕΜΑ Δ** **10.3** **17349**

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 3 και σημείο Ε της πλευράς ΑΔ, ώστε $AE = 4 - \sqrt{3}$. Στο ημιεπίπεδο που ορίζουν η ευθεία ΒΕ και το σημείο Γ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΒΕΖ. Οι ΓΔ και ΕΖ τέμνονται στο σημείο Η και $\Delta H = \sqrt{3}$.



α. Να αποδείξετε ότι $BE = 2\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$.

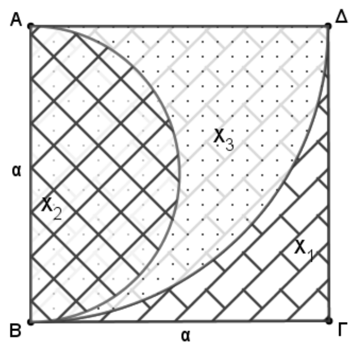
β. Να αποδείξετε το Η είναι το μέσο της ΕΖ.

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου ΒΕΖ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Μονάδες (8+8+9)=25

4. **ΘΕΜΑ Δ** **10.3** **17599**

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α του διπλανού σχήματος, γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο Α και ακτίνα α.



α. Αν X_1 είναι το χωρίο του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του τεταρτοκυκλίου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ισούται με: $(X_1) = \frac{\alpha^2}{4} \cdot (4-\pi)$

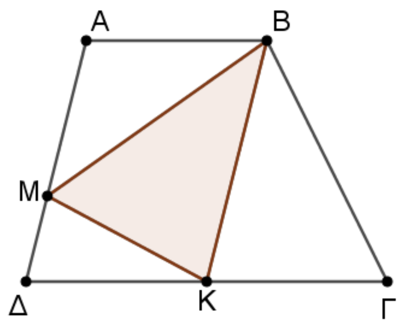
β. Με διάμετρο ΑΒ κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου. Αν X_2 είναι το χωρίο του ημικυκλίου και X_3 το χωρίο του τεταρτοκυκλίου που βρίσκεται εξωτερικά του ημικυκλίου, να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο χωρίων X_2 και X_3.

γ. Ποιο από τα χωρία X_1 κι X_2 έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (5+11+9)=25

5. **Θ Ε Μ Α Δ** **10.3** **18173**

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και ΓΔ = 2ΑΒ. Δίνεται επίσης ότι το σημείο Κ είναι μέσο της ΓΔ και Μ τυχαίο σημείο στην ΑΔ.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $(ΒΚΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΚΔ)$

ii. $(ΒΜΚ) = (ΒΚΓ)$

β. Δίνεται η πρόταση: «Αν το σημείο Μ κινείται πάνω στο εσωτερικό της ΑΔ, τότε ο λόγος των εμβαδών (ΑΒΓΔ) και (ΜΒΚ) παραμένει σταθερός και ίσος με 3».

Να διερευνήσετε την ορθότητα της πρότασης αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες [(9+9)+7]=25

6. **Θ Ε Μ Α Δ** **10.3** **18553**

Δίνεται τετράγωνο με πλευρά α και σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς ΑΒ προς το Β τέτοιο ώστε ΒΣ = ΑΒ.

α. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α:

i. Το εμβαδό του τριγώνου ΣΔΓ.

ii. Το μήκος της πλευράς ΣΓ του τριγώνου ΣΔΓ.

β. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Σ’ στην προέκταση της πλευράς ΑΒ προς το Β τέτοιο ώστε ΒΣ’ > ΒΣ. Να συγκρίνετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

i. Το εμβαδό του τριγώνου Σ’ΔΓ με το εμβαδό του τριγώνου ΣΔΓ.

ii. Το μήκος της πλευράς Σ’Γ με το μήκος της πλευράς ΣΓ των τριγώνων Σ’ΔΓ και ΣΔΓ αντίστοιχα.

iii. Τις αποστάσεις του σημείου Δ από τις ευθείες ΣΓ και Σ’Γ.

Μονάδες (10+15)=25

7. **Θ Ε Μ Α Δ** **10.3** **18557**

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ, ώστε ΑΒ > ΓΔ. Από τις κορυφές Γ κα Δ φέρουμε ΓΕ//ΑΔ και ΔΖ//ΓΒ, με Ε και Ζ σημεία στην πλευρά ΑΒ του τραπεζίου.

α. Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τετραπλεύρων ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ.

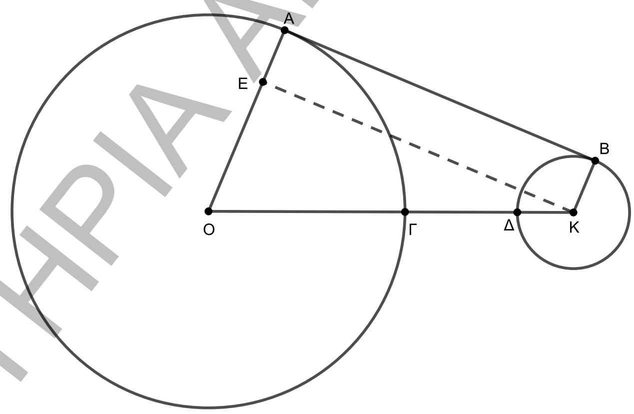
β. Να εκφράσετε τις περιμέτρους των τετραπλεύρων ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ ως συνάρτηση των πλευρών του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

γ. Πώς θα πρέπει να κατασκευάσουμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ ώστε τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ να έχουν ίσες περιμέτρους και ίσα εμβαδά;

Μονάδες (9+8+8)=25

8. **Θ Ε Μ Α Δ** **10.3** **18565**

Δίνονται δύο κύκλοι με κέντρα Ο και Κ. Ο κύκλος με κέντρο Ο έχει ακτίνα R=7 ενώ ο κύκλος με κέντρο Κ έχει ακτίνα ρ=2. Το τμήμα ΑΒ είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων και το τμήμα ΚΕ είναι παράλληλο στο τμήμα ΑΒ με Ε σημείο του τμήματος ΟΑ. Η διάκεντρος ΟΚ τέμνει τον κύκλο (Ο,R) στο σημείο Γ και τον κύκλο (Κ,ρ) στο σημείο Δ.



α. Αν η θέση των δύο κύκλων είναι τέτοια ώστε, η απόσταση των σημείων Γ και Δ είναι ΓΔ=4, τότε:

i. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΒ.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΚΟ.

β. Ποια πρέπει να είναι η σχετική θέση των 2 κύκλων, ώστε το εμβαδόν του ΑΒΚΕ να ισούται με $4\sqrt{14}$ τ.μ.;

Μονάδες [(10+7)+8]

9. ΘΕΜΑ Δ 10.3 18566

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}=90^{o}$.

Με πλευρά την υποτείνουσα ΒΓ και έξω από το τρίγωνο, γράφουμε το τετράγωνο ΒΓΔΕ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το Α και παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΒΖ = ΒΓ. Από τα σημεία Γ και Ζ φέρουμε παράλληλες προς τα τμήματα ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο Η.

α. Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΒΓΗΖ είναι ρόμβος και να βρείτε τις περιμέτρους του ρόμβου και του τετραγώνου.

β. Δίνονται οι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1:

«Ο ρόμβος και το τετράγωνο αφού έχουν ίσες περιμέτρους, θα έχουν και ίσα εμβαδά».

Ισχυρισμός 2:

«Ο ρόμβος έχει μικρότερο εμβαδό από το τετράγωνο και μάλιστα, όπως έχουν κατασκευαστεί τα δύο τετράπλευρα δεν γίνεται να είναι ποτέ ισεμβαδικά».

Εξετάστε ποιος από τους 2 παραπάνω ισχυρισμούς είναι σωστός και να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες (10+15)=25

10. ΘΕΜΑ Δ 10.3 21124

α. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $\alpha=40$, $\beta=25$, $\gamma=25$ και αντίστοιχα ύψη υ_{α}, υ_{β}, υ_{γ}. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $E=300$ και τα ύψη του είναι $\upsilon_{\alpha}=15$ και $\upsilon_{\beta}=\upsilon_{\gamma}=24$.

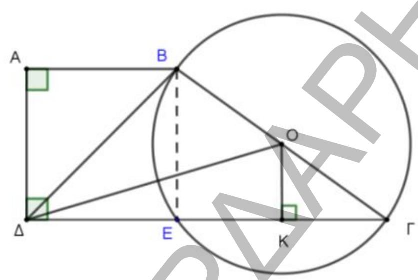
iii. Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη υ_{α}, υ_{β}, υ_{γ} είναι οξυγώνιο.

β. Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου, είναι ισοσκελές και οξυγώνιο.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες [(6+7+7)+5]=25

11. **Θ Ε Μ Α Δ** **10.3** **21840**



Έστω ΑΒΓΔ τραπέζιο με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$, ΑΒ=5 , ΓΔ=13 και εμβαδόν (ΑΒΓΔ)=54.

Ο κύκλος με διάμετρο τη ΒΓ τέμνει τη ΓΔ στο σημείο Ε.

α. Να αποδείξετε ότι ΑΔ = 6.

β. Να υπολογίσετε το μήκος των ΒΕ και ΒΓ.

γ. Αν ΟΚ είναι η κάθετη από το σημείο Ο στην ΕΓ, να αποδείξετε ότι ΟΚ=3, και

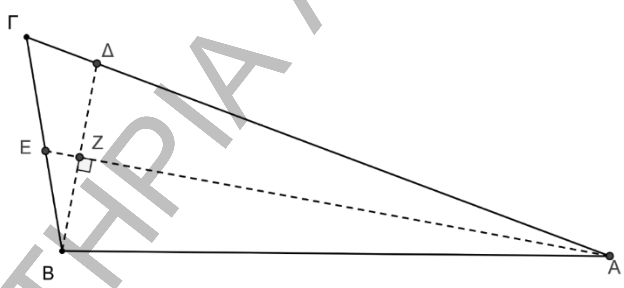
να υπολογίσετε το μήκος της ΟΔ.

δ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΟ.

Μονάδες (6+6+6+7)=25

12. **Θ Ε Μ Α Δ** **10.3** **22100**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνίες $\hat{A} = 20^0$, $\hat{B} = 100^0$, και η διχοτόμος ΑΕ της γωνίας του $\hat{A}$. Από το Β φέρνουμε την κάθετη προς την ΑΕ και έστω Ζ , Δ τα σημεία τομής της καθέτου με τις ΑΕ, ΑΓ αντίστοιχα.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\Gamma\hat{B}\Delta = \hat{A} = 20^0$

ii. Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ, να γράψετε τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών τους και να αιτιολογήσετε γιατί είναι αυτές οι πλευρές ομόλογες.

β. Να σχεδιάσετε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ δύο τετράπλευρα: ένα τετράγωνο με πλευρά την ΒΓ και ένα ορθογώνιο που η μία του πλευρά είναι η πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και η άλλη του πλευρά είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ.

Να εξετάσετε αν τα δυο τετράπλευρα, που σχεδιάσατε, έχουν ίσα εμβαδά.

Μονάδες [(10+10)+5]=25

13. ΘΕΜΑ Δ 10.3 22104

Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε σημείο Δ εσωτερικό της πλευράς του ΒΓ.

Έστω Μ το μέσο Μ του τμήματος ΑΔ.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $(ΑΒΜ) = \frac{1}{2}(ΑΒΔ)$

ii. $(ΑΒΜ) + (ΜΔΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ)$

β. Να εξετάσετε αν υπάρχει θέση του σημείου Δ τέτοια ώστε τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΔΓ να έχουν ίσα εμβαδά.

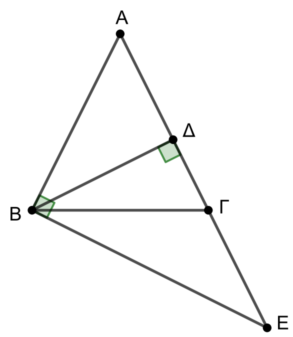
Στην περίπτωση που υπάρχει θέση του σημείου Δ για την οποία τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΜ και ΜΔΓ είναι ίσα, να βρείτε τι μέρος του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ είναι το εμβαδόν του κάθε τριγώνου ΑΒΜ και ΜΔΓ.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες [(8+9)+8]=25

14. ΘΕΜΑ Δ 10.3 22396

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ και έστω $Δ$ η προβολή του σημείου $Β$ πάνω στην ευθεία $ΑΓ$. Έστω $ΑΔ = 3$ και $ΔΓ = 2$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $ΒΔ = 4$.

ii. $(ΑΒΓ) = 10$.

β. Έστω ότι η κάθετη της $ΑΒ$ στο σημείο $Β$, τέμνει την προέκταση της $ΑΓ$ στο σημείο $Ε$. Να βρείτε:

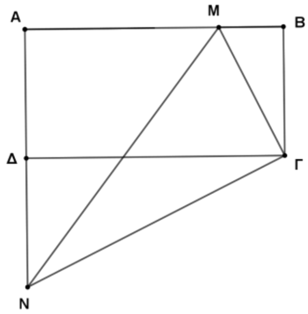
i. Το μήκος του $ΔΕ$.

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $ΒΓΕ$.

Μονάδες [(6+6)+(6+7)]=25

15. ΘΕΜΑ Δ 10.3 22509

Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2α και ΑΔ = α. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Μ με ΜΒ = x και στην προέκταση της ΑΔ σημείο Ν με ΔΝ = 2x.



α. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση των α, x τα $ΜΓ^2$, $ΝΓ^2$ και $ΜΝ^2$.

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ορθογώνιο.

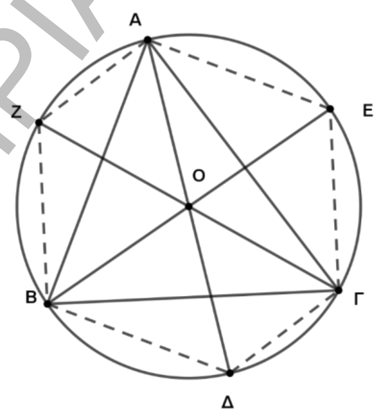
γ. Να υπολογίσετε συναρτήσει των α, x τα εμβαδά των τριγώνων ΑΜΝ και ΓΜΝ.

δ. Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ, πάνω στην ΑΒ ώστε τα τρίγωνα ΑΜΝ και ΓΜΝ να είναι ισεμβαδικά.

Μονάδες (6+6+8+5)=25

16. ΘΕΜΑ Δ 10.3 22510

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο.



Θεωρούμε τις διαμέτρους ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Να αποδείξετε ότι:

α. (ΑΟΒ) = (ΒΟΔ) και (ΑΟΓ) = (ΔΟΓ)

β. (ΒΔΓ) = (ΑΟΒ) + (ΑΟΓ) – (ΒΟΓ)

γ. (ΑΖΒΔΓΕ) = 2(ΑΒΓ)

Μονάδες (8+8+9)=25

10.4 ΑΛΛΟΙ ΤΥΠΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ (8)

1. ΘΕΜΑ Β 10.4 15979

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ=5 και $\hat{A} = 120^0$. Να αποδείξετε ότι:

α. $ΒΓ = 5\sqrt{3}$.

β. $(ΑΒΓ) = \dfrac{25\sqrt{3}}{4}$.

Μονάδες (13+12)=25

2. ΘΕΜΑ Β 10.4 17346

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = 6$, $ΒΓ = 4$ και $\hat{B} = 60^\circ$.

α. Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 2\sqrt{7}$.

β. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

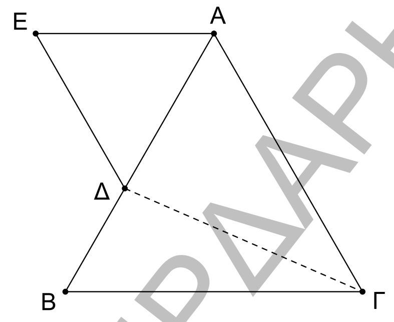
γ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Δίνεται ότι $ημ60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $συν60^\circ = \dfrac{1}{2}$.

Μονάδες (8+9+8)=25

3. ΘΕΜΑ Β 10.4 17347

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς 10 και το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο πλευράς 6.



α. Να αποδείξετε ότι $(\text{ΑΓΔ}) = 15\sqrt{3}$.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΓΔΕ.

Δίνεται ότι $\eta\mu 60^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Μονάδες (12+13)=25

4. ΘΕΜΑ Β 10.4 21196

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές β = 8 και γ = 6.

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ είναι $E = 24$

β. Να υπολογίσετε:

i. το μήκος της πλευράς α του τριγώνου ΑΒΓ,

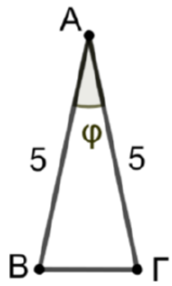
ii. το ύψος του υ_α που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα α του τριγώνου,

iii. την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Μονάδες [5+(6+7+7)]=25

5. ΘΕΜΑ Β 10.4 21299

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ} = 5$ και η γωνία της κορυφής $\hat{\varphi}$ έχει $\eta\mu\varphi = \dfrac{2}{5}$.



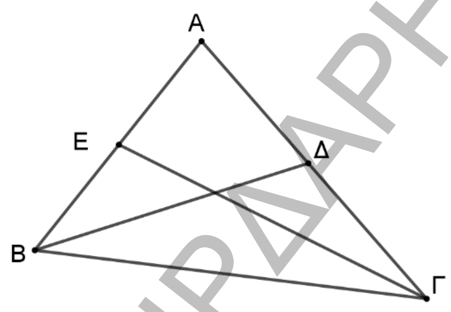
α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

β. Να σχεδιάσετε το ύψος ΒΗ του τριγώνου ΑΒΓ και να υπολογίσετε το μήκος του.

Μονάδες (12+13)=25

6. ΘΕΜΑ Β 10.4 21838

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=8 , ΑΓ=12 και γωνία $\hat{A} = 60^o$.



α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι (ΑΒΓ)=$24\sqrt{3}$.

β. Αν ΒΔ και ΓΕ διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι :

i. Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΑΕΓ είναι ισοδύναμα.

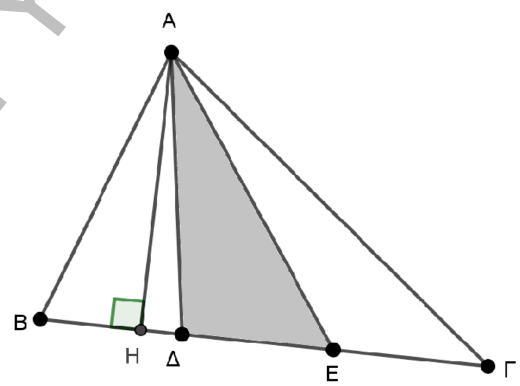
ii. Τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΔΓΒ είναι ισοδύναμα με (ΕΒΓ)=(ΔΓΒ)=$12\sqrt{3}$

Μονάδες [13+(4+8)]=25

7. ΘΕΜΑ Β 10.4 22259

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και στην πλευρά του ΒΓ, τα σημεία Δ,Ε ώστε ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ.

Από την κορυφή Α, φέρνουμε το ύψος ΑΗ του τριγώνου ΑΒΓ.



α. Να αποδείξετε ότι (ΑΔΕ) = $\frac{1}{3}$ (ΑΒΓ).

β. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι (ΑΜΕ) = $\frac{1}{6}$ (ΑΒΓ).

Μονάδες (13+12)=25

8. ΘΕΜΑ Β 10.4 22511

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 2, ΑΓ = 3 και $\hat{A} = 60^o$. Να υπολογίσετε:

α. το μήκος της πλευράς ΒΓ,

β. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.,

γ. το ύψος $υ_α$

Μονάδες (9+8+8)=25

10.4 ΑΛΛΟΙ ΤΥΠΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ (3)

1. **Θ Ε Μ Α Δ** **10.4** **22101**

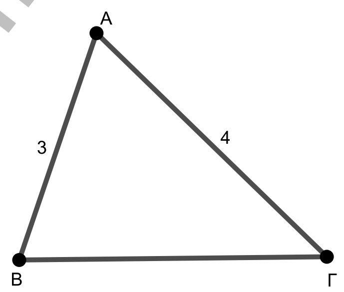
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ έχουν σταθερά μήκη 3 και 4 αντίστοιχα.

α. Αν η γωνία Α έχει μέτρο 60^o, τότε να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

ii. Το μήκος της πλευράς ΒΓ.

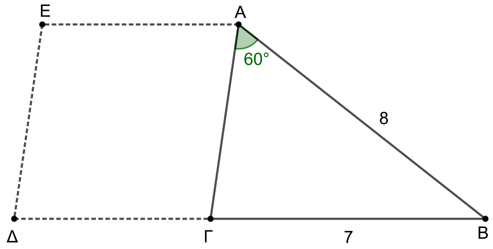
β. Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας Α ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ να γίνεται μέγιστο; Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Μονάδες [(8+9)+8]=25

2. ΘΕΜΑ Δ 10.4 22369

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=8$, $B\Gamma=7$ και $\hat{A}=60°$.



α. Να αποδείξετε ότι $A\Gamma=3$ ή $A\Gamma=5$.

β. Έστω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο όπως στο παρακάτω σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι $A\Gamma=5$.

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι $(AB\Gamma)=10\sqrt{3}$.

iii. Προεκτείνουμε τη ΒΓ κατά τμήμα $\Gamma\Delta=A\Gamma$ και σχηματίζουμε τον ρόμβο ΑΓΔΕ. Να βρείτε το εμβαδόν του ρόμβου ΑΓΔΕ

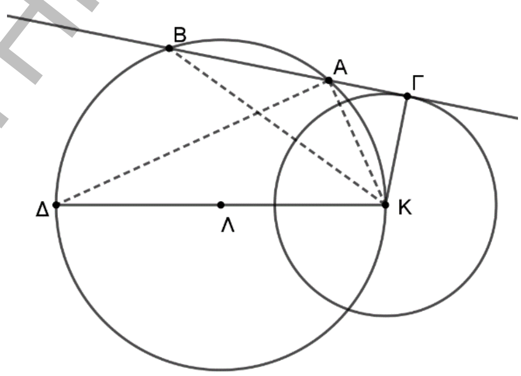
Μονάδες [6+(6+6+7)]=25

3. ΘΕΜΑ Δ 10.4 22568

Δίνεται κύκλος με κέντρο το σημείο Λ και ακτίνα R=10, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο ενός άλλου κύκλου με κέντρο το σημείο Κ και ακτίνα ρ=6.

Η εφαπτομένη του κύκλου (Κ,ρ) στο σημείο του Γ τέμνει τον κύκλο (Λ,R) στα σημεία Α και Β.

Η προέκταση της ΚΛ προς το Λ τέμνει τον κύκλο (Λ,R) στο σημείο Δ.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ είναι όμοια.

ii. $KA\cdot KB=120$

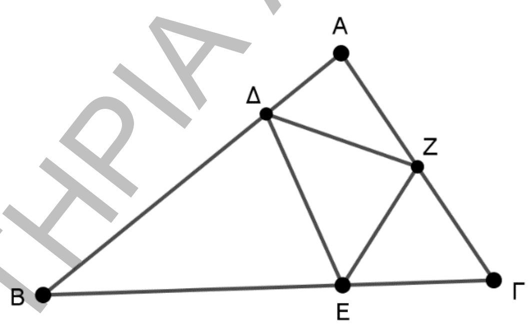
β. Αν είναι ΚΒ=15, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΚ.

Μονάδες [(8+9)+8]=25

10.5 ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ-ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ (15)

1. **ΘΕΜΑ Β** **10.5** **15978**

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, τα Δ, Ε, Ζ, είναι σημεία των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα, ώστε: ΑΔ= $\frac{1}{4}$ΑΒ, ΒΕ= $\frac{2}{3}$ΒΓ και ΓΖ= $\frac{1}{2}$ΑΓ.



Να αποδείξετε ότι:

α. (ΑΔΖ) = $\frac{1}{8}$ (ΑΒΓ), (ΒΕΔ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΓ), (ΓΕΖ) = $\frac{1}{6}$ (ΑΒΓ).

β. (ΔΕΖ)= $\frac{5}{24}$ (ΑΒΓ).

Μονάδες (15+10)=25

2. ΘΕΜΑ Β **10.5** **16127**

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρά $ΒΓ = 9$ και αντίστοιχο ύψος $ΑΔ = 8$.

α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

β. Ένα άλλο τρίγωνο Α'Β'Γ' είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ και η ομόλογη πλευρά της ΒΓ είναι η $Β'Γ' = 6$.

Να υπολογίσετε:

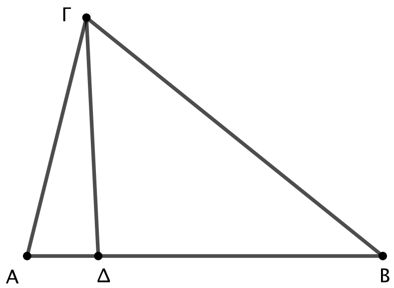
i. τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και Α'Β'Γ',

ii. το εμβαδόν του τριγώνου Α'Β'Γ'.

Μονάδες [9+(7+9)]=25

3. ΘΕΜΑ Β **10.5** **16756**

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ.



α. Να αποδείξετε ότι:

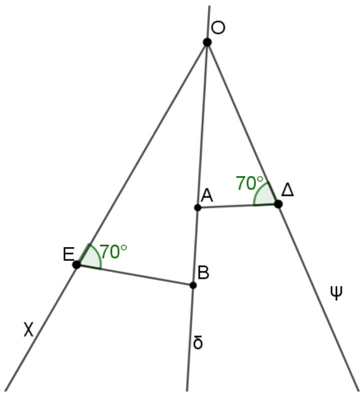
$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΔΒΓ)} = \frac{ΑΒ}{ΔΒ}$$

β. Αν $(ΑΒΓ) = 25$ και $ΑΒ = 5ΑΔ$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ.

Μονάδες (15+10)=25

4. ΘΕΜΑ Β **10.5** **16770**

Δίνεται γωνία $x\hat{O}ψ$ και η διχοτόμος της Οδ. Πάνω στην ΟΔ παίρνουμε τυχαία σημεία Α και Β. Θεωρούμε σημείο Ε στην πλευρά Οx τέτοιο ώστε $Ο\hat{Ε}Β = 70^o$ και σημείο Δ στην Οψ τέτοιο ώστε $Ο\hat{Δ}Α=70^o$.



α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΕΒ και ΟΔΑ είναι όμοια.

β. Αν $\frac{ΟΑ}{ΟΒ} = \frac{2}{3}$ να υπολογίσετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών των τριγώνων.

γ. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΔ είναι 28 τ.μ. να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΟΕΒ.

Μονάδες (10+6+9)=25

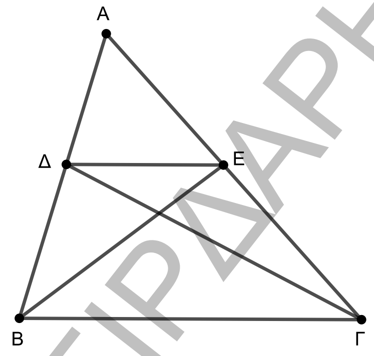
5. ΘΕΜΑ Β 10.5 16806

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

α. Να δικαιολογήσετε γιατί

$$\frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΔΕΒ})}=\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΒ}} \text{ και } \frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΔΕΓ})}=\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}.$$

β. Να αποδείξετε ότι $(\text{ΔΕΒ})=(\text{ΔΕΓ})$.



Μονάδες (13+12)=25

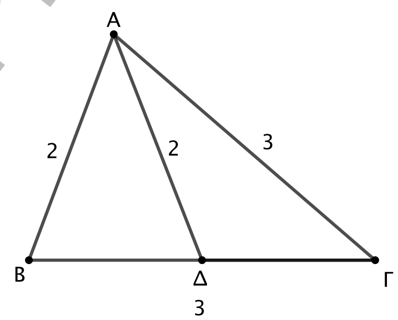
6. ΘΕΜΑ Β 10.5 18101

Στο σχήμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ισοσκελή με $\text{ΑΓ}=\text{ΒΓ}=3$ και $\text{ΑΒ}=\text{ΑΔ}=2$.

α. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{\text{Β}}$ και $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ}$ είναι ίσες.

β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΑ είναι όμοια.

γ. Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών $\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΒΔΑ})}$ των δύο τριγώνων.



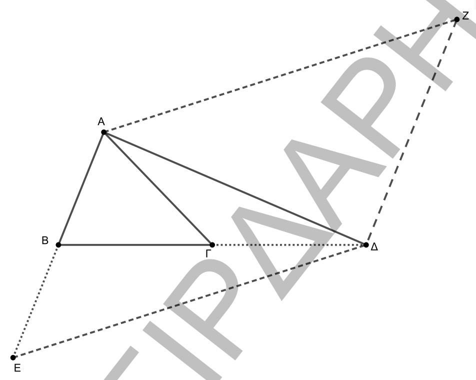
Μονάδες (8+9+8)=25

7. **ΘΕΜΑ Β** **10.5** **18561**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα ΓΔ=ΒΓ και την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ=ΑΒ.

α. Αν (ΑΒΓ)= 25 m^2, να αποδείξετε ότι (ΒΔΕ)=50 m^2.

β. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΕΔ και από την κορυφή Δ ευθεία παράλληλη στην ΕΑ που τέμνονται στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΖΔ είναι 4-πλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.



Μονάδες (10+15)=25

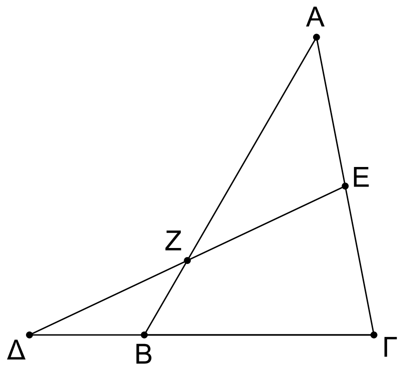
8. **ΘΕΜΑ Β** **10.5** **20667**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ=8$. Στην προέκταση της ΓΒ προς το Β παίρνουμε σημείο Δ, ώστε $ΔΒ=4$ και Ε είναι το μέσο της ΑΓ.

α. Να αποδείξετε ότι $(ΑΒΓ)=4ΑΓ\cdot ημΓ$.

β. Να αποδείξετε ότι $(ΓΔΕ)=3ΑΓ\cdot ημΓ$.

γ. Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΓΔΕ και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, αν το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΕ είναι 12 τ.μ.



Μονάδες (8+9+8)=25

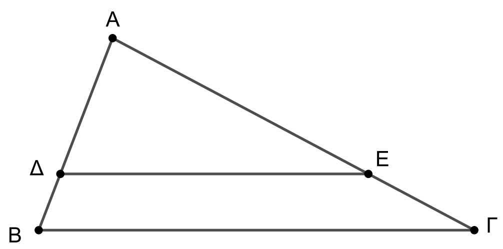
9. **ΘΕΜΑ Β** **10.5** **21120**

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ=\sqrt{2}$. Από σημείο Δ της πλευράς ΑΒ ώστε $ΑΔ=1$, φέρνουμε παράλληλη στη ΒΓ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια και να γράψετε τον λόγο ομοιότητας,

ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.



β. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 2, να βρείτε τα εμβαδά του τριγώνου ΑΔΕ και του τραπεζίου ΒΓΕΔ.

Μονάδες (18+7)=25

10. ΘΕΜΑ Β 10.5 21189

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. $(\text{ΑΒΓ})=(\text{ΑΓΔ})=\frac{1}{2}(\text{ΑΒΓΔ})$.

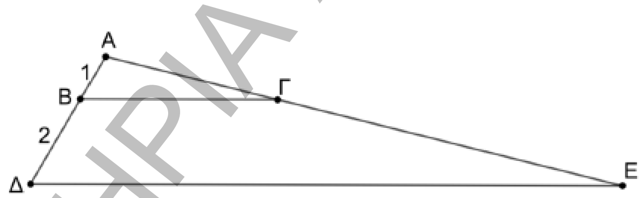
β. $\frac{(\text{ΒΜΝ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{1}{4}$.

γ. $(\text{ΒΜΝ})=\frac{1}{8}(\text{ΑΒΓΔ})$.

Μονάδες (8+12+5)=25

11. ΘΕΜΑ Β 10.5 21304

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 1. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα, ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στη ΒΓ και ΒΔ = 2.



α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{3}$.

β. Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με 8,5, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΔΕ.

γ. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι 15, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες (10+8+7)=25

12. ΘΕΜΑ Β 10.5 21636

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με μήκη πλευρών ΑΒ=6, ΑΓ=8, και ΒΓ=10.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

β. Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{3}{4}$

ii. Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$.

Μονάδες [10+(10+5)]=25

13. ΘΕΜΑ Β 10.5 22070

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει μήκη πλευρών $\alpha = 17$, $\beta = 8$, $\gamma = 15$.

α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

β. Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ:

i. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους λ.

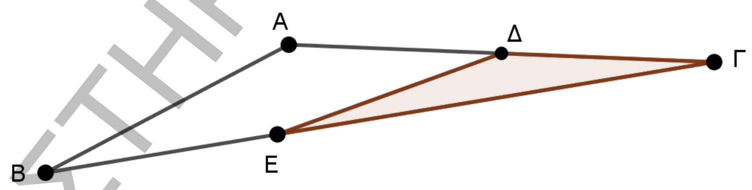
ii. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$

Μονάδες (13+12)=25

14. ΘΕΜΑ Β 10.5 22260

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, με ΑΒ=4, ΑΓ=6 και $\hat{A} = 150^0$.

Αν το σημείο Δ είναι το μέσον της ΑΓ και το Ε είναι σημείο της ΒΓ ώστε $\Gamma E = \frac{2}{3}\Gamma B$, τότε να υπολογίσετε:



α. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Δίνεται $\eta\mu 150^0 = \frac{1}{2}$

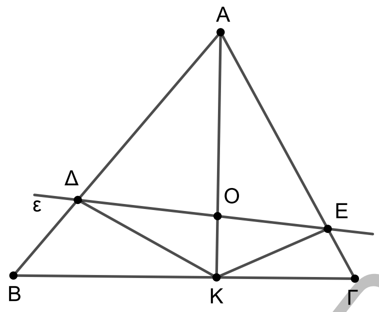
β. το λόγο $\frac{(\Gamma\Delta E)}{(AB\Gamma)}$

γ. το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΕ.

Μονάδες (9+9+7)=25

15. **Θ Ε Μ Α Β** **10.5** **22340**

Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ και το εσωτερικό σημείο $Κ$ της πλευράς $ΒΓ$. Θεωρούμε σημείο $Ο$ του ευθύγραμμου τμήματος $ΑΚ$, ώστε $ΑΟ=\frac{3}{4}ΑΚ$. Από το $Ο$ φέρνουμε ευθεία $ε$ η οποία τέμνει τις πλευρές $ΑΒ$ και $ΑΓ$ στα σημεία $Δ$ και $Ε$ αντίστοιχα.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $(ΑΟΔ)=\frac{3}{4}(ΑΚΔ)$.

ii. $(ΑΟΕ)=\frac{3}{4}(ΑΚΕ)$.

iii. $(ΑΔΕ)=\frac{3}{4}(ΑΔΚΕ)$.

β. Είναι δυνατόν να ισχύει $(ΑΔΕ)=\frac{3}{4}(ΑΒΓ)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες [(7+7+7)+4]=25

10.5 ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ-ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ (23)

1. ΘΕΜΑ Δ 10.5 16114

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο ώστε $ΓΕ = \frac{1}{4}ΓΑ$.

α. Αν Δ σημείο της ΑΒ τέτοιο ώστε $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$:

i. Να αποδείξετε ότι $(ΑΒΓ) = 4(ΑΔΕ)$

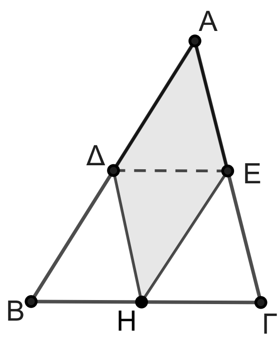
ii. Αν από τα Ε και Γ φέρουμε τις κάθετες ΕΖ και ΓΗ προς την ΑΒ, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{ΕΖ}{ΓΗ}$

β. Θεωρώντας ότι το Ε παραμένει ακίνητο, ενώ το Δ κινείται στο εσωτερικό της ΑΒ, να βρείτε σε ποιο σημείο πρέπει να βρεθεί το Δ ώστε $(ΑΒΓ) = 2(ΑΔΕ)$

Μονάδες [(10+9)+6]=25

2. ΘΕΜΑ Δ 10.5 16582

Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.



α. Έστω ότι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{2}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

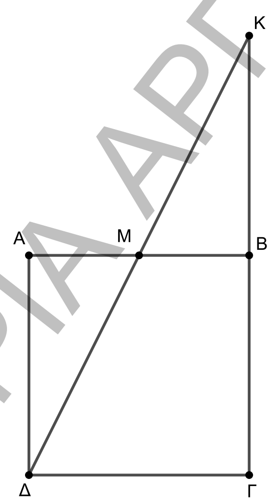
ii. Αν Η είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

β. Αν γνωρίζετε ότι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = λ$, τότε ποια είναι η σχέση των εμβαδών του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ και του τριγώνου ΑΒΓ;

Μονάδες [(7+12)+6]=25

3. **Θ Ε Μ Α Δ** **10.5** **16732**

Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της ΑΒ. Οι ευθείες ΔΜ και ΓΒ τέμνονται στο Κ.



Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΓ είναι όμοια.

β. $(ΜΚΒ) = \frac{1}{4}(ΔΚΓ)$

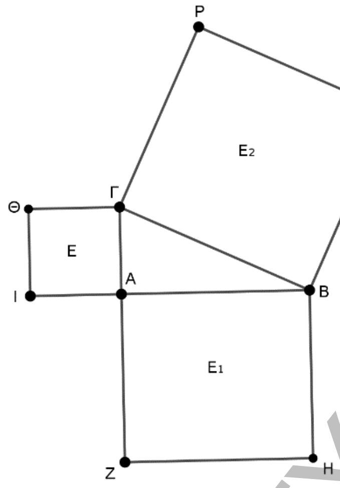
γ. $(ΜΒΓΔ) = \frac{3}{4}(ΑΒΓΔ)$.

δ. Αν $(ΜΒΓΔ) = 75\ m^2$ να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου.

Μονάδες (5+5+10+5)=25

4. **ΘΕΜΑ Δ** **10.5** **17907**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Με πλευρές τις ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ, τα τετράγωνα ΑΒΗΖ, ΑΓΘΙ, ΒΓΡΔ. Έστω Ε, $Ε_1$, $Ε_2$, τα εμβαδά των τετραγώνων ΑΓΘΙ, ΑΒΗΖ, ΒΓΡΔ αντίστοιχα. Αν ισχύουν οι ισότητες $Ε_1 = 4Ε$, $Ε_2 = 5Ε$ τότε:



α. να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Α.,

β. να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΙΖ, ΒΗΔ, ΓΡΘ είναι ίσα,

γ. αν η ΑΓ=1 να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου ΖΗΔΡΘΙ.

Μονάδες (9+9+7)=25

5. **ΘΕΜΑ Δ** **10.5** **17956**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τμήματος ΒΓ. Από το Δ φέρουμε παράλληλες στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Η παράλληλη στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και η παράλληλη στην ΑΓ τέμνει την ΑΒ στο Ε. Θεωρούμε Κ και Λ τα μέσα των ΒΔ και ΔΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. $(ΕΚΔ) = \dfrac{(ΒΕΔ)}{2}$

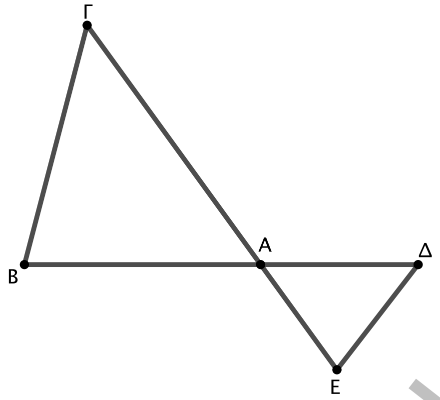
β. $(ΕΖΔ) = \dfrac{(ΑΕΔΖ)}{2}$

γ. Το εμβαδόν του ΚΕΖΛ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου Δ.

Μονάδες (9+9+7)=25

6. **ΘΕΜΑ Δ** **10.5** **18301**

Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Αν είναι $ΑΔ = \frac{1}{2}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{2}{5}ΑΓ$, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$.

β. Αν είναι $ΑΔ = \frac{1}{λ}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{λ}{μ}ΑΓ$, όπου λ, μ είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι ο λόγος $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$ είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ.

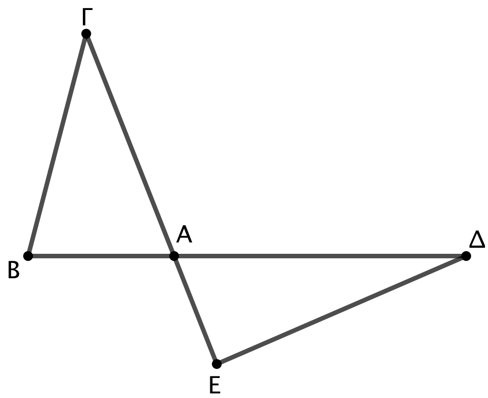
γ. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ για τα οποία είναι $(ΑΔΕ) = (ΑΒΓ)$».

Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (10+10+5)=25

7. **ΘΕΜΑ Δ** **10.5** **18302**

Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Αν είναι $ΑΔ = 2ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{2}ΑΓ$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα.

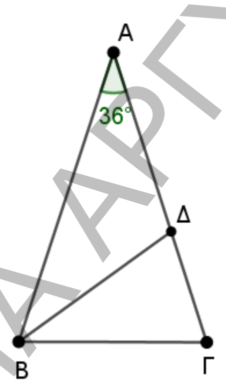
β. Αν προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα είναι $ΑΔ = μ \cdot ΑΒ$ και $ΑΕ = ν \cdot ΑΓ$ αντίστοιχα, όπου μ, ν είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ποια πρέπει να είναι η σχέση των αριθμών μ και ν ώστε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ να είναι ισοδύναμα;

γ. Αν είναι $ΑΓ = \frac{3}{2}ΑΒ$ και $ΑΔ = 2ΑΒ$, να βρείτε τις δυνατές θέσεις του Ε ώστε τα ΑΒΓ και ΑΔΕ να είναι όμοια.

Μονάδες (9+10+6)=25

8. **ΘΕΜΑ Δ** **10.5** **18369**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, $\hat{Α} = 36^o$.



α. Αν η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια.

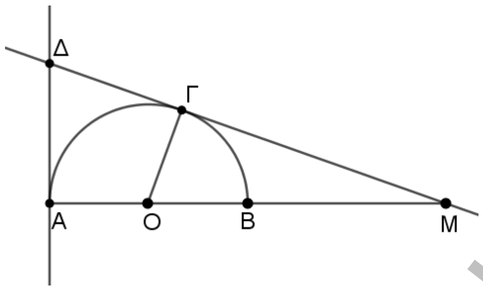
ii. Να γράψετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών.

β. Μετακινούμε το σημείο Δ στο εσωτερικό της ΑΓ. Για ποια θέση του σημείου Δ θα ισχύει $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΔΒΓ)} = 3$.

Μονάδες [(10+6)+9]=25

9. **ΘΕΜΑ Δ** **10.5** **18370**

Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ = 2ρ. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, θεωρούμε σημείο Μ. Από το Μ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ στο ημικύκλιο. Αν η εφαπτόμενη του ημικυκλίου στο σημείο Α τέμνει την προέκταση της ΜΓ στο Δ τότε:



α. Αν ΒΜ = 2ρ να αποδείξετε ότι $ΜΓ = 2\sqrt{2}\,ρ$.

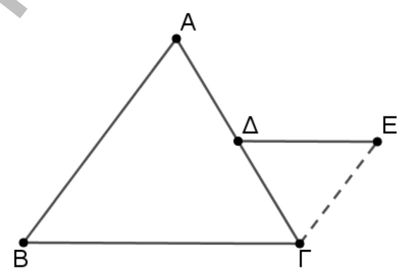
β. **i.** Να αποδείξετε ότι $\frac{ΜΟ}{ΜΓ} = \frac{ΜΔ}{ΜΑ}$.

ii. Αν για το Μ ισχύει ότι ΒΜ = λ·ρ, όπου λ θετικός αριθμός, να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ, τέτοια ώστε (ΑΔΜ) = 9(ΜΟΓ).

Μονάδες [9+(9+7)]=25

10. **ΘΕΜΑ Δ** **10.5** **18371**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ μέσο της ΑΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΕ παράλληλη στην ΒΓ και ίση με το μισό της ΑΒ όπως στο σχήμα.



α. **i.** Να αποδείξετε ότι: $\frac{(ΔΕΓ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΔΕ}{2ΒΓ}$.

ii. Αν το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, τότε να αποδείξετε ότι (ΔΕΓ) = (ΑΒΔ).

β. Σε ένα τεστ που χρειάστηκε από τους μαθητές να βρεθεί ο λόγος $\frac{(ΔΕΓ)}{(ΑΒΓ)}$ ένας μαθητής έγραψε: «Παρατηρώ ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ έχουν $\hat{Δ} = \hat{Γ}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ και δύο πλευρές τους ανάλογες, αφού $\frac{ΔΓ}{ΑΓ}=\frac{ΔΕ}{ΑΒ}=\frac{1}{2}$. Επειδή έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις γωνίες τους $\hat{Δ},\hat{Γ}$ ίσες, τα τρίγωνα θα είναι όμοια.

Επομένως, ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. $\frac{(ΔΕΓ)}{(ΑΒΓ)}=\left(\frac{ΔΕ}{ΑΒ}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$».

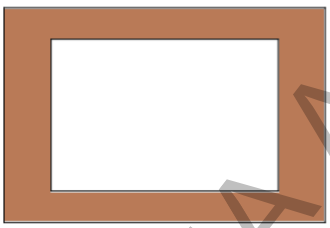
Ο καθηγητής του του είπε ότι έχει κάνει ένα σημαντικό λάθος.

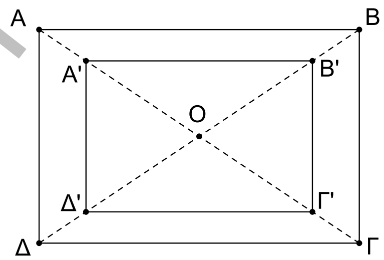
Μπορείτε να εντοπίσετε σε ποιο σημείο ο συλλογισμός του μαθητή είναι λανθασμένος;

Μονάδες [(10+10)+5]=25

11. **ΘΕΜΑ Δ** **10.5** **20678**

Η κορνίζα του παρακάτω σχήματος αποτελείται από δύο όμοια ορθογώνια με παράλληλες πλευρές και κοινό κέντρο Ο. Το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ' έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ.





α. Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας του ορθογωνίου ΑΒΓΔ προς το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ'.

β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι όμοια.

γ. Στην κορνίζα τοποθετούμε μια φωτογραφία που χωράει ακριβώς στο κάδρο, χωρίς να χάνεται κανένα μέρος της. Η διαγώνιος ΑΓ της κορνίζας έχει μήκος 40 cm και $Α\hat{Ο}Β=120^\circ$.

i. Πόσο μήκος έχει η διαγώνιος της φωτογραφίας;

ii. Πόσο είναι το εμβαδόν της φωτογραφίας;

Μονάδες [5+6+(6+8)]=25

12. **ΘΕΜΑ Δ** **10.5** **21194**

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, η ΑΜ είναι διάμεσός του και το σημείο Ε είναι το μέσο της ΑΜ. Από το Ε φέρουμε παράλληλες στις ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνουν τη ΒΓ στα σημεία Δ και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. (ΑΜΒ) = (ΑΜΓ)

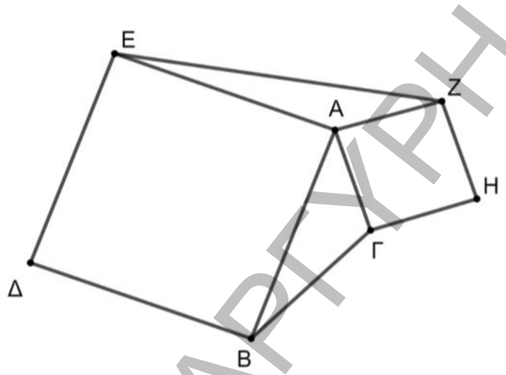
β. $(\text{ΜΕΔ}) = \frac{1}{8} \cdot (\text{ΑΒΓ})$

γ. $(\text{ΑΒΔΕ}) = (\text{ΑΓΖΕ})$

Μονάδες (5+12+8)=25

13. **ΘΕΜΑ Δ** **10.5** **21839**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 6 cm και ΑΓ = 3 cm και $\hat{A}$ οξεία. Εξωτερικά του τριγώνου με πλευρές τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζουμε τα τετράγωνα Α-ΒΔΕ και ΑΓΗΖ και φέρνουμε την ΕΖ , όπως στο παρακάτω σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα.

β. Αν το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου ΕΖΗΓΒΔ είναι (ΕΖΗΓΒΔ)=54cm^2 :

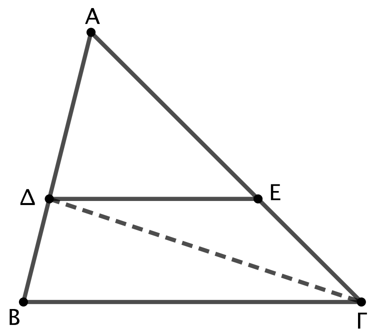
i. Να αποδείξετε ότι η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\hat{A}$ =30^o.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει για πλευρά την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες [10+(10+5)]=25

14. **ΘΕΜΑ Δ** **10.5** **22023**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.



α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.

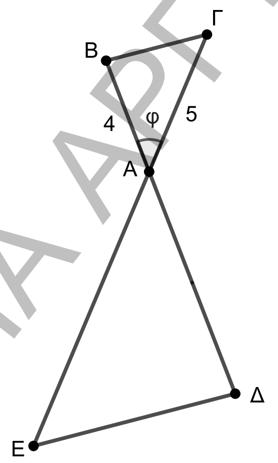
β. Να υπολογίστε τον λόγο των εμβαδών $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$ όταν το σημείο Δ είναι μέσο της ΑΒ.

γ. Να βρείτε τη θέση του σημείου Δ ώστε $\frac{(ΔΕΓ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{2}{9}$.

Μονάδες (10+10+5)=25

15. **ΘΕΜΑ Δ** **10.5** **22141**

Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ έχει τα άκρα του Β και Γ στις προεκτάσεις των πλευρών ΔΑ και ΕΑ, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΔΕ, έτσι ώστε να είναι παράλληλο στην πλευρά ΔΕ. Επίσης δίνονται τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, $ΑΒ=4$ και $ΑΓ=5$. Έστω ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΔΕ)}=\frac{1}{4}$.



α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με λόγο $\frac{1}{2}$.

β. Αν $B\hat{A}Γ=φ$, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν (ΑΔΕ) του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με $40ημφ$.

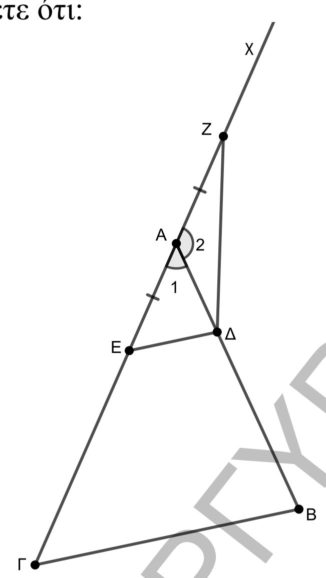
γ. Να βρείτε σημείο Ζ εσωτερικό της πλευράς ΑΔ, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΖ που σχηματίζεται να είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΔΕ.

Μονάδες (10+7+8)=25

16. ΘΕΜΑ Δ **10.5** **22148**

Έστω Ε σημείο στην πλευρά ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του ΑΒΓ η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ και παίρνουμε σημείο Ζ στην προέκταση Αχ της πλευράς ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ ώστε να είναι ΑΖ = ΑΕ, όπως στο σχήμα.

α. Έστω $ΑΓ = 3ΑΕ$. Να αποδείξετε ότι:



i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

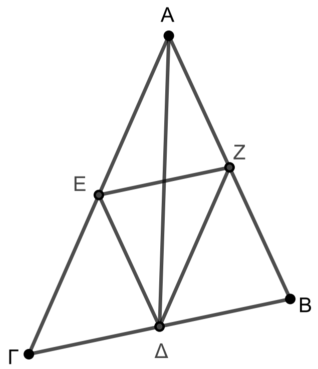
ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ είναι ίσο με τα $\frac{2}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

β. Αν το εμβαδόν του ΔΕΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του ΑΒΓ, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$.

Μονάδες [(7+10)+8]=25

17. ΘΕΜΑ Δ **10.5** **22150**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα.



α. Αν επιπλέον το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ ενώνει την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ και το μέσο Δ της απέναντι πλευράς ΒΓ, όπως στο σχήμα, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$.

ii. Για το εμβαδόν (ΑΕΔΖ) του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ ισχύει ότι

$$(\text{ΑΕΔΖ}) = (\text{ΑΒΓ}) - 2(\text{ΕΔΓ}).$$

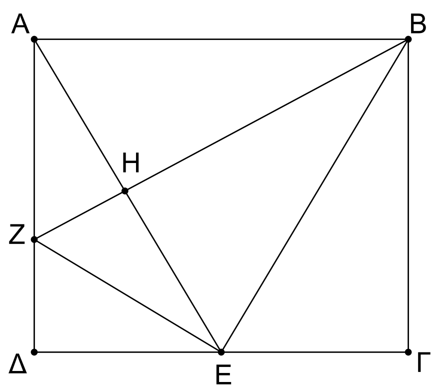
iii. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

β. Αν το σημείο Δ είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, τότε ισχύει ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ;

Μονάδες (18+7)=25

18. ΘΕΜΑ Δ 10.5 22243

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ζ στην πλευρά ΑΔ, ώστε $\text{ΑΖ} = \frac{3}{4}\text{ΑΒ}$.



α. Να αποδείξετε ότι $\text{ΒΖ} = \frac{5}{4}\text{ΑΒ}$.

β. Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, Ε το μέσο της ΓΔ και Η είναι το σημείο τομής των ΑΕ, ΒΖ, να αποδείξετε ότι:

i. $\text{ΒΕ}^2 = \frac{5}{4}\text{ΑΒ}^2$ και $\text{ΖΕ}^2 = \frac{5}{16}\text{ΑΒ}^2$,

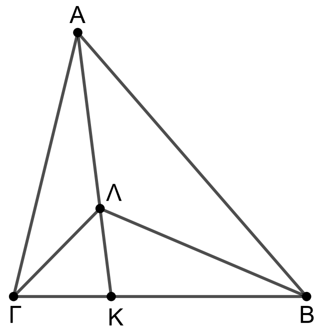
ii. το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο.

γ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ είναι όμοια και να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών τους.

Μονάδες [6+(6+5)+8]=25

19. **ΘΕΜΑ Δ** **10.5** **22375**

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Στην πλευρά $ΒΓ$ παίρνουμε σημείο $Κ$ ώστε $ΚΒ = 2ΚΓ$ και στο ευθύγραμμο τμήμα $ΑΚ$ παίρνουμε σημείο $Λ$ ώστε $ΛΑ = 2ΛΚ$. Έστω $Ε_1$, $Ε_2$, $Ε_3$ και $Ε_4$ τα εμβαδά των τριγώνων $ΑΛΓ$, $ΓΛΚ$, $ΒΛΚ$ και $ΑΛΒ$ αντίστοιχα.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\dfrac{Ε_1}{Ε_2} = 2$ και $\dfrac{Ε_4}{Ε_3} = 2$.

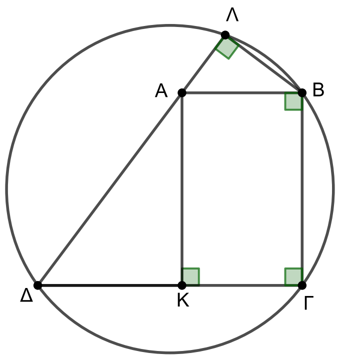
ii. $Ε_1 = Ε_3$.

β. Αν $Ε_1 = 10$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$.

Μονάδες [(10+8)+7]=25

20. **ΘΕΜΑ Δ** **10.5** **22380**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $\hat{Β} = \hat{Γ} = 90°$ και $ΒΓ = 16$, $ΓΔ = 22$ και $ΑΔ = 20$. Έστω $Κ$ η προβολή του σημείου $Α$ πάνω στην ευθεία $ΓΔ$ και $Λ$ η προβολή του σημείου $Β$ πάνω στη ευθεία $ΑΔ$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $ΚΔ = 12$,

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΚΔ$ είναι 96.

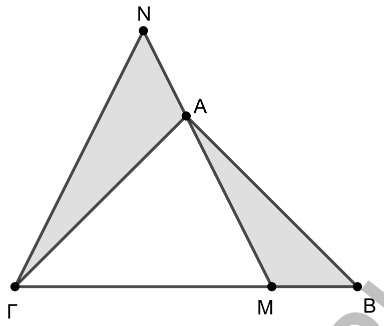
β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΚΔ$ και $ΒΛΑ$ είναι όμοια και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $ΒΛΑ$.

γ. Να βρείτε το μήκος της διαμέτρου του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου $ΒΓΔΛ$.

Μονάδες [(6+6)+8+5]=25

21. ΘΕΜΑ Δ 10.5 22404

Το σημείο Μ διαιρεί εσωτερικά την πλευρά ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ σε λόγο $\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΜΓ}}$ και το σημείο Ν διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ σε λόγο $\frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΝΜ}}$.



α. Έστω $\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΜΓ}}=\frac{1}{3}$ και $\frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΝΜ}}=\frac{1}{4}$. Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{(\text{ΑΜΒ})}{(\text{ΑΜΓ})}=\frac{1}{3}$.

ii. $\frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΑΜ}}=\frac{1}{3}$.

iii. $(\text{ΑΜΒ})=(\text{ΑΝΓ})$.

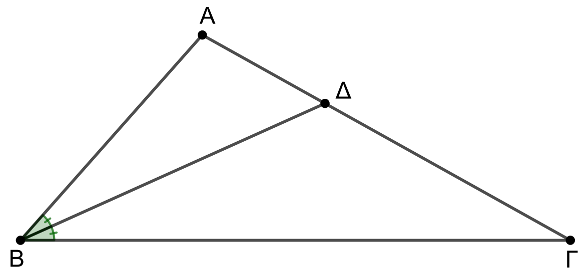
β. Έστω $\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΜΓ}}=1$ και $(\text{ΑΜΒ})=(\text{ΑΝΓ})$.

Να βρείτε τον λόγο $\frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΝΜ}}$ στον οποίο το σημείο Ν διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ.

Μονάδες [(7+6+6)+6]=25

22. ΘΕΜΑ Δ 10.5 22406

Στο παρακάτω σχήμα η ΒΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και επίσης είναι $\text{ΒΓ}=2\text{ΑΒ}$.



α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $ΔΒΓ$ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου $ΑΒΔ$.

β. Να χωρίσετε το τρίγωνο $ΑΒΓ$ σε τρία ισοδύναμα τρίγωνα.

γ. Έστω ότι $ΑΒ=12$ και $ημΒ=\frac{3}{4}$.

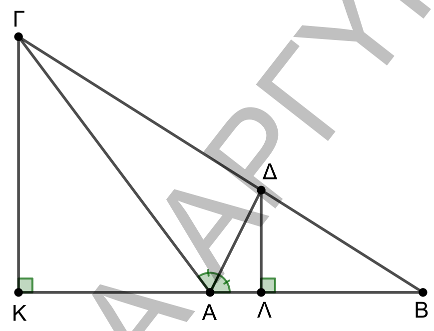
i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι 108.

ii. Να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων $ΔΒΓ$ και $ΑΒΔ$.

Μονάδες [6+6+(7+6)]=25

23. **ΘΕΜΑ Δ** **10.5** **22407**

Στο παρακάτω σχήμα η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος του τριγώνου $ΑΒΓ$ και η $ΑΚ$ είναι η προβολή της πλευράς $ΑΓ$ πάνω στην ευθεία $ΑΒ$. Δίνονται $ΑΒ=10$, $ΑΓ=15$ και $ΑΚ=9$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $ΓΚ=12$ και $(ΑΒΓ)=60$.

ii. $(ΑΔΒ)=24$ και $(ΑΔΓ)=36$.

β. Έστω $Λ$ η προβολή του σημείου $Δ$ πάνω στην ευθεία $ΑΒ$.

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{ΔΛ}{ΓΚ}=\frac{2}{5}$.

ii. Να βρείτε τον λόγο $\frac{ΛΒ}{ΛΚ}$ στον οποίο το σημείο $Λ$ διαιρεί εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα $ΒΚ$.

Μονάδες [(8+10)+(3+4)]=25

11.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ (1)

1. ΘΕΜΑ Β 11.2 20638

Δύο κανονικά πολύγωνα έχουν πλήθος πλευρών ν_1 και ν_2, κεντρικές γωνίες ω_1 και ω_2 και γωνίες φ_1 και φ_2, αντίστοιχα. Αν ο λόγος του ν_1 προς το ν_2 είναι ίσος με $\frac{1}{2}$, τότε:

α. Να υπολογίσετε τον λόγο των αντίστοιχων κεντρικών γωνιών ω_1 και ω_2 αυτών των πολυγώνων.

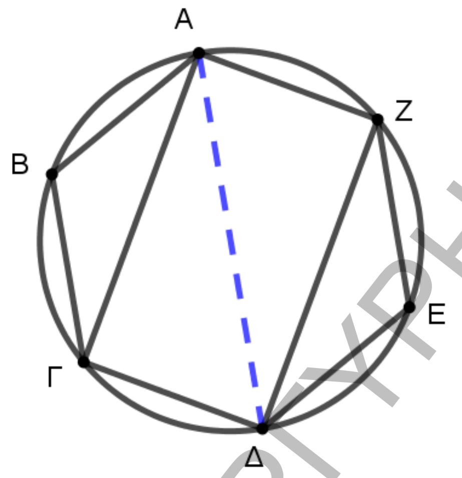
β. Αν το πλήθος των πλευρών ενός από τα δύο κανονικά πολύγωνα είναι $\nu_1 = 5$, να υπολογίσετε τον λόγο των γωνιών των τους $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$.

Μονάδες (10+15)=25

11.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ (2)

1. ΘΕΜΑ Δ 11.7 21841

Έστω ΑΒΓΔΕΖ κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R).



α. Να αποδείξετε ότι:

i. Η διαγώνιος ΑΔ του εξαγώνου είναι διάμετρος του κύκλου.

ii. Οι γωνίες $\Gamma\widehat{A}\Delta$ και $A\widehat{\Delta}Z$ είναι ίσες.

iii. Οι διαγώνιοί ΑΓ και ΖΔ του εξαγώνου είναι παράλληλες.

iv. Το τετράπλευρο ΑΓΔΖ είναι ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδόν του συναρτήσει της ακτίνας R του κύκλου.

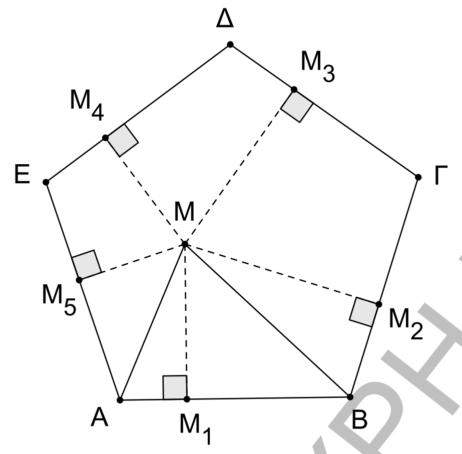
β. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι σε κάθε κανονικό πολύγωνο με περισσότερες από πέντε πλευρές υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαγώνιοι που να είναι παράλληλες.

Συμφωνείτε με την άποψη αυτού του μαθητή; Να αιτιολογήστε τον ισχυρισμό σας.

Μονάδες [(6+3+3+7)+6]=25

2. **ΘΕΜΑ Δ** **11.7** **22099**

Δίνεται κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και σημείο Μ στο εσωτερικό του. Έστω M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 οι προβολές του σημείου Μ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ αντίστοιχα.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $(ΑΒΜ)=\frac{1}{2}\cdot\lambda_5\cdot ΜΜ_1$, όπου λ_5 είναι η πλευρά του κανονικού πενταγώνου.

ii. $(ΑΒΓΔΕ)=\frac{1}{2}\cdot\lambda_5\cdot(ΜΜ_1+ΜΜ_2+ΜΜ_3+ΜΜ_4+ΜΜ_5)$.

iii. $ΜΜ_1+ΜΜ_2+ΜΜ_3+ΜΜ_4+ΜΜ_5=5\alpha_5$, όπου α_5 είναι το απόστημα του κανονικού πενταγώνου.

β. Ένας μαθητής διατύπωσε τον ισχυρισμό: «Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός κανονικού ν-γώνου $A_1A_2\ldots A_\nu$ και $M_1, M_2,\ldots, M_\nu$ είναι οι προβολές του σημείου Μ στις πλευρές A_1A_2, A_2A_3,…,$A_\nu A_1$ αντίστοιχα, τότε $ΜΜ_1+ΜΜ_2+\ldots+ΜΜ_\nu=\nu\alpha_\nu$, όπου α_ν είναι το απόστημα του κανονικού ν-γώνου».

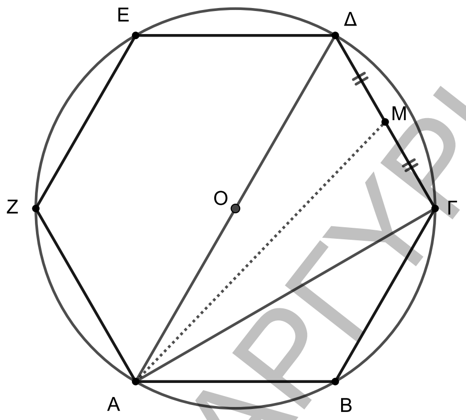
Να αποδείξετε ότι ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

Μονάδες [(6+7+7)+5]=25

11.3 ΕΓΓΡΑΦΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΣΕ ΚΥΚΛΟ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥΣ (2)

1. **Θ Ε Μ Α Β** **11.3** **16818**

Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ και ΑΜ, όπου το σημείο Μ είναι το μέσο του ΓΔ.



Να αποδείξετε ότι:

α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο.

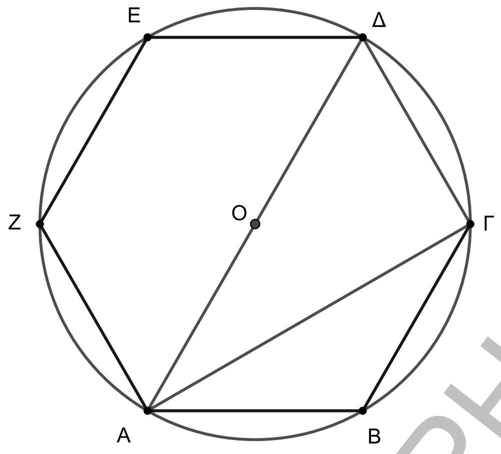
β. $A\Gamma = R \cdot \sqrt{3}$

γ. $(AM\Gamma) = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

Μονάδες (7+9+9)=25

2. **ΘΕΜΑ Β** **11.3** **16820**

Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρουμε το τμήμα ΑΓ.



Να αποδείξετε ότι:

α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο.

β. $ΑΓ = R \cdot \sqrt{3}$.

γ. $(ΑΒΓΔΕΖ) = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

Μονάδες (7+9+9)=25

11.3 ΕΓΓΡΑΦΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΣΕ ΚΥΚΛΟ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥΣ (1)

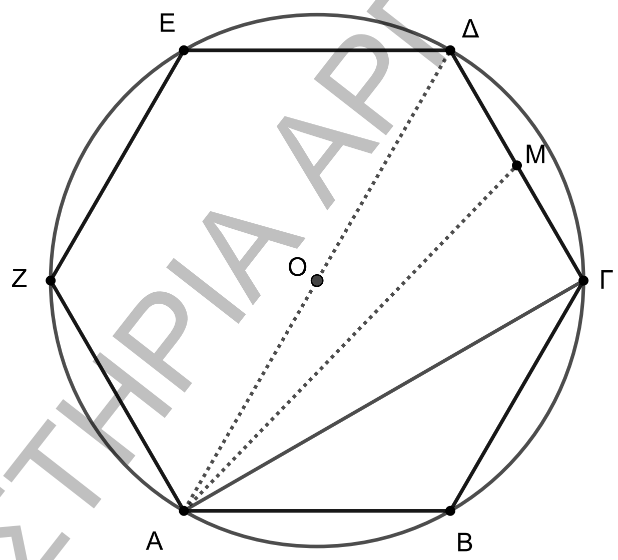
1. **ΘΕΜΑ Δ** **11.3** **17600**

Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ, ΑΔ και ΑΜ, όπου το σημείο Μ είναι το μέσο του ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

α. $(ΑΒΓΔΕΖ) = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

β. $(ΑΜΓ) = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

γ. $(ΑΜΔΕΖ) = R^2\sqrt{3}$

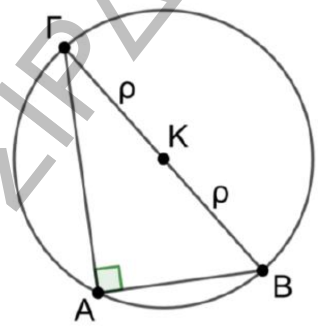


Μονάδες (7+6+12)=25

11.4 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ (1)

1. ΘΕΜΑ Β 11.4 21298

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A}$ ορθή γωνία και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου, που έχει κέντρο το Κ και ακτίνα ρ. Επίσης δίνεται ότι το μήκος του κύκλου ισούται με 10π.



α. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ του κύκλου έχει μήκος 5.

β. Αν η χορδή ΑΒ έχει μήκος 6 να υπολογίσετε:

i. το μήκος της χορδής ΑΓ του κύκλου,

ii. το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες [8+(10+7)]=25

11.4 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ (1)

1. **Θ Ε Μ Α Δ** **11.4** **16928**

Δίνεται κύκλος με μήκος 10.

α. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος P_3 ενός ισοπλεύρου τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον παραπάνω κύκλο είναι ίση με $\frac{15\cdot\sqrt{3}}{\pi}$.

β. Να υπολογίσετε την περίμετρο P_6 κανονικού εξαγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο.

γ. Έστω ένα κανονικό δωδεκάγωνο με περίμετρο P_{12} και ένα κανονικό εικοσιτετράγωνο με περίμετρο P_{24} που είναι εγγεγραμμένα στον παραπάνω κύκλο.

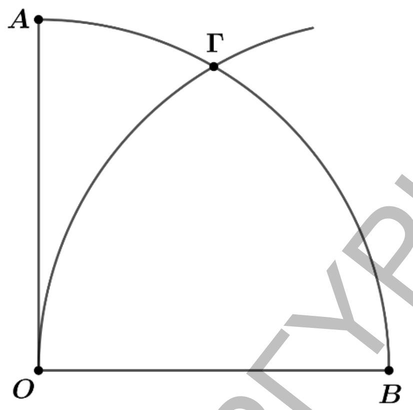
Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{30}{\pi}$, $\frac{15\sqrt{3}}{\pi}$, P_{12} ,P_{24} και 10.

Μονάδες (10+8+7)=25

11.5 ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ (4)

1. **Θ Ε Μ Α Β** **11.5** **21192**

Δίνεται τεταρτοκύκλιο $O\overset{\frown}{AB}$ κέντρου Ο και ακτίνας R. Αν ο κύκλος κέντρου Β και ακτίνας R τέμνει το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ στο σημείο Γ όπως στο σχήμα, τότε:



α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο και το μήκος $\ell_{B\Gamma}$ του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$ είναι $\ell_{\overset{\frown}{B\Gamma}} = \dfrac{\pi \cdot R}{3}$.

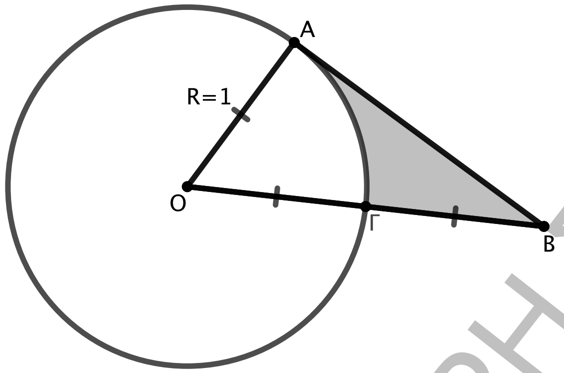
β. Να αποδείξετε ότι το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$ είναι $\ell_{\overset{\frown}{A\Gamma}} = \dfrac{\pi \cdot R}{6}$

γ. Να υπολογίσετε την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου ΟΑΓ που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ και τα τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma}$ και $\overset{\frown}{O\Gamma}$.

Μονάδες (8+8+9)=25

2. **ΘΕΜΑ Β** **11.5** **22046**

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα $R=1$. Θεωρούμε ακτίνα ΟΓ την οποία προεκτείνουμε κατά τμήμα $ΓΒ=ΟΓ=R$ και το εφαπτόμενο τμήμα ΒΑ, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι $Ο\hat{Β}Α=30^{\circ}$.

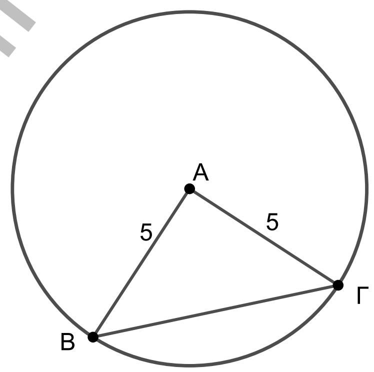
β. Να αποδείξετε ότι $ΑΒ=\sqrt{3}$.

γ. Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες (5+10+10)=25

3. **ΘΕΜΑ Β** **11.5** **22133**

Η $Β\hat{Α}Γ$ είναι επίκεντρη γωνία σε κύκλο (Α, 5), όπως στο σχήμα. Δίνεται ότι $ΒΓ=5\sqrt{2}$.



α. Να αποδείξετε ότι η χορδή ΒΓ είναι ίση με την πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $R=5$.

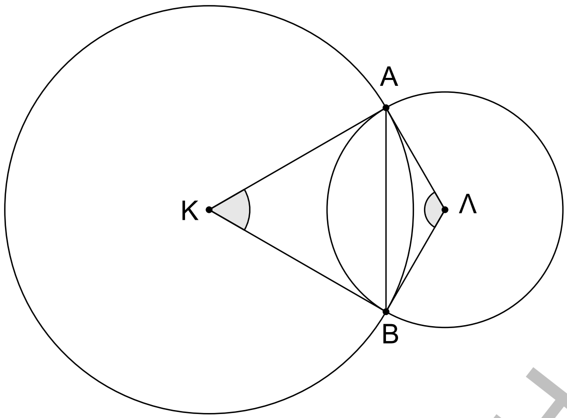
β. Να αποδείξετε ότι $Β\hat{Α}Γ=90^{o}$.

γ. Αν ℓ είναι το μήκος του κυρτού τόξου $\overset{\frown}{ΒΓ}$ να αποδείξετε ότι $\ell=2{,}5\pi$.

Μονάδες (10+8+7)=25

4. ΘΕΜΑ Β 11.5 22422

Δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) τέμνονται στα σημεία Α, Β, ώστε $\text{Α}\widehat{\text{Κ}}\text{Β} = 60^\circ$ και $\text{Α}\widehat{\Lambda}\text{Β} = 120^\circ$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. ΑΒ = R.

ii. Η κοινή χορδή ΑΒ είναι πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Λ, ρ) και ισχύει $R = \rho\sqrt{3}$.

β. Αν ℓ_1 είναι το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$ του κύκλου (Κ, R) που είναι μικρότερο του ημικυκλίου και ℓ_2 είναι το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$ του κύκλου (Λ, ρ) που είναι μικρότερο του ημικυκλίου,

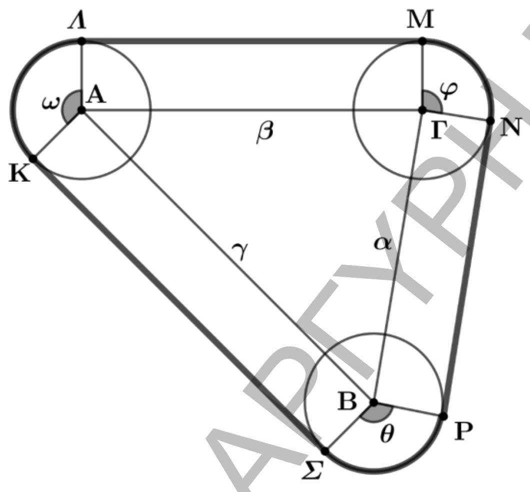
να αποδείξετε ότι $\dfrac{\ell_1}{\ell_2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Μονάδες (5+7+13)=25

11.5 ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ (1)

1. **ΘΕΜΑ Δ** **11.5** **21193**

Στο παρακάτω σχήμα τρεις κυκλικοί τροχοί με ίσες ακτίνες μήκους R, έχουν τα κέντρα τους στις κορυφές τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές α, β και γ. Ένας τεντωμένος ιμάντας μήκους L συνδέει τους τρεις ίσους τροχούς όπως στο σχήμα και εφάπτεται σε αυτούς στα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν, Ρ, Σ.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΛΜΓ είναι ορθογώνιο.

ii. Η κυρτή γωνία $K\widehat{A}\Lambda$ και η γωνία $\widehat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι παραπληρωματικές.

β. Αν $K\widehat{A}\Lambda = \widehat{\omega}$, $\Sigma\widehat{B}P = \widehat{\theta}$, $M\widehat{\Gamma}N = \widehat{\varphi}$, να αποδείξετε ότι $\widehat{\omega} + \widehat{\theta} + \widehat{\varphi} = 360^o$.

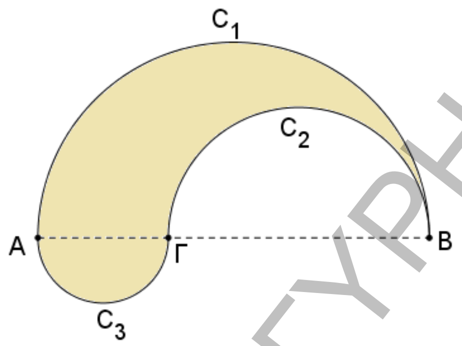
γ. Να αποδείξετε ότι το μήκος του ιμάντα L είναι $L = 2(\tau + \pi R)$ όπου τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες [(4+4)+8+9]=25

11.6 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ (7)

1. ΘΕΜΑ Β 11.6 20672

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $AB=6$, και σημείο του Γ, ώστε $BΓ=4$. Στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΒ σχεδιάζουμε τα ημικύκλια C_1 και C_2 με διαμέτρους ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα και στο άλλο ημιεπίπεδο σχεδιάζουμε ημικύκλιο C_3 με διάμετρο ΑΓ.



α. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των ημικυκλίων C_1, C_2 και C_3 είναι $\frac{9\pi}{2}$, 2π και $\frac{\pi}{2}$ αντίστοιχα.

β. Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.

Μονάδες (15+10)=25

2. ΘΕΜΑ Β 11.6 21075

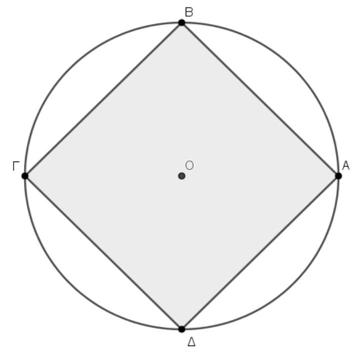
Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο, ακτίνα ρ και εμβαδόν ίσο με 16π.

α. Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του κύκλου.

β. Αν η ακτίνα ρ του κύκλου είναι 4 να υπολογίσετε:

i. Την πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου στον κύκλο.

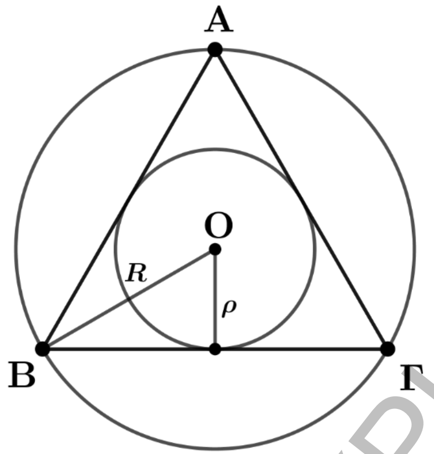
ii. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο τετράγωνο και στον κύκλο.



Μονάδες [7+(9+9)]=25

3. ΘΕΜΑ Β 11.6 21181

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και περιγεγραμμένο στον κύκλο (O, ρ) όπου ρ το απόστημα του ισοπλεύρου τριγώνου. Αν το απόστημα του ισοπλεύρου τριγώνου είναι 5



να υπολογίσετε:

α. Την ακτίνα R του κύκλου.

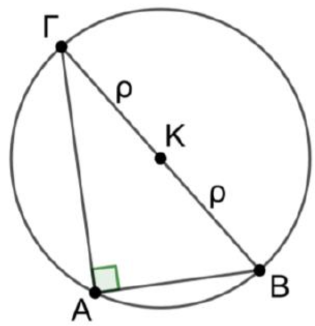
β. Αν R = 10 τότε να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδό του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

ii. Το εμβαδό του κυκλικού δακτυλίου που σχηματίζουν ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος στο τρίγωνο ΑΒΓ κύκλος.

Μονάδες [4+(9+12)]=25

4. ΘΕΜΑ Β 11.4 21298



Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A}$ ορθή γωνία και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου, που έχει κέντρο το Κ και ακτίνα ρ. Επίσης δίνεται ότι το μήκος του κύκλου ισούται με 10π.

α. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ του κύκλου έχει μήκος 5.

β. Αν η χορδή ΑΒ έχει μήκος 6 να υπολογίσετε:

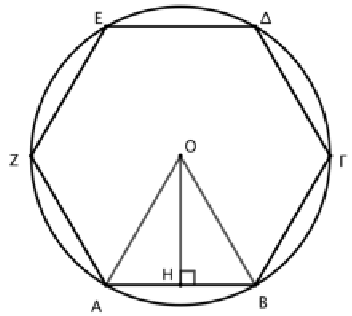
i. το μήκος της χορδής ΑΓ του κύκλου,

ii. το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες [8+(10+7)]=25

5. ΘΕΜΑ Β 11.6 21300

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Κ, ρ), όπως στο παρακάτω σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΚΔ είναι ορθογώνιο.

β. Αν επιπλέον το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΔ είναι 4:

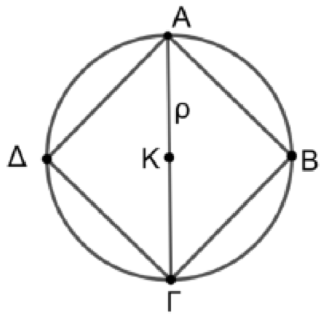
i. Να αποδείξετε ότι $\rho = \sqrt{8}$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου (Κ, ρ).

Μονάδες [8+(7+10)]=25

6. ΘΕΜΑ Β 11.6 21301

Σε κύκλο (Κ, ρ) εμβαδού Ε = 4π είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο Α-ΒΓΔ, όπως στο διπλανό σχήμα.



Να υπολογίσετε:

α. την ακτίνα ρ του κύκλου (Κ, ρ).,

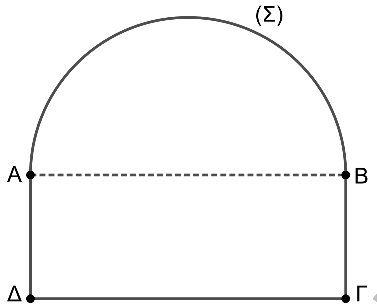
β. το μήκος της διαμέτρου ΑΓ του κύκλου (Κ, ρ) και της πλευράς ΑΒ του τετραγώνου ΑΒΓΔ,

γ. το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Μονάδες (7+10+8)=25

7. **Θ Ε Μ Α Β** **11.6** **22310**

Το παρακάτω σχήμα (Σ) αποτελείται από το ημικύκλιο διαμέτρου AB και το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Το ημικύκλιο και το ορθογώνιο έχουν ίσα εμβαδά. Δίνεται $AB = 8$ cm .



α. Να αποδείξετε ότι:

i. το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι $E = 8\pi \text{ cm}^2$,

ii. το μήκος του ημικυκλίου είναι $L = 4\pi$ cm .

β. Να βρείτε:

i. το μήκος της πλευράς $A\Delta$ του ορθογωνίου,

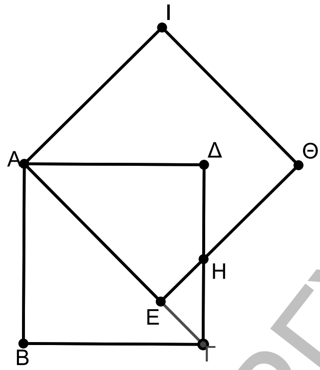
ii. την περίμετρο του σχήματος (Σ)

Μονάδες [(8+8)+(5+4)]=25

11.6 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ (7)

1. **Θ Ε Μ Α Δ** **11.6** **18355**

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Στην διαγώνιό του ΑΓ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $ΕΓ = \frac{1}{4}$ ΑΓ. Με πλευρά την ΑΕ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΙΘΕ όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω Η το σημείο τομής της ΔΓ με την ΕΘ.



α. i. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(ΑΙΘΕ)}{(ΑΒΓΔ)}$

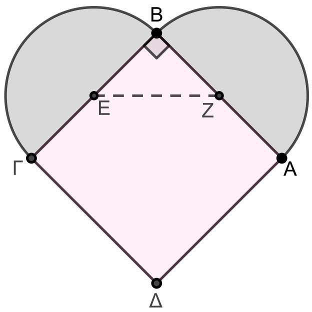
ii. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(ΕΓΗ)}{(ΑΓΔ)}$.

β. Κατασκευάζουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του ΑΙΘΕ.
Να εξετάσετε αν ο λόγος του εμβαδού του κύκλου αυτού προς το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ εξαρτάται από το μήκος α της πλευράς του ΑΒΓΔ.

Μονάδες [(8+10)+7]=25

2. **Θ Ε Μ Α Δ** **11.6** **21103**

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2α και με διαμέτρους τις ΒΓ και ΒΑ φτιάχνουμε εξωτερικά του τετραγώνου ημικύκλια, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι το μήκος κάθε ημικυκλίου ισούται με π·α.

β. **i.** Αν η περίμετρος της καρδιάς είναι 2π+4, να υπολογίσετε το α.

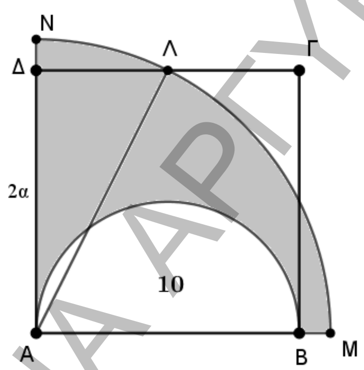
ii. Αν α = 1 να βρείτε το μήκος του τμήματος που ενώνει τα κέντρα των δύο ημικυκλίων.

γ. Αν (τ) είναι το άθροισμα των εμβαδών των δυο ημικυκλίων να συγκρίνετε τον λόγο $\frac{(\tau)}{(\text{ΑΒΓΔ})}$ με την μονάδα. Να αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες [7+(6+6)+6]=25

3. **Θ Ε Μ Α Δ** **11.6** **21197**

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 2α και Λ το μέσο της πλευράς του ΓΔ. Έστω ότι το ημικύκλιο, που σχεδιάζεται στο εσωτερικό του τετραγώνου με διάμετρο την πλευρά του ΑΒ, έχει εμβαδόν 10. Τότε:



α. Να αποδείξετε ότι:

i. Το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{80}{\pi}$.

ii. $\text{ΑΛ}^2 = \frac{100}{\pi}$.

β. Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΛ κατασκευάζουμε τεταρτοκύκλιο $\text{Α}\overset{\frown}{\text{ΜΝ}}$, και έστω Μ, Ν είναι τα σημεία τομής του με τις προεκτάσεις των πλευρών του τετραγώνου ΑΒ, ΑΔ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

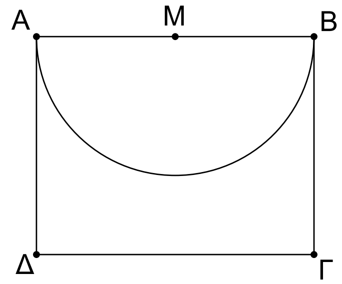
i. Το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου ΑΒΜΝΑ.

ii. Τον λόγο του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου $\text{Α}\overset{\frown}{\text{ΜΝ}}$ προς το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Μονάδες [(6+6)+(8+5)]=25

4. ΘΕΜΑ Δ 11.6 22098

Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $AB = 4\alpha$ και $A\Delta = \pi\alpha$. Στο εσωτερικό του ορθογωνίου σχεδιάστηκε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ.



α. Να αποδείξετε ότι το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

β. Αν η διαγώνιος ΒΔ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Ε και Μ είναι το μέσο της ΑΒ,

i. να αποδείξετε ότι $AB^2 = B\Delta \cdot BE$ και $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta E$.

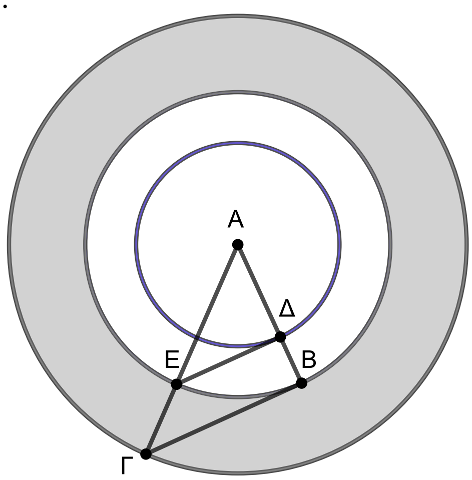
ii. να αποδείξετε ότι $BE = \dfrac{16\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}$ και $\Delta E = \dfrac{\pi^2\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}$,

iii. να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu B\hat{M}E$.

Μονάδες [8+(6+6+5)]=25

5. ΘΕΜΑ Δ 11.6 22151

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε σημείο Δ και στην πλευρά ΑΓ σημείο Ε ώστε ΑΕ = ΑΒ. Με κέντρο το σημείο Α και ακτίνες ρ = ΑΔ , r = AB = AE και R = ΑΓ γράφουμε τρεις ομόκεντρους κύκλους (Α,ρ) , (Α,r) και (Α,R) όπως στο σχήμα. Έστω $E_{E\Gamma}$ το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, r) και (Α, R) , $E_{\Delta B}$ το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, ρ) και (Α, r), E_{AB} το εμβαδόν του κύκλου (Α, r) και $E_{A\Delta}$ το εμβαδόν του κύκλου (Α, ρ).



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\dfrac{E_{ΕΓ}}{E_{ΑΕ}} = \dfrac{R^2 - r^2}{r^2}$

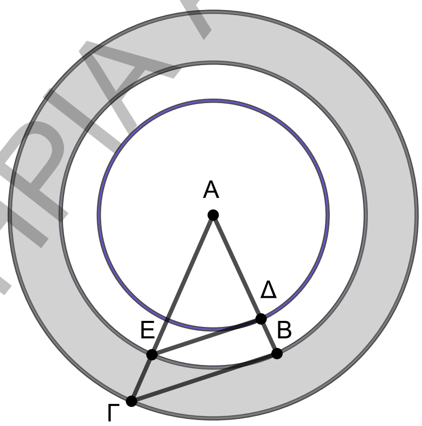
ii. $\dfrac{E_{ΔΒ}}{E_{ΑΔ}} = \dfrac{r^2 - \rho^2}{\rho^2}$

β. Αν επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{E_{ΕΓ}}{E_{ΑΕ}} = \dfrac{E_{ΔΒ}}{E_{ΑΔ}}$

Μονάδες [(10+7)+8]=25

6. **ΘΕΜΑ Δ** **11.6** **22154**

Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ, που η κοινή κορυφή τους Α βρίσκεται στο κέντρο τριών ομόκεντρων κύκλων (Α, ρ_1), (Α, ρ_2) και (Α, ρ_3), η κορυφή Γ βρίσκεται στον κύκλο (Α, ρ_3), οι κορυφές Β και Ε στον κύκλο (Α, ρ_2) και η κορυφή Δ στον κύκλο (Α, ρ_1), όπως στο σχήμα, με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Ονομάζουμε $E_{ΕΓ}$ το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, ρ_2) και (Α, ρ_3), E_1 το εμβαδόν του κύκλου (Α, ρ_1), E_2 το εμβαδόν του κύκλου (Α, ρ_2) και E_3 το εμβαδόν του κύκλου (Α, ρ_3).



α. Αν $\dfrac{E_{ΕΓ}}{E_2} = \dfrac{7}{9}$, να αποδείξετε ότι:

i. $\dfrac{\rho_2}{\rho_3} = \dfrac{3}{4}$.

ii. $\dfrac{E_2}{E_3} = \dfrac{9}{16}$.

iii. Αν επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες να αποδείξετε ότι $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{3}{4}$.

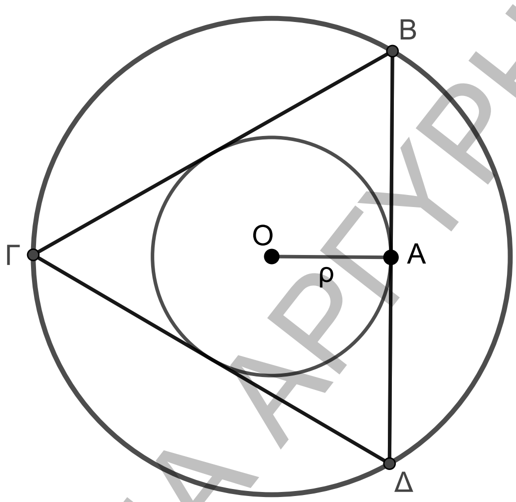
β. Αν $E_{ΕΓ} = E_2$ και επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι

$E_{ΔΒ} = E_1$, όπου $E_{ΔΒ}$ είναι το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, $ρ_1$) και (Α, $ρ_2$).

Μονάδες [(7+5+8)+5]=25

7. **ΘΕΜΑ Δ** **11.6** **22157**

Δίνονται οι ομόκεντροι κύκλοι $(O,ρ)$ και (O,R) με $R>ρ$. Οι κορυφές του ισοπλεύρου τριγώνου ΒΓΔ είναι σημεία του κύκλου (O,R), ενώ οι πλευρές του εφάπτονται του κύκλου $(O,ρ)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Επίσης η ΒΔ εφάπτεται του κύκλου $(O,ρ)$ στο Α.



α. Αν το εμβαδόν Ε του κύκλου $(O,\ ρ)$ είναι ίσο με $36π$, να αποδείξετε ότι:

i. $ρ = 6$.

ii. $R = 12$

iii. Το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ΒΓΔ είναι ίσο με $108\sqrt{3}$.

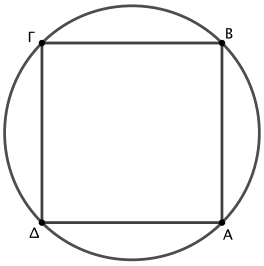
β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν (ΒΓΔ) του ισόπλευρου τριγώνου ΒΓΔ είναι ίσο με $\frac{3\sqrt{3}}{π}\cdot E$, όπου Ε είναι το εμβαδόν του κύκλου (Ο, ρ).

Μονάδες [(8+6+7)+4]=25

11.7 ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ (7)

1. **ΘΕΜΑ Β** **11.7** **18097**

Τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Αν το εμβαδόν του τετραγώνου είναι ίσο με 4, τότε:

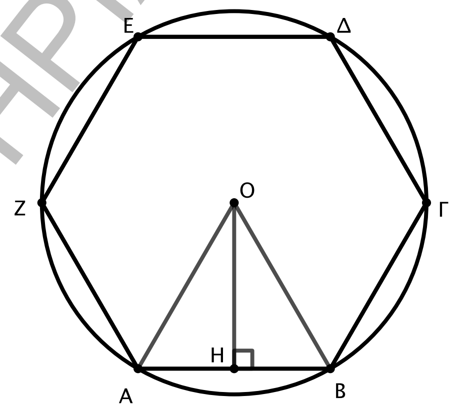
α. Να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου.

β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του τετραγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι ίσο με $2\pi - 4$.

Μονάδες (13+12)=25

2. **ΘΕΜΑ Β** **11.7** **18099**

Κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $R = 2\sqrt{3}$ όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Να υπολογίσετε την πλευρά και το απόστημα του κανονικού εξαγώνου.

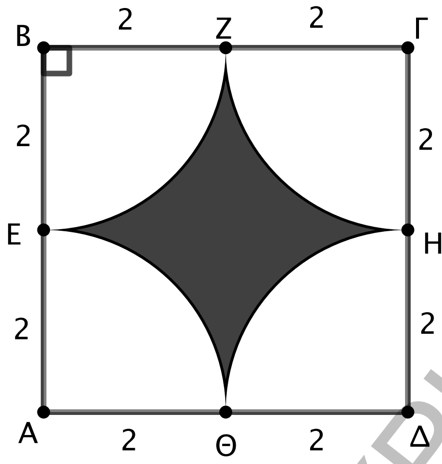
β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου.

γ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του κανονικού εξαγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του ισούται με $E = 6(2\pi - 3\sqrt{3})$.

Μονάδες (10+8+7)=25

3. ΘΕΜΑ Β **11.7** **18098**

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $\alpha = 4$. Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα $\rho = 2$ σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του, όπως φαίνεται στο σχήμα.



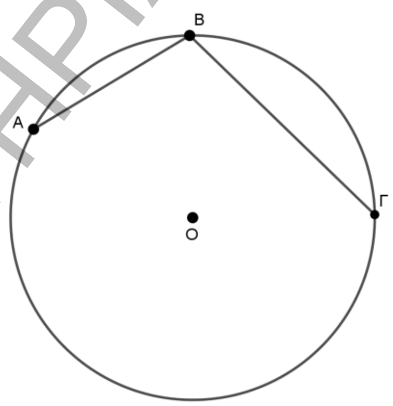
α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα.

β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι $E = 4(4-\pi)$

Μονάδες (13+12)=25

4. ΘΕΜΑ Β **11.7** **20363**

Δίνεται ο κύκλος (O,R) και τα σημεία του Α, Β, Γ όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, ώστε ΑΒ= R και ΒΓ= $R\sqrt{2}$.



α. Να αποδείξετε ότι $\overset{\frown}{AB} = 60^0$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 90^0$.

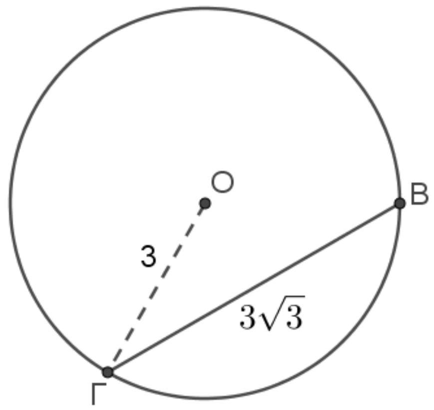
β. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R, τα μήκη των τόξων $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$.

γ. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R, το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ($O\overset{\frown}{A\Gamma}$) που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία $A\hat{O}\Gamma$.

Μονάδες (7+8+10)=25

5. **Θ Ε Μ Α Β** **11.7** **21069**

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα $\rho = 3$. Θεωρούμε την χορδή $Β\Gamma = 3\sqrt{3}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι το μέτρο του κυρτογώνιου τόξου $\overset{\frown}{Β\Gamma}$ είναι 120^o.

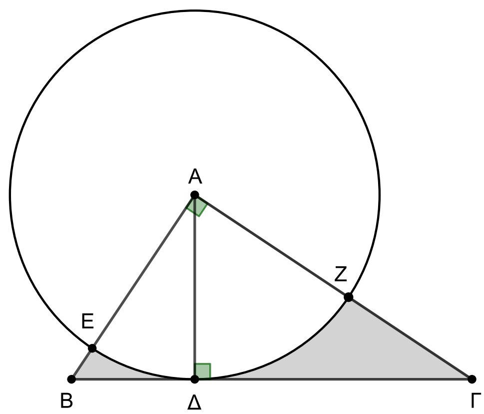
β. Να υπολογισθεί το μήκος του κυρτογώνιου τόξου $\overset{\frown}{Β\Gamma}$.

γ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $Ο\overset{\frown}{Β\Gamma}$.

Μονάδες (8+8+9)=25

6. **Θ Ε Μ Α Β** **11.7** **21121**

Στο διπλανό σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒ\Gamma$ έχει υποτείνουσα $Β\Gamma = 13$ και αντίστοιχο ύψος $Α\Delta = 6$. Με κέντρο το Α και ακτίνα $Α\Delta$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου $ΑΒ\Gamma$, στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.



α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒ\Gamma$.

β. Να υπολογίσετε τα εμβαδά:

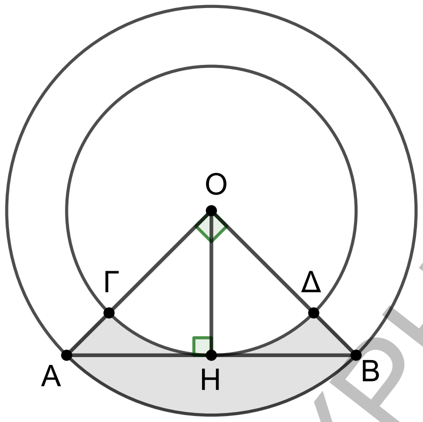
i. του κυκλικού τομέα $Α\,Ε\Delta Ζ$,

ii. του σκιασμένου χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου $ΑΒ\Gamma$ και εξωτερικά του κύκλου, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.

Μονάδες [8+(9+8)]=25

7. ΘΕΜΑ Β 11.7 21123

Στο τρίγωνο ΟΑΒ του σχήματος είναι $\hat{AOB} = 90°$, $OA = OB = 2$ και το ΟΗ είναι το ύψος του από την κορυφή Ο. Με κέντρο το Ο και ακτίνες $R = OA$ και $\rho = OH$ γράφουμε δυο ομόκεντρους κύκλους. Ο κύκλος (O, ρ) τέμνει τις ΟΑ και ΟΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.



α. Να αποδείξετε ότι $OH = \sqrt{2}$.

β. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των κυκλικών τομέων $O\,\overset{\frown}{AB}$ και $O\,\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.

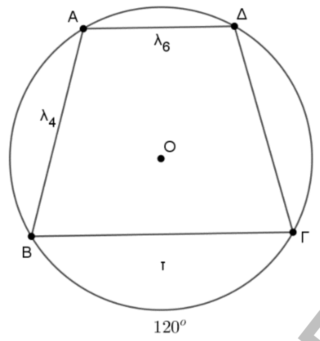
γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους που περικλείεται από τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ.

Μονάδες (10+10+5)=25

11.7 ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ (10)

1. ΘΕΜΑ Δ 11.7 18043

Σε κύκλο (Ο,ρ) θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Η πλευρά ΑΔ είναι ίση με την πλευρά λ_6 κανονικού εξάγωνου εγγεγραμμένου στον κύκλο.



α. Αν η πλευρά ΑΒ ισούται με την πλευρά λ_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο και το τόξο $B\Gamma = 120^o$:

i. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΓΔ ως συνάρτηση της ακτίνας.

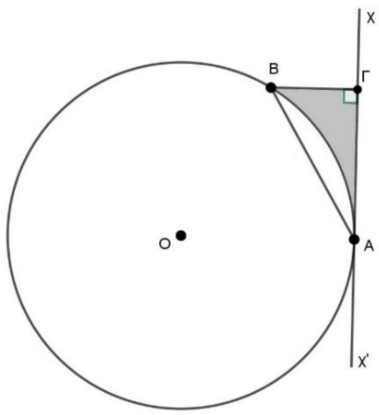
ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος που περικλείεται από την κυρτή γωνία $B\hat{O}\Gamma$.

β. Κρατάμε τα σημεία Α και Δ σταθερά και μετακινούμε την χορδή ΒΓ παράλληλα προς την ΑΔ ώστε να διέρχεται από το Ο. Ποιο θα είναι το μήκος του τόξου ΑΒ;

Μονάδες [(8+10)+7]=25

2. ΘΕΜΑ Δ 11.7 20361

Δίνεται κύκλος (Ο,R) και η χορδή του ΑΒ ίση με την πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο. Στο σημείο Α φέρνουμε την εφαπτομένη x’x του κύκλου και από το Β την κάθετη στην x’x που την τέμνει στο Γ.



Να αποδείξετε ότι:

α. $A\Gamma = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

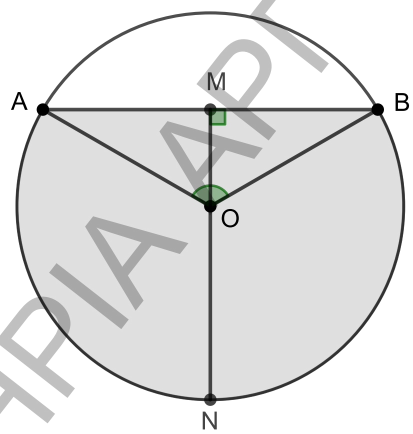
β. $(OA\Gamma B) = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{8}$.

γ. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα είναι:

$$E = \frac{\left(9\sqrt{3}-4\pi\right)R^2}{24}.$$

3. ΘΕΜΑ Δ 11.7 21127

Ο κυκλικός δίσκος του παρακάτω σχήματος έχει κέντρο Ο και ακτίνα R. Έστω ΑΒ μια χορδή του κύκλου και Μ η προβολή του Ο στην ΑΒ. Αν η ΜΟ προεκταθεί προς το Ο, τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ν. Δίνεται ότι $MN = \dfrac{3R}{2}$



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $AB = R\sqrt{3}$,

ii. $A\hat{O}B = 120°$.

β. Υποθέστε ότι η διατομή ενός αγωγού μεταφοράς νερού είναι ο κυκλικός δίσκος του σχήματος που έχει δοθεί με $R = 10$ cm. Η στάθμη του νερού που ρέει στον αγωγό είναι στη χορδή ΑΒ και το $MN = 15$ cm. Να βρείτε:

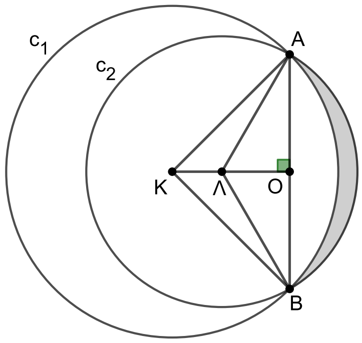
i. το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους του σχήματος που περικλείεται από την χορδή ΑΒ και το τόξο $\overset{\frown}{ANB}$,

ii. το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{ANB}$.

Μονάδες [(6+6)+(7+6)]=25

4. ΘΕΜΑ Δ 11.7 21138

Στο παρακάτω σχήμα ο κύκλος c_1 έχει κέντρο Κ και ακτίνα R και ο κύκλος c_2 έχει κέντρο Λ και ακτίνα $\rho = 2$. Οι αποστάσεις των Κ και Λ από την κοινή χορδή ΑΒ των δύο κύκλων είναι $ΚΟ = \sqrt{3}$ και $ΛΟ = 1$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $ΟΑ = \sqrt{3}$,

ii. $R = \sqrt{6}$.

β. Να βρείτε τα εμβαδά:

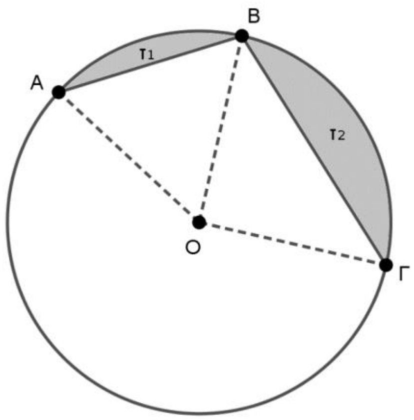
i. των κυκλικών τομέων $Κ\overset{\frown}{ΑΒ}$ και $Λ\overset{\frown}{ΑΒ}$,

ii. του σκιασμένου μηνίσκου του σχήματος.

Μονάδες [(6+6)+(8+5)]=25

5. ΘΕΜΑ Δ 11.7 21659

Για τα σημεία Α, Β και Γ του κύκλου (Ο,R) στο παρακάτω σχήμα ισχύει ότι ΑΒ = R και ΒΓ = R $\sqrt{2}$. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R:



α. τα μήκη των τόξων ΑΒ, ΒΓ,

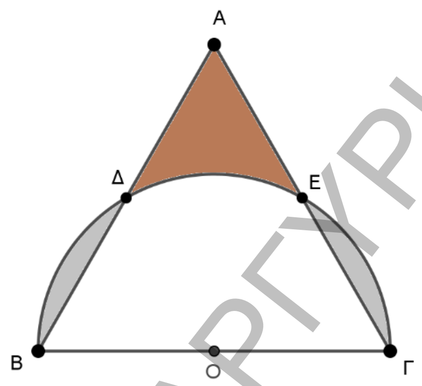
β. το μήκος του μη κυρτογώνιου τόξου ΑΓ και το εμβαδό του κυκλικού τομέα $(Ο\overset{\frown}{ΑΓ})$ που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία ΑΟΓ,

γ. το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων (τ_1) και (τ_2), όπως αυτά σημειώνονται στο σχήμα.

Μονάδες (8+8+9)=25

6. **ΘΕΜΑ Δ** **11.7** **21979**

Στο παρακάτω σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, πλευράς 2α. Με διάμετρο τη ΒΓ γράφουμε ημικύκλιο, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ,Ε αντίστοιχα.



Αν Ο είναι το κέντρο του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι:

α. $\Delta\Gamma = \alpha\sqrt{3}$,

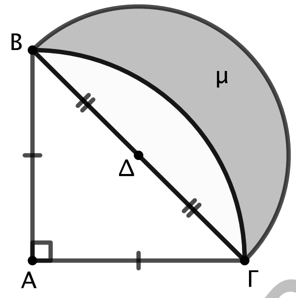
β. το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων που βρίσκονται στο εξωτερικό του τριγώνου ισούται με $E = \dfrac{\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)\alpha^2}{6}$,

γ. το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου που ορίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΑΕ και το τόξο ΔΕ είναι: $E' = \dfrac{\left(3\sqrt{3} - \pi\right)\alpha^2}{6}$.

Μονάδες (8+9+8)=25

7. **ΘΕΜΑ Δ** **11.7** **22021**

Δίνεται ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και $ΒΓ = 2ρ$. Με διάμετρο ΒΓ γράφουμε ημικύκλιο εξωτερικά του τριγώνου. Επίσης, γράφουμε τον κυκλικό τομέα $\overset{\frown}{ΑΒΓ}$ με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι $ΑΒ = ρ\sqrt{2}$.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου μ ως συνάρτηση του ρ.

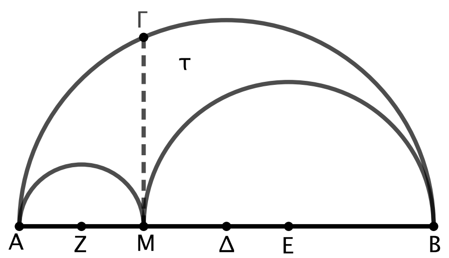
γ. Να συγκρίνετε το εμβαδόν του μηνίσκου μ με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
Τι συμπέρασμα προκύπτει;

Μονάδες (10+10+5)=25

8. **ΘΕΜΑ Δ** **11.7** **22024**

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και τυχαίο σημείο του Μ, τέτοιο ώστε $ΑΜ = 2α$ και $ΜΒ = 2β$. Με διαμέτρους ΑΜ, ΜΒ και ΑΒ γράφουμε ημικύκλια προς το ίδιο μέρος του ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω Γ το σημείο τομής του ημικυκλίου ΑΒ και της κάθετης από το Μ στο ΑΒ.

α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν καθενός από τα τρία ημικύκλια $\overset{\frown}{ΖΑΜ}$, $\overset{\frown}{ΕΜΒ}$ και $\overset{\frown}{ΔΑΒ}$, όπου Ζ, Ε, Δ είναι τα μέσα των ΑΜ, ΜΒ και ΑΒ αντίστοιχα.



β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν καμπυλόγραμμου σχήματος τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων.

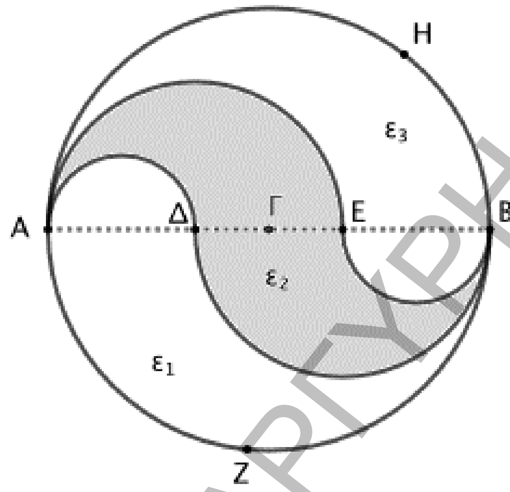
γ. Να αποδείξετε ότι το καμπυλόγραμμο σχήμα τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων έχει το ίδιο εμβαδόν με τον κύκλο διαμέτρου ΜΓ.

δ. Για ποια θέση του Μ μεγιστοποιείται το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ;

Μονάδες (9+6+5+5)=25

9. **ΘΕΜΑ Δ** **11.7** **22058**

Θεωρούμε κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα R. Έστω AB διάμετρος του κύκλου και Δ, Ε σημεία της τέτοια ώστε ΑΔ = ΔΕ = ΕΒ. Σχεδιάζουμε τα ημικύκλια ΑΔ και ΑΕ πάνω από τη διάμετρο ΑΒ και τα ημικύκλια ΒΕ και ΒΔ κάτω από τη διάμετρο ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Να υπολογίσετε τα εμβαδά ε_1 και ε_3 των καμπυλόγραμμων σχημάτων ΑΔΒΖ και ΒΕΑΗ αντίστοιχα.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ε_2 του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου σχήματος ΑΔΒΕ.

γ. Να εξετάσετε αν ο κύκλος χωρίζεται σε τρία ισοδύναμα καμπυλόγραμμα σχήματα.

Μονάδες (12+8+5)=25

10. **ΘΕΜΑ Δ** **11.7** **22244**

Ένας κηπουρός θέλει να ποτίσει το γκαζόν που έχει φυτέψει σε έναν τετράγωνο κήπο πλευράς 10 m. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιεί μηχανισμούς ποτίσματος τους οποίους μπορεί να ρυθμίσει, ώστε να ποτίζουν έναν κυκλικό τομέα με συγκεκριμένη γωνία και ακτίνα.

α. Ο κηπουρός τοποθετεί στις απέναντι κορυφές Α, Γ του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 10m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.

Να αποδείξετε ότι:

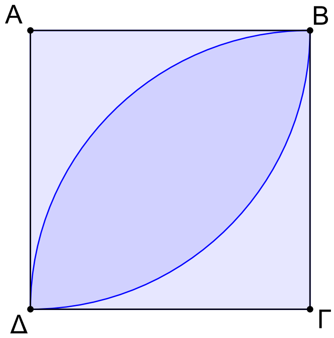
i. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζει κάθε μηχανισμός είναι $25\pi\ \text{m}^2$,

ii. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζουν ταυτόχρονα και οι δύο μηχανισμοί είναι $50(\pi-2)\ \text{m}^2$.

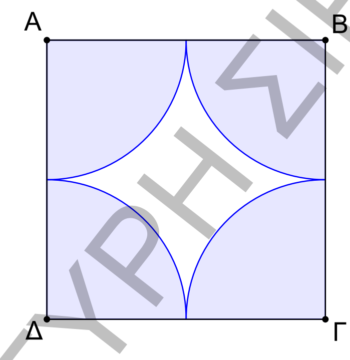
β. Ο κηπουρός τοποθετεί στις τέσσερις κορυφές του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 5m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

i. Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται.

ii. Για να μην μείνει απότιστη κάποια περιοχή του κήπου ο κηπουρός τοποθετεί έναν πέμπτο μηχανισμό ποτίσματος στο κέντρο του κήπου ο οποίος ποτίζει την περιοχή ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας 5m. Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα και να το συγκρίνετε με την απάντηση που βρήκατε στο ερώτημα α..



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Μονάδες [(4+5)+(8+8)]=25

11. **ΘΕΜΑ Δ** **11.7** **22261**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) με ΑΒ= γ , ΑΓ= β και

ΒΓ= $\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

α. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{A} > 90^0$,

β. η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με 120^0. Δίνεται συν120^0 = $-\frac{1}{2}$,

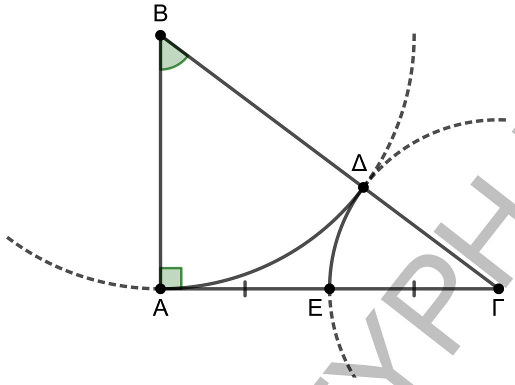
γ. η γωνία ΒΟΓ ισούται με 120^0,

δ. το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος, που ορίζεται από τη χορδή ΒΓ και το κυρτογώνιο τόξο ΒΓ, είναι: $E = \frac{\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)R^2}{12}$. Δίνεται ημ120^0 = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Μονάδες (8+5+5+7)=25

12. **Θ Ε Μ Α Δ** **11.7** **22389**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{Α}=90°$. Με κέντρο το σημείο $Β$ και ακτίνα $R=ΒΑ$ γράφουμε τον κύκλο $(Β,R)$ ο οποίος τέμνει την πλευρά $ΒΓ$ στο σημείο $Δ$. Με κέντρο το σημείο $Γ$ και ακτίνα $ρ=ΓΔ$ γράφουμε τον κύκλο $(Γ,ρ)$ ο οποίος τέμνει την πλευρά $ΑΓ$ στο σημείο $Ε$. Έστω ότι το $Ε$ είναι το μέσο της $ΑΓ$.



α. Να αποδείξετε ότι $ρ=\frac{2}{3}R$.

β. Έστω $Ε_1$ το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ και $Ε_2$ το εμβαδόν του κύκλου $(Β,R)$.

Να αποδείξετε ότι $\frac{Ε_2}{Ε_1}=\frac{3π}{2}$.

γ. Έστω $\hat{Β}=μ°$ και $Ε_3$ και $Ε_4$ είναι τα εμβαδά των κυκλικών τομέων $Β\overset{\frown}{Α}Δ$ και $Γ\overset{\frown}{Δ}Ε$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\frac{Ε_4}{Ε_3}=\frac{4(90-μ)}{9μ}$.

Μονάδες (8+8+9)=25

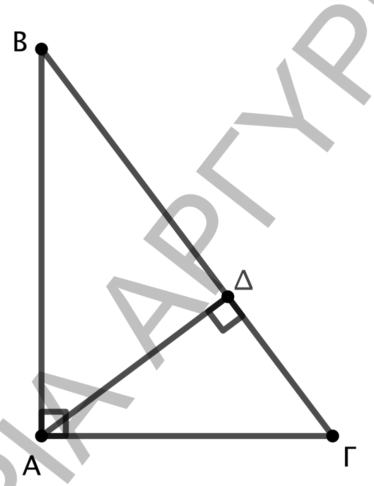
1. ΘΕΜΑ Α 11.1 21975

α. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.

ii. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Στο σχήμα, η προβολή της πλευράς ΑΒ στην υποτείνουσα ΒΓ είναι το τμήμα ΓΔ.



iv. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

v. Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

Μονάδες 5x2=10

β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

Μονάδες 15

2. ΘΕΜΑ Α 11.1 21975

α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

ii. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

iv. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο.

v. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

Μονάδες 5x2=10

β. Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

Μονάδες 15

1. **Θ Ε Μ Α Γ** **10.3** **17908**

Σε τρίγωνο ΑΒΓ τα μήκη των πλευρών του είναι $\alpha = 4$, $\beta = \sqrt{17}$ και $\gamma = 5$.

α. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς τις γωνίες του.

β. Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή Α, τότε:

i. να υπολογίσετε το ΔΒ.

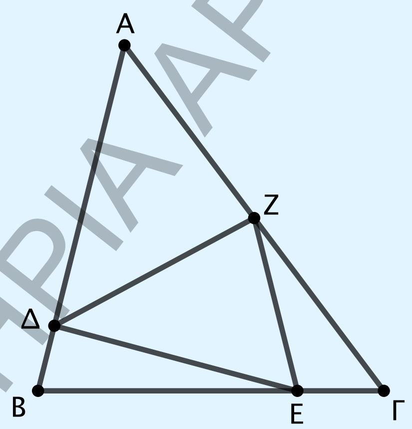
ii. να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες (9+9+7)=25

2. **Θ Ε Μ Α Γ** **10.5** **19037**

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε

$$\Delta B = \frac{1}{5}AB,\ E\Gamma = \frac{1}{4}B\Gamma,\ Z\Gamma = \frac{1}{2}A\Gamma$$



α. Να υπολογίσετε τους λόγους

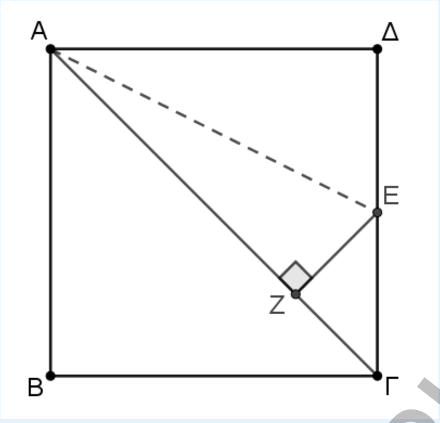
$$\frac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)}, \frac{(E\Gamma Z)}{(AB\Gamma)}, \frac{(Z A\Delta)}{(AB\Gamma)}$$

β. Αν είναι $(AB\Gamma) = 120$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ.

Μονάδες (15+10)=25

3. **Θ Ε Μ Α Γ** **9.4** **21102**

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και έστω Ε το μέσο της ΔΓ.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $ΑΓ = α\sqrt{2}$.

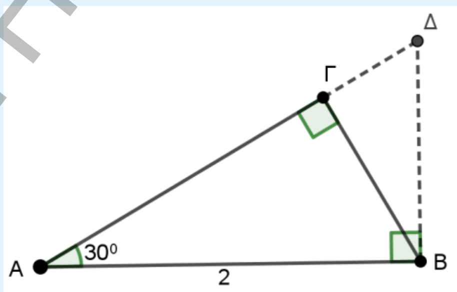
ii. $ΑΕ = α\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

β. Να υπολογίσετε την προβολή του τμήματος ΑΕ στην ΑΓ.

Μονάδες (9+9+7)=25

4. **Θ Ε Μ Α Γ** **10.4** **21783**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{Γ} = 90^0$, $\hat{Α} = 30^0$ και $ΑΒ = 2$.



α. Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = \sqrt{3}$.

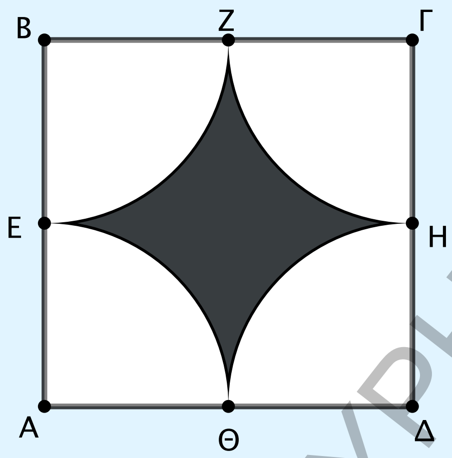
β. Φέρνουμε κάθετη στην ΑΒ, στο σημείο Β, που τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο Δ. Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

γ. Αν Κ είναι το μέσο της ΑΔ, να αποδείξετε ότι $(ΚΑΒ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Μονάδες (7+10+8)=25

5. **ΘΕΜΑ Γ** **11.7** **22054**

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2α. Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα α σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα ως συνάρτηση του α.

β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι:

$$E = \alpha^2(4 - \pi)$$

γ. Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου.

Μονάδες (8+12+5)=25