ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Β 144-Δ 110-Γ 5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΙΑ-Τ.Θ.Δ.Δ. (ΘΕΜΑΤΑ Β-Δ)-ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ-Τ.Θ.Δ.Δ. (ΘΕΜΑΤΑ Β-Δ)-ΑΣΚΗΣΕΙΣ

22 6 28

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΩΡΙΑ-Τ.Θ.Δ.Δ. (ΘΕΜΑΤΑ Β-Δ)-ΑΣΚΗΣΕΙΣ

47 23 70

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο: ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ-ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΘΕΩΡΙΑ-Τ.Θ.Δ.Δ. (ΘΕΜΑΤΑ Β-Δ)-ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΘΕΜΑΤΑ Γ

28 33 61

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο: ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΘΕΩΡΙΑ-Τ.Θ.Δ.Δ. (ΘΕΜΑΤΑ Β-Δ)-ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΘΕΜΑΤΑ Γ

41 48 89

1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η εξίσωση αx+βy=γ

Στο γυμνάσιο διαπιστώσαμε με τη βοήθεια παραδειγμάτων ότι η εξίσωση

$$\alpha x+\beta y=\gamma \text{ με } \alpha\neq 0 \text{ ή } \beta\neq 0$$

που λέγεται **γραμμική εξίσωση**, παριστάνει **ευθεία γραμμή.**

Ειδικότερα:

- Αν $\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$ τότε η ευθεία **τέμνει** και τους δύο άξονες.
- Αν $\alpha=0$ και $\beta\neq 0$ τότε η ευθεία είναι **παράλληλη** στον άξονα **x΄x**.
- Αν $\alpha\neq 0$ και $\beta=0$ τότε η ευθεία είναι **παράλληλη** στον άξονα **y΄y**.

✓ Η ευθεία $y=\kappa$ είναι ευθεία **παράλληλη** προς τον άξονα **x΄x** και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $(0, \kappa)$.

✓ Η ευθεία $x=\kappa$ είναι ευθεία **παράλληλη** στον άξονα **y΄y** και τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $(\kappa, 0)$

✓ Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει μία γραμμική εξίσωση λέγεται **λύση της γραμμικής εξίσωσης.**

Γραμμικό σύστημα 2x2

Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις αx+βy=γ και α΄x+β΄y=γ΄ και ζητάμε τις κοινές λύσεις αυτών, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους** ή πιο σύντομα ένα **γραμμικό σύστημα 2x2** και γράφουμε

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

- Κάθε **ζεύγος** αριθμών που **επαληθεύει** και τις δύο εξισώσεις του συστήματος λέγεται **λύση του συστήματος.**
- Η **επίλυση** ενός γραμμικού συστήματος γίνεται με **κατάλληλη μετατροπή** του σε άλλο γραμμικό σύστημα το οποίο έχει **ακριβώς τις ίδιες λύσεις** με το αρχικό σύστημα. Τα δύο αυτά συστήματα λέγονται **ισοδύναμα** συστήματα.
- **Ισοδύναμα** λέγονται τα συστήματα που έχουν τις **ίδιες ακριβώς** λύσεις.

Παρατήρηση:

Η **μετατροπή** ενός συστήματος σε **ισοδύναμό** του γίνεται συνήθως με έναν από τους εξής τρόπους:

- Λύνουμε τη μία εξίσωση του συστήματος ως προς έναν άγνωστο και τον αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση.
- Αντικαθιστούμε μία από τις εξισώσεις (ε) ή (ε΄) π.χ. την (ε) με την εξίσωση λ(ε)+λ΄(ε΄) που προκύπτει αν στα μέλη της (ε) πολλαπλασιασμένα με $\lambda \neq 0$ προσθέσουμε τα μέλη της (ε΄) πολλαπλασιασμένα με λ΄.

Η εξίσωση **λ(ε)+λ΄(ε΄)** λέγεται **γραμμικός συνδυασμός** των εξισώσεων (ε) και (ε΄).

Για να λύσουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της:

αντικατάστασης

- **Λύνουμε** τη **μία** από τις δύο εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο έστω ως προς **x.**
- **Αντικαθιστούμε** στη **δεύτερη** εξίσωση το **x** με την παράσταση που βρήκαμε και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει οπότε βρίσκουμε την τιμή του **δεύτερου άγνωστου έστω y.**
- **Αντικαθιστούμε** την τιμή του **y** στην πρώτη εξίσωση και **υπολογίζουμε** τον άγνωστο **x.**

αντίθετων συντελεστών (ή της απαλοιφής)

- **Πολλαπλασιάζουμε** τα μέλη των δύο εξισώσεων με **κατάλληλους αριθμούς** ώστε οι **συντελεστές** του **ενός** αγνώστου στις εξισώσεις που θα προκύψουν να είναι **αντίθετοι**.
- **Προσθέτουμε** κατά μέλη τις εξισώσεις που βρήκαμε, οπότε προκύπτει **εξίσωση με έναν άγνωστο**, την οποία και **επιλύουμε**.
- **Αντικαθιστούμε** την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μια από τις **αρχικές** εξισώσεις και **βρίσκουμε** την τιμή του άλλου.
- **Αδύνατο** λέγεται το σύστημα για το οποίο **δεν** υπάρχουν τιμές των **x, y** που να το **επαληθεύουν**.
- Όταν οι **δύο εξισώσεις** ενός συστήματος **ταυτίζονται**, που σημαίνει ότι παριστάνουν την ίδια ευθεία λέμε ότι το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**.

Σχόλιο:

Τις **τιμές των αγνώστων** που βρίσκουμε κατά την επίλυση ενός συστήματος να τις αντικαθιστούμε στο σύστημα για να ελέγχουμε αν όντως επαληθεύεται δηλ. να κάνουμε **επαλήθευση** του συστήματος.

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος 2x2

Γενικά μπορούμε να επιλύσουμε **γραφικά** ένα γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$$

με το να σχεδιάσουμε τις **δύο ευθείες** που παριστάνουν οι εξισώσεις του και να βρούμε εφόσον υπάρχει, το **σημείο τομής** τους.

- Η **γραφική επίλυση** ενός συστήματος 2x2 δίνει λύσεις που μπορεί να είναι **προσεγγιστικές**.
- Οι δύο **εξισώσεις** ενός γραμμικού συστήματος 2x2 παριστάνουν δύο **ευθείες** οι οποίες μπορεί να **τέμνονται** ή να είναι **παράλληλες** ή ακόμα και να **συμπίπτουν**.

Από την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2x2 αναμένουμε μία μόνο από τις περιπτώσεις:

- Το σύστημα να έχει **μοναδική λύση.**
- Το σύστημα να είναι **αδύνατο**.
- Το σύστημα να έχει **άπειρο πλήθος λύσεων**.

Παρατήρηση:

Γενικά τις **λύσεις** που βρίσκουμε κατά την επίλυση των διαφόρων συστημάτων να ελέγχουμε αν **επαληθεύουν** τα αρχικά συστήματα.

Κεφάλαιο 1ο ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ (6)

1. ΘΕΜΑ Β 1.1 15011

Ο Κώστας κατέθεσε σε μια τράπεζα 15 χαρτονομίσματα των 20€ και 50€. Η συνολική αξία των χρημάτων που κατέθεσε είναι 480€.

α. Αν x είναι το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 20€ και y το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 50€, να επιλέξετε ένα από τα παρακάτω συστήματα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους που εκφράζει τα δεδομένα του προβλήματος.

Α. $\begin{cases} y = 15 - x \\ 50y - 20x = 480 \end{cases}$ Β. $\begin{cases} y = 15 - x \\ 20x + 50y = 480 \end{cases}$

Γ. $\begin{cases} y - x = 15 \\ 20x + 50y = 480 \end{cases}$ Δ. $\begin{cases} y - x = 15 \\ 50y - 20x = 480 \end{cases}$

β. Από τη λύση του συστήματος που επιλέξατε στο α) ερώτημα, να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 20 € και πόσα των 50 € κατέθεσε ο Κώστας.

Μονάδες (10+15)=25

2. ΘΕΜΑ Β 1.1 15016

Δίνεται το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$.

α. Να αιτιολογήσετε γιατί το ζεύγος $(0,4)$ δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος.

β. Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

γ. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών

$$(\varepsilon_1): 3x + 2y = 8 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): 2x - y = 3.$$

Μονάδες (8+10+7)=25

3. ΘΕΜΑ Β 1.1 15849

Σε μια συνεστίαση μεταξύ συγγενών παρευρίσκονται οι γονείς με τα παιδιά τους. Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς. Κάθε γονιός πλήρωσε 12€ και κάθε παιδί τα μισά. Ο συνολικός λογαριασμός ήταν 300€.

α. Αν x το πλήθος των γονιών και y το πλήθος των παιδιών, να διαλέξετε από τις παρακάτω επιλογές, ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που εκφράζει τα δεδομένα του παραπάνω προβλήματος.

Α. $\begin{cases} x+y+5=0 \\ 12x+6y=300 \end{cases}$ **Β.** $\begin{cases} x-y=5 \\ 6x+12y=300 \end{cases}$ **Γ.** $\begin{cases} y=x+5 \\ 12x+6y=300 \end{cases}$ **Δ.** $\begin{cases} y=x+5 \\ 6x+12y=300 \end{cases}$

β. Από τη λύση του συστήματος που επιλέξατε στο α) ερώτημα να βρείτε πόσοι γονείς και πόσα παιδιά υπήρχαν στο τραπέζι.

Μονάδες (10+15)=25

4. ΘΕΜΑ Β 1.1 18431

Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 3x+y=11 \\ 6x+ky=8 \end{cases}$ με αγνώστους x, y και k παράμετρος.

α. Να λύσετε το σύστημα όταν $k=2$.

β. Να λύσετε το σύστημα όταν $k=1$.

Μονάδες 12+13=25

5. ΘΕΜΑ Β 1.1 21227

α. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 5x-y=5 \\ -5x+y=2 \end{cases}$.

β. Να σχεδιάσετε τις ευθείες (ε_1): $5x-y=5$ και (ε_2): $-5x+y=2$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος.

Μονάδες 12+13=25

6. **Θ Ε Μ Α Β** **1.1** **31570**

Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1:\ 2x+y=6 \text{ και } \varepsilon_2:\ x-2y=-2.$$

α. Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο M.

β. Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon_3: 3x+y=8$ διέρχεται από το M.

Μονάδες (13+12)=25

1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

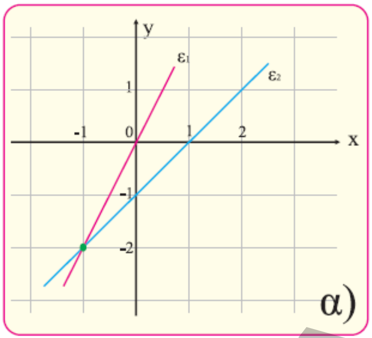
§1.1 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

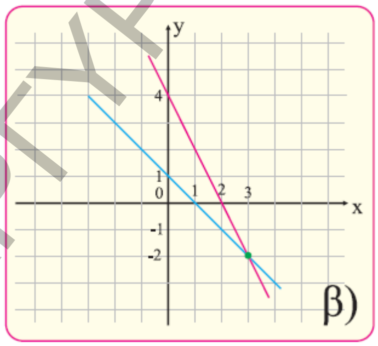
1. Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

i. $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-2y=-1 \end{cases}$ **ii.** $\begin{cases} 1,5x-2y=6 \\ 2x+2y=1 \end{cases}$

2. **i.** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2 των παρακάτω σχημάτων.

ii. Ποια συστήματα ορίζουν οι ε_1 και ε_2 και ποια είναι η λύση των συστημάτων;





3. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} 7x-5(y+3)=8(x-2)+4y \\ 10(x+1)-12(y-2)=12(x+5)+6y \end{cases}$ **ii.** $\begin{cases} 2(2x+3y)=3(2x-3y)+10 \\ 4x-3y=4(6y-2x)+3 \end{cases}$

4. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=0 \\ 2x+5y=12 \end{cases}$

5. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 0,75x=0,25y+1 \\ 2y=6x+8 \end{cases}$

6. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} \dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{y}=4 \\ \dfrac{7}{x}+\dfrac{15}{y}=1 \end{cases}$

7. Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 7. Αν εναλλάξουμε τη θέση των ψηφίων, παίρνουμε αριθμό κατά 9 μικρότερο. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

8. Να βρείτε ένα κλάσμα τέτοιο, ώστε αν προσθέσουμε τη μονάδα και στους δύο όρους του να γίνεται ίσο με $\frac{2}{3}$ ενώ αν αφαιρέσουμε το 2 από τους όρους του να γίνεται ίσο με $\frac{1}{2}$.

9. Μια εταιρεία προσλαμβάνει 53 άτομα για να στελεχώσει δύο υποκαταστήματά της και 16 από αυτά είναι πτυχιούχοι πανεπιστημίου. Αν στο 1ο υποκατάστημα, από τα άτομα που προσλήφθηκαν το $\frac{1}{3}$ είναι πτυχιούχοι και στο 2ο τα $\frac{2}{7}$, να βρεθεί πόσα άτομα προσλήφθηκαν σε κάθε υποκατάστημα.

10. Ένας καναπές και μια πολυθρόνα σε περίοδο εκπτώσεων στοιχίζουν €350. Ο καναπές και ένα τραπέζι στοιχίζουν €330. Η πολυθρόνα και το τραπέζι στοιχίζουν €180. Να υπολογίσετε πόσο κοστίζει το καθένα.

11. α. Να κατασκευάσετε ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους με συντελεστές διάφορους του μηδενός, το οποίο να είναι αδύνατο.

β. Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις του συστήματος που ορίσατε στο α) ερώτημα και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο.

Μονάδες (10+15)=25

12. Δίνεται η εξίσωση: $8x+2y=7$ (1)

α. Να γράψετε μια άλλη εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την εξίσωση (1).

β. Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο.

Μονάδες (10+15)=25

13. Δύο φίλοι, ο Μάρκος και ο Βασίλης, έχουν άθροισμα ηλικιών 27 χρόνια, και ο Μάρκος είναι μεγαλύτερος από το Βασίλη.

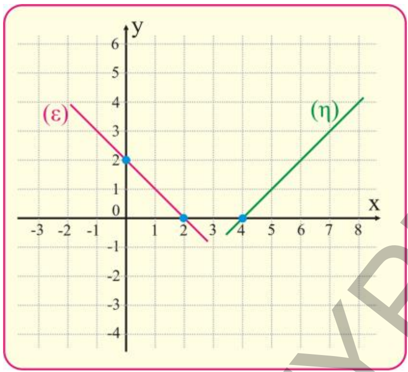
α. Μπορείτε να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Δίνεται επιπλέον η πληροφορία ότι η διαφορά των ηλικιών τους είναι 5 χρόνια. Να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός.

Μονάδες (13+12)=25

14. α. Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να προσδιορίσετε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) και (η).



β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους.

Μονάδες (12+13)=25

15. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x-2y=8 \\ \alpha x+\beta y=\gamma \end{cases}$ με παραμέτρους α, β, γ $\in \mathbb{R}$.

α. Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(2,\ -3)$.

β. Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο.

Μονάδες (13+12)=25

16. Στο δημοτικό parking μιας επαρχιακής πόλης στις 10 το πρωί, το σύνολο των δίκυκλων και τετράτροχων οχημάτων που έχουν παρκάρει είναι 830 και το πλήθος των τροχών τους 2.700.

α. Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

β. Να βρείτε τον αριθμό των δίκυκλων καθώς και τον αριθμό των τετράτροχων οχημάτων.

Μονάδες (13+12)=25

17. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} (\lambda+1)x+2y=3 \\ 4x+(\lambda-1)y=-\gamma \end{cases}$ με παράμετρο λ∈$\mathbb{R}$.

α. Αν λ=−3, να δείξετε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Να βρείτε μια λύση.

β. Αν λ=3, να δείξετε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

γ. Αν λ=0, να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να προσδιορίσετε.

Μονάδες (8+8+9)=25

18. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις:

$$(\varepsilon_1): 2x-y=-1 \quad (\varepsilon_2): (\lambda-1)x-y=6 \quad \text{με παράμετρο } \lambda\in\mathbb{R}$$

α. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε οι ευθείες ε_1 και ε_2 να είναι παράλληλες.

β. Να παραστήσετε γραφικά τις ε_1 και ε_2, για λ=3.

γ. Υπάρχει τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες ε_1 και ε_2 να ταυτίζονται;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (8+8+9)=25

19. Δίνονται οι ευθείες ε_1: 2x+y=5, ε_2: −2x+3y=−9 και ε_3: 3x+2y=7

α. **i.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ε_1 και ε_2.

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ε_1 και ε_3.

β. Με τη βοήθεια του ερωτήματος **(α),** να δείξετε ότι το κοινό σημείο των ε_2 και ε_3 είναι σημείο της ε_1.

Μονάδες (12+13)=25

20. Ένα θέατρο έχει 25 σειρές καθισμάτων χωρισμένες σε δύο διαζώματα. Η κάθε μια από τις σειρές του κάτω διαζώματος έχει 14 καθίσματα και η κάθε μια από τις σειρές του πάνω διαζώματος έχει 16 καθίσματα, ενώ η συνολική χωρητικότητα του θεάτρου είναι 374 καθίσματα.

α. Αν x ο αριθμός σειρών του κάτω και y ο αριθμός σειρών του πάνω διαζώματος, να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα δύο εξισώσεων.

β. Πόσες σειρές έχει το πάνω και πόσες το κάτω διάζωμα;

Μονάδες (12+13)=25

21. Δίνονται οι ευθείες: ε_1: 2x+y=6 , ε_2: x−2y=−3

α. Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο Μ.

β. Να βρείτε για ποια τιμή του α, η ευθεία 3x+αy=α+5 διέρχεται από το Μ.

Μονάδες (13+12)=25

22. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x-2y=9 \\ \alpha x+\beta y=\gamma \end{cases}$ με παραμέτρους α, β, γ $\in \mathbb{R}$.

α. Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ, ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(1,\ -4)$.

β. Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ, ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας.

Μονάδες (13+12)=25

23. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} 2x+y=3 \\ \alpha x+\beta y=\gamma \end{cases}$ με παραμέτρους α, β, γ $\in \mathbb{R}$.

α. Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ, ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(-1, 5)$.

β. Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ, ώστε το σύστημα αυτό να έχει άπειρες λύσεις και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας.

Μονάδες (13+12)=25

24. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο ίση με 24cm έχει την ακόλουθη ιδιότητα: αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 3cm και ελαττώσουμε το πλάτος του κατά 2cm, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν διπλάσιο του εμβαδού του αρχικού ορθογωνίου.

α. Να εκφράσετε την παραπάνω κατάσταση με ένα σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους.

β. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

Μονάδες (10+15)=25

25. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} \sqrt{x}-2\sqrt{y}=3 \\ 3\sqrt{x}+4\sqrt{y}+11=0 \end{cases}$

26. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} 2|x+1|+|y-1|=7 \\ \big||y-1|-|x+1|\big|=1 \end{cases}$ **ii.** $\begin{cases} x+y=8 \\ \big||y-x-1|\big|=5 \end{cases}$

27. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} (3x+2)(x-y)=0 \\ x+y=2 \end{cases}$

Κεφάλαιο 2ο ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

2.1 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μονοτονία συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με

$$x_1 < x_2, \text{ ισχύει: } f(x_1) < f(x_2)$$

Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ γράφουμε **f** $\nearrow$ **Δ**

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με

$$x_1 < x_2 \text{ ισχύει: } f(x_1) > f(x_2)$$

Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ γράφουμε **f** $\searrow$ **Δ.**

Μια συνάρτηση που είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ λέγεται γνησίως μονότονη στο Δ.

Ελάχιστο και μέγιστο συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο όταν

$$\mathbf{f(x) \geq f(x_0)} \text{ για κάθε } x \in A$$

Το $x_0 \in A$ λέγεται θέση ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ ολικό ελάχιστο ή απλώς ελάχιστο της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με minf(x).

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο όταν

$$\mathbf{f(x) \leq f(x_0)} \text{ για κάθε } x \in A$$

Το $x_0 \in A$ λέγεται θέση μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ ολικό μέγιστο ή απλώς μέγιστο της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με max f(x).

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται **ολικά ακρότατα** αυτής.

Σχόλιο

Μια συνάρτηση ενδέχεται να έχει **και μέγιστο και ελάχιστο ή μόνο ελάχιστο ή μόνο μέγιστο ή** να **μην έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.**

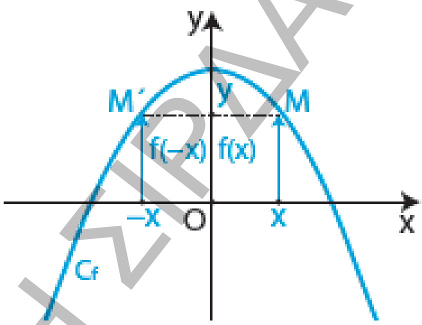
Άρτια συνάρτηση

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α θα λέγεται άρτια, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \quad \text{και} \quad f(-x) = f(x)$$

Η γραφική παράσταση μιας **άρτιας** συνάρτησης έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα **y΄y.**



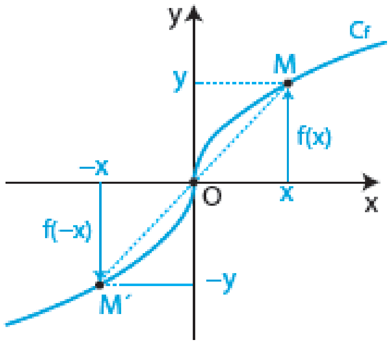
Περιττή συνάρτηση

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α θα λέγεται περιττή, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \quad \text{και} \quad f(-x) = -f(x)$$

Η γραφική παράσταση μιας **περιττής** συνάρτησης έχει **κέντρο συμμετρίας** την **αρχή Ο(0,0) των αξόνων**.



Κεφάλαιο 2ο ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

2.1 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (16)

1. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **14971**

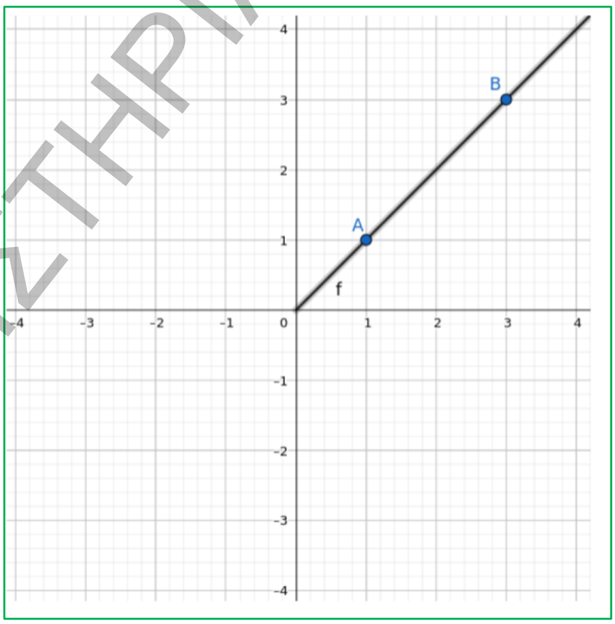
Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1)$,$B(3,3)$.

α. Να αιτιολογήσετε ποιες από τις επόμενες ιδιότητες θα μπορούσε και ποιες δε θα μπορούσε να έχει μία συνάρτηση f , που ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα A και B.

i. είναι σταθερή συνάρτηση

ii. είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

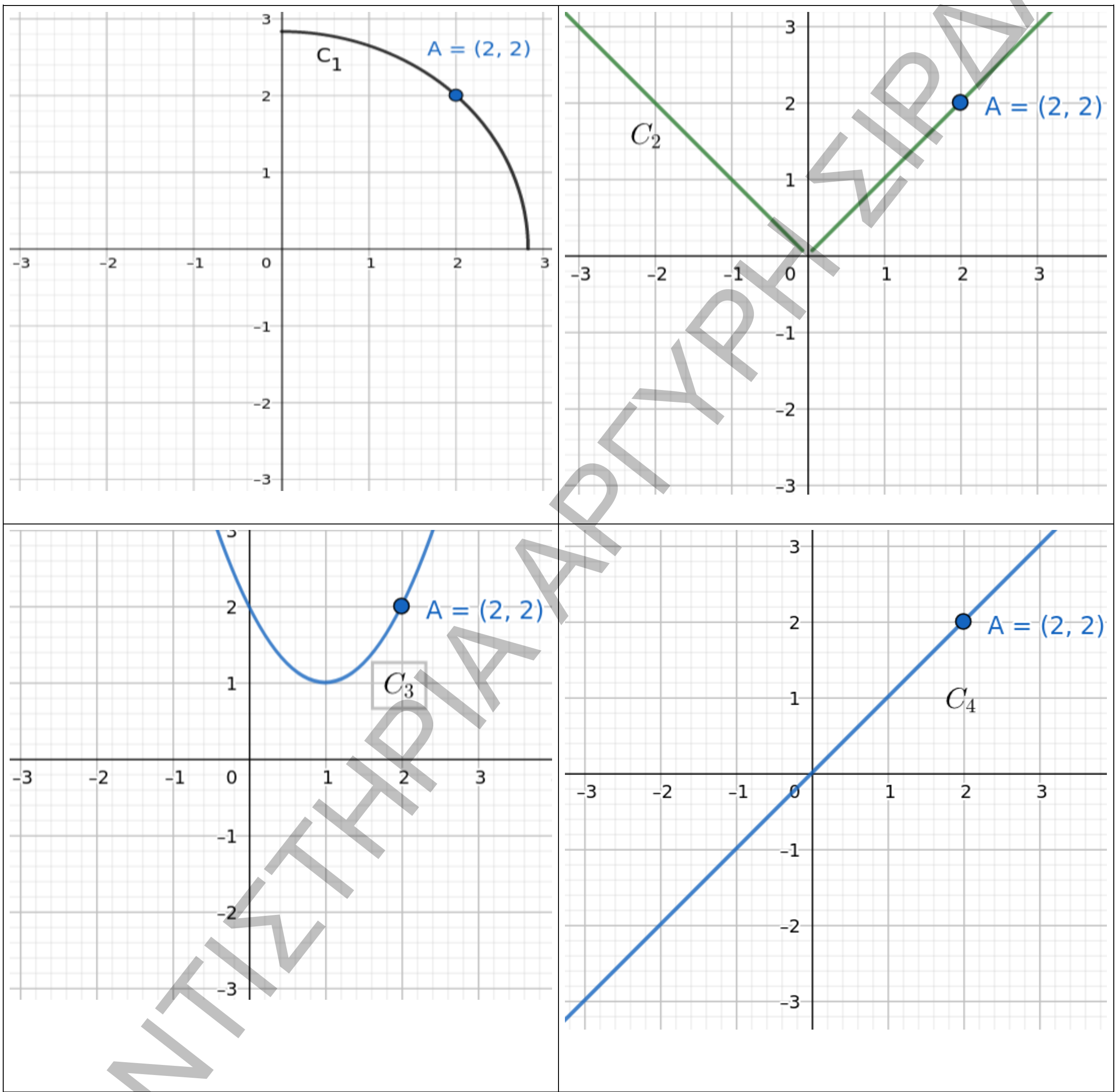
β. Να συμπληρώσετε την παρακάτω γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f, η οποία διέρχεται από τα A,B και είναι περιττή.



Μονάδες (12+13)=25

2. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **14976**

Δίνονται τα παρακάτω σχήματα:



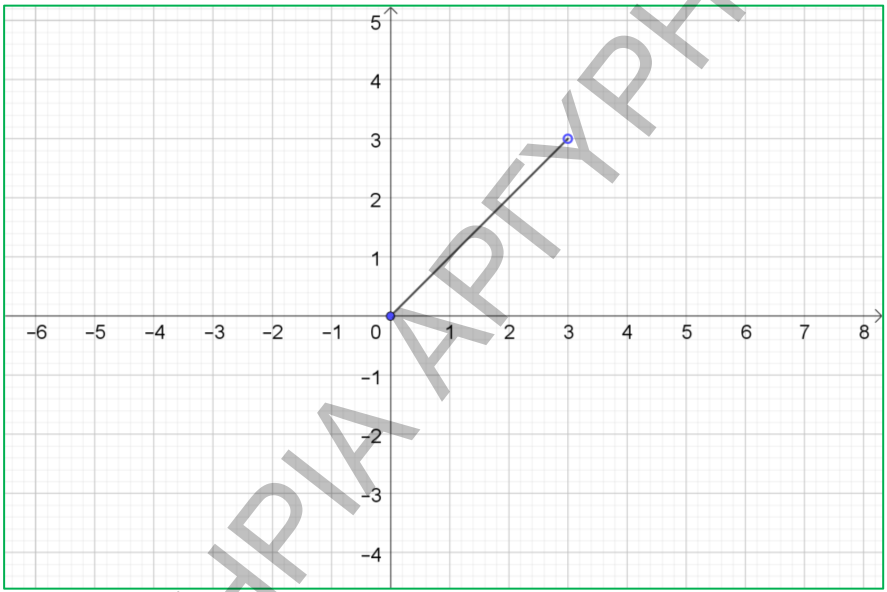
α. Να αιτιολογήσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3, C_4 αναπαριστούν άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, ποιες όχι και γιατί. Δίνεται ότι τουλάχιστον μία είναι άρτια και τουλάχιστον μία είναι περιττή.

β. Για τις συναρτήσεις C_2, C_4 να βρείτε την τεταγμένη του σημείου τους $B(-2,k)$ αιτιολογώντας την τιμή που βρήκατε από την ιδιότητα συμμετρίας καθεμίας συνάρτησης.

Μονάδες (12+13)=25

3. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **15017**

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha,3)$ είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2,2)$.



α. Να βρείτε την τιμή του α.

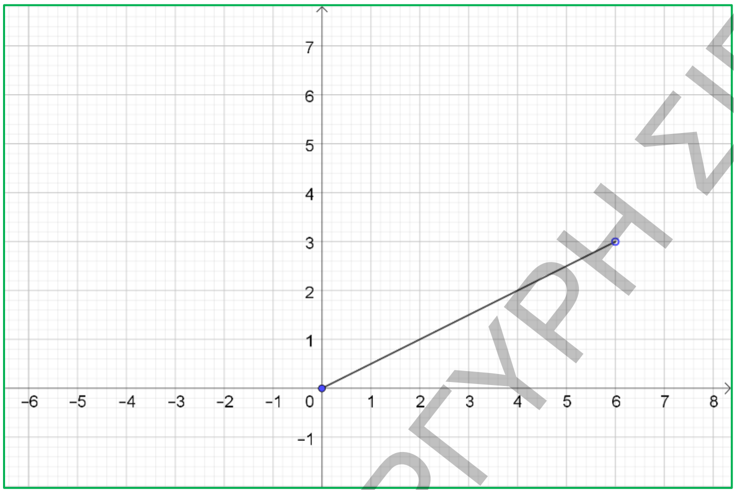
β. Να βρείτε το $f(-2)$.

γ. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,3)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες (7+8+10)=25

4. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **15018**

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha,6)$ είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4,2)$.



α. Να βρείτε την τιμή του α.

β. Να βρείτε το $f(-4)$.

γ. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες $(7+8+10)=25$

5. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **15019**

Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(-1)=2$ και $f(1)=0$.

Να αιτιολογήσετε (αλγεβρικά ή γραφικά)

α. γιατί η συνάρτηση f δεν είναι άρτια .

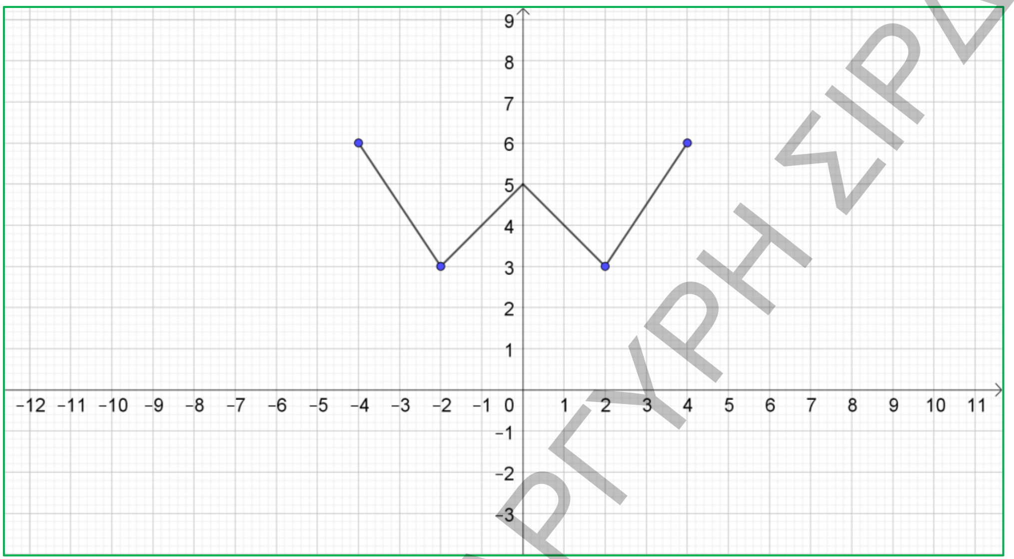
β. γιατί η συνάρτηση f δεν είναι περιττή.

γ. γιατί η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

6. **Θ Ε Μ Α Β** **2.1** **15024**

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[-4,4]$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α. Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

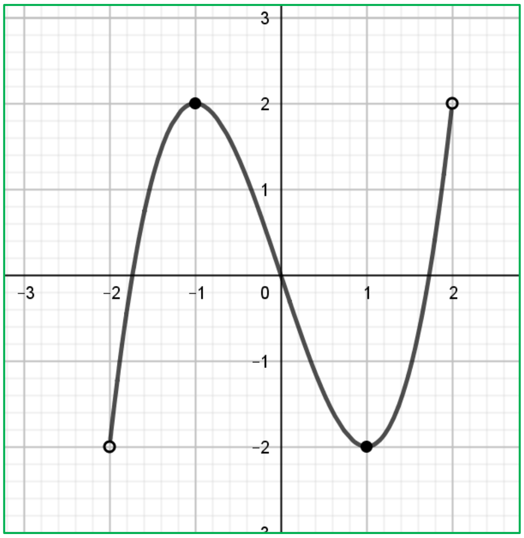
β. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

γ. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και για ποιες τιμές του x τις παρουσιάζει.

Μονάδες (8+8+9)=25

7. **Θ Ε Μ Α Β** **2.1** **15112**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(-2,2)$.



α. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

Μονάδες (7+8+10)=25

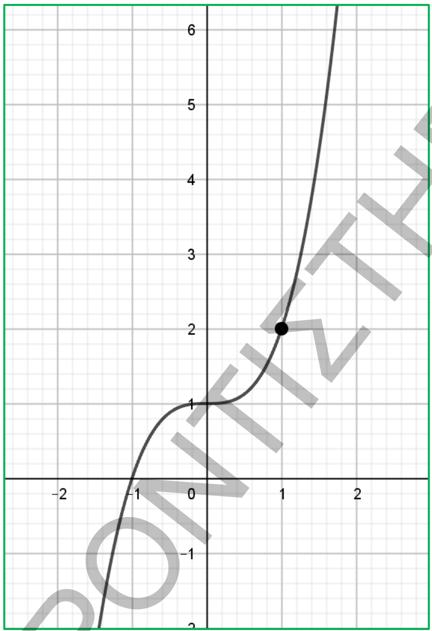
8. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **15114**

Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

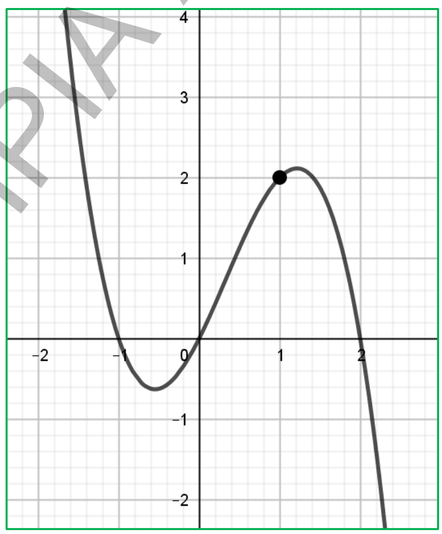
α. Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο $B(2,9)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

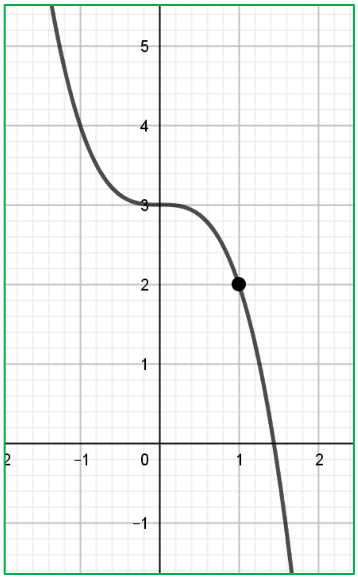
i.



ii.



iii.



Μονάδες (13+12)=25

9. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **15115**

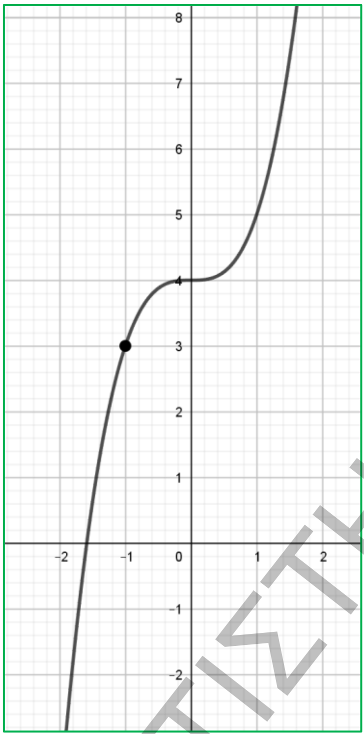
Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1,3)$.

α. Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο $B(2,5)$;

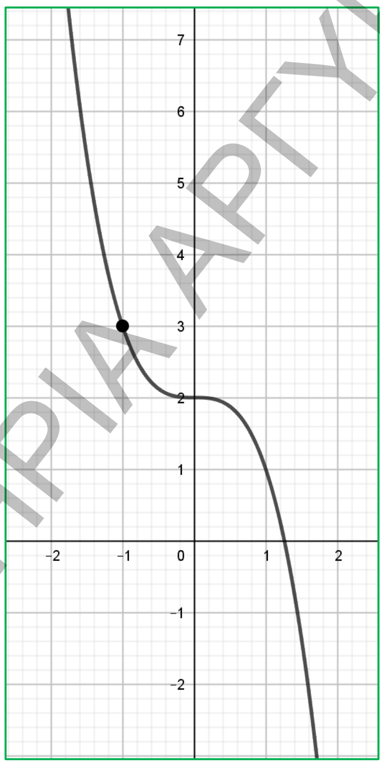
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

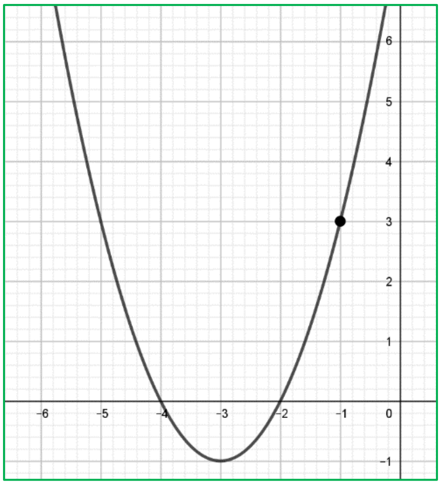
i.



ii.



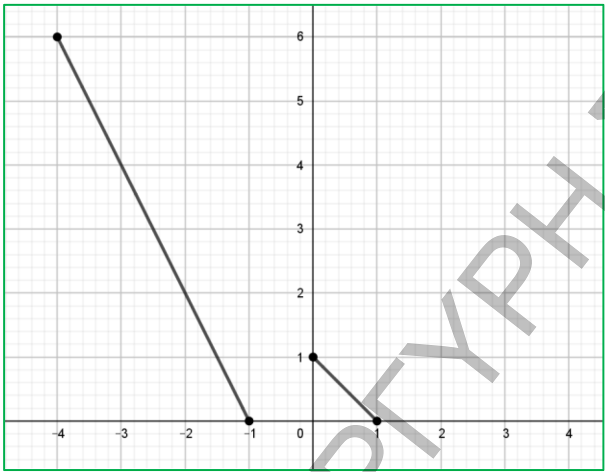
iii.



Μονάδες (13+12)=25

10. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **15116**

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-4,4]$.



α. Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της f.

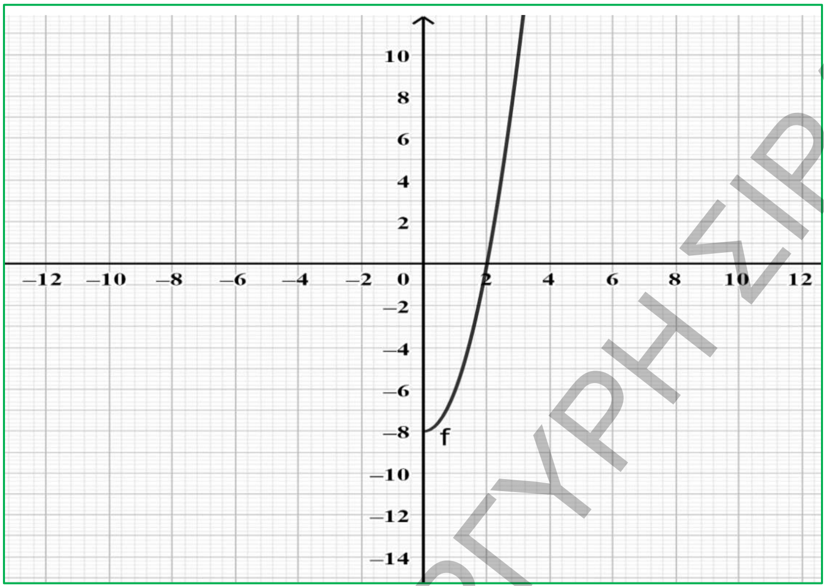
β. Να βρείτε

i. τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

Μονάδες [8+(8+9)]=25

11. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **15372**



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται ένα τμήμα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α. Να μεταφέρεται το σχήμα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση με το κομμάτι της καμπύλης που λείπει. Να αιτιολογήσετε την απάντησής σας.

β. Να βρείτε:

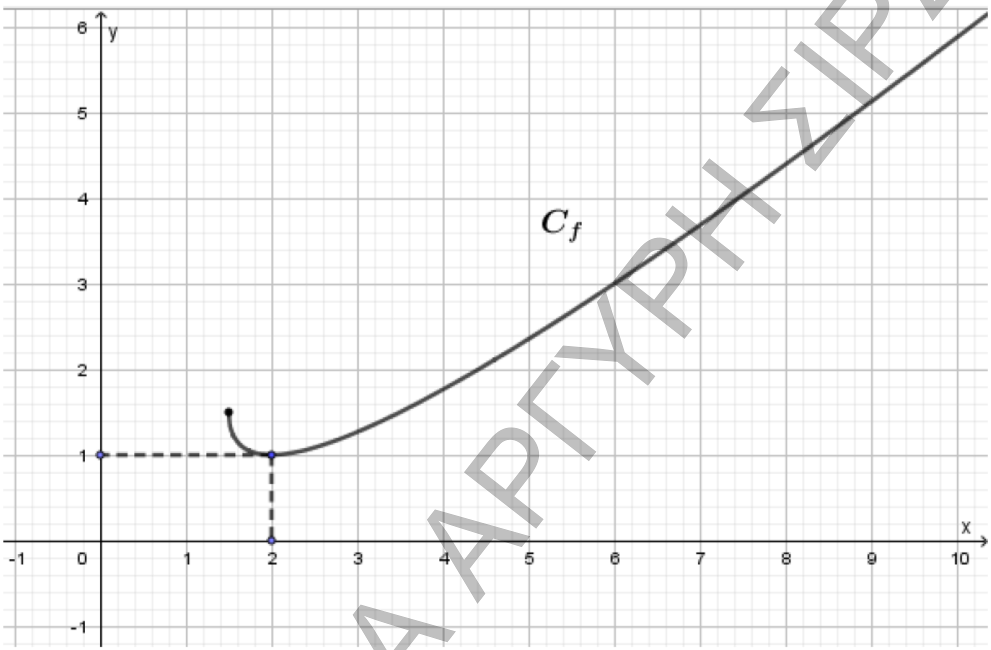
i. Τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

ii. Το είδος του ακροτάτου και τη θέση που το παρουσιάζει.

Μονάδες (10+8+7)=25

12. **Θ Ε Μ Α Β** **2.1** **15437**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\sqrt{2x-3}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Να προσδιορίσετε το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης, καθώς και τη θέση αυτού.

γ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι

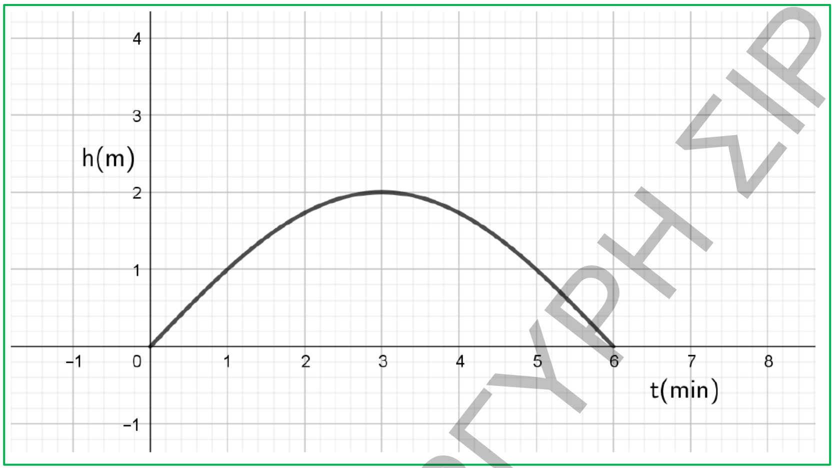
i. γνησίως φθίνουσα

ii. γνησίως αύξουσα

Μονάδες [7+8+(5+5)]=25

13. **Θ Ε Μ Α Β** **2.1** **15645**

Αντικείμενο κινείται κατακόρυφα. Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά το ύψος h του αντικειμένου από το έδαφος για κάθε χρονική στιγμή t. Να βρείτε:



α. Ποιες χρονικές στιγμές το αντικείμενο απέχει 1m από το έδαφος.

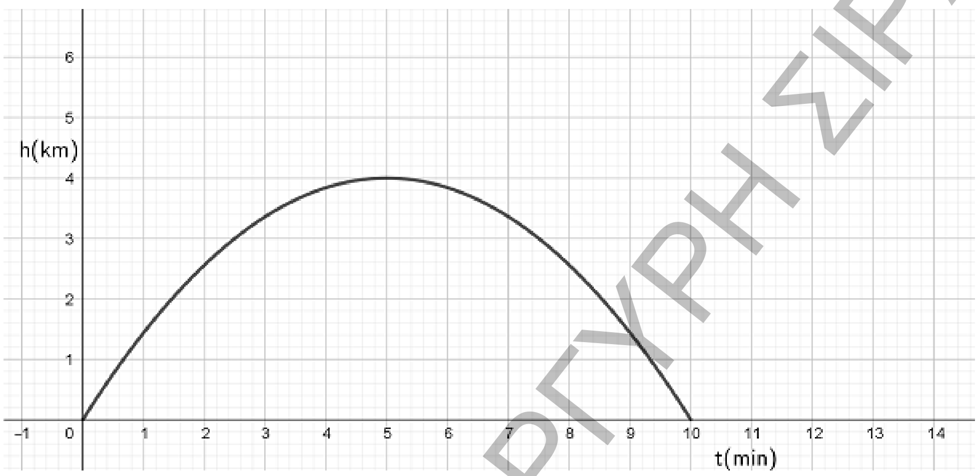
β. Ποια είναι η μέγιστη απόσταση του αντικειμένου από το έδαφος και ποια χρονική στιγμή την επιτυγχάνει.

γ. Ποιο χρονικό διάστημα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος.

Μονάδες (5+10+10)=25

14 ΘΕΜΑ Β 2.1 15787

Προκειμένου να ελεγχθεί μηχανισμός εκτόξευσης πυραύλων δημιουργήσαμε το παρακάτω σχήμα στο οποίο φαίνεται η απόσταση του πυραύλου από το έδαφος σε συνάρτηση με τον χρόνο.



α. Να βρείτε:

i. Τον συνολικό χρόνο κίνησης του πυραύλου.

ii. Το μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό.

β. Σε επανάληψη του ελέγχου η εκτόξευση πραγματοποιείται από ύψος $1\,\text{km}$.

i. Να μεταφέρεται στην κόλλα σας την αποτύπωση της πρώτης εκτόξευσης και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την δεύτερη.

ii. Το νέο μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό.

Μονάδες [(5+6)+(7+7)]=25

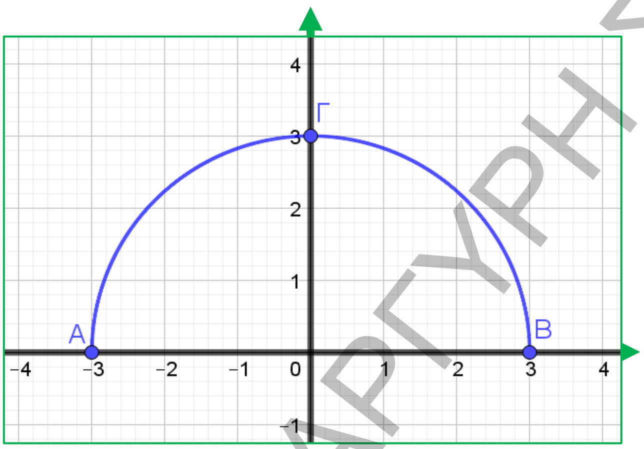
15. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **16129**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

γ. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f και τις θέσεις των ακροτάτων.



Μονάδες (6+9+10)=25

16. **Θ Ε Μ Α Β** **2.1** **21164**

Δίνεται το σημείο $A(-2,8)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας περιττής και γνησίως μονότονης συνάρτησης f.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός ακόμα σημείου, το οποίο να ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

β. Να βρείτε αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

γ. Αν μία από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στη συνάρτηση f να αιτιολογήσετε ποια μπορεί να είναι:

Γραφική παράσταση (α)	Γραφική παράσταση (β)	Γραφική παράσταση (γ)

Μονάδες 8+9+8=25

2.1 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (1)

1. **ΘΕΜΑ Δ** **2.1** **15022**

Θεωρούμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[-3,3\right]$. Η συνάρτηση f είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-3,0\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,3\right]$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(-1)<f(2)$.

β. Να αποδείξετε ότι $f(3)\ge f(x)\ge f(0)$ για κάθε $x\in[-3,3]$.

γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο και να βρείτε τις θέσεις μεγίστου και ελαχίστου.

δ. Παρακάτω δίνονται 4 τύποι, από τους οποίους ένας μόνο μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f. Να επιλέξετε το σωστό τύπο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

ii. $f(x)=-\sqrt{9-x^2}$

iii. $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

iv. $f(x)=-\sqrt{x^2-9}$

Μονάδες (6+7+6+6)=25

Κεφάλαιο 2ο ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ 25

2.1 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

§2.1 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία A(5, 2) και B(4, 9).

α. Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(5-3x) < 2$.

Μονάδες (12+13)=25

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, με $x \in \mathbb{R}$.

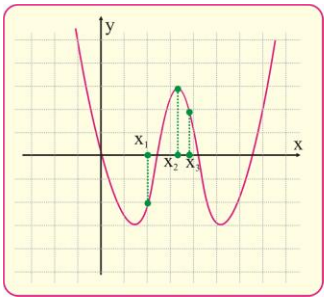
α. Να δείξετε ότι $f(x) \le 1$.

β. Είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

Μονάδες (8+8+9)=25

3. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$



Να απαντήσετε τα παρακάτω ερωτήματα:

α. Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $f(x_1)$, $f(x_2)$ και $f(x_3)$

β. Είναι η συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Παρουσιάζει η f μέγιστο στο σημείο x_2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (10+10+5)=25

4. Έστω γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία Α (2, 3) και Β (4, 5) .

α. Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f .

β. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο −2, να δείξετε ότι $f(0) > 0$.

Μονάδες (13+12)=25

5. Η περιβαλλοντική ομάδα ενός σχολείου παρέλαβε συρματόπλεγμα μήκους 40 m για να περιφράξει, χρησιμοποιώντας όλο το συρματόπλεγμα, έναν ορθογώνιο κήπο για καλλιέργεια λαχανικών. Οι μαθητές της περιβαλλοντικής ομάδας θέλουν να επιλέξουν ένα κήπο που να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο εμβαδόν.

α. Να δώσετε τις διαστάσεις τριών διαφορετικών ορθογώνιων κήπων με περίμετρο 40 m. Να εξετάσετε αν οι τρεις λαχανόκηποι έχουν το ίδιο εμβαδόν.

β. Αν συμβολίσουμε με x το πλάτος και με E το εμβαδόν ενός λαχανόκηπου με περίμετρο 40 m, να εκφράσετε το E ως συνάρτηση του x.

γ. Να δείξετε ότι $E(x) = -(x-10)^2 + 100$.

Χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2$ να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της E(x). Από τη γραφική παράσταση της E(x) να βρείτε τις διαστάσεις του λαχανόκηπου με το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Μονάδες (7+8+10)=25

6. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

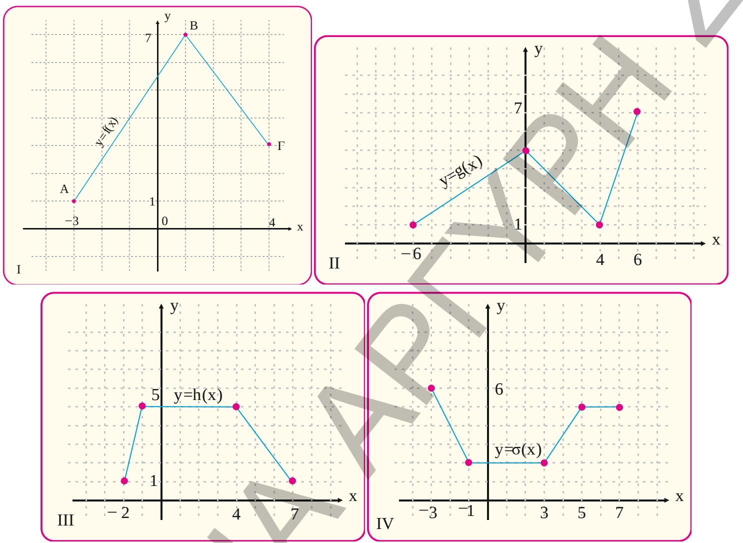
i. $f(x) = 2x + 5$ **ii.** $g(x) = -3x + 9$ **iii.** $h(x) = \dfrac{2}{x-1}$

7. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

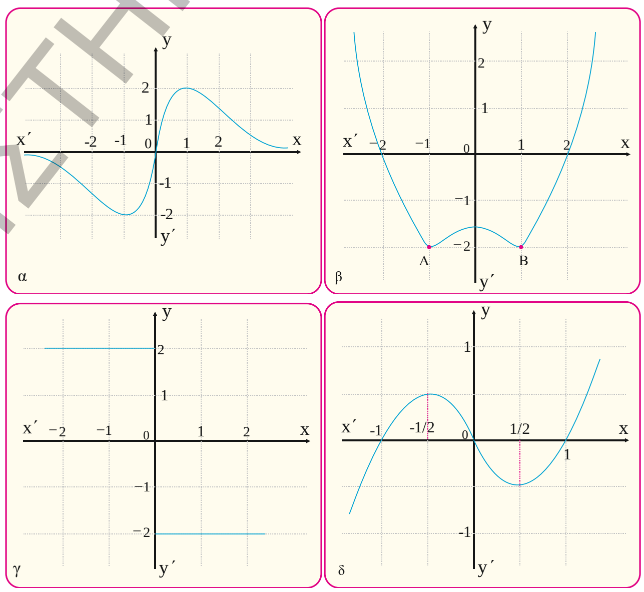
i. $f(x) = -\sqrt{8-2x}$ **ii.** $f(x) = 2 - \sqrt{3x-9}$

8. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις $f(x)=1+\dfrac{1}{(x-1)^2}$ και $g(x)=\dfrac{2}{x-1}-x+1$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.

9. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να γράψετε τα διαστήματα στα οποία κάθε συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα ή σταθερή



10. Να προσδιορίσετε τα ολικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων καθώς και τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων.



11. Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-1,0)$, να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον θετικό ημιάξονα Oy.

12. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα ακρότατα των συναρτήσεων:

i. $f(x)=2(x+1)^2-1$ **ii.** $g(x)=3|x-1|-2$ **iii.** $h(x)=-3(x-2)^2-3$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ με $x\ge 0$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\dfrac{1999}{2000}$, $\dfrac{2000}{2001}$

14. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

i. $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ **ii.** $g(x)=3x^2+|x|+1$

15. Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή η συνάρτηση $f(x)=|3x+2|-|3x-2|$

16. Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή η συνάρτηση $f(x)=|x+4|+|x-4|$

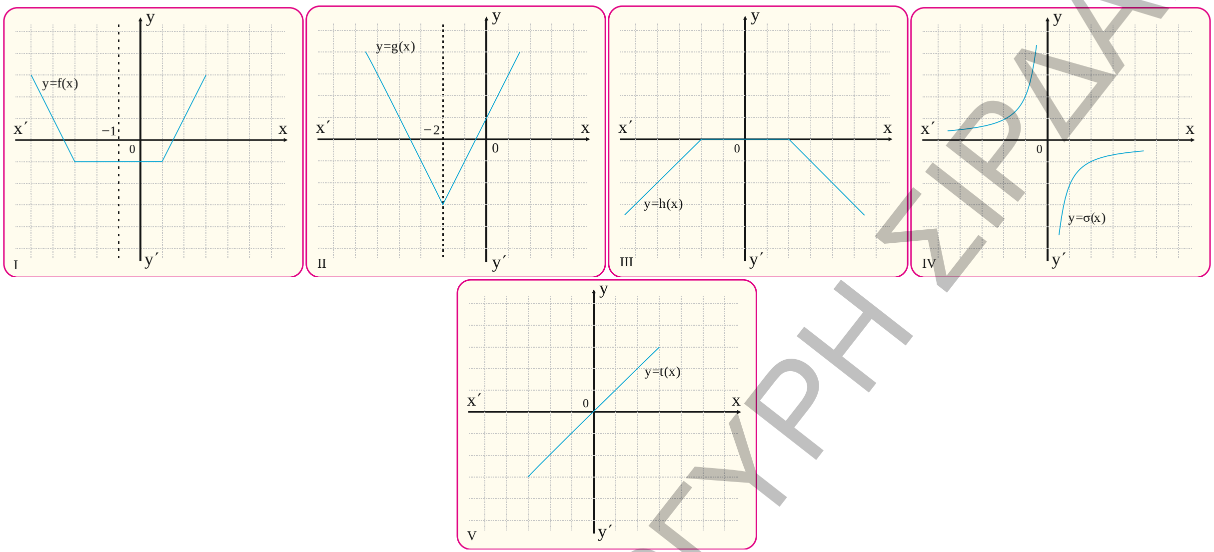
17. Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{1}{x}$

18. Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3|x|-x^7}{1-\sqrt{1-x^2}}$

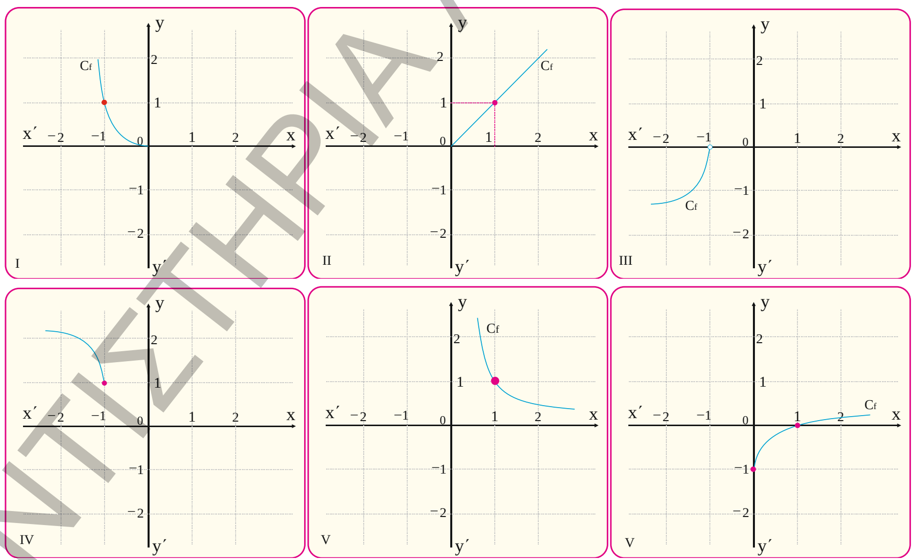
19. Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι άρτιες ούτε περιττές:

i. $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ **ii.** $g(x)=x^2+x$

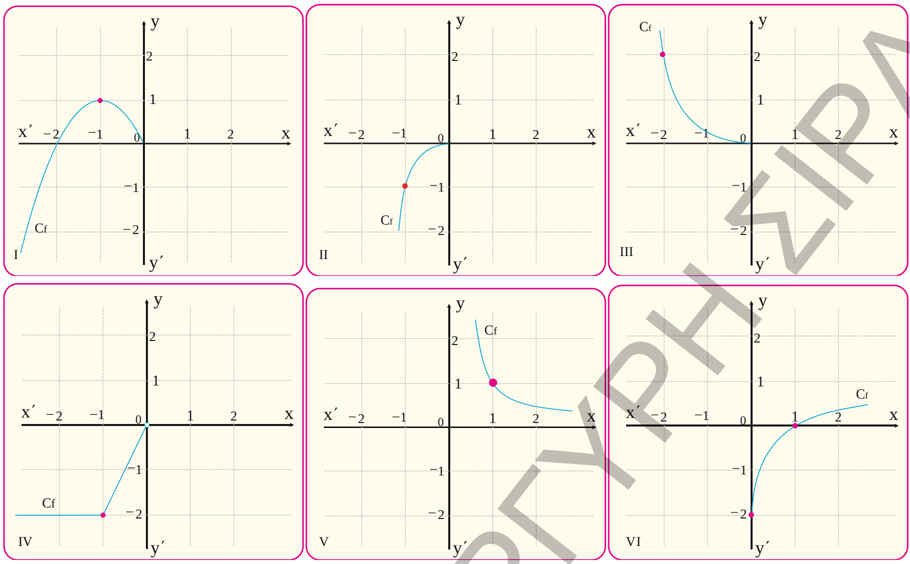
20. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω γραμμές είναι γραφικές παραστάσεις άρτιας και ποιες περιττής συνάρτησης.



21. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις ώστε να απεικονίζουν άρτιες συναρτήσεις.



22. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις ώστε να απεικονίζουν περιττές συναρτήσεις



23. α. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι περιττή και ορίζεται στο 0, τότε $f(x)=0$, δηλαδή η γραφική της παράσταση διέρχεται από ην αρχή των αξόνων.

β. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια περιττή συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$.

Να δείξετε ότι $f(0)-f(2)-3=0$.

24. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=|x|+|x-2|+|2+x|,$$

$$g(x)=\frac{1-|x|}{x^6}$$

έχουν άξονα συμμετρίας τον κατακόρυφο άξονα y΄y.

25. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

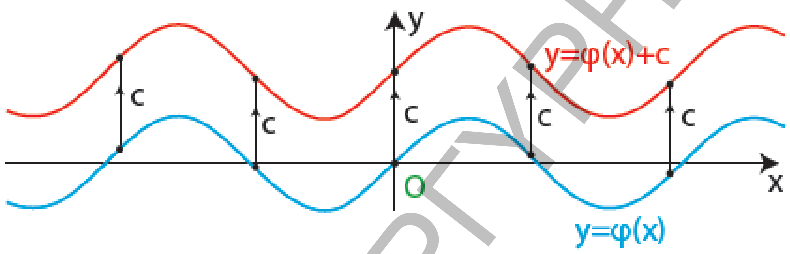
$$f(x)=x^3\sqrt{x^2-9},\quad g(x)=\frac{16x}{\sqrt{16-x^2}},$$

έχουν το σημείο τομής των αξόνων κέντρο συμμετρίας.

2.2 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ-ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

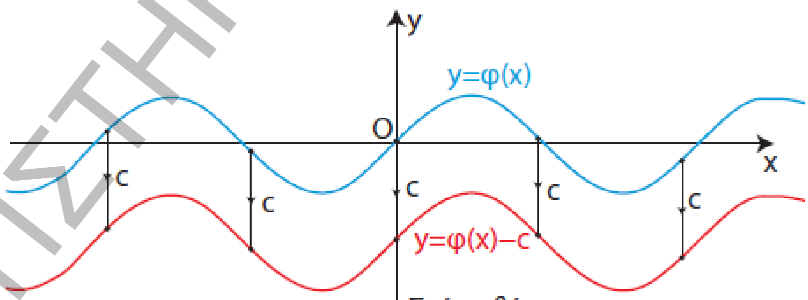
Κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με: $f(x) = \varphi(x) + c$, όπου **c>0** προκύπτει από μία **κατακόρυφη** μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά **c μονάδες** προς τα **πάνω.** (Σχ. α).



Σχήμα α΄

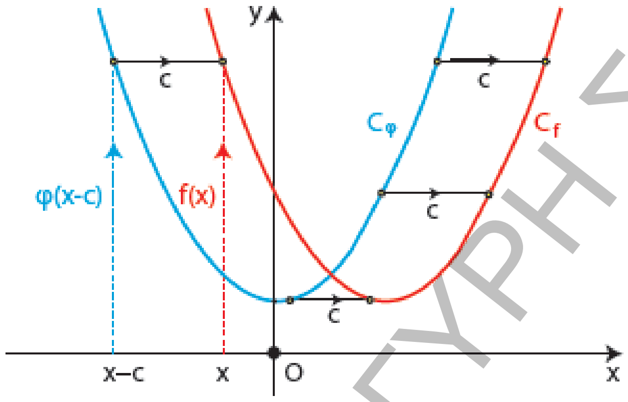
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με: $f(x) = \varphi(x) - c$, όπου **c>0** προκύπτει από μία **κατακόρυφη** μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά **c μονάδες** προς τα **κάτω.** (Σχ. β).



Σχήμα β΄

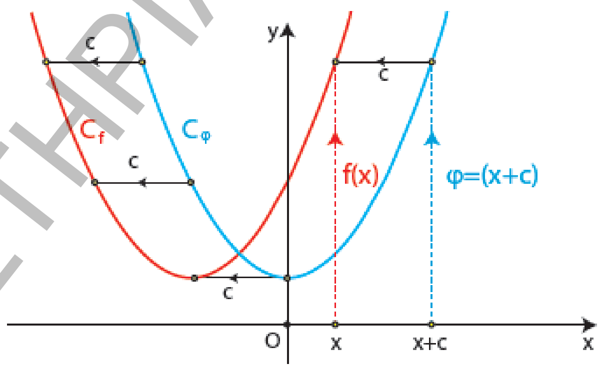
Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με: $f(x)=\varphi(x-c)$, όπου **c>0** προκύπτει από μία **οριζόντια** μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά **c μονάδες** προς τα **δεξιά**. (Σχ. γ).



Σχήμα γ΄

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με: $f(x)=\varphi(x+c)$, όπου **c>0** προκύπτει από μία **οριζόντια** μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά **c μονάδες** προς τα **αριστερά**. (Σχ. δ).

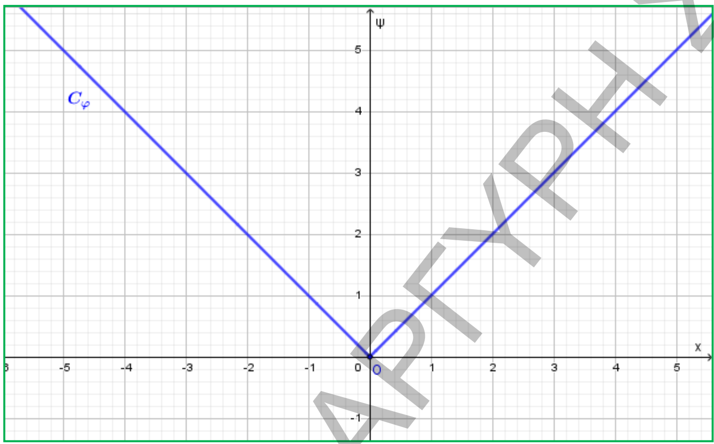


Σχήμα δ΄

2.2 ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΚΑΙ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ (6)

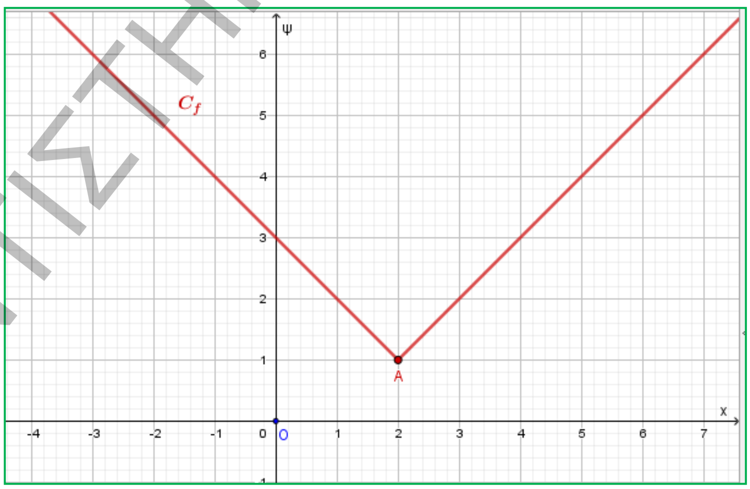
1. ΘΕΜΑ Β 2.2 14972

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}$ με γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα. Επιπλέον οι συναρτήσεις $g(x) = |x-2|,\ x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = |x-2| + 1,\ x \in \mathbb{R}$.



α. Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις g, f και να εξηγήσετε πώς προκύπτουν μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της φ.

β. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f, η οποία δίνεται παρακάτω,



να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια αύξουσα και γνήσια φθίνουσα.

ii. Το ολικό ακρότατο της f και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

Μονάδες [13+((6+6)]=25

2. **ΘΕΜΑ Β** **2.2** **14983**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{1}{3}x^2,\ x\in\mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ η οποία προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της $g(x)$ κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μετά κατά μία μονάδα προς τα πάνω.

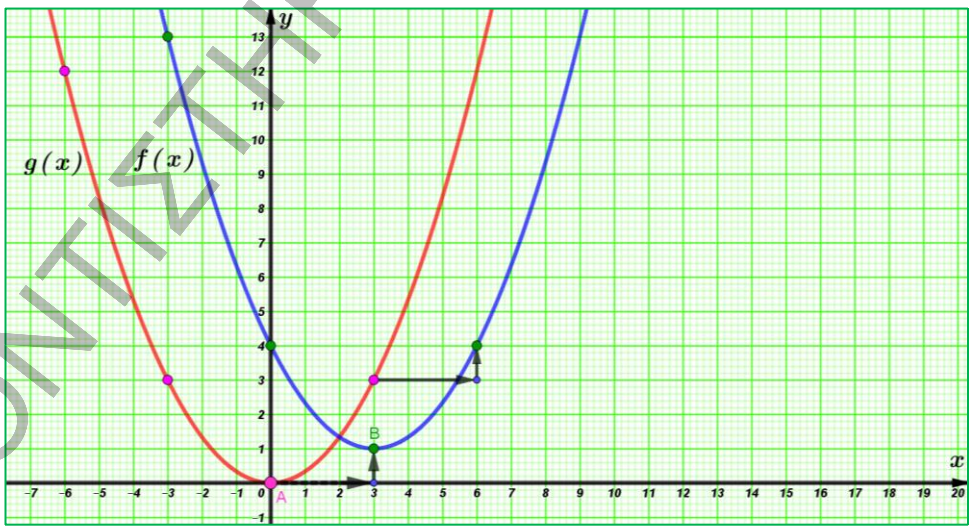
α. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση όσον αφορά τον τύπο της $f(x)$.

(I) $f(x)=g(x+3)+1$ **(II)** $f(x)=g(x+3)-1$.

(III) $f(x)=g(x-3)+1$ **(IV)** $f(x)=g(x-3)-1$.

β. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$ και την θέση ελαχίστου.

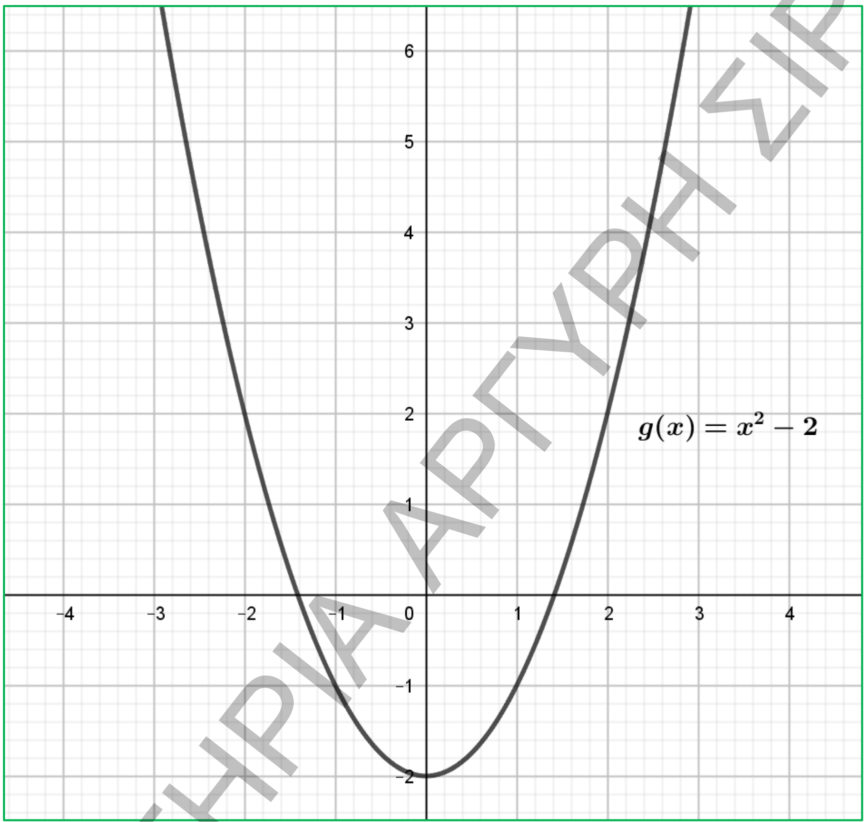
γ. Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.



Μονάδες (9+8+8)=25

3. **Θ Ε Μ Α Β** **2.2** **15811**

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x^2-2$, $x\in\mathbb{R}$.



α. Με βάση τη γραφική της παράσταση,

i. να αιτιολογήσετε γιατί η g είναι άρτια.

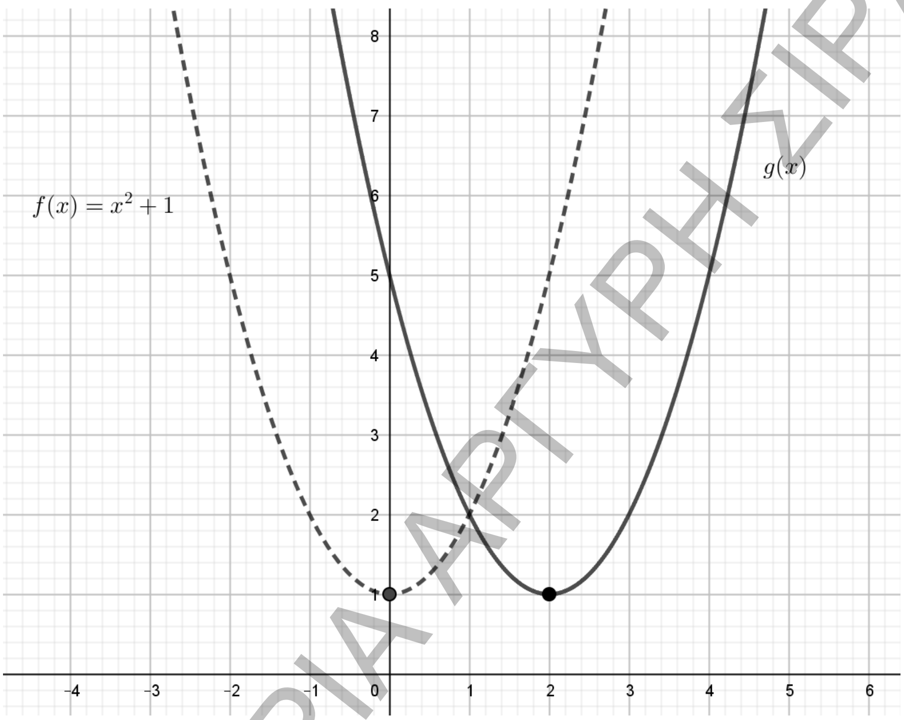
ii. να βρείτε το ελάχιστο της g και τη θέση αυτού.

β. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x)=x^2$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Μονάδες $(9+7+9)=25$

4. **ΘΕΜΑ Β** **2.2** **20671**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+1$ και η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$ με $x\in\mathbb{R}$.



α. **i.** Είναι η f άρτια ή περιττή συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Έχει η f μέγιστη τιμή ή ελάχιστη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

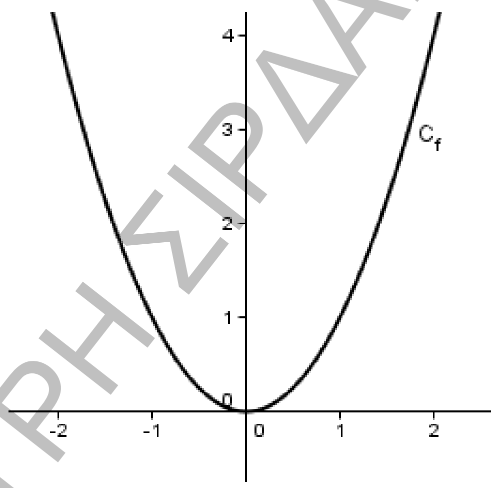
β. **i.** Με ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f προέκυψε η γραφική παράσταση της g;

ii.. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g.

Μονάδες [(7+7)+(7+4)]=25

5. ΘΕΜΑ Β 2.2 21673

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$.



α. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $\varphi(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε μια μονάδα, προς τα πάνω.

β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)$.

γ. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της $\varphi(x)$.

Μονάδες (8+8+9)=25

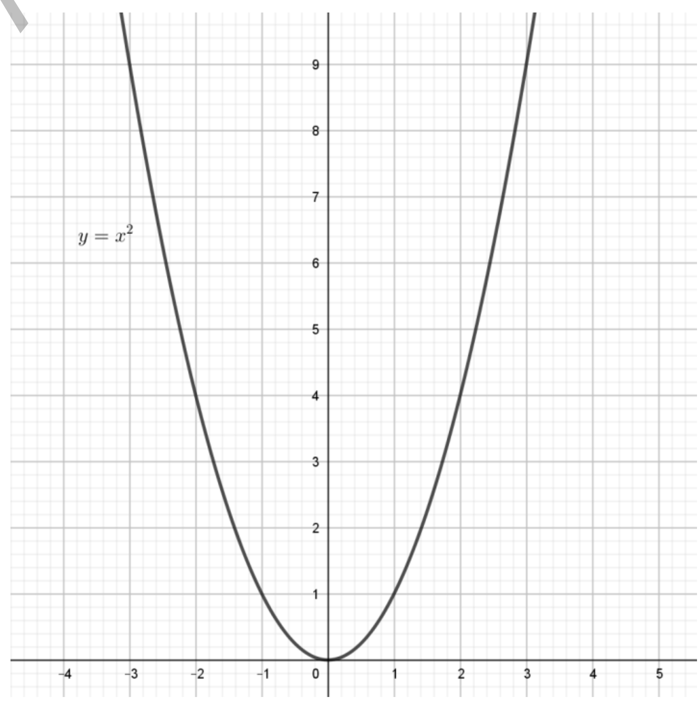
6. ΘΕΜΑ Β 2.2 32674

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x^2-4x+5,\ x\in\mathbb{R}.$$

α. Να δείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x)=(x-2)^2+1$.

β. Να αναφέρετε με ποιες μετατοπίσεις της $y(x)=x^2$ προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την οποία να χαράξετε στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί.

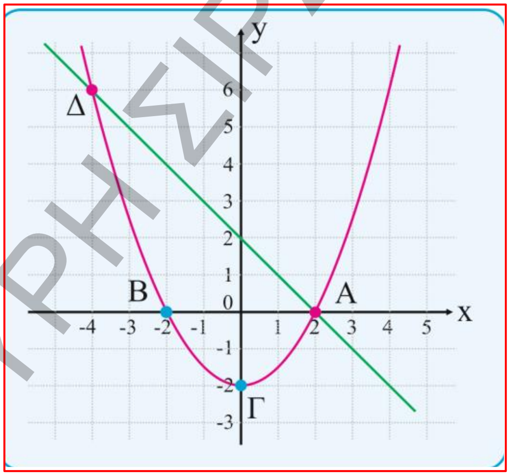


Μονάδες (10+15)=25

2.2 ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΚΑΙ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ (5)

1. **ΘΕΜΑ Δ** **2.2** **14294**

Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και της ευθείας $g(x) = -x + 2$.



α. Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Γ να βρείτε τις τιμές των α, β, γ.

β. Αν $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$ και $\gamma = -2$, να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της παραβολής.

γ. Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά $4{,}5$ μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Μονάδες (8+8+9)=25

2. **ΘΕΜΑ Δ** **2.2** **14973**

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = 3x^2,\ x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 3x^2 - 6x + 8,\ x \in \mathbb{R}$.

α. Να ελέγξετε αν η συνάρτηση φ είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3(x-1)^2 + 5,\ x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

γ. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης f.

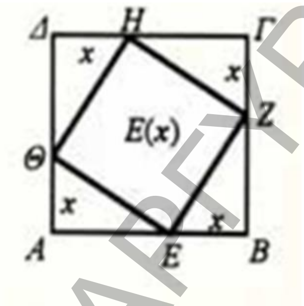
ii. Το ολικό ακρότατο της f και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

iii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας με εξίσωση $y=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

Μονάδες [4+4+(6+4+7)]=25

3. **ΘΕΜΑ Δ** **2.2** **20713**

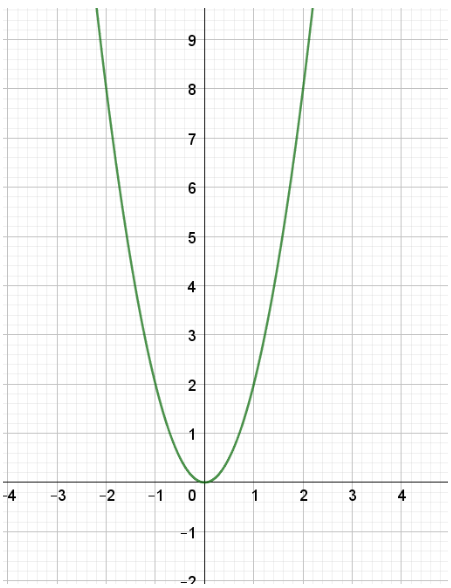
Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος με πλευρά 2 cm, παίρνουμε τα εσωτερικά σημεία Ε,Ζ,Η,Θ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, αντίστοιχα, ώστε $EB=Z\Gamma=H\Delta=\Theta A=x$ και σχηματίζεται το τετράγωνο ΕΖΗΘ .



α. Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ ως συνάρτηση του x και να βρείτε τις δυνατές τιμές του x.

β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ συναρτήσει της πλευράς x δίνεται από τη συνάρτηση $E(x)=2(x-1)^2+2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.

γ. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2$. Μετατοπίζοντας την κατάλληλα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$ και με βάση αυτή, να βρείτε το x έτσι ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του ΕΖΗΘ να γίνεται ελάχιστο.

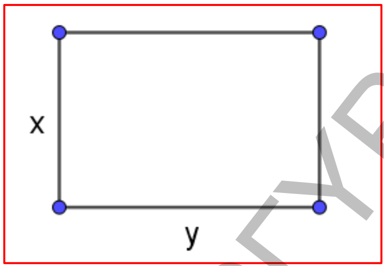


δ. Τι συμπέρασμα προκύπτει για τα σημεία Ε,Ζ,Η,Θ στην περίπτωση που το εμβαδόν του ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες (6+6+8+5)=25

4. **ΘΕΜΑ Δ** **2.2** **20715**

Με συρματόπλεγμα μήκους 20 m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις x και y, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α. Να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x και να βρείτε τις δυνατές τιμές της πλευράς x.

β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x δίνεται από τη συνάρτηση

$$E(x)=-(x-5)^2+25$$

και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.

γ. Παρακάτω δίνεται η γραφική παράστασης της συνάρτησης

$$g(x)=-x^2.$$

Μετατοπίζοντάς τη κατάλληλα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$ και με βάση αυτή, να βρείτε το x έτσι ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου να γίνεται μέγιστο.

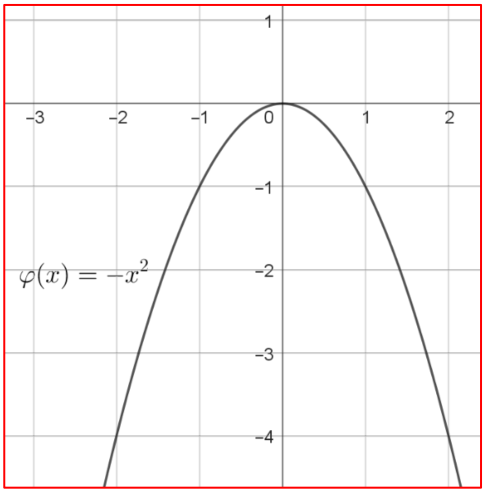
δ. Για την τιμή του x που βρήκατε στο ερώτημα γ), να βρείτε την πλευρά y και να προσδιορίσετε το είδος του ορθογωνίου.

Μονάδες (6+6+7+6)=25

5. **ΘΕΜΑ Δ** **2.2** **32677**

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x)=-x^2,\ x\in\mathbb{R}$ και $f(x)=-x^2+2x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=-(x-1)^2+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ, που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.



β. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

ii. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του.

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\kappa,\ \kappa<2$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

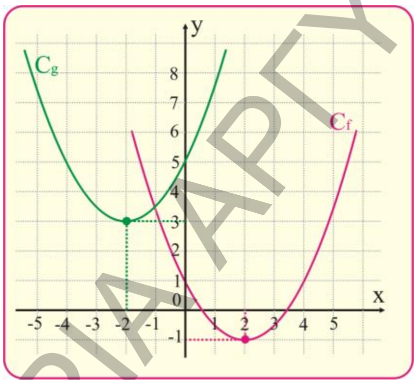
Μονάδες [10+(5+5+5)]=25

Κεφάλαιο 2ο ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ 21

2.2 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ-ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

§2.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι παραβολές C_f και C_g που είναι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση.



Παρατηρώντας το σχήμα:

α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του.

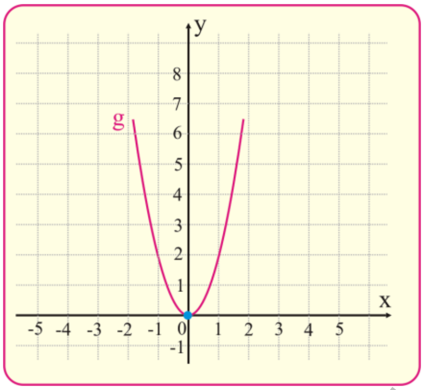
β. Να βρείτε μέσω ποιων μετατοπίσεων της C_f προκύπτει η C_g.

Μονάδες (10+15)=25

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^2-12x+19$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f γράφεται στη μορφή: $f(x)=2(x-3)^2+1$.

β. Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2$.



Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή προκύπτει μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της g.

Μονάδες (10+15)=25

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-5, \quad x\in\mathbb{R}$

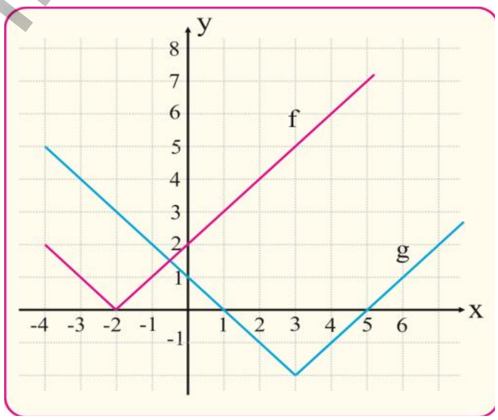
α. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$.

β. Είναι η f άρτια συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Με ποια μετατόπιση της $g(x)=x^2$ προκύπτει η C_f ;

Μονάδες (8+8+9)=25

4. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g, που ορίζονται στους πραγματικούς αριθμούς.



Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση.

Από τις γραφικές παραστάσεις να βρείτε:

α. Τα διαστήματα μονοτονίας της f, το είδος του ακρότατου της f , τη θέση και την τιμή του.

β. Ποιες μετατοπίσεις της f δίνουν τη g. Να προσδιορίσετε στη συνέχεια τον τύπο της συνάρτησης g, αν $f(x)=|x+2|$.

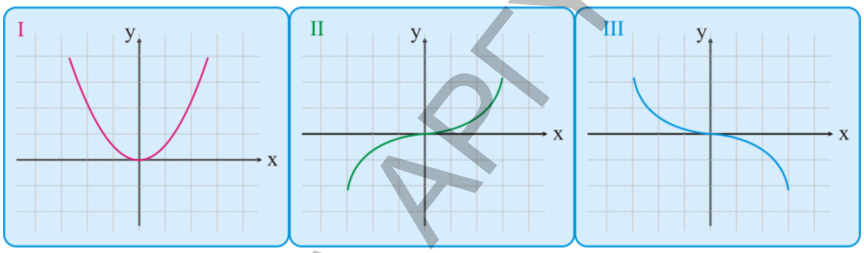
Μονάδες (12+13)=25

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{8-x}-\sqrt{8+x}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

γ. Αν η συνάρτησης f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, να επιλέξετε ποια από τις παρακάτω τρείς προτεινόμενες, είναι η γραφική της παράσταση και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της .



δ. Να αιτιολογήσετε γραφικά ή αλγεβρικά, γιατί οι συναρτήσεις $g(x)=f(x)-3$ και $h(x)=f(x+3)$ δεν είναι ούτε άρτιες ούτε περιττές .

Μονάδες (5+8+7+5)=25

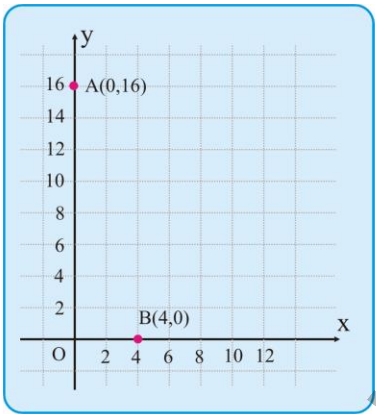
6. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\frac{1}{2}(x-c)^2-d,\ \ x\in\mathbb{R}$ με c, d θετικές σταθερές, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία A(0, 16) και B(4, 0).

α. Με βάση τα δεδομένα, να κατασκευάσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τους c, d και να υπολογίσετε την τιμή τους.

β. Θεωρώντας γνωστό ότι c=6 και d=2,

i. να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

ii. να μεταφέρετε στην κόλα σας το σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή σχετίζεται με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{1}{2}x^2$

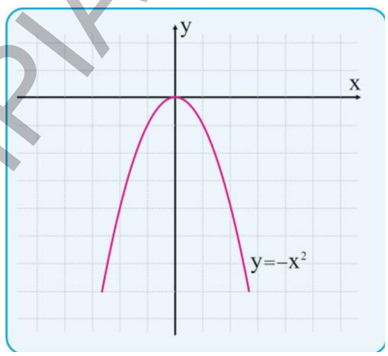


iii. με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση, να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης f, τα διαστήματα στα οποία η f είναι μονότονη, καθώς και το είδος της μονοτονίας της σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.

Μονάδες [10+(3+6+6)]=25

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f



β. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

ii. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του.

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa < 2$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες [10+(5+5+5)]=25

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, α, $\beta\in\mathbb{R}$

α. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία Α(1,2) και Β(5,8), να δείξετε ότι $\alpha=\frac{3}{2}$ και $\beta=\frac{1}{2}$

β. Αν g(x) είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και κατακόρυφα κατά 3 μονάδες προς τα κάτω, να βρείτε τον τύπο της g.

γ. Αν $h(x)=\frac{3}{2}(x-1)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά κ μονάδες προς τα δεξιά και κατακόρυφα κατά $\frac{\kappa}{2}$ μονάδες κάτω, να βρείτε το κ κ>0).

Μονάδες (8+9+8)=25

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^2-12x+19$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f γράφεται στη μορφή: $f(x)=2(x-3)^2+1$

β. Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή προκύπτει μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της g.

γ. Από τη γραφική παράσταση της f να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, το είδος του ακροτάτου, καθώς και την τιμή του.

Μονάδες (9+8+8)=25

10. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$\varphi(x)=|x|,\qquad f(x)=|x|+1\qquad \text{και}\qquad g(x)=|x|-1$$

11. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$\varphi(x)=|x|,\qquad f(x)=|x+3|\qquad \text{και}\qquad g(x)=|x-3|$$

12. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$\varphi(x)=|x|, \qquad f(x)=|x+3|+1 \qquad \text{και} \qquad g(x)=|x-3|-1$$

13. Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x)=3x^2-12x+8$ στη μορφή $f(x)=\alpha(x-p)^2+q$ και στη συνέχεια να βρείτε με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=3x^2$ θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της f.

14. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=x^2-4x+5$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ:

i. κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

ii. κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.

iii. κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

iv. κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.

15. Να βρείτε ποιες μεταφορές έχουν γίνει στη συνάρτηση φ, ώστε να προκύψει η συνάρτηση f, στις επόμενες περιπτώσεις:

i. $f(x)=\varphi(x+2)+3$ **ii.** $f(x)=\varphi(x+3)-1$

iii. $f(x)=\varphi(x-4)+2$ **iv.** $f(x)=\varphi(x-5)-6$

16. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=x^2+6x+15$ και έστω f η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 3 μονάδες προς τα κάτω. Να βρείτε:

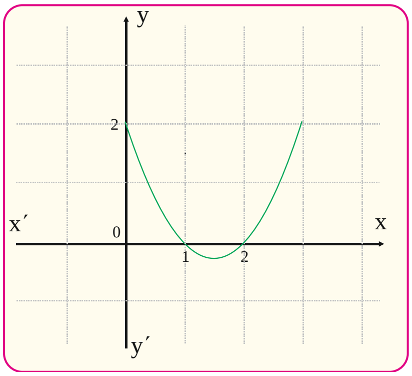
i. τον τύπο της συνάρτησης f.

ii. τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

iii. τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα x΄x.

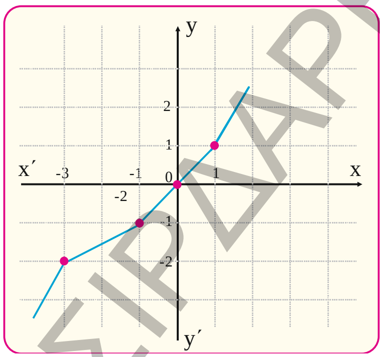
17. Αν η $f(x)=x^2-3x+2$ έχει γραφική παράσταση αυτή του διπλανού σχήματος, τότε να σχεδιάσετε στο ίδιο σχήμα τη γραφική παράσταση της

$$g(x)=-f(x).$$



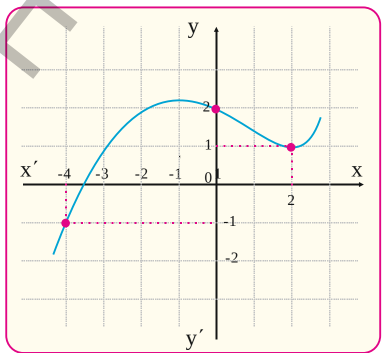
18. Αν στο διπλανό σχήμα είναι η γραφική παράσταση της f, τότε να σχεδιάσετε στο ίδιο σχήμα τη γραφική παράσταση της φ με τύπο

$$\varphi(x) = f(x+1).$$



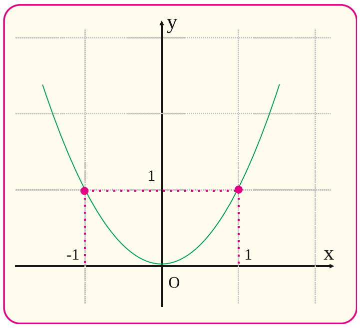
19. Αν στο διπλανό σχήμα είναι η γραφική παράσταση της f, τότε να σχεδιάσετε στο ίδιο σχήμα τη γραφική παράσταση της

$$\varphi(x) = f(x)+2.$$



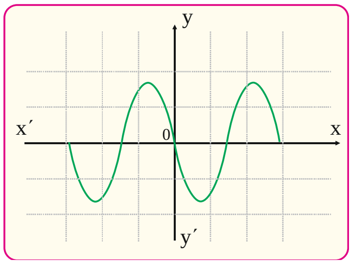
20. Αν στο διπλανό σχήμα είναι η γραφική παράσταση της f, τότε να σχεδιάσετε στο ίδιο σχήμα τη γραφική παράσταση της φ με τύπο

$$\varphi(x) = f(x-2).$$



21. Αν στο διπλανό σχήμα είναι η γραφική παράσταση της f, τότε να σχεδιάσετε στο ίδιο σχήμα της γραφική παράσταση της

$$\varphi(x) = f(x)-1.$$

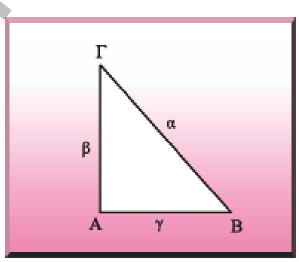


Κεφάλαιο 3ο ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

3.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A}=90^\circ)$. Έχουμε:



$$ημB=\frac{β}{α}\quad\left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}\right)$$

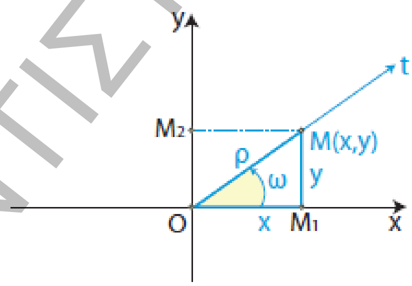
$$συνB=\frac{γ}{α}\quad\left(\frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}\right)$$

$$εφB=\frac{β}{γ}\quad\left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}}\right)$$

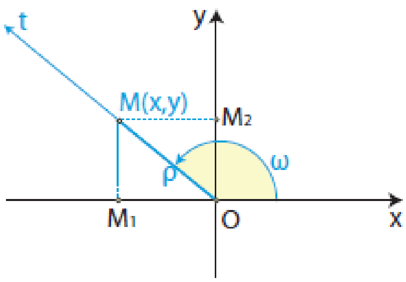
$$σφB=\frac{γ}{β}\quad\left(\frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}}\right)$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω, με $0^\circ \le ω \le 360^\circ$

Από τα παρακάτω σχήματα έχουμε:



Σχήμα α΄



Σχήμα β΄

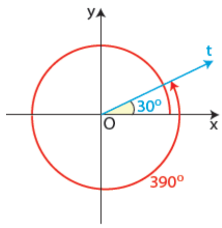
$$ημω=\frac{y}{ρ}\qquad συνω=\frac{x}{ρ}\qquad εφω=\frac{y}{x}\ (x\neq 0)\qquad σφω=\frac{x}{y}\ (y\neq 0)$$

όπου (x,y) οι συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείου Μ (διαφορετικού του Ο) της τελικής πλευράς της γωνίας ω και $\rho=\sqrt{x^2+y^2}>0$ η απόσταση του Μ από το Ο.

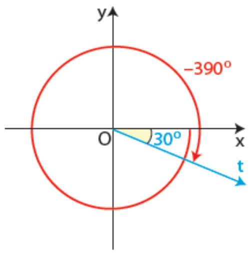
Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών μεγαλύτερων των 360° και αρνητικών γωνιών

Ας θεωρήσουμε μια γωνία ω (θετική ή αρνητική) με αρχική πλευρά τον ημιάξονα Οx.

- Αν ο ημιάξονας Οx, στρεφόμενος γύρω από το Ο κατά τη **θετική** φορά **(αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού)** συμπληρώσει ν $(\nu\in\mathbb{N})$ πλήρεις στροφές και στη συνέχεια διαγράφει γωνία ω τότε θα έχει διαγράψει γωνία $\nu\cdot360^\circ+\omega^\circ$, που έχει την ίδια **τελική** πλευρά με την **ω**.



- Αν ο ημιάξονας Οx, στρεφόμενος γύρω από το Ο κατά την **αρνητική** φορά **(ίδια κίνηση με τους δείκτες του ρολογιού)** συμπληρώσει ν πλήρεις στροφές και στη συνέχεια διαγράψει τη γωνία ω (θετική γωνία) τότε θα έχει διαγράψει γωνία $-\nu\cdot360^\circ+\omega$, που έχει την ίδια **τελική** πλευρά με την **ω**.



Για κάθε $\kappa\in Z$ ισχύει:

$$\eta\mu(\kappa\cdot360^\circ+\omega)=\eta\mu\omega \qquad \varepsilon\varphi(\kappa\cdot360^\circ+\omega)=\varepsilon\varphi\omega$$
$$\sigma\upsilon\nu(\kappa\cdot360^\circ+\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega \qquad \sigma\varphi(\kappa\cdot360^\circ+\omega)=\sigma\varphi\omega$$

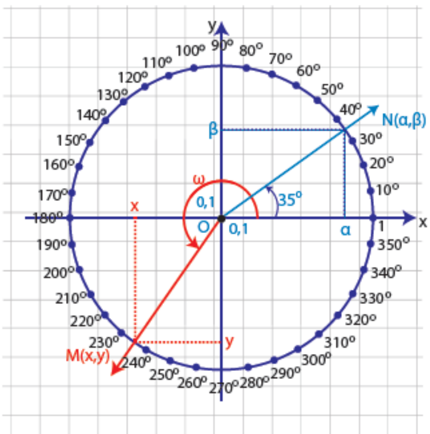
Ο τριγωνομετρικός κύκλος

Τριγωνομετρικός λέγεται ο κύκλος που γράφουμε με **κέντρο** την **αρχή Ο(0,0)** ενός συστήματος αξόνων και **ακτίνα ρ=1**.

Αν η τελική πλευρά μιας γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Μ(x,y), τότε ισχύει:

συνω=x=τετμημένη του σημείου Μ

ημω=y=τεταγμένη του σημείου Μ



Για το λόγο αυτό ο άξονας **x΄x** λέγεται και **άξονας των συνημιτόνων**, ενώ ο άξονας **y΄y** λέγεται και **άξονας των ημιτόνων**.

Άμεσες συνέπειες

Οι τιμές του συνω και του ημω μιας γωνίας ω δεν μπορούν να υπερβούν κατ' απόλυτη τιμή την ακτίνα του τριγωνομετρικού κύκλου, που είναι ίση με 1.

Δηλαδή ισχύει:

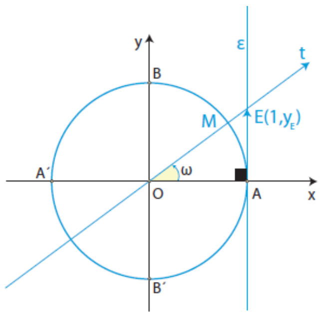
$$-1 \le \text{συνω} \le 1 \qquad -1 \le \text{ημω} \le 1$$

Τα **πρόσημα** των τριγωνομετρικών αριθμών μια γωνίας ω, ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η **τελική πλευρά** της γωνίας αυτής είναι όπως δείχνει ο παρακάτω πίνακας.

	1ο	2ο	3ο	4ο
ημω	+	+	–	–
συνω	+	–	–	+
εφω	+	–	+	–
σφω	+	–	+	–

Ο άξονας των εφαπτομένων

Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο και μία γωνία ω που η τελική πλευρά της τον τέμνει στο σημείο M(x,y). Φέρουμε την εφαπτομένη ε του τριγωνομετρικού κύκλου στο σημείο Α. Αν η ευθεία ΟΜ τέμνει την ε στο Ε ισχύει: $\text{εφω} = y_\varepsilon$ = τεταγμένη του σημείου Ε



Η ευθεία ε που έχει εξίσωση x=1, λέγεται άξονας των εφαπτομένων.

Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών

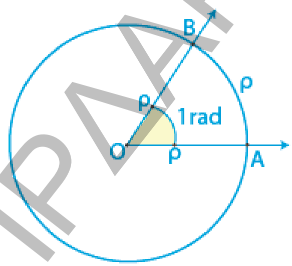
Ένα τόξο ΑΒ ενός κύκλου (Ο,ρ) λέγεται **τόξο ενός ακτινίου (ή 1 rad)** αν το τόξο αυτό έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ του κύκλου.

Επομένως το τόξο α ακτινίων (ή α rad) έχει μήκος S=αρ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ακτίνιο (ή **1 rad**) είναι η γωνία η οποία όταν γίνει **επίκεντρη** σε έναν κύκλο, (Ο,ρ) βαίνει σε τόξο ενός ακτινίου (ή 1 rad).

Ένα **τόξο ΑΒ** ενός κύκλου (Ο, ρ) λέγεται **τόξο ενός ακτινίου (ή 1rad)**, αν το τόξο αυτό έχει **μήκος** ίσο με την **ακτίνα ρ** του κύκλου.



Σχέση μοίρας rad ως μονάδες μέτρησης γωνιών

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180} \qquad \text{όπου α: ακτίνια, μ: μοίρες}$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$

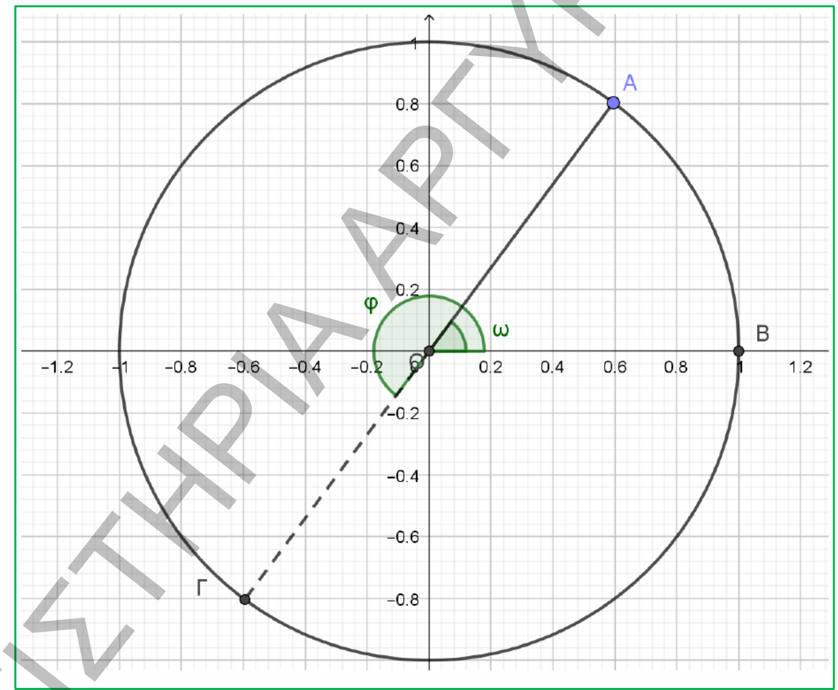
Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
σε μοίρες	σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0^0	0	0	1	0	δεν ορίζεται
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	δεν ορίζεται	0

Κεφάλαιο 3ο ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

3.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ (5)

1. ΘΕΜΑ Β 3.1 15079

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega} = B\hat{O}A$.



α. Με βάση το σχήμα, να αιτιολογήσετε γιατί $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}$.

β. Η προέκταση του τμήματος ΑΟ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Γ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

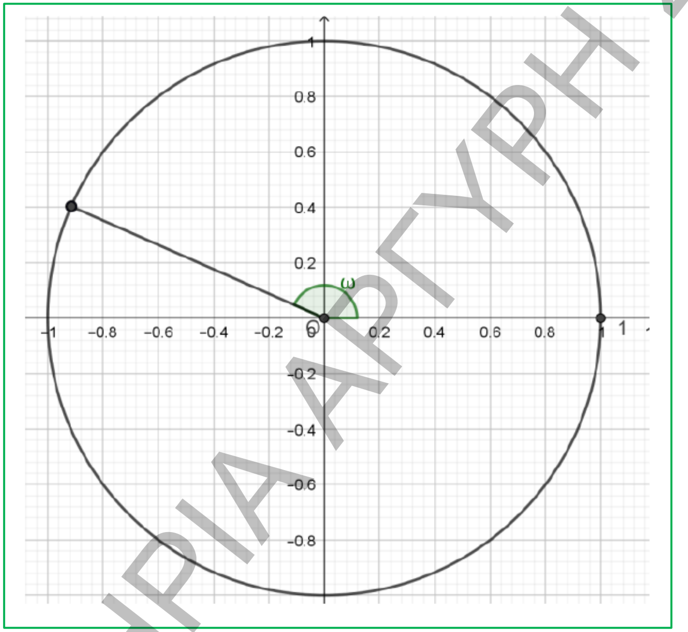
i. Να εκφράσετε την γωνία $\hat{\varphi} = B\hat{O}\Gamma$ με την βοήθεια της γωνίας $\hat{\omega}$.

ii. Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε το $\text{συν}\varphi$.

Μονάδες [8+(8+9)]=25

2. **ΘΕΜΑ Β** **3.1** **15191**

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\text{ημ}\omega = 0,4$.



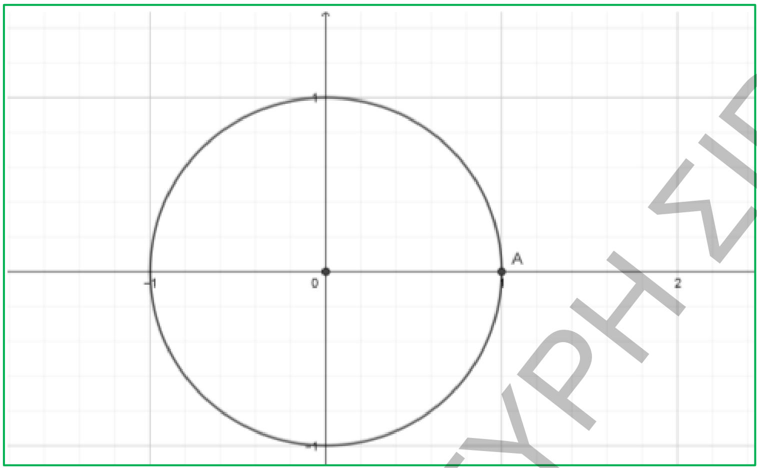
α. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε την γωνία $-\hat{\omega}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το $\text{ημ}(-\omega)$.

Μονάδες (12+13)=25

3. **ΘΕΜΑ Β** **3.1** **17793**

Στον τριγωνομετρικό κύκλο έχει σημειωθεί το σημείο A.



α. Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλα σας και να τοποθετήσετε κατά προσέγγιση στον τριγωνομετρικό κύκλο σημεία B, Γ, Δ ώστε να δημιουργηθούν τόξα $AB = 1\text{rad}$, $A\Gamma = 2\text{rad}$ και $A\Delta = 4\text{rad}$.

β. Για κάθε ένα τόξο του α) ερωτήματος να αποφανθείτε αν το συνημίτονο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Μονάδες (13+12)=25

4. **ΘΕΜΑ Β** **3.1** **18868**

α. Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi 500° = \varepsilon\varphi 140°$.

β. **i.** Να βρείτε το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού $\varepsilon\varphi 500°$

ii. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = \varepsilon\varphi 500° \cdot \eta\mu 250° \cdot \sigma\upsilon\nu 300°$.

Μονάδες [10+(5+10)]=25

5. **ΘΕΜΑ Β** **3.1** **21161**

Σε έναν κύκλο ακτίνας ρ θεωρούμε ένα τόξο AB με μήκος ίσο με 2ρ.

α. Να βρείτε πόσα ακτίνια είναι η αντίστοιχη στο τόξο ΑΒ, επίκεντρη γωνία ω.

β. Αν $\omega = 2$ ακτίνια, να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ω.

Μονάδες (12+13)=25

3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Από τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω προκύπτουν ορισμένες σχέσεις που τους συνδέουν και είναι γνωστές ως **τριγωνομετρικές ταυτότητες.**

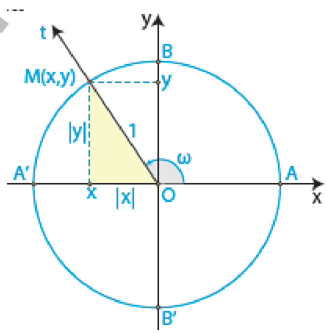
Ισχύουν:

1. $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

2. $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ και $\sigma\varphi\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$

3. $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$

4. $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$ και $\eta\mu^2\omega = \dfrac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$



3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ(9)

1. ΘΕΜΑ Β 3.2 15046

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $συνA = -\frac{3}{5}$.

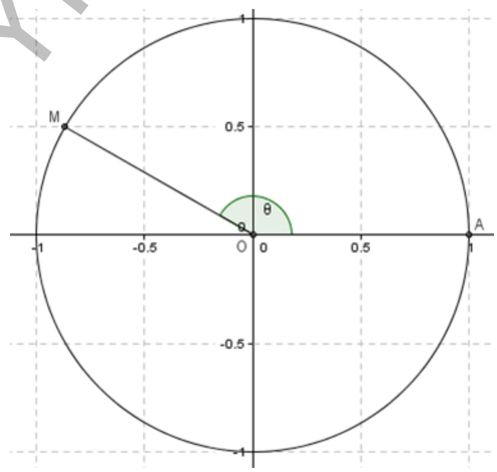
α. Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

β. Να βρείτε το $ημA$.

Μονάδες (10+15)=25

2. ΘΕΜΑ Β 3.2 15060

Στον τριγωνομετρικό κύκλο του σχήματος θεωρούμε το σημείο $M\left(x, \frac{1}{2}\right)$ και τη γωνία θ με $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ η οποία έχει αρχική πλευρά την ΟΑ και τελική την ΟΜ.



α. Να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $ημ\theta = \frac{1}{2}$

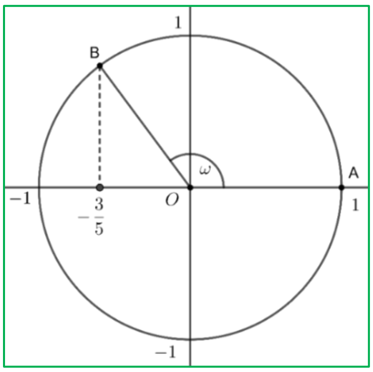
β. Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας θ.

γ. Να βρείτε τη γωνία θ.

Μονάδες (5+5+13)=25

3. ΘΕΜΑ Β 3.2 15185

α. Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας ω του παρακάτω σχήματος και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

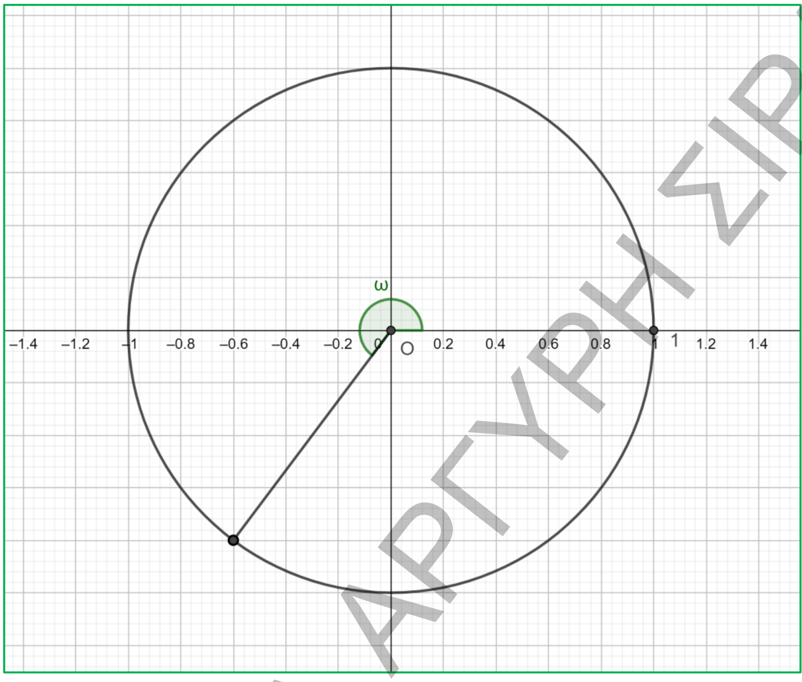


β. Αν $συνω = -\frac{3}{5}$, να βρείτε το ημω.

Μονάδες (11+14)=25

4. ΘΕΜΑ Β 3.2 15192

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$.



α. Να αιτιολογήσετε με βάση το σχήμα γιατί $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$.

β. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

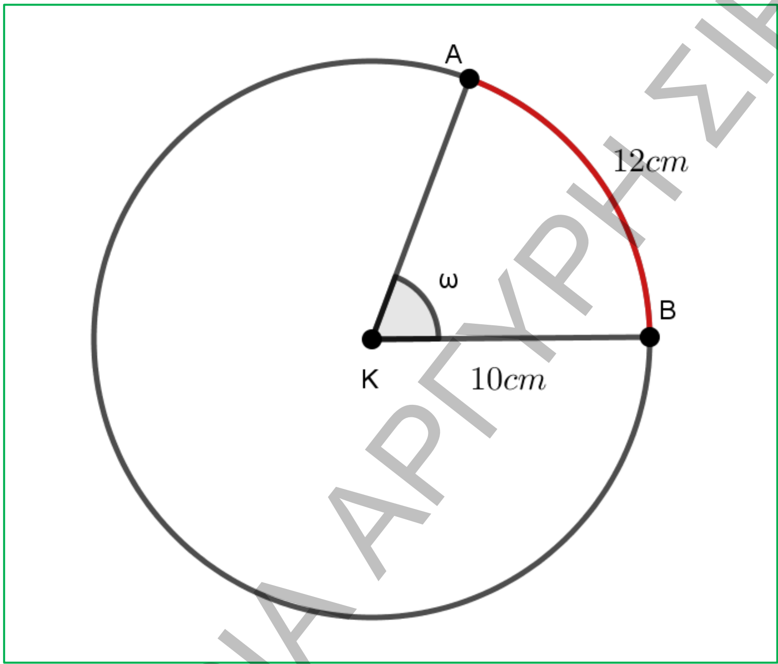
i. $\eta\mu\omega$.

ii. $\varepsilon\varphi\omega$

Μονάδες [12+(6+7)]=25

5. **ΘΕΜΑ Β** **3.2** **15814**

Δίνεται ο κύκλος του παρακάτω σχήματος με κέντρο K και ακτίνα 10cm. Επίσης δίνεται το τόξο AB με μήκος 12cm και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω.



α. **i.** Να αιτιολογήσετε γιατί το μέτρο της γωνίας ω είναι $1,2\text{rad}$.

ii. Με χρήση του αi) ερωτήματος, να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ω είναι οξεία.

β. Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{9}{25}$, να βρείτε το $\eta\mu\omega$.

(Δίνεται ότι $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$).

Μονάδες [(6+6)+13]=25

6. ΘΕΜΑ Β 3.2 16000

α. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία θ ώστε $ημθ = \frac{1}{2}$ και $συνθ = \frac{1}{2}$.

β. Έστω θ μια γωνία με $θ \in \left(\frac{3π}{2}, 2π\right)$ για την οποία ισχύει $συνθ = \frac{1}{2}$. Να βρείτε το $ημθ$.

Μονάδες (12+13)=25

7. ΘΕΜΑ Β 3.2 18229

Έστω θ μια γωνία για την οποία ισχύει $συνθ = -\frac{2}{3}$ και $θ \in \left(π, \frac{3π}{2}\right)$.

α. Να βρείτε το $ημθ$.

β. Αν $ημθ = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = συν(π-θ)συν(-θ) - ημ(π-θ)ημ(-θ).$$

Μονάδες (13+12)=25

8. ΘΕΜΑ Β 3.2 20817

Δίνεται γωνία ω, με $π < ω < \frac{3π}{2}$, για την οποία ισχύει $συνω = -\frac{4}{5}$.

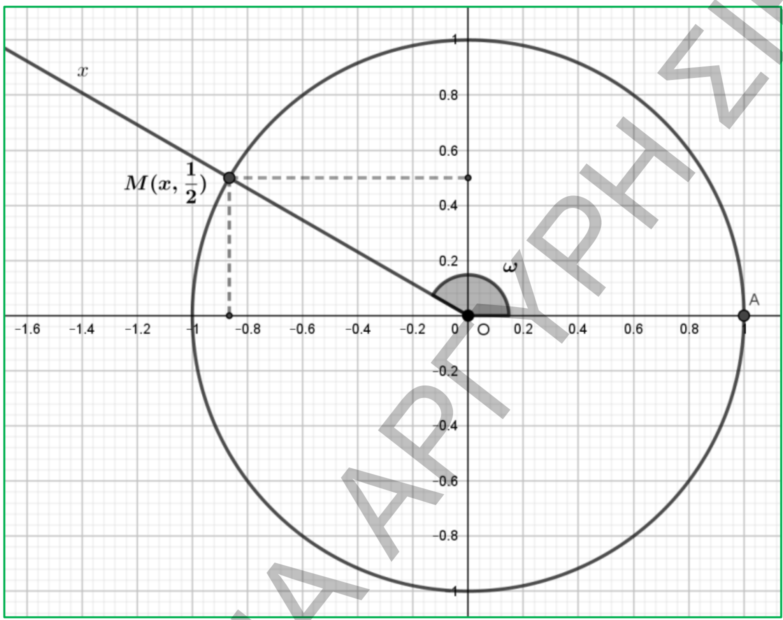
α. Να δείξετε ότι $ημω = -\frac{3}{5}$.

β. Να υπολογίστε την τιμή της παράστασης $A = \frac{ημω + συνω}{1 + εφω}$.

Μονάδες (12+13)=25

9. **ΘΕΜΑ Β** **3.2** **20824**

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται γωνία $A\hat{O}x = \omega$, $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ και το σημείο $M\left(x, \frac{1}{2}\right)$.



α. Να βρείτε το $\eta\mu\omega$. Με ποιον τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας ω ισούται η τετμημένη x του σημείου M;

β. Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Μονάδες (12+13)=25

Κεφάλαιο 3ο ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ 34

3.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§3.1 - §3.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Αν $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ και $(2\sigma\upsilon\nu x+1)\cdot(5\sigma\upsilon\nu x-4)=0$,τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu x=\dfrac{4}{5}$.

β. Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x.

Μονάδες (10+15)=25

2. Αν $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ και $\varepsilon\varphi x=\dfrac{1}{4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$A=17(\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x)+14$$

3. Αν συνx≠0, να δειχτεί ότι:

$$\left(3\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^2\geq 12$$

4. Αν $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$, να δειχθεί ότι: $\sigma\upsilon\nu^3x+2\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu^2x\leq 0$

5. Να αποδειχθεί ότι: $\varepsilon\varphi^2\alpha+\sigma\varphi^2\alpha+2=\dfrac{1}{\eta\mu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$

6. Να αποδειχθεί ότι: $\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu^3\alpha}{\eta\mu\alpha}=\sigma\varphi\alpha$

7. Να αποδειχθεί ότι: $\dfrac{συν^3α - ημ^3α}{1 + ημασυνα} = συνα - ημα$

8. Να αποδειχθεί ότι: $1 + \dfrac{2}{εφα + σφα} = (ημα + συνα)^2$

9. Να αποδειχθεί ότι: $ημ^3α(1 + σφα) + συν^3α(1 + εφα) = ημα + συνα$

10. Να αποδειχθεί ότι: $\dfrac{σφθ - συνθ}{σφθ} + συνθεφθ = 1$

11. Να αποδειχθεί ότι: $ημ^2α \cdot συν^2β - ημ^2β \cdot συν^2α = ημ^2α - ημ^2β$

12. Να αποδειχθεί ότι: $εφθ + \dfrac{συνθ}{1 + ημθ} = \dfrac{1}{συνθ}$

13. Να αποδειχθεί ότι: $ημ^2x \cdot εφx - συν^2x \cdot σφx = εφx - σφx$

14. Να αποδειχθεί ότι: $\dfrac{συν^3θ - συνθ + ημθ}{συνθ} = εφθ - ημ^2θ$

15. Να αποδειχθεί ότι: $\dfrac{1 - 2ημθ}{συν^2θ} - \dfrac{1 - 3ημθ}{1 - ημθ} = 3εφ^2θ$

16. Να αποδειχθεί ότι: $\dfrac{ημ^4α}{1 - ημ^2α - ημ^2α \cdot συν^2α} = εφ^4α$

17. Να αποδειχθεί ότι: $σφ^2ω - συν^2ω = σφ^2ω \cdot συν^2ω$

18. Να αποδειχθεί ότι: $\dfrac{1 + εφα + εφ^2α}{1 + σφα + σφ^2α} = εφ^2α$

19. Να αποδειχθεί ότι: $\dfrac{εφx - ημx}{ημ^3x} = \dfrac{1}{συν^2x + συνx}$

20. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{π}{2}\right)$ ισχύει: $\sqrt{2εφx + \dfrac{1}{συν^2x}} = 1 + εφx$

21. Αν $Α = ημασυνβ + ημβσυνα$ και $Β = συνασυβ - ημαημβ$, να δείξετε ότι $Α^2 + Β^2 = 1$

22. Να δείξετε ότι: $\dfrac{\varepsilon\varphi^3 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}+\dfrac{\sigma\varphi^3 x}{1+\sigma\varphi^2 x}=\dfrac{1-2\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}$

23. Αν $A=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$ και $B=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha$, να δείξετε ότι: $A^2+B^2=1$

24. Αν $x=\alpha\sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu\varphi$, $y=\alpha\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\varphi$, $z=\alpha\eta\mu\theta$, να δείξετε ότι: $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$

25. Να δείξετε ότι: $\dfrac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x+1}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+1}=\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+1}$

26. Να δείξετε ότι: $\left(1+\sigma\varphi x-\dfrac{1}{\eta\mu x}\right)\left(1+\varepsilon\varphi x+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)=2$

27. Να δείξετε ότι η παράσταση

$A=\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha-\eta\mu^2\alpha\varepsilon\varphi\alpha-\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\varphi\alpha-2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$ είναι ανεξάρτητη του α.

28. Αν $\alpha=\dfrac{x}{\sigma\upsilon\nu x}$ και $\beta=y\varepsilon\varphi x$, να δείξετε ότι: $\dfrac{\alpha^2}{x^2}-\dfrac{\beta^2}{y^2}=1$

29. Εξετάστε αν υπάρχει γωνία θ ώστε να ισχύει $\eta\mu\theta=-\dfrac{1}{3}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ και σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της.

30. Εξετάστε αν υπάρχει γωνία θ ώστε να ισχύει $\eta\mu\theta>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

31. Να υπολογιστούν τα ημx και συνx αν:

α. $3\eta\mu x+4\sigma\upsilon\nu x=5$ **β.** $\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu x=2$

32. Αν $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$A=\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$, $B=\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^3 x$, $\Gamma=\eta\mu^4 x+\sigma\upsilon\nu^4 x$

33. Να βρεθεί ο λ ώστε: $\eta\mu x=\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}$ και $\sigma\upsilon\nu x=\dfrac{2\lambda}{\lambda-1}$

34. Να βρεθεί ο λ ώστε: $\varepsilon\varphi x=\dfrac{-\lambda}{\lambda-1}$ και $\sigma\varphi x=\dfrac{3\lambda}{\lambda+1}$

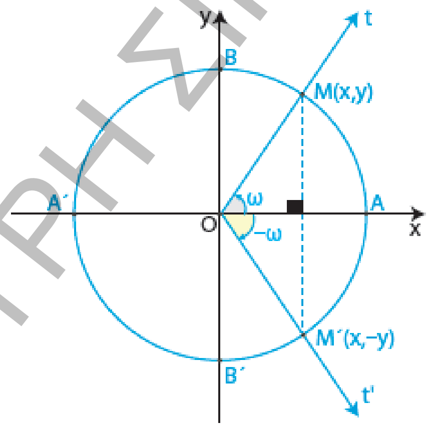
3.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Ο υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών οποιασδήποτε γωνίας μπορεί να γίνει, με τη βοήθεια πινάκων που δίνουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών από 0° μέχρι 90°.

Γωνίες αντίθετες

$\sigma\upsilon\nu(-\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega \qquad \eta\mu(-\omega)=-\eta\mu\omega$

$\varepsilon\varphi(-\omega)=-\varepsilon\varphi\omega \qquad \sigma\varphi(-\omega)=-\sigma\varphi\omega$



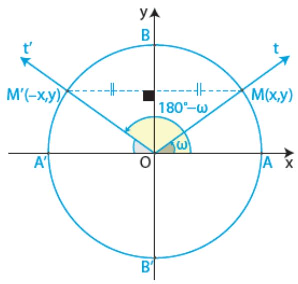
Δηλαδή:

Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Γωνίες με άθροισμα 180°

$\eta\mu(180^\circ-\omega)=\eta\mu\omega \qquad \sigma\upsilon\nu(180^\circ-\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega$

$\varepsilon\varphi(180^\circ-\omega)=-\varepsilon\varphi\omega \qquad \sigma\varphi(180^\circ-\omega)=-\sigma\varphi\omega$



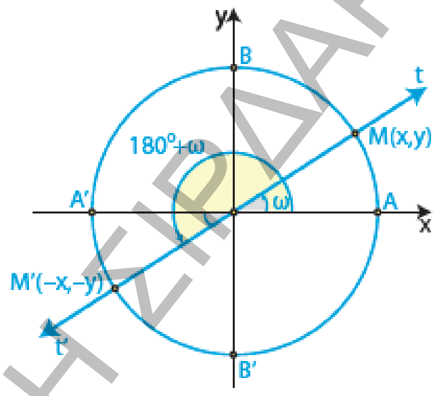
Δηλαδή:

Οι γωνίες με άθροισμα 180° έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Γωνίες που διαφέρουν κατά 180°

$\eta\mu(180^\circ+\omega)=-\eta\mu\omega \qquad \sigma\upsilon\nu(180^\circ+\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega$

$\varepsilon\varphi(180^\circ+\omega)=\varepsilon\varphi\omega \qquad \sigma\varphi(180^\circ+\omega)=\sigma\varphi\omega$

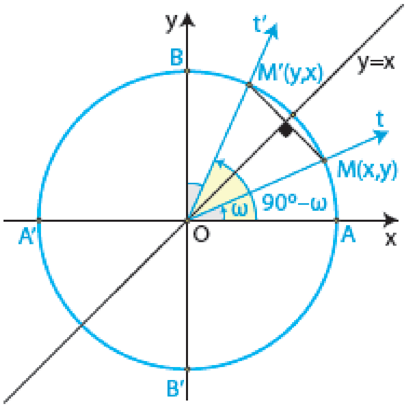


Δηλαδή: Οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180° έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο, ενώ έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη.

Γωνίες με άθροισμα 90°

$\eta\mu(90^\circ-\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega \qquad \sigma\upsilon\nu(90^\circ-\omega)=\eta\mu\omega$

$\varepsilon\varphi(90^\circ-\omega)=\sigma\varphi\omega \qquad \varepsilon\varphi(90^\circ-\omega)=\sigma\varphi\omega$



Δηλαδή:

Αν δύο γωνίες έχουν άθροισμα 90° το ημίτονο της μιας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας ισούται με τη συνεφαπτομένη της άλλης.

Σχόλιο

Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι δε χρειάζεται να έχουμε πίνακες τριγωνομετρικών αριθμών όλων των γωνιών, αλλά μόνο των γωνιών από 0° μέχρι 90°

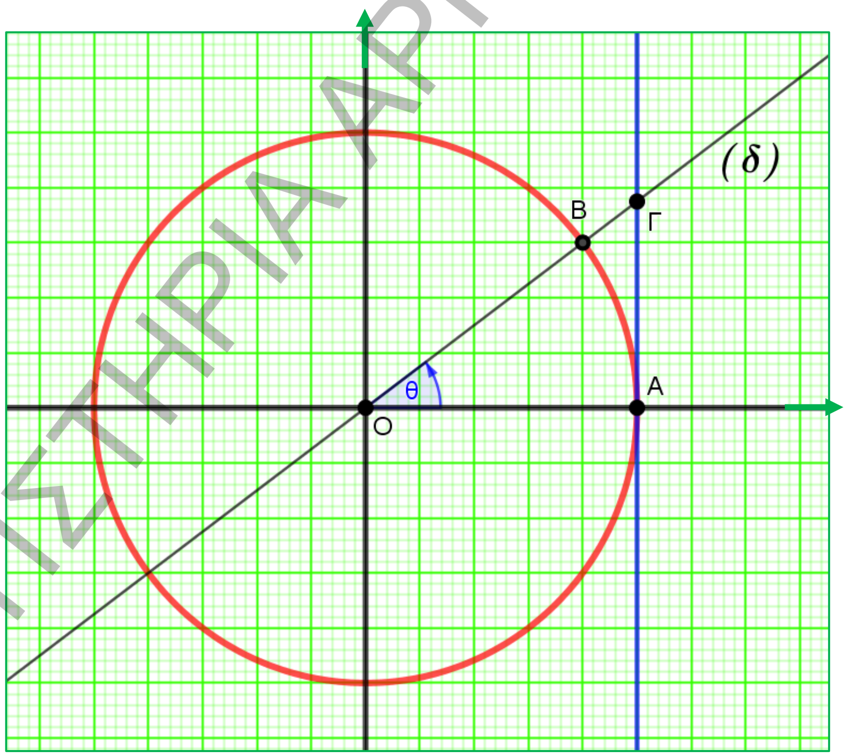
3.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ (11)

1. ΘΕΜΑ Β 3.2 15092

Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί ο τριγωνομετρικός κύκλος και η ευθεία (δ) η οποία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Η τελική πλευρά ΟΒ της θετικής γωνίας $A\hat{O}B=\hat{\theta}$, αν προεκταθεί τέμνει την ευθεία (δ) στο σημείο Γ. Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\theta=\frac{3}{5}$.

α. Με τη βοήθεια του σχήματος ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τον αριθμό *συνθ* και στη συνέχεια τον αριθμό *εφθ*.

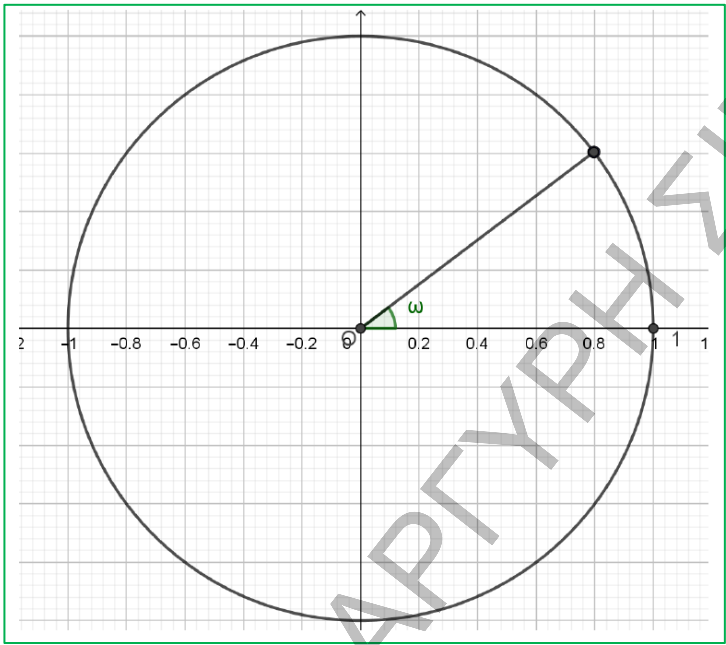
β. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.



Μονάδες (13+12)=25

2. ΘΕΜΑ Β 3.2 15193

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\sigma\upsilon\nu\omega = 0,8$.



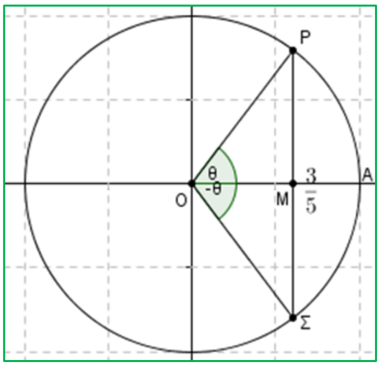
α. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε τις γωνίες στο διάστημα $[0, 2\pi]$, των οποίων το συνημίτονο είναι $-0,8$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να βρείτε την σχέση των γωνιών που βρήκατε στο α) ερώτημα με την γωνία $\hat{\omega}$.

Μονάδες (12+13)=25

3. ΘΕΜΑ Β 3.2 15266

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος και οι γωνίες θ και $-\theta$.



α. Να αιτιολογήσετε γιατί $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3}{5}$.

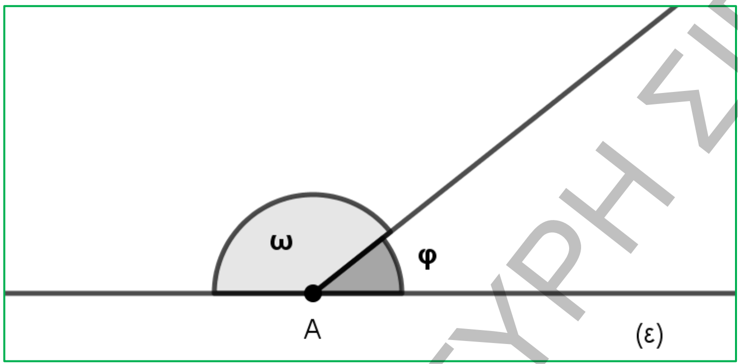
β. Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

γ. Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας $-\theta$.

Μονάδες (8+9+8)=25

4. **ΘΕΜΑ Β** **3.2** **15652**

Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο Α της ευθείας (ε) του παρακάτω σχήματος.



α. Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ.

β. Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της αμβλείας γωνίας ω.

Μονάδες (13+12)=25

5. **ΘΕΜΑ Β** **3.2** **15999**

Δίνεται η παράσταση $A = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \eta\mu(-\theta)$.

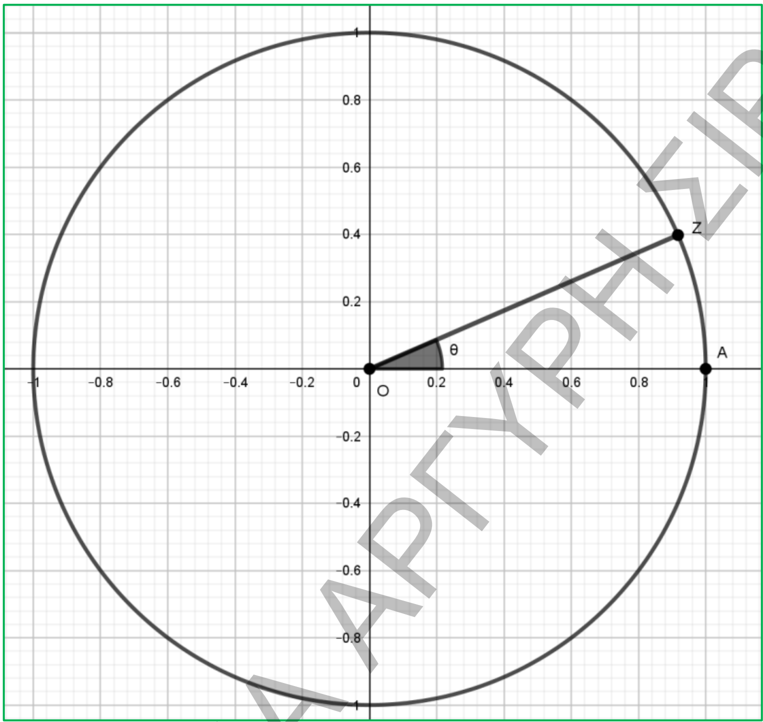
α. Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu\theta$.

β. Να βρείτε την τιμή της παράστασης Α, όταν $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{12}{13}$.

Μονάδες (12+13)=25

6. ΘΕΜΑ Β 3.2 17933

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $AOZ = \theta$.



α. Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi+\theta$ και $4\pi-\theta$.

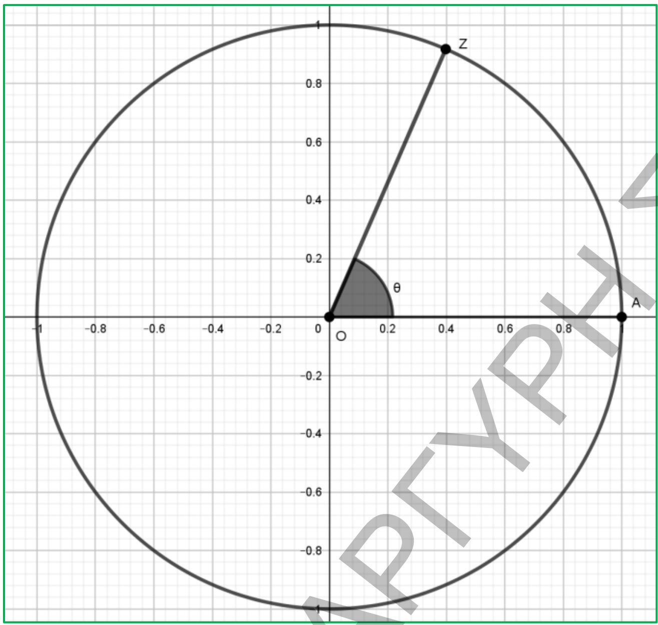
β. **i.** Να αιτιολογήσετε γιατί $\etaμ\theta = 0,4$.

ii. Με χρήση του βi) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\etaμ(3\pi+\theta)$ και $\etaμ(4\pi-\theta)$.

Μονάδες [9+(7+9)]=25

7. **ΘΕΜΑ Β** **3.2** **17936**

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $AOZ = \theta$.



α Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi + \theta$ και $\frac{\pi}{2} + \theta$.

β. **i.** Να αιτιολογήσετε γιατί $\sigma\upsilon\nu\theta = 0,4$.

ii. Με χρήση του βi) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\sigma\upsilon\nu(3\pi + \theta)$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$.

Μονάδες [9+(7+9)]=25

8. **ΘΕΜΑ Β** **3.2** **20761**

Δίνεται γωνία ω η οποία είναι ίση με -1125^0.

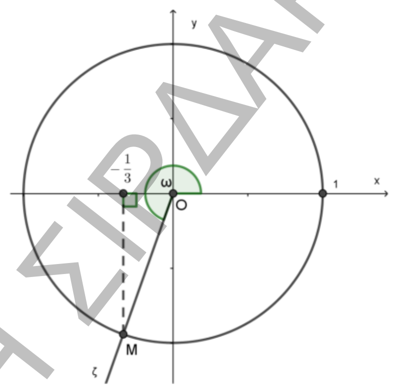
α. Να αποδείξετε ότι η γωνία ω ισούται με $\frac{-25\pi}{4}$ ακτίνια (rad).

β. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

Μονάδες (9+16)=25

9. ΘΕΜΑ Β 3.2 20942

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται γωνία $x\hat{O}\zeta = \omega$ με $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$



α. Να αιτιολογήσετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{3}$.

β. Να υπολογίσετε το ημίτονο και την εφαπτομένη της γωνίας ω.

γ. Να υπολογίσετε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας $\pi - \omega$.

Μονάδες (7+10+8)=25

10. ΘΕΜΑ Β 3.2 21237

Δίνεται ότι $\eta\mu\theta = \dfrac{\eta\mu\frac{2\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}}$.

α. Να δείξετε ότι:

i. $\eta\mu\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **ii.** $\eta\mu\theta = \sqrt{3} - 1$.

β. Αν για την γωνία θ έχουμε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\theta$.

Μονάδες [(5+7)+13]=25

11. ΘΕΜΑ Β 3.2 22002

Δίνεται ότι $\eta\mu 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Να βρείτε τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς αριθμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

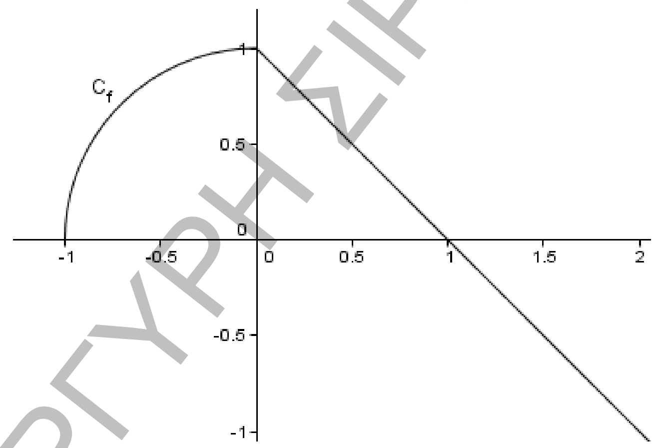
α. $\sigma\upsilon\nu 72^\circ$ **β.** $\sigma\upsilon\nu 108^\circ$ **γ.** $\eta\mu 162^\circ$

Μονάδες (8+9+8)=25

3.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1° ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ (1)

1. **ΘΕΜΑ Δ** **3.3** **18231**

Έστω $f:[-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση C_f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α. Να βρείτε τη μονοτονία και τη μέγιστη τιμή της.

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$f\left(-\frac{3}{5}\right),\ f\left(-\frac{5}{9}\right)$$

γ. Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 0\\ 1-x, & x>0\end{cases},$$

να βρείτε τους αριθμούς $f(\text{συν}120^\circ)$, $f(\text{ημ}120^\circ)$

δ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x-2)$, $x\ge 1$.

Μονάδες (5+7+8+5)=25

Κεφάλαιο 3ο ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ 18

3.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

§3.3 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας: **α.** -2040° **β.** $\frac{27\pi}{4}$

2. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A=\dfrac{6\eta\mu\left(-\frac{23\pi}{6}\right)+\varepsilon\varphi\frac{9\pi}{4}+2\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{17\pi}{3}\right)}{\sigma\upsilon\nu\frac{74\pi}{6}-\sigma\varphi\left(-\frac{95\pi}{4}\right)}$

3. Να αποδειχθεί ότι: $\dfrac{\eta\mu(\pi+\alpha)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\eta\mu(2\pi-\alpha)}=\sigma\upsilon\nu\alpha$

4. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A=\dfrac{\eta\mu(180^\circ-\alpha)\varepsilon\varphi(270^\circ-\alpha)\sigma\upsilon\nu(\alpha-360^\circ)}{\sigma\varphi(180^\circ+\alpha)\varepsilon\varphi(90^\circ+\alpha)\sigma\upsilon\nu(270^\circ+\alpha)}$

5. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A=\dfrac{\varepsilon\varphi(\pi-\theta)\sigma\upsilon\nu(2\pi+\theta)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\eta\mu(\pi+\theta)\sigma\upsilon\nu(-\theta)\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

6. Να αποδειχθεί ότι $A=\sigma\upsilon\nu210^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu225^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu240^\circ=-\frac{\sqrt{6}}{8}$

7. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A=\eta\mu^2 68^\circ+\eta\mu^2 22^\circ-2\eta\mu^2 112^\circ+\sigma\upsilon\nu^3 112^\circ+\sigma\upsilon\nu^3 68^\circ-2\sigma\upsilon\nu^2 68^\circ$$

8. Αν $0<x<\frac{\pi}{2}$ και $\varepsilon\varphi x=\frac{5}{12}$, να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $A=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sigma\upsilon\nu(\pi-x)$

9. Να δείξετε ότι $A=\eta\mu\alpha-\eta\mu(\alpha-90^\circ)-\eta\mu(\alpha-180^\circ)-\eta\mu(\alpha-270^\circ)-\eta\mu(\alpha-360^\circ)=\eta\mu\alpha$

10. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A=\dfrac{\eta\mu(\pi+\theta)\sigma\upsilon\nu\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\varepsilon\varphi(7\pi+\theta)}{\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)\sigma\upsilon\nu(3\pi-\theta)\varepsilon\varphi(2\pi+\theta)}$

11. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A=\dfrac{\eta\mu(\pi+\theta)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\varepsilon\varphi(-\theta)+\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\varepsilon\varphi(2\pi+\theta)}$

12. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A=\dfrac{\eta\mu(\pi+\theta)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sigma\upsilon\nu(2\pi-\theta)\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\varepsilon\varphi(\pi+\theta)\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

αν $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{4}{5}$ με $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

13. Να αποδείξετε ότι: $A=\dfrac{\varepsilon\varphi(\pi+x)\sigma\upsilon\nu(-x)\eta\mu(9\pi+x)}{\sigma\varphi\left(\frac{17\pi}{2}-x\right)\sigma\upsilon\nu(x-2\pi)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2}+x\right)}=1$

14. Δίνονται οι παραστάσεις $A=\varepsilon\varphi1^\circ\varepsilon\varphi91^\circ\varepsilon\varphi2^\circ\varepsilon\varphi92^\circ$ και

$$B=\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\eta\mu(\pi-x)\eta\mu(-x)-2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sigma\upsilon\nu(\pi-x).$$

Να δειχθεί ότι: Β=2Α

15. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A=\dfrac{\eta\mu135^\circ\sigma\upsilon\nu120^\circ+\sigma\upsilon\nu135^\circ\sigma\upsilon\nu120^\circ}{\varepsilon\varphi(-120^\circ)+\varepsilon\varphi135^\circ}$

16. Να αποδείξετε ότι: $A=\sigma\upsilon\nu^2 135^\circ(\sqrt{3}\eta\mu120^\circ+\eta\mu150^\circ)=1$

17. Αν $\varepsilon\varphi(45^\circ-x)+\varepsilon\varphi(45^\circ+x)=10$ να αποδείξετε ότι: $A=\varepsilon\varphi^2(45^\circ-x)+\varepsilon\varphi^2(45^\circ+x)=98$

18. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(A=90^\circ)$ ισχύει ότι:

i. $\eta\mu B+\sigma\upsilon\nu B=\eta\mu\Gamma+\sigma\upsilon\nu\Gamma$

ii. $\varepsilon\varphi B+\sigma\varphi B=\sigma\varphi\Gamma+\varepsilon\varphi\Gamma$.

3.4 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός T>0, τέτοιος ώστε **για κάθε** $x \in A$ να ισχύει:

i. $x+T \in A,\ x-T \in A$

ii. $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός **T** λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f.

Μελέτη της συνάρτησης f(x)=ημx

Πεδίο ορισμού: **R**

Περίοδος: **T=2π**

Μελετούμε την f στο διάστημα [0,2π]. Έχουμε:

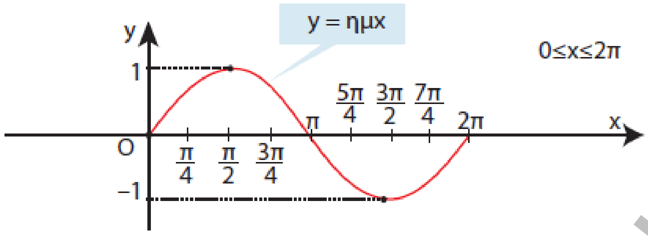
- Στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι **γνησίως αύξουσα**
- Στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ είναι **γνησίως φθίνουσα**
- Στο $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ είναι **γνησίως φθίνουσα**
- Στο $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ είναι **γνησίως αύξουσα**

Η f παρουσιάζει **μέγιστο** στο $x=\frac{\pi}{2}$, το $ημ\frac{\pi}{2}=1$ και **ελάχιστο** στο $x=\frac{3\pi}{2}$, το $ημ\frac{3\pi}{2}=-1$

δηλαδή:

x	0		π/2		π		3π/2		2π
ημx	0	↗	1 μέγ	↘	0	↘	−1 ελάχ	↗	0

Η γραφική της παράσταση είναι:



Η f είναι **περιττή** συνάρτηση και επομένως η γραφική της παράσταση έχει **κέντρο συμμετρίας την αρχή** των αξόνων.

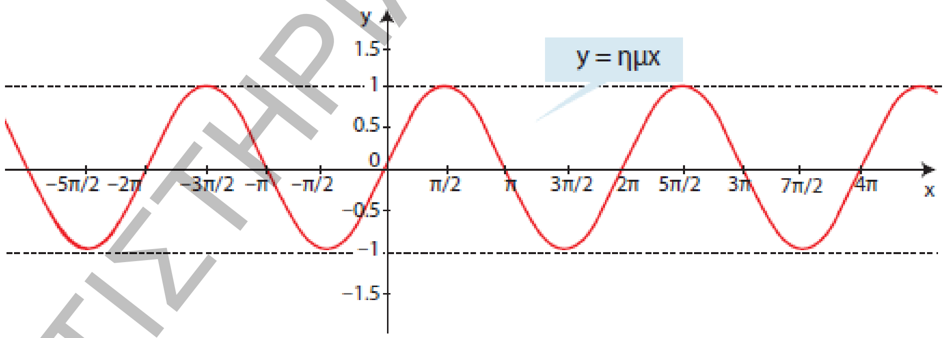
Επειδή η συνάρτηση f(x)=ημx είναι περιοδική, με περίοδο 2π, η γραφική της παράσταση έχει την ίδια μορφή στα διαστήματα

$$[2\pi,\ 4\pi],\ [4\pi,\ 6\pi],\ \text{κ.τ.λ}$$

καθώς και στα διαστήματα

$$[-2\pi,\ 0],\ [-4\pi,\ -2\pi]\ \text{κ.τ.λ}$$

Έτσι έχουμε την ακόλουθη γραφική παράσταση της συνάρτησης **ημίτονο**, η οποία λέγεται **ημιτονοειδής καμπύλη.**



Μελέτη της συνάρτησης f(x)=συνx

Πεδίο ορισμού: R

Περίοδος: Τ=2π

Μελετούμε την f στο διάστημα [0,2π].

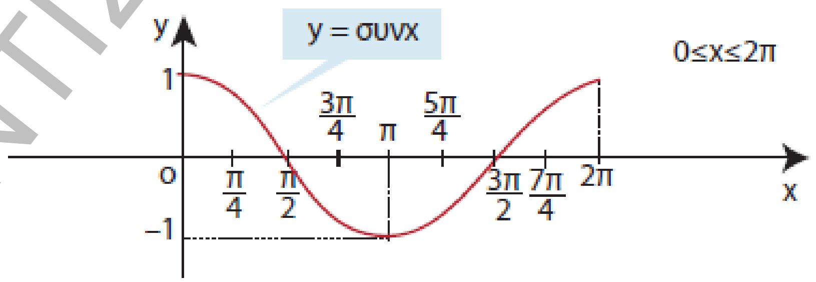
Έχουμε:

- Στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι **γνησίως φθίνουσα**
- Στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ είναι **γνησίως φθίνουσα**
- Στο $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ είναι **γνησίως αύξουσα**
- Στο $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ είναι **γνησίως αύξουσα**

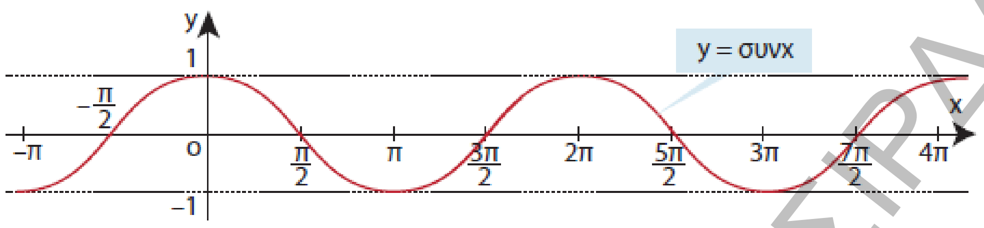
Η f παρουσιάζει **μέγιστο** στο **x=0**, το συν0=**1** και στο **x=2π** το συν2π=**1** ενώ παρουσιάζει **ελάχιστο** στο **x=π**, το $\sigma\upsilon\nu\pi=-1$ δηλαδή:

x	0		π/2		π		3π/2		2π
ημx	1 μεγ	↘	0	↘	−1 ελάχ	↗	0	↗	1 μεγ

Η γραφική της παράσταση είναι:



Επειδή η συνάρτηση **f(x)=συνx** είναι περιοδική με περίοδο 2π, **η γραφική της παράσταση στο R** είναι η ακόλουθη:



Τέλος γνωρίζουμε ότι οι αντίθετες γωνίες έχουν ίδιο συνημίτονο.

Άρα για κάθε $x \in R$ ισχύει $συν(-x) = συνx$.

Αυτό σημαίνει ότι

η συνάρτηση **f(x)=συνx** είναι ***άρτια*** συνάρτηση

και επομένως

η γραφική της παράσταση έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα **y΄y**.

Μελέτη της συνάρτησης f(x)=εφx

Πεδίο ορισμού: $A=\{x\,/\,\sigma\upsilon\nu x\neq 0\}$

Περίοδος: **T=π**

Μελετούμε την f στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$:

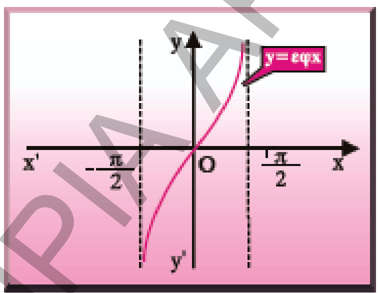
Έχουμε:

Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

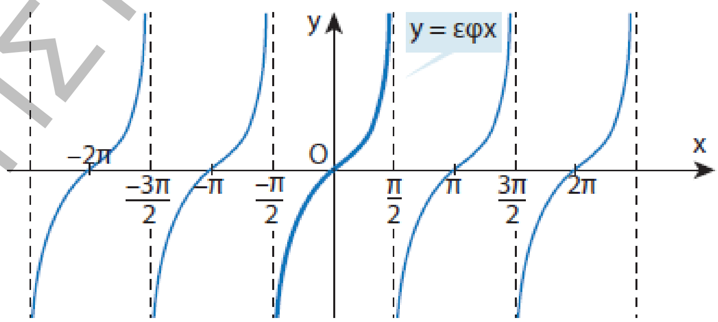
Οι ευθείες $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$ είναι **κατακόρυφες ασύμπτωτες** της γραφικής παράστασης της f.

Η f είναι **περιττή** συνάρτηση.

Η γραφική της παράσταση είναι:



Η γραφική της παράσταση της f(x)=εφx στο π.ο της φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Είναι φανερό ότι η γραφική της παράσταση της f(x)=εφx έχει κέντρο συμμετρίας το O **αφού είναι περιττή συνάρτηση καθόσον** $\varepsilon\varphi(-x)=-\varepsilon\varphi x$ **.**

Παρατηρήσεις:

- Μια συνάρτηση της μορφής

  $$f(x)=\rho\eta\mu\omega x \quad ή \quad f(x)=\rho\sigma\upsilon\nu\omega x \ (\rho,\omega>0)$$

  είναι: περιοδική με **περίοδο** $\frac{2\pi}{\omega}$,

  έχει **ελάχιστη** τιμή το $-\rho$ και **μέγιστη** τιμή το **ρ**.

- Μια συνάρτηση της μορφής

  $$f(x)=\rho\varepsilon\varphi\omega x \quad ή \quad f(x)=\rho\sigma\varphi\omega x$$

  είναι περιοδική με **περίοδο** $\frac{\pi}{\omega}$ ενώ **δεν** έχει **ακρότατα**.

3.4 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (16)

1. ΘΕΜΑ Β 3.4 15009

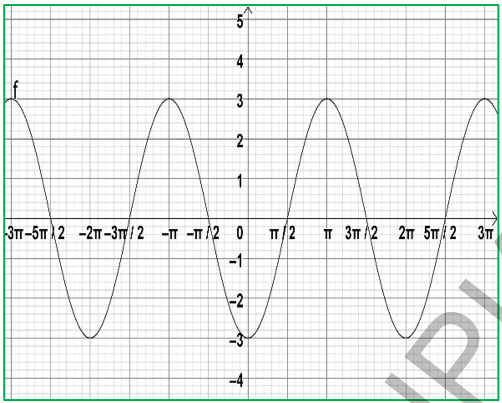
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\text{συν}x,\ x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

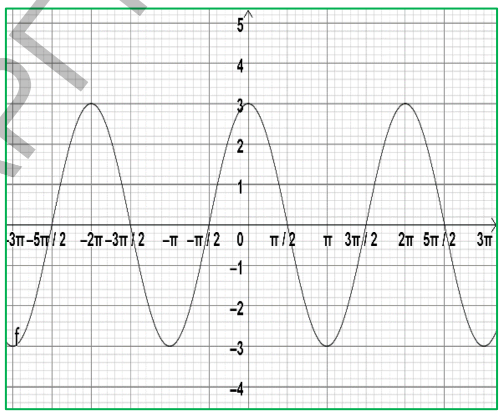
β. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

γ. Από τις παρακάτω τέσσερις γραφικές παραστάσεις μία μόνο αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της f, να επιλέξετε αυτή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $f(x) = -3\text{συν}x$, και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

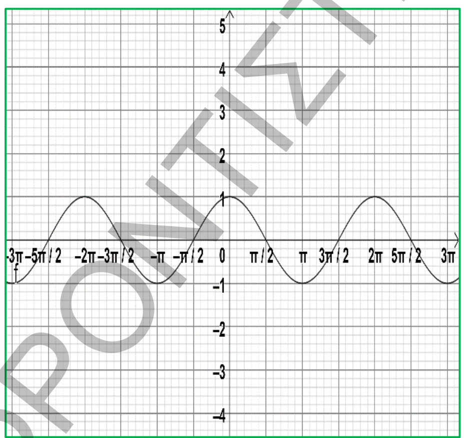
Α.



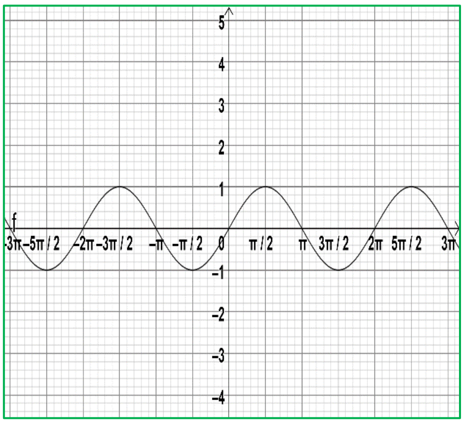
Β.



Γ.



Δ.



Μονάδες (8+7+10)=25

2. ΘΕΜΑ Β 3.4 15091

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x,\ \ x\in R$.

α. **i.** Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης.

ii. Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμής της.

β. Να υπολογίσετε τον αριθμό $f(2025\pi)$.

Μονάδες (7+10+8)=25

3. ΘΕΜΑ Β 3.4 15172

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4\eta\mu(11\pi-x),\ \ x\epsilon\mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι:

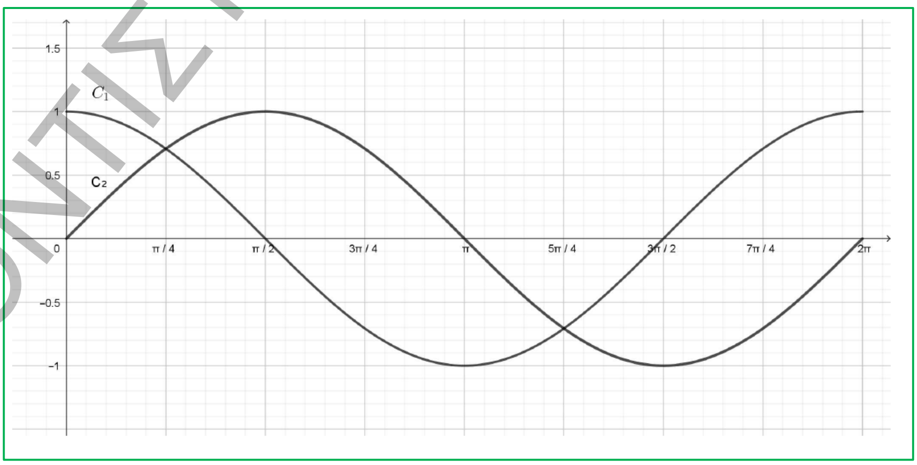
i. $\eta\mu(11\pi-x)=\eta\mu x,\ \ x\epsilon\mathbb{R}$. **ii.** $f(x)=4\eta\mu x,\ \ x\epsilon\mathbb{R}$.

β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτηση $f(x)=4\eta\mu x$, όταν $x\epsilon[0,2\pi]$.

Μονάδες [(6+4)+15]=25

4. ΘΕΜΑ Β 3.4 15644

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 για $x\in[0,2\pi]$.

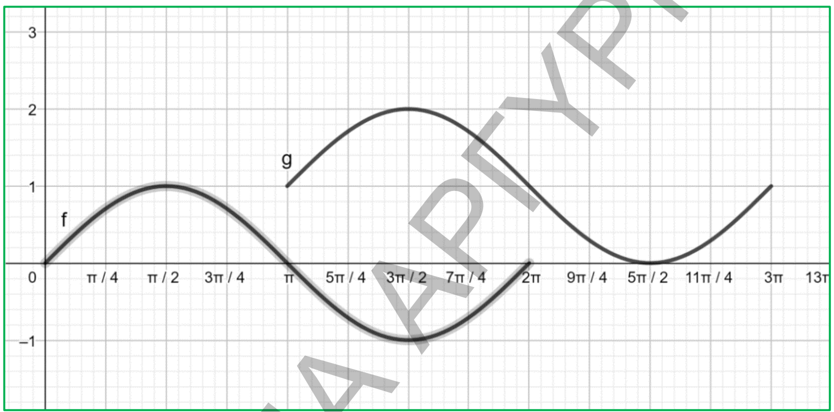


α. Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ και $g(x)=\eta\mu x$ για $x\in[0,2\pi]$, ποια από τις C_1, C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ και ποια της $g(x)=\eta\mu x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Με την βοήθεια του σχήματος να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0,2\pi]$.

Μονάδες $(10+15)=25$

5. **ΘΕΜΑ Β** **3.4** **15788**



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης .. στο διάστημα $[0,2\pi]$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g που προέκυψε από την f με δύο διαδοχικές μετατοπίσεις. Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

α. το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g, την μέγιστη τιμή της και σε ποια θέση την αποκτά.

β. **i.** τις δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f από τις οποίες προέκυψε η g.

ii. τον τύπο της g.

Μονάδες $[13+(6+6)]=25$

6. **ΘΕΜΑ Β** **3.4** **15809**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu 2x$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f.

β. **i.** Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	**0**	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2x					
$f(x)=ημ2x$					

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα μίας περιόδου.

Μονάδες $[6+(10+9)]=25$

7. **ΘΕΜΑ Β** **3.4** **15810**

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=συν2x$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της g.

β. **i.** Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	**0**	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2x					
$g(x)=συν2x$					

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g σε διάστημα μίας περιόδου.

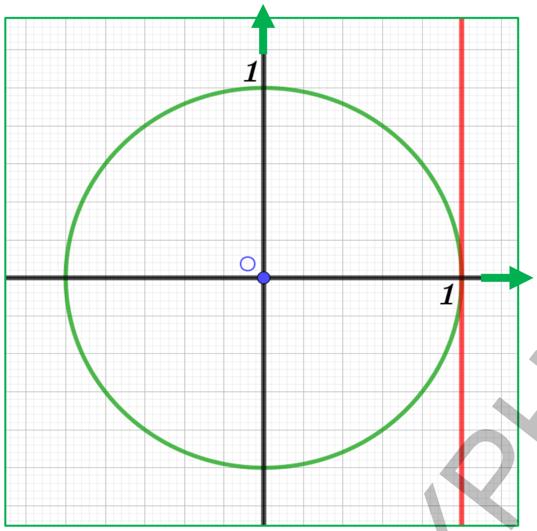
Μονάδες $[6+(10+9)]=25$

8. **ΘΕΜΑ Β** **3.4** **16131**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=εφx$, $x\in R-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$, όπου $k\in\mathbb{Z}$.

α. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1$ στο διάστημα $(0,2\pi)$.

β. Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο να παραστήσετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.



Μονάδες 15+10=25

9. **ΘΕΜΑ Β** **3.4** **20660**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ημ(180°-x)+συν(90°-x)$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=2ημx$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β. **i.** Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f.

ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f για $0\le x\le 2\pi$.

Μονάδες [12+(6+7)]]=25

10. **ΘΕΜΑ Β** **3.4** **20807**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ημ(\pi+x)+ημ(-x)$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=-2ημx$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να βρείτε την περίοδο αυτής.

β. **i.** Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)=-2ημx$					

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $0 \le x \le 2\pi$.

Μονάδες [12+(6+7)]=25

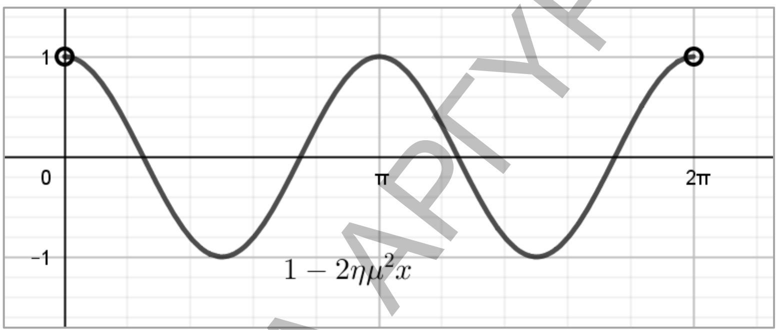
11. ΘΕΜΑ Β 3.4 20867

Δίνεται η παράσταση $A = συν^2 x - ημ^2 x$.

α. Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για $x = 0$.

β. Να δείξετε ότι $A = 1 - 2ημ^2 x$.

γ. Με χρήση της παρακάτω γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $1 - 2ημ^2 x$ και του ερωτήματος β), να λύσετε την εξίσωση $A = 1$, για $0 < x < 2\pi$.



Μονάδες (7+9+9)=25

12. ΘΕΜΑ Β 3.4 21235

Δίνεται η παράσταση $A = \dfrac{ημ(180^\circ - 20^\circ) \cdot συν(-3x)}{συν(90^\circ - 20^\circ)}$.

α. Να δείξετε ότι $A = συν3x$.

β. Να βρείτε την μέγιστη τιμή και την περίοδο της συνάρτησης $f(x) = συν3x$.

Μονάδες (13+12)=25

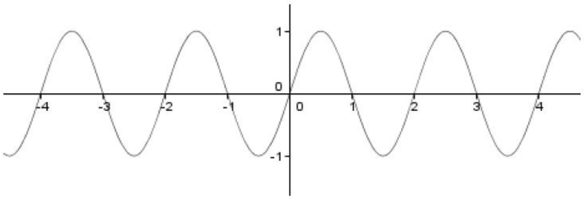
13. ΘΕΜΑ Β 3.4 22003

Δίδεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = ημ(2\pi x)$.

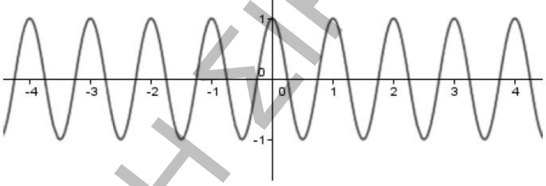
α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο $T = 1$.

β. Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

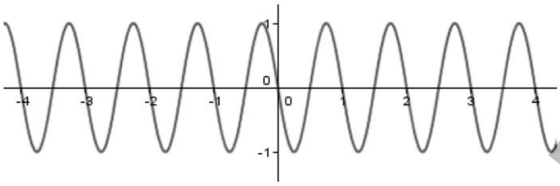
γ. Μία από τις παρακάτω τέσσερεις καμπύλες αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Ποια είναι αυτή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



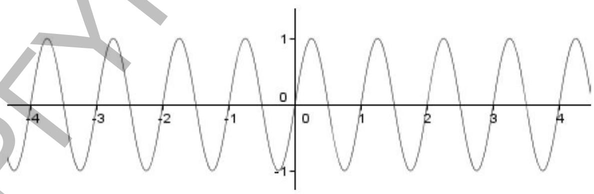
(i)



(ii)



(iii)

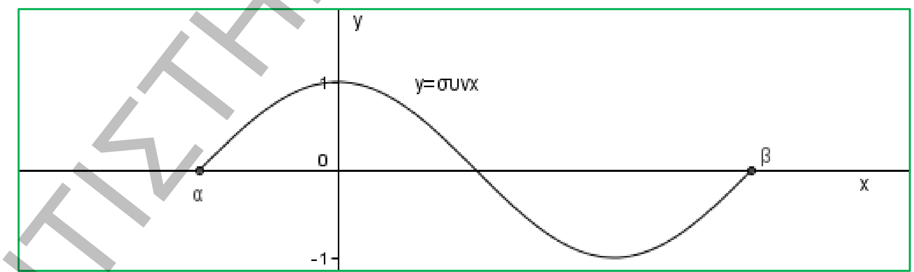


(iv)

Μονάδες (8+8+9)=25

14. **ΘΕΜΑ Β** **3.4** **22007**

Στο σχήμα φαίνεται απόσπασμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης συνx.



α. Να βρείτε τα α και β.

β. Προς ποια κατεύθυνση και κατά πόσο πρέπει να μετατοπιστεί η παραπάνω καμπύλη ώστε να συμπέσει με τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ημx ;

Μονάδες (12+13)=25

15. **ΘΕΜΑ Β** **3.4** **31568**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}συν2x$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης f;

β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

Μονάδες (12+13)=25

16. **ΘΕΜΑ Β** **3.4** **31569**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-3συν2x$, $x\in\mathbb{R}$

α. Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

β. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.

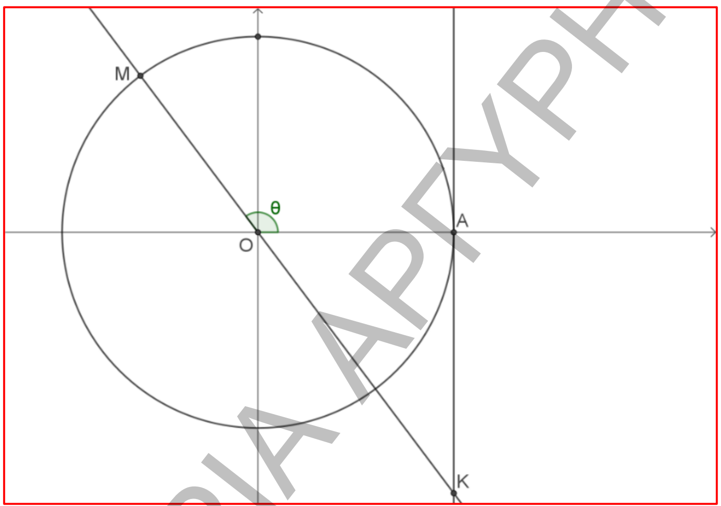
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$συν2x$					
$f(x)=-3συν2x$					

Μονάδες (12+13)=25

3.4 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (8)

1. **ΘΕΜΑ Δ** **3.4** **15025**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μια γωνία $\theta = A\hat{O}M$ με $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$, της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο M και την ευθεία $x = 1$ στο σημείο K.



α. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sigma\upsilon\nu\theta, \varepsilon\varphi\theta, \sigma\varphi\theta$.

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και K.

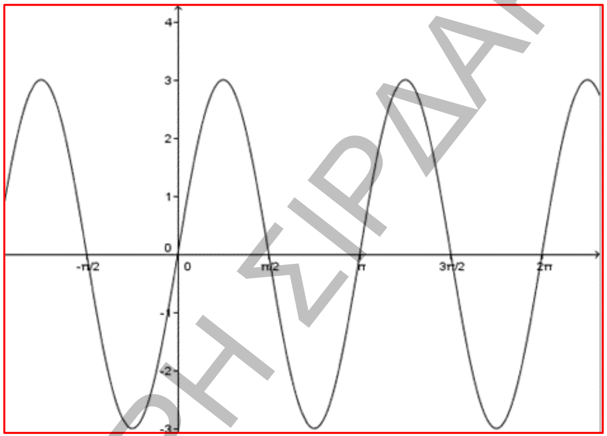
γ. Έστω μια γωνία $\varphi \in [0, 2\pi]$ για την οποία ισχύει $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi < 0$.

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η φ έχει την τελική πλευρά της στο 2ο τεταρτημόριο.

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί $\theta < \varphi$.

Μονάδες [8+6+(5+6)]=25

2. **ΘΕΜΑ Δ** **3.4** **15062**



Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής

$$f(x)=\rho\eta\mu(\alpha x),\ x\in\mathbb{R} \text{ και } \alpha,\ \rho>0$$

α. Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδό της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

β. Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς α και ρ.

Έστω $\rho=3$ και $\alpha=2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=x^4-2x^2+5,\ x\in\mathbb{R}$.

γ. Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4.

δ. Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.

Μονάδες (6+6+7+6)=25

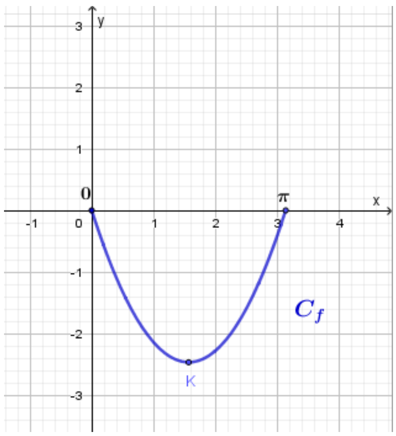
3. **ΘΕΜΑ Δ** **3.4** **15095**

Οι εξισώσεις των γραμμών που αποτελούν την περίμετρο μιας επίπεδης μεμβράνης όπως φαίνεται κάτω από ένα μικροσκόπιο, είναι:

$$x=0,\quad y=x^2-\pi x,\quad y=\frac{1}{2}+\eta\mu x\quad \text{και}\quad x=3$$

Η μεμβράνη πρόκειται να καλυφθεί με ένα γυάλινο ορθογώνιο πλακίδιο.

α. **i.** Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-\pi x,\quad x\in[0,\pi]$ είναι το τμήμα της παραβολής που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $K\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi^2}{4}\right)$.



Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{1}{2}+\eta\mu x,\ \ x\in[0,\pi]$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

ii. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τα ακρότατα των δύο συναρτήσεων και τα διαστήματα μονοτονίας τους.

β, Να βρείτε την μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

γ. Να βρείτε τις ελάχιστες διαστάσεις του ορθογώνιου πλακιδίου.

Μονάδες [(5+8)+8+4]=25

4. **ΘΕΜΑ Δ** **3.4** **15422**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}-2x)-2\eta\mu(\pi+2x)$ με $\alpha>0$.

α. Να δείξετε ότι $f(x)=(\alpha+2)\eta\mu 2x$.

β. **i.** Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 4, να δείξετε ότι α=2.

ii. Να βρείτε την περίοδο της f.

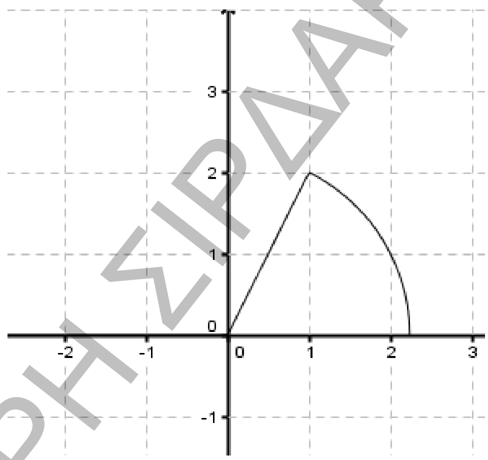
γ. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.

δ. Αν $g(x)=5-\sigma\upsilon\nu^2 2x$, να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την C_g, όπου C_f, C_g οι γραφικές παραστάσεις των f, g αντίστοιχα.

Μονάδες [5+(5+5)+5+5]=25

5. **ΘΕΜΑ Δ** **3.4** **15689**

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται, για τις μη αρνητικές τιμές του x, η γραφική της παράσταση. Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια, τότε:



α. Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση για τις αρνητικές τιμές του x.

β. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της, την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν οι ακρότατες τιμές της;

γ. Έστω θ ένας αριθμός με $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

i. $\eta\mu\theta$ και $\sigma\upsilon\nu\theta$.

ii. $f(\eta\mu\theta)$ και $f(\sigma\upsilon\nu\theta)$

Μονάδες [7+8+(5+5)]=25

6. **ΘΕΜΑ Δ** **3.4** **15992**

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \rho\ \eta\mu x$, $g(x) = \eta\mu(\omega x)$ όπου $\rho, \omega > 0$..

α. Να βρεθούν οι τιμές των ρ, ω, αν είναι γνωστό ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι -2 και η περίοδος της g είναι π. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

β. **i.** Να κάνετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2\eta\mu x,\ x \in [0, \pi]$ και $g(x) = \eta\mu(2x),\ x \in [0, \pi]$.

ii. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $2\eta\mu\frac{5\pi}{9} > \eta\mu\frac{10\pi}{9}$.

Μονάδες [6+(10+9)]=25

7. **ΘΕΜΑ Δ** **3.4** **18234**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2ημx - 1$, $x \in [0, 2π]$.

α. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές;

β. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

δ. Αν για κάποιο αριθμό α με $α \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$ ισχύει $f(α) = f\left(\frac{π}{2} - α\right)$, να αποδείξετε ότι $α = \frac{π}{4}$.

Μονάδες (7+6+7+5)=25

8. **ΘΕΜΑ Δ** **3.4** **20870**

Το βάθος y, σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίρροιας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εντός 24 ωρών). Το πρώτο (μετά τα μεσάνυχτα) μέγιστο βάθος είναι 5,8 m και συμβαίνει στις 3:00 π.μ. Το πρώτο ελάχιστο βάθος είναι 2,6 m και συμβαίνει στις 9:00 π.μ. Το βάθος y δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες) από τη σχέση: $y = αημ(ωt) + β$, με $α, ω, β > 0$ και $0 \le t \le 24$.

α. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $α, ω$ και $β$.

β. Αν $α = 1,6$, $ω = \frac{π}{6}$ και $β = 4,2$,

i. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $y = 1,6 \cdot ημ\left(\frac{π}{6}t\right) + 4,2$, με $0 \le t \le 24$.

ii. Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι;

iii. Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον 4,2 μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι. Στη διάρκεια ποιού χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια;

Μονάδες [6+(8+4+7)]=25

Κεφάλαιο 3ο ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ 21

3.4 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

§ 3.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}\text{συν}2x,\ \ x\in\mathbb{R}$

α. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης;

Ποια είναι η περίοδος της f;

β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

γ. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή 1.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (9+10+6)=25

2. **α.** Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

$$\text{συν}\frac{\pi}{6},\ \text{συν}\frac{\pi}{4},\ \text{συν}\frac{17\pi}{10}$$

β. Αν $\pi<x_1<x_2<\frac{3\pi}{2}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\text{ημ}(\frac{\pi}{2}-x_1)$ και $\text{ημ}(\frac{\pi}{2}-x_2)$

Μονάδες (12+13)=25

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-3\text{συν}2x,\ \ x\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.

β. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2x					
συν2x					
f(x)=-3συν2x					

Μονάδες (12+13)=25

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\etaμ(\pi-3x)+συν(\frac{\pi}{2}-3x),\quad x\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι f(x)=2ημ3x.

β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Μονάδες (10+15)=25

5. Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα πάρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση

$$h(x)=8+6\cdot\etaμ(\frac{\pi\cdot t}{30}),\quad 0\le t\le 180^0$$

α. Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος.

β. Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας.

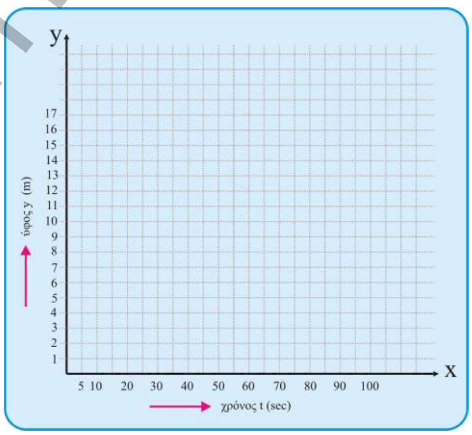
γ. Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec;

δ. Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:

i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους h(t).

ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h(t) με $0\le t\le 90^0$

t	0	1	30	45	60	75	90
h(t)							



Μονάδες [8+3+6+(3+5)]=25

6. Ένα παιγνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι. Το ύψος του από το πάτωμα σε cm συναρτήσει του χρόνου t (sec) δίνεται από τη σχέση: $h(t)=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t)+\beta$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $\omega>0$. Όταν το ελατήριο ταλαντώνεται, το ελάχιστο ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα είναι 20 cm και το μέγιστο 100 cm. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το ύψος παίρνει την ελάχιστη τιμή του και ο χρόνος μιας πλήρους ταλάντωσης (θέσεις: ελάχιστο-ηρεμία-μέγιστο-ηρεμία-ελάχιστο) είναι 6 sec.

α. Να δείξετε ότι $\omega=\frac{\pi}{3}$.

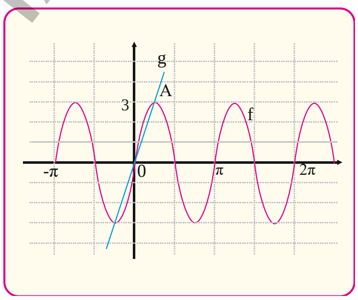
β. Να προσδιορίσετε τις τιμές των α και β αιτιολογώντας την απάντησή σας.

γ. Να υπολογίσετε το ύψος του παιγνιδιού από το πάτωμα 14 sec μετά την έναρξη της ταλάντωσης.

δ. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(t)$, για $0\le t\le 12$

Μονάδες (5+6+8+6)=25

7. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης g(x)=αx+β όπου α, β πραγματικοί αριθμοί και της συνάρτησης f(x)=ρημ(ωx) , όπου ω>0 και ρ>0. Και οι δύο συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Επίσης η f έχει μέγιστο 3.



α. Να αποδείξετε ότι ρ=3 και ω=2

β. Να βρείτε τα α, β.

γ. Να βρείτε, γραφικά, το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $3\eta\mu(2x)-\frac{12x}{\pi}=0$ στο διάστημα [0, π].

Μονάδες (5+10+10)=25

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = -2\eta\mu\dfrac{\pi t}{2} + 2$, $t \in [0,4]$

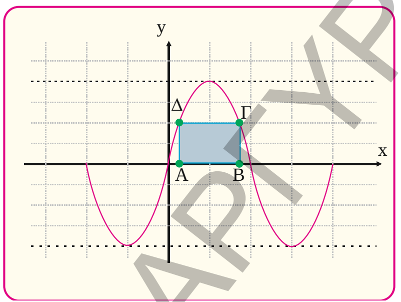
α Να βρείτε την περίοδο της f.

β. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της, καθώς και τις τιμές του t για τις οποίες η f παίρνει τις τιμές αυτές.

γ. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Μονάδες (5+12+8)=25

9. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4}\cdot x\right)$



α. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

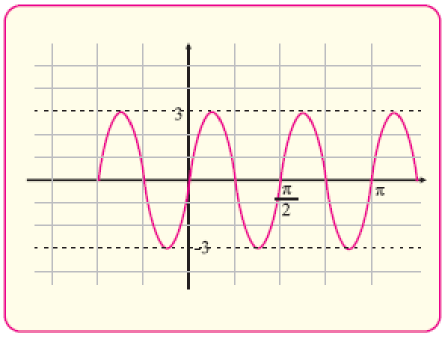
β. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $A\left(\dfrac{2}{3},0\right)$. Να βρείτε:

i. τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

ii. τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.

Μονάδες (5+10+10)=25

10. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha\eta\mu(\omega x)$ με παραμέτρους $\alpha, \omega > 0$.



Να βρείτε:

α. την περίοδο της συνάρτησης f

β. τους αριθμούς α και ω

γ. τους αριθμούς $\kappa \in \mathbb{R}$ για τους οποίους η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ και στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση αυτή.

Μονάδες (9+8+8)=25

11. Να βρείτε την περίοδο των παρακάτω περιοδικών συναρτήσεων:

$$f(x)=\eta\mu\frac{3x}{4},\ \ g(x)=\sigma\upsilon\nu\left(3x+\frac{\pi}{4}\right),\ h(x)=\varepsilon\varphi\frac{x}{2},\ \ t(x)=\sigma\varphi 4x$$

12. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων:

$$f(x)=-2\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right),\ \ g(x)=4\sigma\upsilon\nu x-3$$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}-3$. Να βρείτε:

i. το μέγιστο και το ελάχιστό της,

ii. την περίοδό της

14. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x)=-3\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

15. Αν η συνάρτηση $f(x)=\alpha\sigma\upsilon\nu\frac{\beta x}{2}$ α, β>0 έχει περίοδο 4π και μέγιστη τιμή 2 να βρείτε τα α, β.

16. Αν η συνάρτηση $g(x)=\varepsilon\varphi\left(\frac{3\beta}{4}x\right)$, $\beta\in\mathbb{R}$ έχει περίοδο π, να βρείτε το β.

17. Ποια είναι η μέγιστη τιμή και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης:

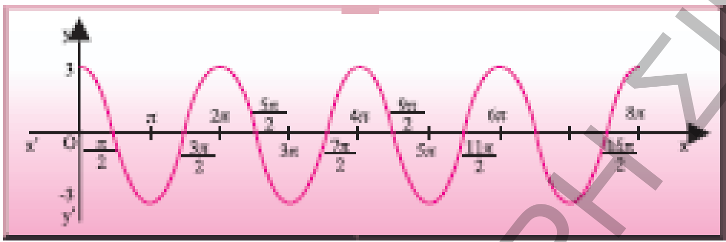
$$f(x)=2\eta\mu\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-3\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{4}-3x\right)$$

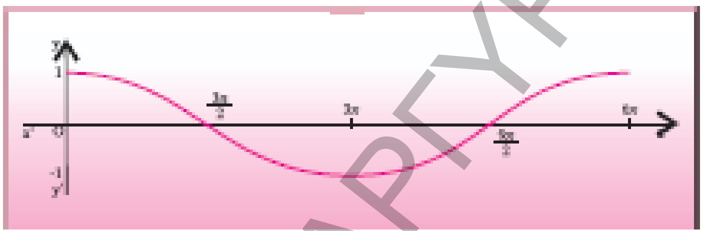
18. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x)=\varepsilon\varphi 2x+1$

19. Να μελετήσετε και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x)=\sigma\varphi 2x$

20. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης: $g(x)=2\varepsilon\varphi\dfrac{x}{2}$

21. Να βρείτε την εξίσωση καθεμιάς από τις επόμενες ημιτονοειδείς καμπύλες.





3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Επίλυση βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων

$$\eta\mu x=\eta\mu\theta \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\theta \text{ ή } x=2\kappa\pi+(\pi-\theta),\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

$$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\theta,\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

$$\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\theta,\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

$$\sigma\varphi x=\sigma\varphi\theta \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\theta,\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

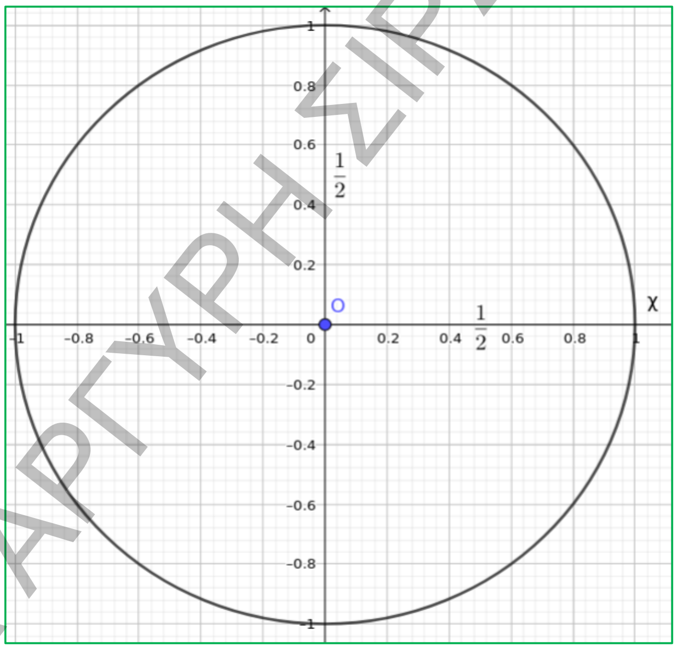
Ειδικές περιπτώσεις

$\eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=\kappa\pi$	$\eta\mu x=1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$	$\eta\mu x=-1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}$
$\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$	$\sigma\upsilon\nu x=1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi$	$\sigma\upsilon\nu=-1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\pi$

3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (6)

1. ΘΕΜΑ Β 3.5 14977

α. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα $[0,\ 2\pi)$, με αρχική πλευρά την ημιευθεία Οχ, οι οποίες να έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$



β. Να λύσετε την εξίσωση

$$\eta\mu x = \frac{1}{2} \quad \text{για} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες (12+13)=25

2. ΘΕΜΑ Β 3.5 15036

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x,\ \ x\in\mathbb{R}.$

α. **i.** Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

ii. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -3$ στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες [(10+5)+10]=25

3. ΘΕΜΑ Β 3.5 15969

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2συν(13π + x) - 2ημ(\frac{π}{2} - x)$.

α. Να δείξετε ότι $συν(13π + x) = -συνx$.

β. Να δείξετε ότι $f(x) = -4συνx$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.

Μονάδες (5+8+12)=25

4. ΘΕΜΑ Β 3.5 16298

Δίνεται γωνία $ω$, με $0 \leq ω < 2π$ που ικανοποιεί τις σχέσεις: $συνω = -\frac{1}{2}$ και $ημω > 0$.

α. Να σχεδιάσετε τη γωνία ω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο και να βρείτε το μέτρο της.

β. Να βρείτε όλες τις γωνίες $φ$ με $φ \in \mathbb{R}$, που ικανοποιούν τη σχέση $συνφ = -\frac{1}{2}$.

Μονάδες (15+10)=25

5. ΘΕΜΑ Β 3.5 21995

Πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $ημx = α$ στο διάστημα $[-2π, 2π]$ όταν:

α. $α = 1$. **β.** $α = -2$.

Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

Μονάδες (13+12)=25

6. ΘΕΜΑ Β 3.5 32675

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2ημx + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

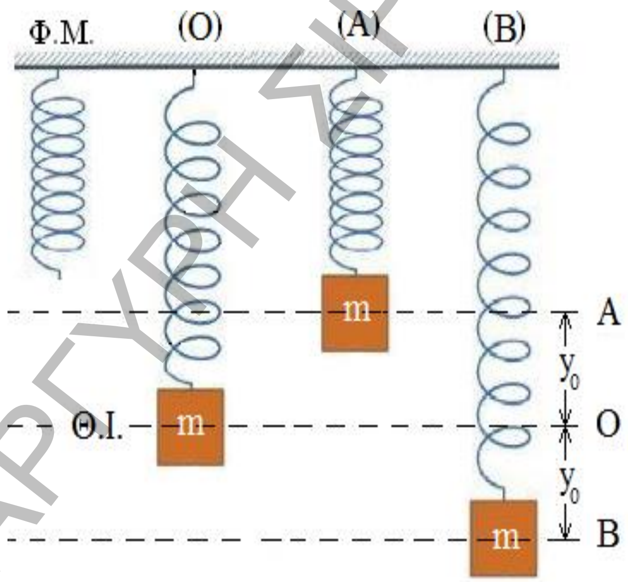
β. Για ποια τιμή του $x \in [0, 2π]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;

Μονάδες (10+15)=25

3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (14)

1. ΘΕΜΑ Δ 3.5 14975

Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται από το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας m και ισορροπεί στη θέση Ο (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με 1 μέτρο.



Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση Ο, εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων Α και Β, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με $2y_0$.

Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα), είναι:

$$y(t)=1+0,2\cdot \eta\mu\frac{\pi}{2}t$$

α. Να βρείτε το y_0 και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων Α και Β της ταλάντωσης.

β. Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

γ. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $t\in[0,4]$.

δ. Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με 1,1 μέτρα, για $t\in[0,2]$.

Μονάδες (6+6+6+7)=25

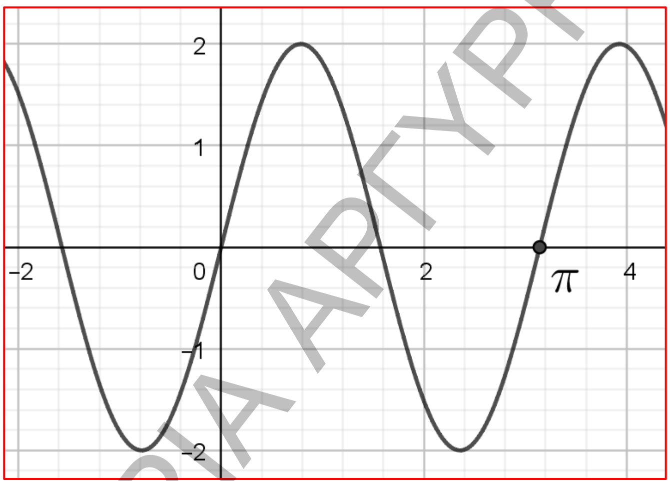
2. **ΘΕΜΑ Δ** **3.5** **15003**

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\eta\mu\alpha x\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha x\right)+2\right]-\sigma\upsilon\nu\alpha x\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi-\alpha x)-1 \quad \mu\varepsilon \quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

α. **i.** Να δείξετε ότι $f(x)=2\cdot\eta\mu\alpha x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να δείξετε ότι α=2.



β. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $\varepsilon: y=1$ για $x\in[0,\pi]$.

Μονάδες [(10+6)+9]=25

3. **ΘΕΜΑ Δ** **3.5** **15014**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot\eta\mu\beta x$, με α, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.

α. Να βρείτε την τιμή του α, αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2.

β. Αν $\alpha=2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία είναι $f\left(\frac{\pi}{16}\right)=2$

είναι $\beta=8$.

γ. Αν $\alpha=2$ και $\beta=8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1$ στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Μονάδες $(6+10+9)=25$

4. **ΘΕΜΑ Δ** **3.5** **15026**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

γ. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx'.

δ. Να αποδείξετε ότι $(f(x)-1)^2+(f(1-x)-1)^2=4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες $(5+6+7+7)=25$

5. **ΘΕΜΑ Δ** **3.5** **15049**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\eta\mu(\pi+x)$, $x\in\mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$.

β. Να αποδείξετε ότι $-2\le f(x)\le 2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

γ. Να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

ii. Δυο σημεία τομής της C_f με τον $x'x$.

Μονάδες $(6+10+3+6)=25$

6. **ΘΕΜΑ Δ** **3.5** **15050**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2συνx,\ x\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

β. Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y=1$.

γ. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ και $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

δ. Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα $[0,\ 2\pi]$.

Μονάδες (8+5+6+6)=25

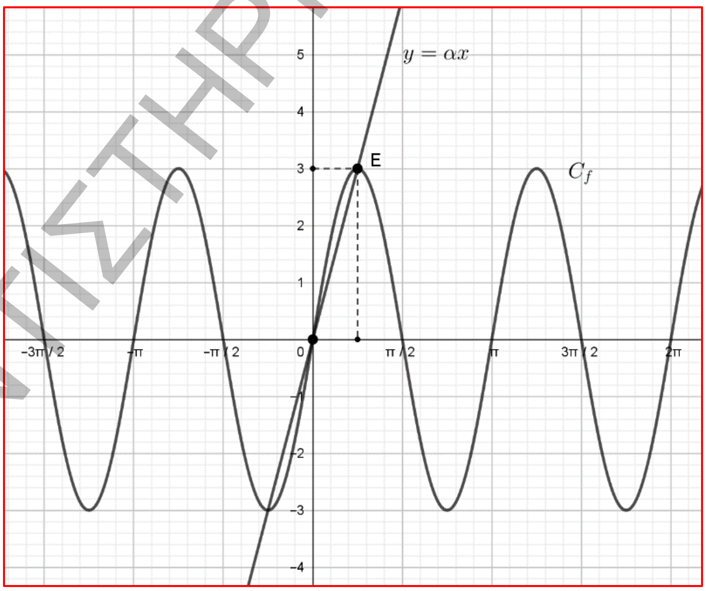
7. **ΘΕΜΑ Δ** **3.5** **15287**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία $y=αx$, $α\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=ρημ(ωx)$, όπου $ω>0$, $ρ>0$ και $x\in\mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,

α. Να δείξετε ότι $ρ=3$ και $ω=2$.

β. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό $α$.

γ. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $3ημ(2x)-\frac{12}{\pi}x=0$.



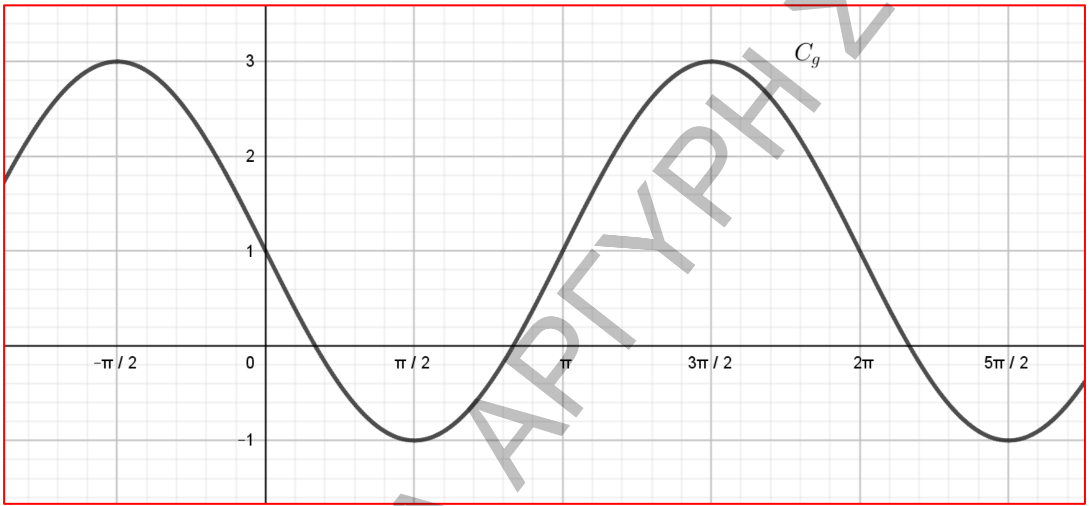
Μονάδες (6+9+10)=25

8. **ΘΕΜΑ Δ** **3.5** **15288**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2ημ3x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την περίοδο T, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.

β. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=αημβx+γ$, με $α,β,γ\in\mathbb{R}$, $β>0$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $α,β$ και $γ$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Για $α=-2, β=1$ και $γ=1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ στο διάστημα $[0,π)$

Μονάδες [3+(12+10)]=25

9. **ΘΕΜΑ Δ** **3.5** **15347**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2συν^2(π-x)-3ημ\left(\frac{π}{2}+x\right)+α$, με $α\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι $f(x)=2συν^2x-3συνx+α$.

β. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

γ. Να βρείτε το a αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο

$M\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$..

δ. Για α=2 και $g(x)=2\eta\mu^2 x+9\sigma\upsilon\nu x-9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

Μονάδες (8+5+5+7)=25

10. **ΘΕΜΑ Δ** **3.5** **15821**

α. Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x=0$.

β. Να αποδείξετε ότι εξίσωση $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x=3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\varepsilon\varphi x=\sqrt{3}$ και κατόπιν να τη λύσετε στο διάστημα $[0,2\pi]$.

γ. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\sqrt{3}\cdot\eta\mu x$ και $g(x)=3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων στο διάστημα $[0,2\pi]$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β).

δ. Αξιοποιώντας το ερώτημα γ) να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x<3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0,2\pi]$

Μονάδες (5+7+7+6)=25

11. **ΘΕΜΑ Δ** **3.5** **20645**

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $g(x)=\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R}$.

α. Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από την C_g προκύπτει η C_f

β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

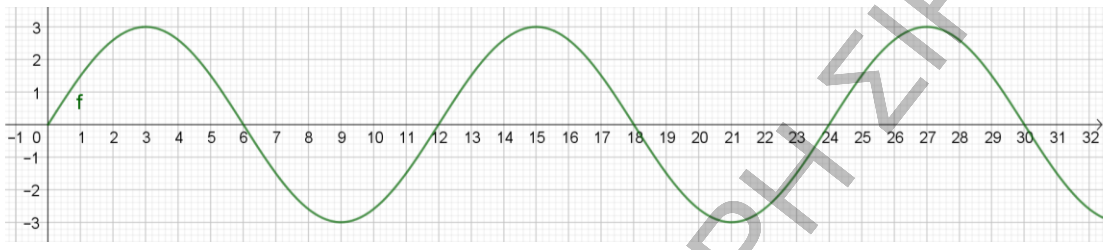
γ. Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi)$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}f(x)+1=0$.

Μονάδες (6+6+6+7)=25

12. **ΘΕΜΑ Δ** **3.5** **20712**

Σε μια θαλάσσια περιοχή, λόγω της παλίρροιας, η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης f, που δίνει σε μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες.



Να βρείτε :

α. την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και τη χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη).

β. την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας.

γ. τον τύπο της συνάρτησης f.

δ. ποιες ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα.

Μονάδες 6+6+6+7=25

13. **ΘΕΜΑ Δ** **3.5** **20747**

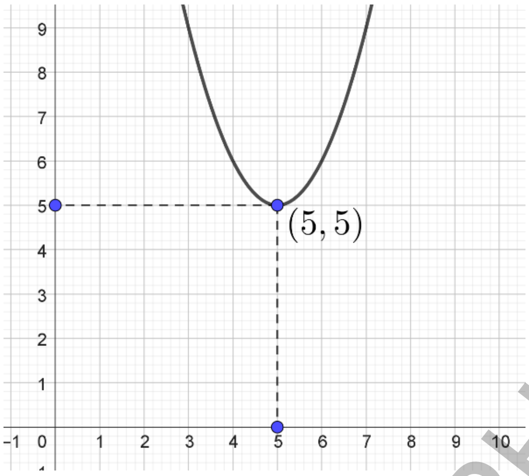
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3+\sqrt{3}εφω\cdot ημx, x\in\mathbb{R}$.

Αν για τη γωνία ω ισχύει η σχέση $-2συν^2ω+ημω=-1, ω\in[0,\frac{\pi}{2}]$, τότε:

α. **i.** Να αποδείξετε ότι $εφω=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

ii. Για $εφω=\frac{\sqrt{3}}{3}$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

β. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x^2-10x+30, x\in\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο παρακάτω σχήμα.



i. Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g.

ii. Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν κοινά σημεία. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες [(10+4)+(4+7)]=25

14. **ΘΕΜΑ Δ** **3.5** **21244**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha+1}{2}\text{συν}(\beta x)$, με $\alpha,\beta>0$,

η οποία έχει ελάχιστο -2 και περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

α. Να δείξετε ότι $\alpha=3$ και $\beta=4$.

β. Δίνεται η παράσταση $A=\dfrac{\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\text{εφ}(\pi-x)\cdot\text{ημ}(2\pi+x)}{\text{συν}(3\pi-x)\cdot\text{σφ}\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)\cdot\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$.

Να δείξετε ότι $A=-1$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2A$, στο διάστημα $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$.

Μονάδες (5+10+10)=25

Κεφάλαιο 3ο ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ 30

3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§3.5 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. **α.** Είναι η τιμή $x=\frac{\pi}{4}$ λύση της εξίσωσης 3συν4x+3= 0;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\sigma\upsilon\nu 4x$ με την ευθεία $y=-1$.

Μονάδες (10+15)=25

2. Δίνεται γωνία ω που ικανοποιεί τη σχέση: $(\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega)^2=1$

α. Να αποδείξετε ότι είτε $\eta\mu\omega=0$ είτε $\sigma\upsilon\nu\omega=0$.

β. Να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας ω.

Μονάδες (13+12)=25

3. **α.** Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu(\frac{\pi}{2}+x)+\sigma\upsilon\nu(\pi+x)=0$

β. Να βρείτε τις τιμές του $x\in[0,2\pi)$ για τις οποίες ισχύει: $\sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu(\frac{\pi}{2}+x)$

Μονάδες (10+15)=25

4. Δίνεται η παράσταση: $A=\frac{\eta\mu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$, με $x\neq 2\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

α. Να αποδείξετε ότι A=1+συνx

β. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\eta\mu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1}{2}$ στο διάστημα $(0,2\pi)$

Μονάδες (12+13)=25

5. Έστω γωνία *x* για την οποία ισχύουν: $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ και $\eta\mu(\pi-x)-\eta\mu(\pi+x)=1$.

α. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x=\frac{1}{2}$

β. Να βρείτε την γωνία x.

Μονάδες (12+13)=25

6. **α.** Να αποδείξετε ότι : $\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\frac{2}{\eta\mu x}$, όπου $x\neq\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$

β. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\frac{4}{\sqrt{3}}$

Μονάδες (13+12)=25

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|\alpha+1|\eta\mu(\beta\pi x)$ με $\alpha\in\mathbb{R}$ και $\beta>0$, η οποία έχει μέγιστη τιμή 3 και περίοδο 4.

α. Να δείξετε ότι $\alpha=2$ ή $\alpha=-4$ και $\beta=\frac{1}{2}$

β. Για $\alpha=2$ και $\beta=\frac{1}{2}$,

i. να λυθεί η εξίσωση $f(x)=3$

ii. να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα [0, 8].

Μονάδες (7+10+8)=25

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = συνx$ και $g(x) = συν2x$.

α. Να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων f και g. Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f (x) και g (x), για $x \in [0, 2\pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
f (x)									
g(x)									

β. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης συν2x = συνx (1) στο διάστημα [0, 2π].

γ. Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση (1) στο διάστημα [0, 2π] και να σημειώσετε πάνω στο σχήμα του ερωτήματος (α) τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

Μονάδες (8+4+13)=25

9. Ένα σώμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στο άκρο ενός ελατηρίου. Η απόσταση του σώματος από το έδαφος (σε cm), δίνεται από την συνάρτηση:

$$f(t) = 12ημ\frac{\pi t}{4} + 13, \text{ όπου } t \text{ ο χρόνος σε ώρες.}$$

α. Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

β. Να βρείτε την απόσταση του σώματος από το έδαφος τις χρονικές στιγμές t=5 και t=8.

γ. Να βρείτε κατά το χρονικό διάστημα από t = 0 έως t = 8, ποιά χρονική στιγμή η απόσταση του σώματος από το έδαφος είναι ελάχιστη. Ποια είναι η απόσταση αυτή;

Μονάδες (7+8+10)=25

10. Η θερμοκρασία μιας περιοχής σε βαθμούς Κελσίου (^oC) κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετραώρου δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -8\text{συν}\frac{\pi t}{12} + 4, \quad \text{με } 0 \le t \le 24 \ \ (\text{t ο χρόνος σε ώρες})$$

α. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια του εικοσιτετραώρου.

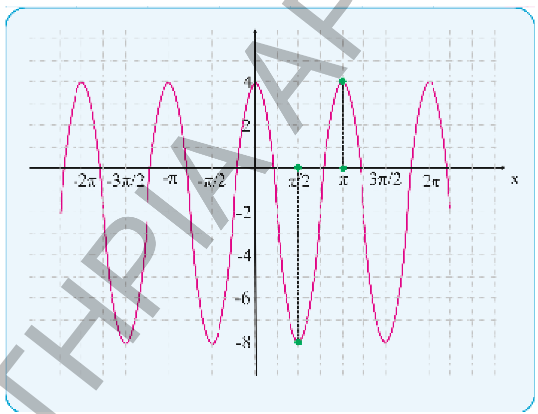
β. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που η θερμοκρασία είναι ίση με 0^oC.

γ. Να παραστήσετε γραφικά την f για t ∈ [0, 24].

δ. Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, πότε η θερμοκρασία είναι πάνω από 0^oC.

Μονάδες (7+6+7+5)=25

11. Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, που είναι της μορφής $f(x) = \alpha + \beta \cdot \text{συν}2x$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.



α. Με βάση τη γραφική παράσταση της f, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

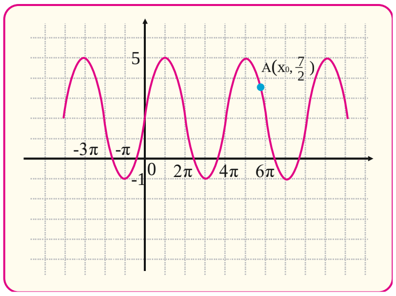
β. Ποια είναι η περίοδος Τ της συνάρτησης f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να αποδείξετε ότι: α = –2 και β = 6.

δ. Να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = 1 στο διάστημα [0, 2π].

Μονάδες (4+4+8+9)=25

12. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)+k$, με ρ,k πραγματικές σταθερές και $\omega>0$.



α. Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f

ii. την περίοδο Τ της συνάρτησης f

β. Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ, ω και k. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Θεωρώντας γνωστό ότι $\rho=3,\ \omega=\frac{1}{2}$ και $k=2$ να προσδιορίσετε **αλγεβρικά** την τετμημένη x_0 του σημείου Α της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα.

Μονάδες [(3+3)+9+10]=25

13. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\sqrt{3}\varepsilon\varphi\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=-3 \text{ στο } \left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$$

14. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu x+\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x=0$

15. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi 2x=1$$

16. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x=0$$

17. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\varepsilon\varphi^2x-\sigma\varphi^2x=0$$

18. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\sigma\upsilon\nu^3 x - \sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$$

19. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x = 1$$

20. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\eta\mu^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \eta\mu^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \ \text{ στο } [0,2\pi]$$

21. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\sigma\upsilon\nu^4 x + \eta\mu^2 x = 2$$

22. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\sigma\varphi x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x \sigma\varphi x - 2\sqrt{3}$$

23. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\varepsilon\varphi^2 x \sigma\varphi x = 1$$

24. Να λύσετε την εξίσωση:

$$1 + 2\sigma\upsilon\nu(2x + 20^\circ) = 0$$

25. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 2x = 1 \ \text{ στο } (\pi,3\pi)$$

26. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\varepsilon\varphi x + \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

27. Να βρείτε το $x \in [0, 2\pi]$ στο οποίο η συνάρτηση

$$f(x) = 3 - 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \ \text{ παρουσιάζει μέγιστο.}$$

28. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{1}{1-\eta\mu x}+\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{1+\eta\mu x}$$

29. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x}-4(1-\sigma\upsilon\nu x)=1$$

30. Να λύσετε την εξίσωση:

$$(2\eta\mu x+1)^2-4(1-\eta\mu x)(2\eta\mu x+1)=0$$

Κεφάλαιο 4ο ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

☑ Καλούμε **μονώνυμο** του x κάθε παράσταση της μορφής αx^{ν} όπου α ένας πραγματικός αριθμός και ν ένας θετικός ακέραιος.

☑ **Μονώνυμο** του **x** καλούμε επίσης και **κάθε πραγματικό** αριθμό.

☑ Καλούμε **πολυώνυμο** του x κάθε παράσταση της μορφής

$$\alpha_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$$

όπου ν είναι ένας φυσικός αριθμός και $\alpha_0,\ \alpha_1,\ldots,\ \alpha_{\nu}$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

- Τα μονώνυμα $\alpha_{\nu}x^{\nu},\ \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1},\ldots\ldots,\ \alpha_1 x,\ \alpha_0$ λέγονται **όροι** του πολυωνύμου και οι αριθμοί $\alpha_{\nu},\ \alpha_{\nu-1},\ldots\ldots,\ \alpha_1,\ \alpha_0$ **συντελεστές** αυτού.
- Ειδικότερα ο α_0 λέγεται **σταθερός** όρος του πολυωνύμου.

☑ Τα πολυώνυμα της μορφής α_0, δηλαδή οι πραγματικοί αριθμοί, λέγονται **σταθερά** πολυώνυμα.

☑ Δύο πολυώνυμα

$$\alpha_{\mu}x^{\mu}+\alpha_{\mu-1}x^{\mu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0 \text{ και } \beta_{\nu}x^{\nu}+\beta_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\beta_1 x+\beta_0,\ \text{με } \mu\geq\nu$$

θα λέμε ότι είναι **ίσα** όταν:

$$\alpha_0=\beta_0,\ \alpha_1=\beta_1,\ldots\ldots,\ \alpha_{\nu}=\beta_{\nu} \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+1}=\alpha_{\nu+2}=\ldots=\alpha_{\mu}=0$$

Έστω τώρα ένα πολυώνυμο

$$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$$

- Αν **όλοι** οι συντελεστές του είναι ίσοι με **μηδέν**, τότε το P(x) είναι ίσο με το πολυώνυμο **0 (μηδενικό πολυώνυμο).**
- Αν όμως ένας από τους συντελεστές του είναι **διαφορετικός** από το μηδέν, τότε το P(x) παίρνει τη μορφή: $\alpha_\kappa x^\kappa+\alpha_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ με $\alpha_\kappa \neq 0$

Στην περίπτωση αυτή ο αριθμός **κ** λέγεται **βαθμός** του πολυωνύμου P(x).

- Είναι φανερό ότι κάθε **σταθερό** και **μη μηδενικό πολυώνυμο** έχει **βαθμό 0**.
- Για το **μηδενικό** πολυώνυμο **δεν** ορίζεται **βαθμός**.

Έστω P(x) ένα πολυώνυμο.

- Αν είναι **P(ρ)=0**, τότε ο **ρ** λέγεται **ρίζα** του πολυωνύμου.
- Αν το άθροισμα δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο τότε ο βαθμός του είναι **ίσος** ή **μικρότερος** από το **μέγιστο** των βαθμών των δύο πολυωνύμων.
- Ο **βαθμός του γινομένου** δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι **ίσος** με το **άθροισμα** των **βαθμών** των πολυωνύμων αυτών.

Κεφάλαιο 4ο ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ (3)

1. ΘΕΜΑ Β 4.1 15113

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9 \quad \text{και} \quad Q(x) = \alpha x^2 + 7, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

α. Είναι το πολυώνυμο $P(x)$ $3^{ου}$ βαθμού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να βρείτε την τιμή του α ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

Μονάδες (13+12)=25

2. ΘΕΜΑ Β 4.1 20640

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 7x - 1$.

α. Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1.

β. Έστω $Q(x)$ πολυώνυμο το οποίο δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

i. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_1(x) = P(x) + Q(x)$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

ii. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_2(x) = P(x) \cdot Q(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.

Μονάδες (9+8+8)=25

3. ΘΕΜΑ Β 4.1 21998

Δίδεται το πολυώνυμο $P(x) = (x-2)(x^6 + 1)$.

α. Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$.

Μονάδες (12+13)=25

Κεφάλαιο 4ο ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

12

4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

§4.1 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Αν $3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=(\alpha+\beta+\gamma)^2$ να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$P(x)=(\beta-\gamma)x^2+(\alpha-\gamma)x+(\alpha-\beta)$ είναι μηδενικό.

2. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in R$ για τις οποίες για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-2,3\}$ ισχύει:

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6}=\frac{\alpha}{x-2}+\frac{\beta}{x-3}$$

3. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$P(x)=(\alpha^2-3)x^3+(\beta-2)x^2+(3\alpha-2\beta)x+\alpha$ και $Q(x)=2x^3+\alpha x^2+9x+\gamma$.

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο P(x)+Q(x) να είναι:

i. το μηδενικό πολυώνυμο

ii. μηδενικού βαθμού

iii. 3ου βαθμού

iv. βαθμού το πολύ τρία

4. Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου

$$P(x)=(\alpha-1)(\alpha^2-9)x^3+(\alpha^2-4\alpha+3)x^2+3\alpha-9$$

για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in R$

5. i. Βρείτε το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου

$$P(x)=(1-3x+2x^2)^{2003}+(1+3x-2x^2)^{2004}$$

ii. Δείξτε ότι: αν τα δύο πολυώνυμα έχουν άθροισμα συντελεστών ίσο με 1 τότε και το γινόμενό τους έχει άθροισμα συντελεστών ίσο με 1.

6. Δίνεται το κλάσμα $\dfrac{(\alpha-5)x^2+(\beta+1)x+\gamma-8}{x^2-2x+5}$

Αν είναι γνωστό ότι α+β+γ=0 και ότι το κλάσμα είναι ανεξάρτητο του x να προσδιορίσετε τα α, β, γ.

7. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς α, β έτσι ώστε το πολυώνυμο

$$P(x)=x^4+(\alpha+\beta-1)x^3+(-\alpha+\beta)x^2+(\alpha+4\beta-5)x+12$$

να έχει ρίζες το 1 και 2.

8. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=(4\alpha^2+\beta^2)x^4-4\beta(\alpha+1)x^3+2(2-\alpha)x^2+x+\alpha^2+\beta^2$$

Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του P(x), να βρείτε τους πραγματικούς α, β.

9. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+1$.

α. Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, ώστε $P(x)=(x^2-x+1)^2$ για κάθε πραγματικό x.

β. Να δείξετε ότι $P(x)\geq\dfrac{9}{16}$ για κάθε πραγματικό x. Πότε ισχύει η ισότητα;

10. Για ποιες τιμές του πραγματικού λ στο πολυώνυμο

$$P(x)=x^5+x^4+x^3+(|\lambda+1|-5)x \quad \text{ισχύει} \quad P(1)<0.$$

11. Για ποιες τιμές του πραγματικού λ στο πολυώνυμο

$$P(x)=\lambda^2x^4-\lambda x^3-3\lambda x-\lambda+7 \quad \text{ισχύει} \quad 1<P(1)\leq 3.$$

12. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x-1$. Να βρείτε το πολυώνυμο Q(x) ώστε

$$P(x)Q(x)+[P(x)]^2=2x^3-5x^2-4x+3.$$

4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ (Ταυτότητα της διαίρεσης)

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων Δ(x) και δ(x) με δ(x)≠0 υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα π(x) και υ(x) τέτοια ώστε:

$$\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)+\upsilon(x)$$

όπου υ(x) ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του δ(x).

Όπως και στη διαίρεση μεταξύ φυσικών αριθμών το **Δ(x)** λέγεται **διαιρετέος**, το **δ(x)** **διαιρέτης**, το **π(x)** **πηλίκο** και το **υ(x)** **υπόλοιπο** της διαίρεσης.

Αν σε μια διαίρεση είναι **υ(x)=0** τότε η διαίρεση λέγεται **τέλεια** και η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται:

$$\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το δ(x) **διαιρεί** το Δ(x) **ή** ότι το δ(x) είναι **παράγοντας** του Δ(x) **ή** ότι το Δ(x) **διαιρείται** με το δ(x) **ή** ακόμη ότι το δ(x) είναι **διαιρέτης** του Δ(x).

Διαίρεση πολυωνύμου με $x-\rho$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το $(x-\rho)$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x=ρ.

Είναι δηλαδή

$$\upsilon=P(\rho).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x), δηλαδή αν και μόνο αν

$$P(\rho)=0.$$

Σχόλιο

Το σχήμα Horner είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στις περιπτώσεις όπου το ρ ή ο βαθμός του P(x) είναι μεγάλος αριθμός .

Για το λόγο αυτό, τόσο στις **διαιρέσεις με το $x-\rho$** όσο και στον υπολογισμό της **τιμής P(ρ),** θα χρησιμοποιούμε συνήθως το **σχήμα Horner**.

Δηλαδή

Το σχήμα **Horner** είναι μια μέθοδος με την οποία μπορούμε να βρούμε:

- Το **πηλίκο** και το **υπόλοιπο** της διαίρεσης $P(x):x-\rho$.
- Την αριθμητική τιμή **P(ρ)** του P(x).

4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ (7)

1. ΘΕΜΑ Β 4.2 14981

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x+6$.

α. Να υπολογίσετε το $P(-2)$.

β. Να αποδείξετε ότι το $x+2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

γ. Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

Μονάδες (5+5+15)=25

2. ΘΕΜΑ Β 4.2 15012

Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-3$ έχει πηλίκο x^2+2 και υπόλοιπο 4.

α. Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.

β. Να δείξετε ότι $P(x)=x^3-3x^2+2x-2$.

γ. Είναι το $x=3$ ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (8+8++9)=25

3. ΘΕΜΑ Β 4.2 15096

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-3x+1$.

α. Να αποδείξετε ότι το 1 και το -1 δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.

β. Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x):(x^2+x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Μονάδες (10+15)=25

4. ΘΕΜΑ Β 4.2 15642

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2(x-1)^{20}-3(x-1)^{10}+5x^2-3x-2$.

α. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$.

β. **i.** Να υπολογίσετε την τιμή $P(0)$.

ii. Είναι το x παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(10+5+10)=25$

5. ΘΕΜΑ Β 4.2 15643

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-3x^2-11x+6$.

α. **i.** Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-3$.

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης $P(x):(x-3)$

β. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-3)(2x-1)$.

Μονάδες $[(7+7)+11]=25$

6. ΘΕΜΑ Β 4.2 20941

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+2x^2+x+3$.

α. Να δείξετε ότι το -2 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x+2)$

γ. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x+2)$.

Μονάδες $(8+10+7)=25$

7. ΘΕΜΑ Β 4.2 21997

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$.

α. Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Ποιο είναι το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ που προκύπτει από την διαίρεση $P(x):(x-2)$;

Μονάδες $(12+13)=25$

Κεφάλαιο 4ο ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 33

4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

§4.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. **α.** Να βρείτε το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης

$$\left(x^3-6x^2+11x-2\right):(x-3)$$

β. Αν $P(x)=x^3-6x^2+11x+\lambda$ να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η διαίρεση $P(x):(x-3)$ να έχει υπόλοιπο 0.

Μονάδες (10+15)=25

2. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x)=-2x^3+\lambda^2\left(x^2-1\right)+\lambda\left(x^3-1\right)+\lambda+9 \text{ και}$$

$$Q(x)=(\lambda+12)x^2+(\lambda-2)x^3+\left(\lambda^2-9\right)x,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

α. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι και τα δύο πολυώνυμα είναι 3ου βαθμού. Συμφωνείτε με την άποψη αυτή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) είναι ίσα.

Μονάδες (13+12)=25

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^4-12x^3+8x^2+\alpha x+\beta$, όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.. Αν το πολυώνυμο P(x) διαιρούμενο με $x+1$ αφήνει υπόλοιπο $16+P(1)$ και διαιρούμενο με $x-1$ αφήνει υπόλοιπο $16-P(-1)$, τότε:

α. να αποδείξετε ότι $P(1)=0$ και $P(-1)=16$

β. να αποδείξετε ότι $\alpha=4$ και $\beta=-3$

γ. να αποδείξετε ότι $P(4)\cdot P(5)\cdot P(6)\cdot P(7)\neq 0$

Μονάδες (8+9+8)=25

4. Να βρείτε πολυώνυμο δ(x) που να διαιρεί το

$$\Delta(x)=2x^3-19x^2+25x-8 \text{ δίνοντας πηλίκο } \pi(x)=x-8.$$

5. Αν $f(x)=x^2-3x+2$ να κάνετε τη διαίρεση:

$$[f(x)+f(x-1)-f(x+2)]:(x-8)$$

6. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^5-3x^4+3x^3+\alpha x^2-2x+\beta$

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς α, β ώστε το P(x) να διαιρείται ακριβώς με το πολυώνυμο $f(x)=x^3+x+1$.

7. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-(\lambda-1)x^3-\lambda x-4$

α. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το P(x) έχει παράγοντα το x+1.

β. Τα πολυώνυμα που προκύπτουν για τις τιμές του λ που θα βρείτε, να τα γράψετε ως γινόμενο παραγόντων.

8. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το πολυώνυμο

$P(x)=x^3-(1-2\lambda)x-2$ έχει παράγοντα το $x-\lambda$.

9. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4+x^3+2x^2-11x+7$

α. να δείξετε ότι το $(x-1)^2$ διαιρεί το P(x) και

β. να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης.

10. Με τη βοήθεια του σχήματος του Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $(x^4+3x^3-2):(x+4)$

11. Αν το πολυώνυμο P(x) βαθμού $\nu\geq 2$ διαιρούμενο με το (x^2-1) δίνει υπόλοιπο x+3, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1.

12. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-x^3+\alpha x^2+\beta x+1$. Να βρείτε τους πραγματικούς α, β ώστε το P(x) διαιρούμενο με x^2-3x+2 να δίνει υπόλοιπο 3x+1.

13. Αν τα πηλίκα των διαιρέσεων $P(x):(x-\alpha)$ και $P(x):(x-\beta)$ είναι αντίστοιχα $\pi_1(x)$ και $\pi_2(x)$ να δείξετε ότι: $\pi_1(\beta)=\pi_2(\alpha)$ $\alpha\neq\beta$.

14. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο x^2-4x+4 είναι παράγοντας του

$$P(x)=x^4-4x^3+5x^2-4x+4$$

15. Έστω πολυώνυμο P(x) με P(0)=2, P(1)=1 και $P(-2)=10$.

Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x^3+x^2-2x)$

16. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης:

$$[(2x^2-1)^{2004}+3(x^2-1)^{1821}-7x^{1453}+6x-3]:(x^3-x)$$

17. Να προσδιορίσετε τα $\alpha,\beta,\gamma\in R$ όταν το $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2-12x+\gamma$ έχει παράγοντες όλους τους παράγοντες του $Q(x)=x^3-4x^2+3x$

18. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+5x^2-9x-18$ διαιρείται με το γινόμενο $(x-2)(x+3)$ και να βρείτε το πηλίκο.

19. Να βρείτε τα α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3-\beta x^2-5x+4$ διαιρούμενο με x+2 και $x-1$ να δίνει υπόλοιπα 6 και 2 αντίστοιχα.

20. Έστω πολυώνυμο P(x) με ακέραιους συντελεστές και P(1)=P(3)=5.

Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x^2-4x+3)$ είναι υ=5.

21. Έστω πολυώνυμο P(x) και $Q(x)=P(2x-5)-x^2+x-1$.

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x):(x+1) είναι 3 να δείξετε ότι η διαίρεση $Q(x):(x-2)$ είναι τέλεια.

22. Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στο $P(x)=4x^3-2x^2+6x-5$ για να προκύψει πολυώνυμο που να διαιρείται με το $2x-1$;

23. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\lambda x^2-20x-6$.

α. Να βρείτε το λ ώστε το P(x) να έχει παράγοντα το x+3.

β. Για ποια τιμή του λ το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x):(x+2) είναι το 2.

24. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=4x^4-2\kappa x^3-(5\kappa+2\lambda+3)x^2+x+6.$$

α. Να προσδιορίσετε τα κ, λ ώστε το P(x) να έχει παράγοντες το x+2 και το $x-3$

β. Στη συνέχεια αφού αντικατασταθούν οι τιμές των κ, λ να γίνει γινόμενο το P(x).

25. Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x)=\alpha x^2-(\alpha-1)x+3 \text{ και } Q(x)=(\alpha-2)x^3-3\alpha x+9.$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α έτσι ώστε τα πολυώνυμα να αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με το x+2.

26. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-\alpha x^2-(\alpha+\beta)x+6$.

Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε το P(x) να έχει παράγοντα το x^2+x-2.

27. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου

$$P(x)=(x-3)^{2\nu+1}+x^3-1 \ \ \nu\in\mathbb{N}^* \text{ με το πολυώνυμο } \delta(x)=x-2.$$

28. Πολυώνυμο P(x) διαιρούμενο με το $x-1$ δίνει υπόλοιπο 3 και διαιρούμενο με το x+2 δίνει υπόλοιπο 9. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $(x-1)(x+2)$.

29. Να βρείτε το $\mu\in R$ ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του

$$P(x)=8\mu x^3+(\mu-1)x+3 \text{ με το } 2x+1 \text{ να είναι } 5.$$

30. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε το πολυώνυμο

$$P(x)=\alpha x^3-5x^2+\beta x+12$$

να έχει παράγοντα το $(x-2)^2$.

31. Αν k θετικός ακέραιος, να δείξετε ότι το πολυώνυμο

$$P(x)=(x-2)^{2k}+(x-1)^k-1$$

διαιρείται με το πολυώνυμο $g(x)=x^2-3x+2$

32. Αν ν θετικός ακέραιος, να δείξετε ότι το $P(x)=\nu x^{\nu+2}-\nu x^{\nu+1}-\nu x+\nu$ διαιρείται με το $(x-1)^2$.

33. Αν το x+α είναι παράγοντας του $P(x)=x^3+\alpha x^2+x+\beta$ να δείξετε ότι το x+β είναι παράγοντας του P(x).

4.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού ν ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0,\ \ \alpha_\nu \neq 0$$

Ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολυωνύμου

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0,\ \alpha_\nu \neq 0$$

δηλαδή κάθε αριθμό **ρ**, για τον οποίο ισχύει

P(ρ)=0.

Για την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων βαθμού **μεγαλύτερου από 2**, περιοριζόμαστε στη γνωστή **παραγοντοποίηση**, οπότε η επίλυση της εξίσωσης στηρίζεται στην ισοδυναμία:

$$P_1(x)P_2(x).....P_k(x) = 0 \Leftrightarrow P_1(x) = 0 \ \text{ ή } \ P_2(x) = 0 \ \text{ ή...ή } \ P_k(x) = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (ακέραιων ριζών):

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$$

με ακέραιους συντελεστές.

Αν ο ακέραιος ρ≠0 είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0**.**

ΠΡΟΣΗΜΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

Αν θέλουμε να μελετήσουμε ένα γινόμενο $P(x) = A(x)\cdot B(x)\cdot\ldots\cdot\Phi(x)$

ως προς το πρόσημό του, όπου οι παράγοντες A(x), B(x),…, Φ(x) είναι της μορφής **αx+β** (πρωτοβάθμιοι) ή της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (τριώνυμα), βρίσκουμε το **πρόσημο** κάθε **παράγοντα χωριστά** και στη συνέχεια το **πρόσημο του P(x)** με τη **βοήθεια πίνακα.**

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ της μορφής $A(x)\cdot B(x)\cdot\ldots\cdot\Phi(x) > 0\ \ (<0)$

Άμεση εφαρμογή των παραπάνω έχουμε στην επίλυση ανισώσεων της μορφής

$$A(x)\cdot B(x)\cdot\ldots\cdot\Phi(x) > 0\ \ (<0)$$

4.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ-ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ (18)

1. ΘΕΜΑ Β 4.3 15040

Δίνεται η εξίσωση $x^3-7x+6=0$.

α. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της.

β. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3-7x+6):(x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $x^3-7x+6=0$.

Μονάδες (5+10+10)=25

2. ΘΕΜΑ Β 4.3 15047

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-x^3-5x^2+7x-2$.

α. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β. Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο έχει και άλλη ακέραια ρίζα.

Μονάδες (10+15)=25

3. ΘΕΜΑ Β 4.3 15175

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2+x-1$.

α. Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου.

β. Να αποδείξετε ότι $P(x)=(x-1)\cdot(x^2+1)$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

Μονάδες (5+10+10)=25

4. ΘΕΜΑ Β 4.3 15176

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2+3x-2$.

α. Να αποδείξετε ότι το $x-1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

β. Αν $P(x)=(x-1)(x^2-x+2)$, να βρείτε για ποιες τιμές του x είναι $P(x)>0$.

Μονάδες (12+13)=25

5. ΘΕΜΑ Β 4.3 15246

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2-x-1$.

α. Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

β. Αν $P(x)=(x+1)^2(x-1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

Μονάδες (10+15)=25

6. ΘΕΜΑ Β 4.3 15247

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-x^2+2x-1$.

α. Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

β. Αν $P(x)=(2x-1)(x^2+1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

Μονάδες (10+15)=25

7. ΘΕΜΑ Β 4.3 15248

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $2x-1$ δίνει πηλίκο x^2-2 και υπόλοιπο 1.

α. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

β. Αν $P(x)=2x^3-x^2-4x+3$

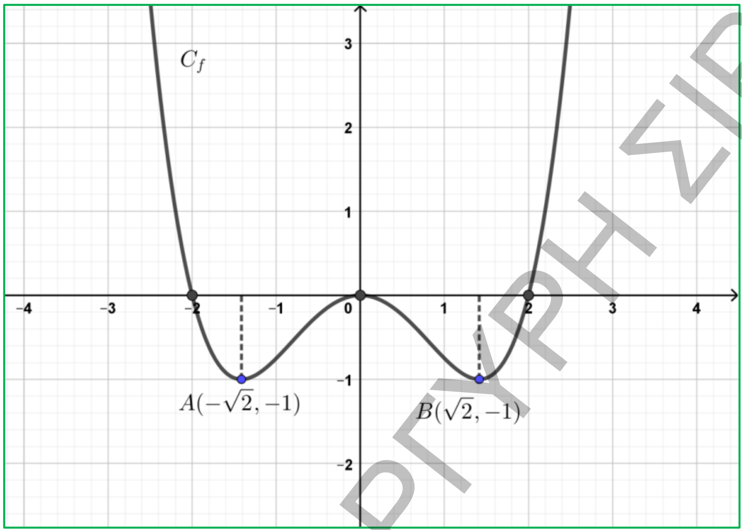
i. να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

ii. να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

Μονάδες [12+(7+6)]=25

8. **ΘΕΜΑ Β** **4.3** **15349**

Δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

β. Αν γνωρίζετε ότι τα σημεία $A(-\sqrt{2},-1)$ και $B(\sqrt{2},-1)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

γ. Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$.

Μονάδες (7+8+10)=25

9. **ΘΕΜΑ Β** **4.3** **15618**

α. Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-x$ ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου.

β. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Μονάδες (10+15)=25

10. ΘΕΜΑ Β 4.3 15653

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2+2x+2$.

α. **i.** Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $(x+1)$.

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x+1)$.

β. Αν $P(x)=(x+1)(x^2+2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

Μονάδες [(8+5+12]=25

11. ΘΕΜΑ Β 4.3 15654

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-7x+6$.

α. Να δείξετε ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

Μονάδες (12+13)=25

12. ΘΕΜΑ Β 4.3 15674

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^3-x^2-x+2$.

α. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β. Αν $P(x)=(x-1)(3x^2+2x+1)+3$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)<3$.

Μονάδες (10+15)=25

13. ΘΕΜΑ Β 4.3 15695

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+2x-3$, $x\in\mathbb{R}$

α. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)+6=0$

Μονάδες (13+12)=25

14. ΘΕΜΑ Β 4.3 15989

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$.

α. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει μοναδική ακέραια ρίζα. Να προσδιορίσετε τη μοναδική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

β. Να βρείτε όλες τις ρίζες του $P(x)$ και να το γράψετε ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

Μονάδες (12+13)=25

15. ΘΕΜΑ Β 4.3 17241

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x + 2$

α. **i.** Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x+1)$.

ii. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x+1)$.

β. Αν $P(x) = (x+1)(x^2 - x + 2)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

Μονάδες (7+10+8)=25

16. ΘΕΜΑ Β 4.3 18230

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$.

α. Να αποδείξετε ότι έχει παράγοντα το $(x-2)$.

β. Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Μονάδες (9+9+7)=25

17. ΘΕΜΑ Β 4.3 18583

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$.

α. **i.** Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$.

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-2)$.

β. Αν $P(x)=(2x-1)(x^2-4)$, να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

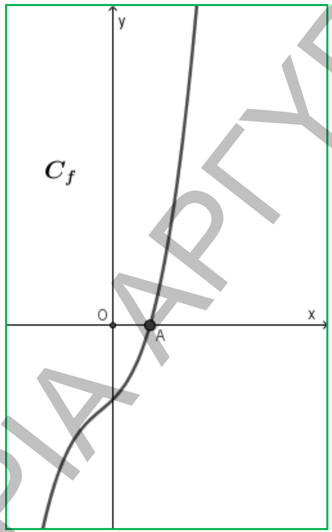
Μονάδες [(10+9)+6]=25

18. ΘΕΜΑ Β 4.3 20856

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3+x^2+x-1,\ \ x\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε οτι η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

β. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



i. Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα.

ii. Να αποδείξετε ότι η ρίζα αυτή βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες (12+4+9)=25

4.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ-ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ (22)

1. **ΘΕΜΑ Δ** **4.3** **14955**

Η μέση θερμοκρασία Τ (σε βαθμούς Κελσίου) στην επιφάνεια ενός πλανήτη, μετά από x εκατομμύρια χρόνια, έχει εκτιμηθεί ότι είναι $T(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$.

α. Αποδείξτε ότι 2 εκατομμύρια χρόνια μετά, η μέση θερμοκρασία στον πλανήτη θα είναι μηδέν $^{\circ}C$.

β. Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$ ώστε να ισχύει

$$T(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

γ. Θεωρούμε ότι μια χρονική περίοδος παγετώνων στον πλανήτη είναι αυτή στην οποία η μέση θερμοκρασία Τ είναι συνεχώς κάτω από μηδέν $^{\circ}C$. Ποιες χρονικές περιόδους θα έχουμε παγετώνες στον πλανήτη;

Μονάδες (5+10+10)=25

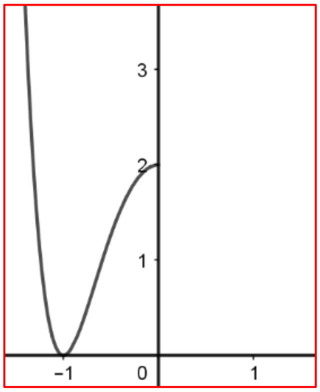
2. **ΘΕΜΑ Δ** **4.3** **15005**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

α. Να αποδείξετε ότι f είναι άρτια.

β. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

γ. Να συμπληρώσετε στο παρακάτω σχήμα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.



δ. Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες $(5+10+4+6)=25$

3. **ΘΕΜΑ Δ** **4.3** **15066**

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x)=2x^4-5x^3+4x^2-5x+2$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του.

ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του.

β. Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

Μονάδες $[(4+4)+5+7+5)=25$

4. **ΘΕΜΑ Δ** **4.3** **15094**

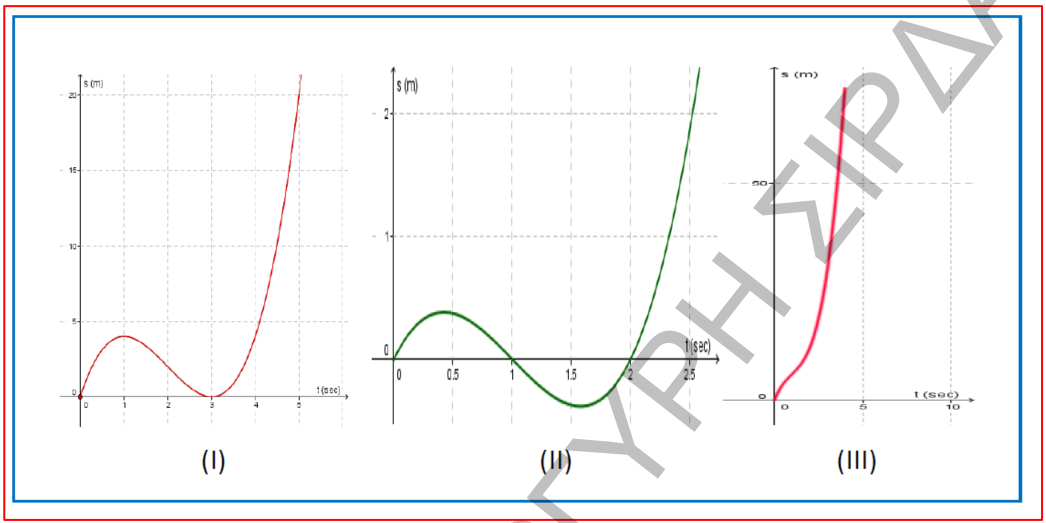
Το διάστημα S(t) σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή t σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση: $S(t)=2t^3-6t^2+10t$.

α. Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές $t=0$ και $t=2$.

β. Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση 30 μέτρων.

γ. Επειδή το $S(t)$ εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό.

δ. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνύμων $S(t)$. Μία από αυτές εκφράζει το διάστημα $S(t)$ της εκφώνησης.



Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες $(3+10+8+4)=25$

5. ΘΕΜΑ Δ 4.3 15174

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^4+x^3+\alpha x-4$ και $\delta(x)=x^2-3x+2$.

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $\upsilon(x)=24x-24$

α. Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού .α.

β. Για α=2

i. να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$.

ii. να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης . $P(x)$.

iii. να βρείτε τις τιμές του για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες $[8+(2+8+7)]=25$

6. **ΘΕΜΑ Δ** **4.3** **15250**

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^5-4x^3-x^2+\alpha x+\beta$ το οποίο διαιρούμενο με το x^2-4 δίνει υπόλοιπο $4x+1$.

α. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2-4)$.

β. Να βρείτε τις τιμές των α και β.

γ. Έστω $\alpha=4$ και $\beta=5$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x^2-4)$ είναι το $\pi(x)=x^3-1$, τότε:

i. να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x^2-4)$.

ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x)<4x+1$.

Μονάδες [7+7+(4+7)]=25

7. **ΘΕΜΑ Δ** **4.3** **15431**

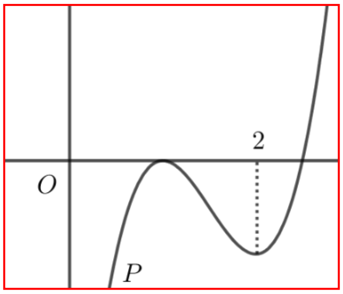
α. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2+\alpha x-5$, με $x\in\mathbb{R}$.

i. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x-2)$ είναι -1, να δείξετε ότι: $\begin{cases} 2\alpha+\beta=-6 \\ \text{και} \\ \alpha+\beta=3 \end{cases}$

ii. Να δείξετε ότι $\alpha=-9$ και $\beta=12$.

β. Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)=2x^3-9x^2+12x-5$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

γ. Αν η γραφική παράσταση της $P(x)$ είναι η ακόλουθη, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

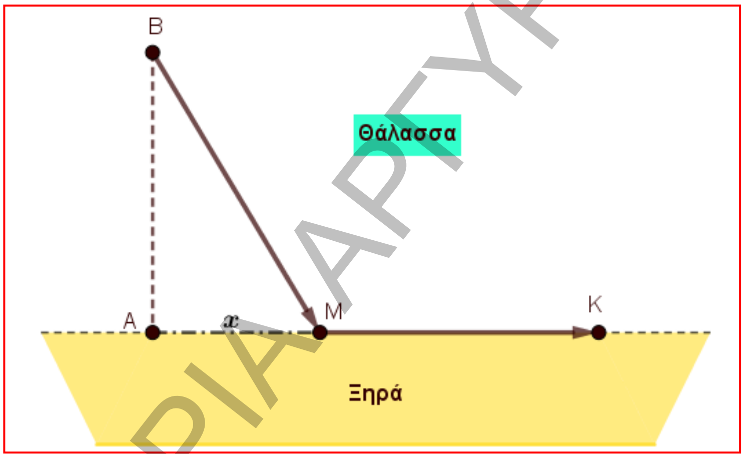


Μονάδες [(6+5)+10+4]=25

8. **ΘΕΜΑ Δ** **4.3** **15436**

Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα, στο σημείο Β σε απόσταση 2 km από το κοντινότερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής. Ο προορισμός του είναι ένα σημείο Κ της ακτής, το οποίο απέχει 4 km από το Α. Η διαδρομή που κάνει είναι η ΒΜ κολυμπώντας στη θάλασσα με σταθερή ταχύτητα 3 km/h και η ΜΚ τρέχοντας στην ακτή με σταθερή ταχύτητα 5km/h.

Γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ του διαστήματος s που διανύεται, της ταχύτητας v και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης t, είναι $v=\frac{s}{t}\Leftrightarrow t=\frac{s}{v}$.



Αν το σημείο Μ απέχει από το Α απόσταση x km, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $BM=\sqrt{4+x^2}$.

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή – δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η:

$$t(x)=\frac{\sqrt{4+x^2}}{3}+\frac{4-x}{5},\quad x\in[0,4].$$

γ. Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ της ακτής, έτσι ώστε ο χρόνος της διαδρομής του κολυμβητή να είναι $\frac{4}{3}$ ώρες.

Μονάδες (5+10+10)=25

9. **ΘΕΜΑ Δ** **4.3** **15677**

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-2x^3-x^2+\alpha x+\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές των α,β, αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x)=x^2-2x+1$.

β. Για $\alpha=4,\beta=-2$

i. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2+5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

ii. Αν $P(x)=\left(x^2+5\right)(x^2-2x-6)+14x+28$ να λύσετε την εξίσωση $P(x)=14(x+2)$.

Μονάδες [8+(8+9)]=25

10. **ΘΕΜΑ Δ** **4.3** **15790**

Δίνονται οι συναρτήσεις

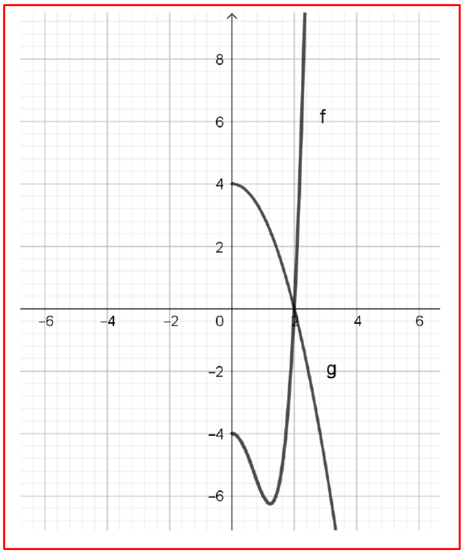
$$f(x)=x^4-3x^2-4 \text{ και } g(x)=-x^2+4$$

με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι

$f(-x)=f(x)$ και $g(-x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β. Στο διπλανό σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.



Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το $\mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Να λύσετε , αλγεβρικά ή γραφικά:

i. την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

ii. την ανίσωση $f(x)<g(x)$.

Μονάδες [7+6+(6+6)]=25

11. **ΘΕΜΑ Δ** **4.3** **15960**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+\kappa x-1$ με $\kappa\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$ για την οποία $f(-x)=f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β. Για $\kappa=0$.

i. να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$,

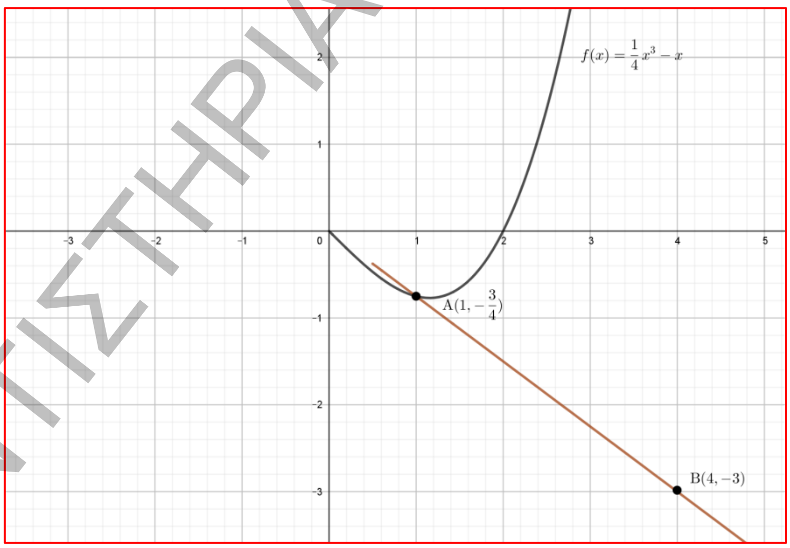
ii. να δείξετε ότι $f(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii. να βρείτε τα $x\in\mathbb{R}$. για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες [6+(6+6+7)]=25

12. **ΘΕΜΑ Δ** **4.3** **17919**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x$, $x\in\mathbb{R}$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ και $B(4,-3)$.



α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB

β. **i.** Να αποδείξετε ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x<0$.

γ. Αν η ευθεία AB έχει εξίσωση $y=-\dfrac{3}{4}x$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με την γραφική παράσταση της f.

Μονάδες [6+(5+6)+8]=25

13. **ΘΕΜΑ Δ** **4.3** **17925**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+\alpha x^2$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ και το σημείο $A\left(-1,-\dfrac{3}{4}\right)$ αυτής.

α. Να δείξετε ότι $\alpha=-1$.

β. Για $\alpha=-1$,

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x>0$.

γ. Αφού επιβεβαιώσετε ότι $f\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{3}{4}$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y=-\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f.

Μονάδες [6+(5+6)+8)=25

14. ΘΕΜΑ Δ 4.3 17943

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E=60cm^2$,E = 30cm² του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά $2cm$ cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm cm), τότε:

α. Να δείξετε ότι ο αριθμός x x ικανοποιεί την εξίσωση: $x^3+x^2-3600=0$.

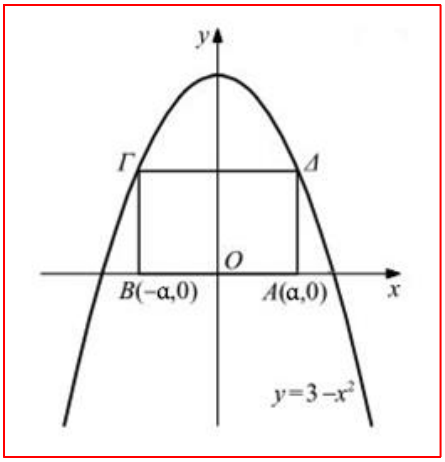
β. Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 16, να βρείτε την τιμή του x x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

γ. Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων τριγώνων που ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (10+10+5)=25

15. ΘΕΜΑ Δ 4.3 18221

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η παραβολή $y=3-x^2$ και τα σημεία της Γ,Δ. Δίνεται ακόμα ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $\alpha\in\left(0,\sqrt{3}\right)$.



α. Αν E είναι το εμβαδό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\left(0,\sqrt{3}\right)$ είναι $E=f\left(\alpha\right)=-2\alpha^3+6\alpha$ τετραγωνικές μονάδες.

ii. να βρεθεί το εμβαδό E στη θέση $\alpha=1$.

β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό E δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 4 τετραγωνικές μονάδες.

γ. Να βρεθεί η θέση του α, ώστε το εμβαδό E να πάρει τη μέγιστη τιμή του.

Μονάδες [(8+2)+12+3]=25

16. **ΘΕΜΑ Δ** **4.3** **20752**

Δύο συμμαθητές ο Αλέξανδρος και ο Φίλιππος που κάθονται στο ίδιο θρανίο σχεδιάζουν τον τριγωνομετρικό κύκλο σε μιλιμιτρέ χαρτί και στη συνέχεια προσπαθώντας να υπολογίσουν τις συντεταγμένες ενός δοσμένου σημείου Μ αυτού του κύκλου διαφωνούν στην απάντησή τους. Ο Αλέξανδρος εκτιμά ότι οι συντεταγμένες του σημείου Μ είναι $M(0{,}8\,,\,0{,}6)$ ενώ ο Φίλιππος εκτιμά ότι οι συντεταγμένες του είναι $M(1\,,1)$.

α. Ποιος από τους δύο έχει σίγουρα άδικο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Αν υποθέσουμε ότι το σημείο του οποίου υπολογίστηκαν σωστά οι συντεταγμένες του είναι το $M(0{,}8\,,\,0{,}6)$

i. να αιτιολογήσετε ότι $\eta\mu\omega = 0{,}6$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = 0{,}8$

ii. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \eta\mu(\pi-\omega) - 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) + \varepsilon\varphi(-\omega) + \sigma\varphi(\pi+\omega).$$

γ. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = 5\sigma\upsilon\nu\omega\cdot x^3 - 10\eta\mu\omega\cdot x^2 + 5x - 3$, $x \in R$ όπου ω η γωνία που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

Μονάδες [8+(3+5)+9]=25

17. **ΘΕΜΑ Δ** **4.3** **20859**

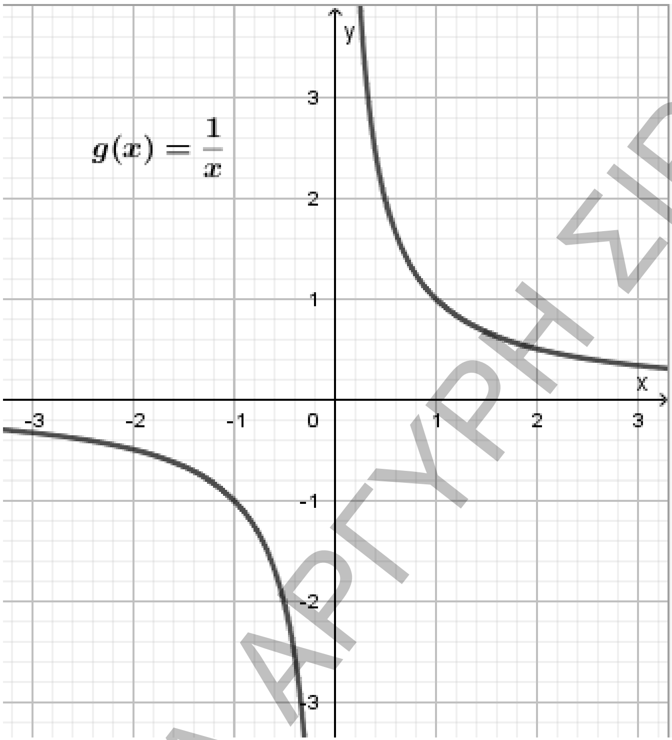
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x^3-4x^2+x+6}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

γ. **i.** Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f.

ii. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{1}{x}$ είναι η παρακάτω,



να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

δ. Να λύσετε την εξίσωση: $\left|\frac{1}{f(x)}\right|=1$.

Μονάδες [9+5+(2+4)+5]=25

18. **ΘΕΜΑ Δ** **4.3** **20943**

Δίνεται γωνία x με $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ και οι παραστάσεις:

$$A=\eta\mu^2(\pi-x)+\eta\mu^2(\pi+x)+\sigma\upsilon\nu^2(-x),$$

$$B=\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\ .$$

α. Να αποδείξετε ότι $A=\eta\mu^2 x+1$.

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση B.

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x για την οποία οι παραστάσεις Α και Β να είναι ίσες.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

19. **ΘΕΜΑ Δ** **4.3** **21155**

Στον πίνακα μιας σχολικής τάξης είναι γραμμένο το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, όπου οι συντελεστές a, b, c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι αριθμοί. Δύο μαθητές, ο Α και ο Β, παίζουν ένα παιχνίδι, επιλέγοντας τιμές για τους συντελεστές ως εξής: πρώτα ο Α επιλέγει τιμή για κάποιον συντελεστή, μετά ο Β επιλέγει τιμή για έναν από τους δύο εναπομείναντες συντελεστές και τέλος ο Α επιλέγει τιμή για τον συντελεστή που έμεινε. Προσπαθούν να επιλέξουν τους a, b, c ώστε το $P(x)$ να ικανοποιεί κάποια συγκεκριμένη συνθήκη.

α. Έστω ότι ο μαθητής Α επιλέγει $a = 2$, μετά ο Β επιλέγει $b = 1$ και τέλος ο Α επιλέγει πάλι $c = 2$. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ θα έχει τότε ως μοναδική ρίζα τον αριθμό -2.

β. Ο μαθητής Α επιλέγει $a = -1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x - 1$.

γ. Ο μαθητής Α επιλέγει $c = 1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει σίγουρα ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

δ. Ο μαθητής Α επιλέγει $c = 2022$. Να αποδείξετε ότι όπως και να επιλεγούν μετά οι συντελεστές a και b είναι αδύνατον το $P(x)$ να έχει ως ρίζα τον αριθμό 13.

Μονάδες $(5+8+7+5)=25$

20. **ΘΕΜΑ Δ** **4.3** **21240**

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$.

α. Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου.

β. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $3\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^3+4\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^2-5\left(\frac{5}{x^2+1}\right)-2>0$.

Μονάδες (5+9+11)=25

21. **ΘΕΜΑ Δ** **4.3** **22013**

Δίδεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4+1$.

α. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

β. Να βρείτε δύο αριθμούς α, β τέτοιους ώστε:

$$x^4+1=(x^2+\alpha x+1)(x^2+\beta x+1)$$

γ. Θεωρούμε την ακόλουθη πρόταση: «*Κάθε πολυώνυμο που μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων μικρότερου μη μηδενικού βαθμού, έχει πραγματικές ρίζες*». Είναι η πρόταση αυτή Σωστή ή Λάθος; Αν η πρόταση είναι σωστή, να δώσετε απόδειξη. Αν η πρόταση είναι λάθος, να δώσετε αντιπαράδειγμα.

Μονάδες (5+10+10)=25

22. **ΘΕΜΑ Δ** **4.3** **37475**

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-x^2-2x+1$. Να αποδείξετε ότι

α. το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$

β. $P(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{2},1)$.

γ. $\frac{1}{2}<\text{συν}\theta<1$ για κάθε γωνία $\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$.

δ. $P(\text{συν}\theta)<0$ για κάθε γωνία $\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$.

Μονάδες (6+7+6+6)=25

Κεφάλαιο 4ο ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

53

4.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

§4.3 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2+x-12$

α. Να αιτιολογήσετε γιατί το διώνυμο $x-3$ είναι παράγοντας του P(x).

β. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$

Μονάδες (13+12)=25

2. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2-11x+30$ με $\alpha\in\mathbb{R}$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι έχει ρίζα το 5.

α. Να υπολογίσετε την τιμή του α.

β. Για $\alpha=-4$, να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

Μονάδες (12+13)=25

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2-11x+30$ με $\alpha\in\mathbb{R}$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι η τιμή του για $x=1$ είναι 16.

α. Να υπολογίσετε την τιμή του α.

β. Για $\alpha=-4$ και το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης $P(x)=0$, να προσδιορίσετε τις άλλες ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$.

Μονάδες (12+13)=25

4. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\beta, \gamma, \delta\in\mathbb{R}$, το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς 0, 1 και 3.

α. Να δείξετε ότι $\beta=-4$, $\gamma=3$ και $\delta=0$.

β. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

Μονάδες (15+10)=25

5. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\lambda^2 x^3-4\lambda x+3$, με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε το P(x) να έχει παράγοντα το $x-1$.

β. Αν $\lambda=3$, να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου P(x).

Μονάδες (10+15)=25

6. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2x^4-x^3+\alpha x^2-5x+6$ διέρχεται από το σημείο M(−2,0),

α. να αποδείξετε ότι $\alpha=-14$

β. να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y.

Μονάδες (12+13)=25

7. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^3-10x^2+9x-2$

α. Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο $3x^2-4x+1$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

β. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$.

Μονάδες (15+10)=25

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3+x^2-5x+2$.

α. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

β. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f, βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x .

Μονάδες (15+10)=25

9. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2-5x+\beta$ με $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$.

α. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x-2$ είναι ίσο με −4, να βρείτε τα $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$.

β. Αν $\alpha=-2$ και $\beta=6$, να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$

Μονάδες (13+12)=25

10. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+2$.

Αν το P(x) έχει παράγοντα το $x+1$ και $P(2)=18$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=2$

β. Να λύσετε την εξίσωση: $P(x)=0$

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $P(x)\leq 0$

Μονάδες (10+8+7)=25

11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+(\kappa-6)x^2-7x+\kappa$.

α. Να βρείτε για ποιά τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$, το 2 είναι ρίζα του P(x).

β. Αν $\kappa=6$, να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

Μονάδες (12+13)=25

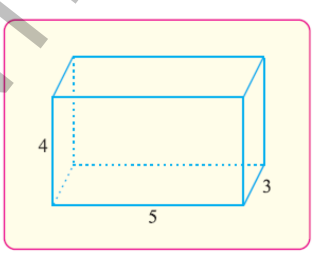
12. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+6$.

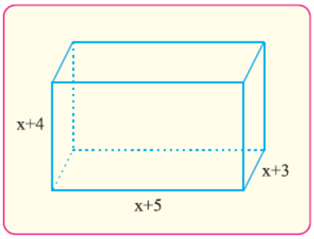
α. Αν γνωρίζετε ότι η τιμή του πολυωνύμου για $x=1$ είναι ίση με 10 και $P(2)=10$, να βρείτε τα $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$

β. Αν $\alpha=-5$ και $\beta=8$, να λύσετε την ανίσωση $P(x)>10$.

Μονάδες (12+13)=25

13. Μια εταιρεία κατασκευάζει κουτιά σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 3 cm, 4 cm και 5 cm. Ένας νέος πελάτης ζήτησε από την εταιρεία να κατασκευάσει κουτιά με όγκο 120 cm^3, δηλαδή διπλάσιο από εκείνον που κατασκευάζει. Η εταιρεία αποφάσισε να κατασκευάσει τα κουτιά που ζήτησε ο πελάτης της, αυξάνοντας τις διαστάσεις του αρχικού κουτιού κατά σταθερό ακέραιο μήκος x.





α. Να αποδείξετε ότι το x θα είναι λύση της εξίσωσης

$$x^3+12x^2+47x-60=0.$$

(Ο όγκος V ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β, γ δίνεται από τον τύπο: $V=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$)

β. Να βρείτε τον θετικό ακέραιο x λύνοντας την εξίσωση που δίνεται στο ερώτημα α).

Μονάδες (12+13)=25

14. Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x)=\left(\alpha^3+2\right)x^3+x^2+1 \text{ και } Q(x)=3\alpha x^3+x^2+1,$$

όπου α θετικός πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε το α ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα.

β. Αν $\alpha=1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x)=0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

Μονάδες (13+12)=25

15. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3+2x^2-4x+\lambda.$$

α. Αν $P(-1)=6$, να δείξετε ότι $\lambda=1$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

Μονάδες (11+14)=25

16. Το πολυώνυμο

$$P(x)=\left(\lambda^2-1\right)x^4-2(\lambda-1)x^3+2\lambda x^2+\lambda+1$$

είναι 3ου βαθμού.

α. Να δείξετε ότι $\lambda=-1$.

β. Να βρείτε το P(x).

γ. Να βρείτε τις ρίζες του P(x).

Μονάδες (9+7+9)=25

17. Το πολυώνυμο P(x) αν διαιρεθεί με το $x-2$ δίνει πηλίκο $\left(x^2-3x+2\right)$ και υπόλοιπο τον πραγματικό αριθμό υ.

α. Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.

β. Αν $P(1)=10$, να βρείτε το υ.

γ. Αν $\upsilon=10$, να βρείτε το $P(x)$.

Μονάδες (8+9+8)=25

18. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E=30\ cm^2$ του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 1 cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α. Να δείξετε ότι οι αριθμοί x,y ικανοποιούν τις σχέσεις: $y=\dfrac{60}{x}$ και $(x+1)^2=x^2+y^2$

β. Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση: $2x^3+x^2-3600=0$

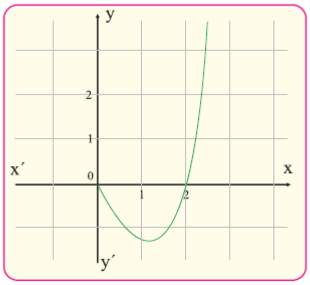
γ. Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 15, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

δ. Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλο ορθογώνιο τρίγωνο (με διαφορετικά μήκη πλευρών από αυτά που προσδιορίσατε στο ερώτημα γ)) το οποίο ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος.

19. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3+\gamma x+\delta,\ x\in\mathbb{R}$$

και γ, δ πραγματικές σταθερές.



α. Με βάση τη γραφική παράσταση, να αποδείξετε ότι

$$\gamma=-1 \text{ και } \delta=0$$

β. Θεωρώντας τώρα δεδομένο ότι $f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-x$:

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=-f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii. Να μεταφέρετε στην κόλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x<0$

iii. Να επαληθεύσετε ότι $f(1) = -\frac{3}{4}$ και, στη συνέχεια, να λύσετε τις εξισώσεις

$$f(x) = -\frac{3}{4} \quad \text{και} \quad f(x) = \frac{3}{4}$$

Μονάδες [5+(5+5+10)]=25

20. Έστω P(x) πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο x^2+2x και είναι τέτοιο, ώστε $P(1)=0$ και $P(2)=8$.

α. Να αποδείξετε ότι $P(x)=x^3+x^2-2x$.

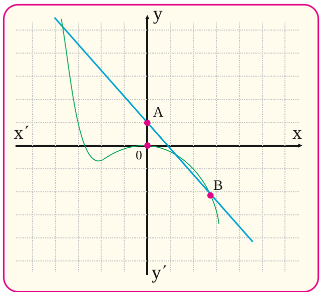
β. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=8$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)>2$.

Μονάδες (10+6+9)=25

21. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=-x^3-x^2$

και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A(0,1) και B(1,–2).



α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας.

β. Αν η ευθεία έχει εξίσωση $y=-3x+1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $-x^3-x^2<-3x+1$

Μονάδες (7+9+9)=25

22. Να βρείτε ένα πολυώνυμο P(x) για το οποίο ισχύει $(3x-2)P(x)=6x^3-7x^2-x+2$ και μετά να λύσετε την εξίσωση $6x^3-7x^2-x+2=0$.

23. Να βρείτε το $\lambda \in R$ ώστε το πολυώνυμο

$P(x)=(x-\lambda^3)+4x+12\lambda-17(x+1)^9$ να έχει παράγοντα το x+1.

24. Να λύσετε τις εξισώσεις: **i.** $x^3+x^2-12=0$ **ii.** $x^6-729=0$

25. Να λύσετε τις εξισώσεις: **i.** $(2x-4)^3+1=0$ **ii.** $3x^4-4x^3+1=0$

26. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων:

$$2x^4+x^3-5x^2+2x=0 \text{ και } 2(2x-1)^{2004}+(4x-1)^{2003}=4x-1$$

27. Αν $P(x)=x^9-12x^6+35x^3+\alpha$

α. να βρείτε τι τιμές του $\alpha\in R$ για τις οποίες το $x-1$ είναι παράγοντας του P(x).

β. για τις τιμές που θα βρείτε να λύσετε την εξίσωση P(x)=0.

28. Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha,\beta\in R$ το πολυώνυμο $P(x)=x^4-\alpha x^3+17x^2+2x+\beta$ έχει παράγοντες τους x+1 και $x-2$. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση P(x)=0

29. Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^4+x^3-(\alpha^3+1)x^2-\alpha^2x+4=0$

α. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση έχει ρίζα το -1.

β. Να λύσετε τις εξισώσεις που προκύπτουν για τις τιμές του α που θα βρείτε.

30. Να λύσετε την εξίσωση: $x^4-7x^3+11x^2+7x-12=0$ αν δύο ρίζες της έχουν άθροισμα 7 και γινόμενο 12.

31. Να λύσετε την εξίσωση: $x^5-4x^3+3x=0$

32. Αν μια ρίζα της εξίσωσης $10x^2-(3\lambda^4+8\lambda^2)x-200=0$ είναι το 10 να βρείτε την άλλη ρίζα της.

33. Να λύσετε την εξίσωση: $(x^2-5x+2)^4-8(x^2-5x+2)^2=-16$

34. Να λύσετε την εξίσωση: $(x^2-1)^3-2(x^2-1)^2-5(x^2-1)+6=0$

35. Να λύσετε την εξίσωση: $(x^2+x+1)(x^2+x-9)=-21$

36. Να λύσετε την εξίσωση: $\left(\dfrac{1+x+x^2}{x}\right)^2+4\left(2+x+\dfrac{1}{x}\right)=0$

37. Να λύσετε την εξίσωση: $x^3+\dfrac{1}{x^3}=x+\dfrac{1}{x}$

38. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $x^3-6x^2+11x-6\le 0$ **ii.** $x^3-2x^2+x-2>0$ **iii.** $x^6>64$

39. Να λύσετε την ανίσωση: $x^3(x+1)-2>x(x-1)$

. Να λύσετε την ανίσωση: $(x+2)^3\le 8x^2+16x$

40. Να λύσετε την ανίσωση: $x^4-5x^2+4<0$

41. Να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα x΄x και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης: $f(x)=9x^3-12x^2-11x-2$

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+(\kappa-1)x+2$. Αν το σημείο Μ(2,4) ανήκει στη γραφική παράσταση C της f να βρείτε τα κοινά σημεία της με τον άξονα x΄x.

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$

Να καθορίσετε τη θέση της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα x΄x.

44. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)=x^3+2x-3$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

45. Να λύσετε την εξίσωση: $x(x-1)(x-2)(x-3)=120$

46. Να λύσετε την εξίσωση: $(2x-1)^8-80(2x-1)^4-81=0$

47. Να λύσετε την εξίσωση: $|x^3|-2|x^2|-|x|+2=0$

48. Να λύσετε τις εξισώσεις: **i.** $x^4-8x^2-9=0$ **ii.** $x^3-3x+2=0$

49. Να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα x΄x και της γραφικής παράστασης της $f(x)=2x^3-3x^2+1$

50. Αν το πολυώνυμο $P(x)=x^4+(\lambda-\mu)x^3+2\lambda x^2-5x+4$ έχει διπλή ρίζα το 1 να βρείτε τα $\lambda,\mu\in R$ και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

51. Να βρείτε τους αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x)=2x^3-(2\alpha+\beta)x^2+(\alpha+\beta+1)-\beta$ να τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $A\left(\frac{1}{2},0\right)$ και

Β(1,0). Στη συνέχεια να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει άλλα κοινά σημεία με τον άξονα x΄x και να βρείτε τα διαστήματα στα οποία βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

52. Δίνεται η εξίσωση: $x^3+\kappa x^2+\kappa x+1=0$

Να βρείτε τις τιμές του $\kappa\in R$ ώστε να έχει τρεις ρίζες πραγματικές.

53. **α.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(1,-1)$, $B(2,-4)$

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία αυτή τέμνει την καμπύλη $y=x^3-2x$ για τα x που είναι ρίζες της εξίσωσης $x^3+x-2=0$

γ. Να βρείτε αν η ευθεία και η καμπύλη έχουν κοινό άλλο σημείο.

4.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ-ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

Υπάρχουν εξισώσεις-ανισώσεις, οι οποίες δεν είναι πολυωνυμικές, αλλά με κατάλληλη διαδικασία η λύση τους ανάγεται στη λύση πολυωνυμικών εξισώσεων-ανισώσεων.

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\frac{A(x)}{B(x)}>0$ (<0)

Όπως γνωρίζουμε το πηλίκο και το γινόμενο δύο αριθμών είναι ομόσημα. Επομένως:

$$\frac{A(x)}{B(x)}>0 \Leftrightarrow A(x)B(x)>0 \quad \text{και} \quad \frac{A(x)}{B(x)}<0 \Leftrightarrow A(x)B(x)<0,$$

αφού καμία από τις λύσεις της $A(x)B(x)>0$ και της $A(x)B(x)<0$ δε μηδενίζει το $B(x)$.

Μία ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)}\geq 0$ **αληθεύει** για εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύουν συγχρόνως

$$A(x)B(x)\geq 0 \quad \text{και} \quad B(x)\neq 0.$$

Για να λύσουμε ένα σύστημα ανισώσεων λύνουμε την κάθε ανίσωση χωριστά και μετά βρίσκουμε τις κοινές λύσεις.

4.4 Εξισώσεις ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές (11)

1. ΘΕΜΑ Δ 4.4 15037

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεις

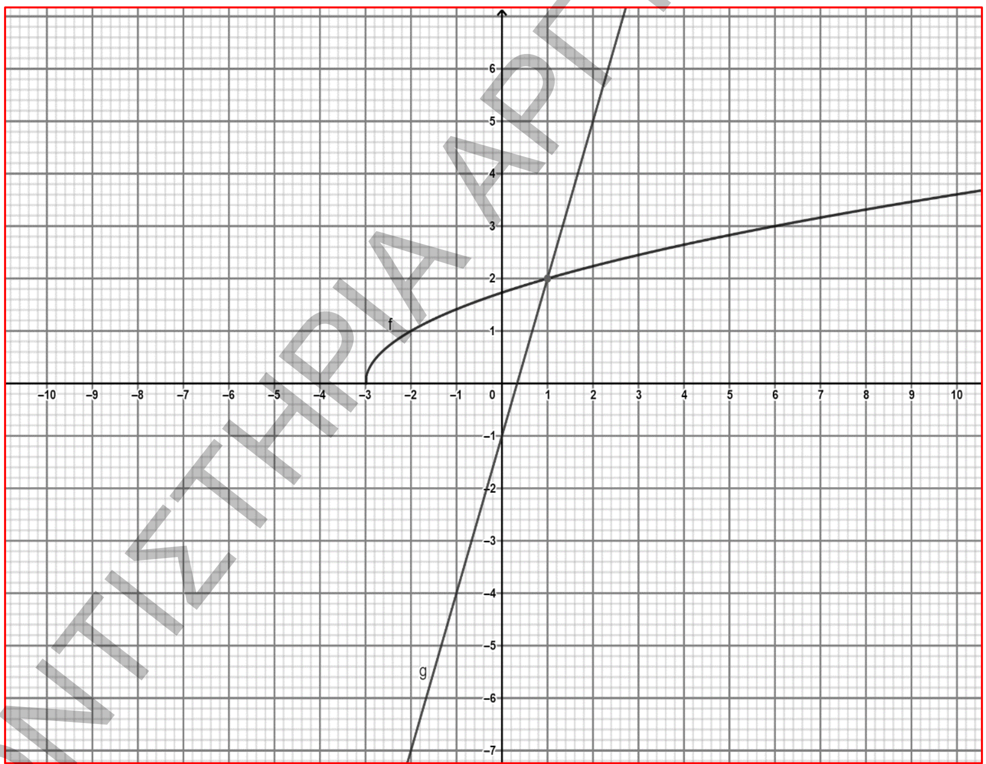
$$f(x)=\sqrt{x+3} \quad \text{και} \quad g(x)=3x-1.$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

γ. **i.** Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x)<g(x)$.

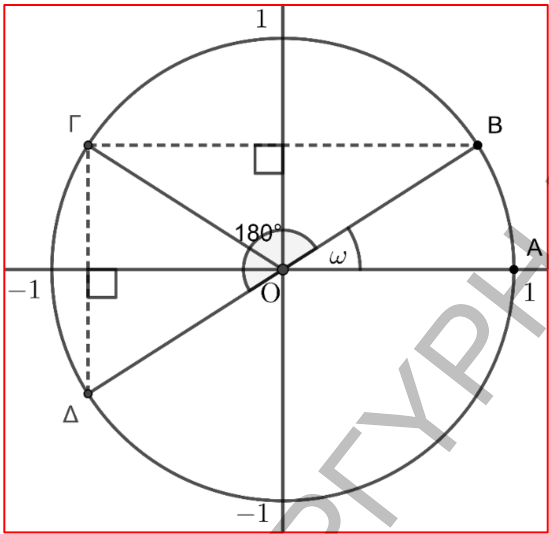
ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του i ερωτήματος.



Μονάδες [4+6+(7+8)]=25

2. ΘΕΜΑ Δ 4.4 15187

Για τη γωνία ω του παρακάτω σχήματος ισχύει $5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0$.



α. Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = \dfrac{3}{5}$.

β. Να βρείτε:

i. την τιμή του $\sigma\upsilon\nu\omega$,

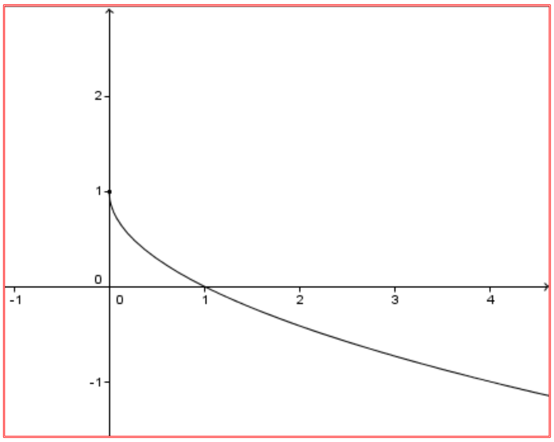
ii. τις συντεταγμένες των σημείων B, Γ και Δ,

iii. το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Delta$.

Μονάδες $[8+(6+6+5)]=25$

3. ΘΕΜΑ Δ 4.4 15270

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$.



α. Να βρείτε την μονοτονία της και την μέγιστη τιμή της.

β. Αν $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$, και $0<\alpha<\dfrac{1}{4}<\beta$, να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$P = (2f(\alpha)-1)(2f(\beta)-1)$

γ. Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι η $f(x) = 1-\sqrt{x},\ x \geq 0$.

Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y = 2x$.

Μονάδες (6+10+9)=25

4. **ΘΕΜΑ Δ** **4.4** **15377**

Μία κυβική δεξαμενή Α έχει ακμή με μήκος x μέτρα.

Αν αυξηθεί η μία μόνο ακμή της κατά μία μονάδα θα μετατραπεί στη δεξαμενή Β σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με τετράγωνη βάση.

α. Να βρείτε τη διαφορά Δ(x) των όγκων των δύο δεξαμενών ως συνάρτηση του x.

β. Αν ο όγκος της δεξαμενής Β είναι 36 κυβικά μέτρα να βρείτε:

i. Τις διαστάσεις των δεξαμενών Α και Β.

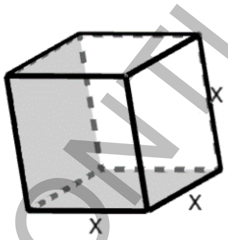
ii. Τη διαφορά των όγκων Δ(x).(Μονάδες 4)

γ. Αν επιπλέον αυξηθεί η μία ακμή της βάσης της δεξαμενής Β κατά 2 μονάδες, να βρείτε τη μικρότερη τιμή του x ώστε ο όγκος της νέας δεξαμενής Γ να είναι τουλάχιστον 60 κυβικά μέτρα.

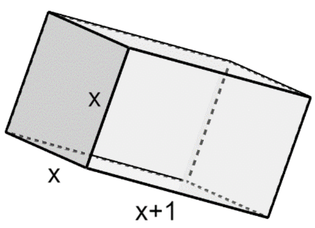
Μονάδες [4+(9+4)+8[=25

Βοηθητικά δίνονται τα σχήματα των δεξαμενών Α, Β και Γ

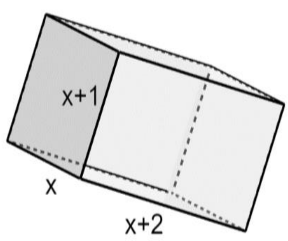
Δεξαμενή Α



Δεξαμενή Β



Δεξαμενή Γ



5. **ΘΕΜΑ Δ** **4.4** **17941**

Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}.\quad (1)$

α. Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η εξίσωση (1).

β. Να λύσετε την εξίσωση (1) για $\alpha=0$.

γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}$ είναι άρτια.

δ. Να αποδείξετε ότι:

i. Για $\alpha=2\sqrt{2}$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα.

ii. Για $\alpha\neq 2\sqrt{2}$ αν η εξίσωση (1) έχει ως ρίζα τον αριθμό $\rho\in[-2,2]$, τότε θα έχει ως ρίζα και τον αριθμό $-\rho$.

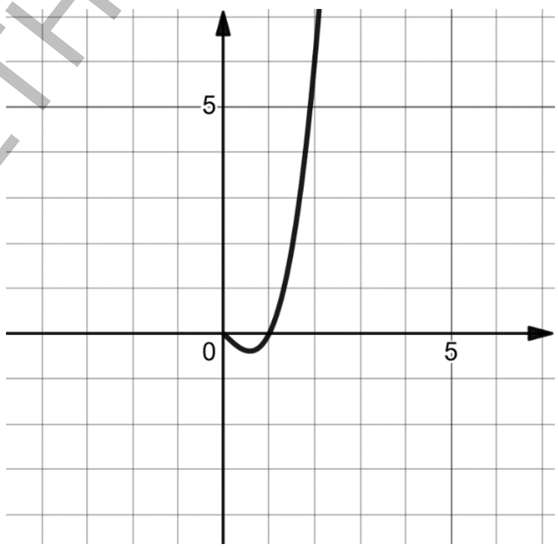
Μονάδες [5+5+5+(5+5)]=25

6. **ΘΕΜΑ Δ** **4.4** **18111**

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}, & \text{όταν } x\geq 0\\ -\sqrt[3]{-x}, & \text{όταν } x<0\end{cases}$ και $h(x)=x^3-x, x\in\mathbb{R}$.

α. **i.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.

ii. Να συμπληρώσετε το παρακάτω σχήμα ώστε να παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h.



iii. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε το παραπάνω σχήμα, να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με τον άξονα $x'x$.

β. Αν $x \geq 0$ να αποδείξετε ότι: η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = x$ αν και μόνο αν η γραφική παράσταση της h βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες $[(3+4+8)+10]=25$

7. **ΘΕΜΑ Δ** **4.4** **18696**

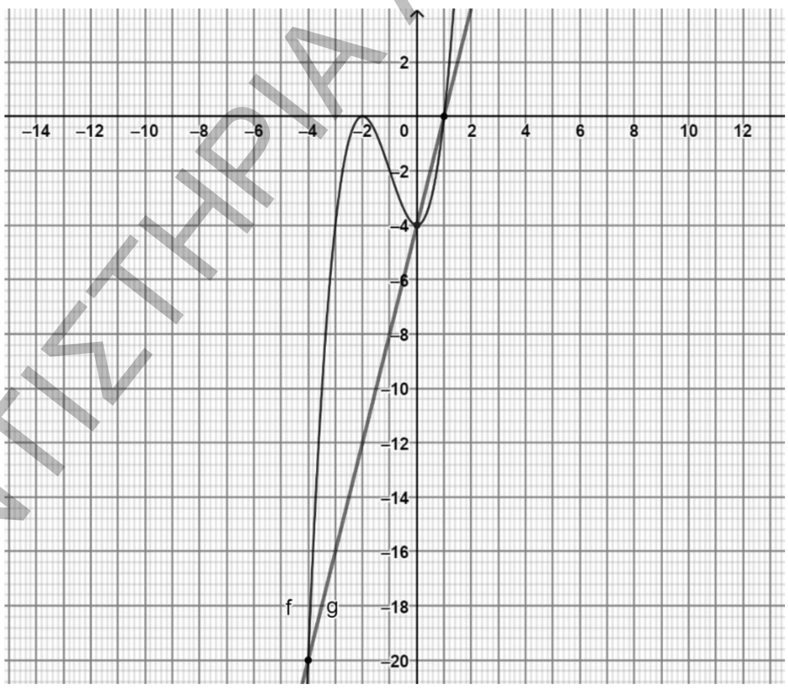
Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \text{ και } g(x) = 4x - 4 \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

α. Από τη γραφική παράσταση της f, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

β. Να λύσετε γραφικά και αλγεβρικά την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

γ. Να βρείτε αλγεβρικά τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Μονάδες $(8+10+7)=25$

8. **ΘΕΜΑ Δ** **4.4** **18713**

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-\alpha x^2+2x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Αν $P(1)=2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$ ισούται με 15,

α. Να δείξετε ότι $P(x)=2x^3-x^2+2x-1$.

β. i. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $\pi(x)=x^2+1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^3 x+\sigma\upsilon\nu x=1-\frac{1}{2}\eta\mu^2 x$, $x\in(0,2\pi)$.

Μονάδες [8+(5+5)+7]=25

9. **ΘΕΜΑ Δ** **4.4** **20647**

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-\beta x+3$, α, $\beta\in\mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 2, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας συντελεστής του δεν είναι ακέραιος.

Αν επιπλέον $P(1)=0$, τότε:

β. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-3$ και $\beta=\frac{21}{2}$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\le 0$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $P(\sigma\upsilon\nu x)=0$.

Μονάδες (7+6+6+6)=25

10. **ΘΕΜΑ Δ** **4.4** **20731**

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\ x^4+6x^2-7$.

α. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο x-1 είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

β. Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x)$ σε πολυώνυμα πρώτου ή δευτέρου βαθμού.

γ. **i.** Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

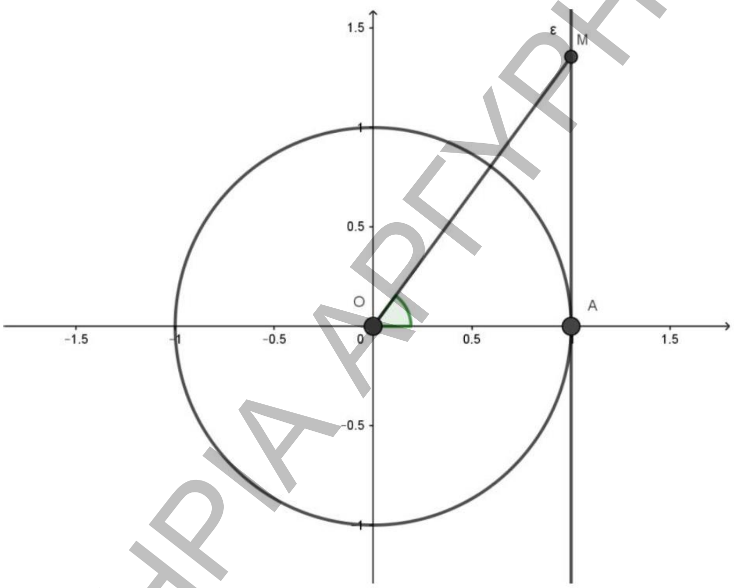
ii. Αν οι αριθμοί -1 και 1 είναι οι ρίζες της εξίσωσης P(x)=0, να λύσετε την εξίσωση

$$(2\eta\mu x - 1)^4 + 6(2\eta\mu x - 1)^2 - 7 = 0, \text{ για } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες [5+8+(5+7)]=25

11. **ΘΕΜΑ Δ** **4.4** **20759**

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΜ που βλέπετε στο παρακάτω σχήμα είναι $(\text{OAM}) = \frac{4}{6}$ τετραγωνικές μονάδες. Η ευθεία ε είναι εφαπτόμενη στον κύκλο στο σημείο Α.



α. Να αποδείξετε ότι για τη γωνία $\omega = \hat{AOM}$ ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = \frac{4}{3}$, $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$.

β. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$, $\sigma\varphi\omega$ της γωνίας $\omega = \hat{AOM}$ αν ισχύει $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$.

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu^2 x - 5\eta\mu\omega \cdot \eta\mu x + 5\sigma\upsilon\nu\omega$ και του άξονα $x'x$, όπου $\omega = \hat{AOM}$ η γωνία του προηγούμενου ερωτήματος και $x \in R$.

Μονάδες (8+8+9)=25

Κεφάλαιο 4ο ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

30

4.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ-ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

§4.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=\left(\kappa^2-1\right)x^4+\frac{1}{2}(\kappa+1)x^3+(\kappa-1)x^2-3\kappa x+\lambda,\ \kappa,\lambda\in\mathbb{R}.$$

α. Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ αν το πολυώνυμο P(x) είναι $3^{ου}$ βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $x-1$ είναι ίσο με -4.

β. Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$

i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το $x-1$

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)+4=x^2-1$

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{P(x)}{(x-1)^2(x+2)}\geq 1$

Μονάδες (7+5+7+6)=25

2. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2+\beta x+2$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

α. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x-2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x+1$ είναι ίσο με -6, να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

β. Αν $\alpha=-5$ και $\beta=1$, να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$

γ. Να λύσετε την εξίσωση $2\text{συν}^3\omega+5\text{ημ}^2\omega+\text{συν}\omega-3=0$

Μονάδες (7+8+10)=25

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-x^3+\kappa x^2+x+\lambda$ με $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές των $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ όταν το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το $x+2$.

β. Για $\kappa=-7$ και $\lambda=6$ να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

γ. Για $\kappa=-7$ και $\lambda=6$ να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{P(x)}{x-5}\geq 0$

Μονάδες (7+9+9)=25

4. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-7x+\alpha+5$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x είναι ίσο με 6 και ότι έχει ρίζα το 1.

α. Να βρείτε τις τιμές των α και β

β. Για $\alpha=1$ και $\beta=0$, να λύσετε

i. την ανίσωση $P(x)\geq 0$ **ii.** την εξίσωση $\sqrt{P(x)}=x-1$

Μονάδες (8+8+9)=25

5. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha^3x^2-\alpha^2x-\alpha$, με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x-\alpha)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες το $(x-\alpha)$ διαιρεί το P(x).

γ. Αν $\alpha=-1$, τότε:

i. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $(x+1)\,P(x)\leq 0$.

Μονάδες (7+6+6+6)=25

6. Μια εταιρεία εκτίμησε ότι το κέρδος της P (σε χιλιάδες ευρώ) από την πώληση ενός συγκεκριμένου προϊόντος ήταν:

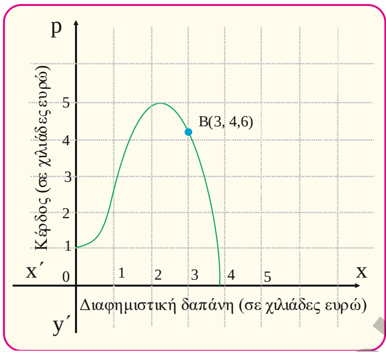
$$P(x)=-0,5x^3+1,9x^2+1,\quad 0\leq x<4,$$

όπου x είναι η διαφημιστική δαπάνη (σε χιλιάδες ευρώ). Για αυτό το προϊόν, ξόδεψε για διαφήμιση 3 χιλιάδες ευρώ και το κέρδος της ήταν 4,6 χιλιάδες ευρώ.

α. **i.** Να χρησιμοποιήσετε την παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x) για να εκτιμήσετε ένα άλλο ποσό x που θα μπορούσε να δαπανήσει για διαφήμιση η εταιρεία ώστε να έχει το ίδιο κέρδος.

ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του ερωτήματος i.

β. Πόσα χρήματα πρέπει να δαπανήσει η εταιρεία για διαφήμιση, ώστε το κέρδος της να είναι μεγαλύτερο από 4,6 χιλιάδες ευρώ;



Μονάδες [(5+10)+10]=25

7. Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{10}{9}-\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

8. Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{3x}{x^3-1}-\dfrac{1}{2-2x}=\dfrac{5}{4x^2+4x+4}$

9. Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{2}{(1+x)^2}=\dfrac{2}{1+x^3}$

10. Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{(x^2-1)(x^2-2)}{x^2+1}=\dfrac{2(x^2+2)}{5}-\dfrac{6}{x^2+1}$

11. Να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{3x^2-1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-x}>\dfrac{x^2-3x+2}{x}$

12. Να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{x^2+x+1}{x}+\dfrac{3x^2-x+1}{x^2-3x}\le\dfrac{x^2-2}{x-3}$

13. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2+\dfrac{3x^2}{x-1}>\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{2-x^2}{x^2-x}$

14. Να λύσετε την εξίσωση: $2\eta\mu^4x-17\sigma\upsilon\nu^2x+8=0$

15. Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu^6x-4\sigma\upsilon\nu^3x+3=0$

16. Να λύσετε την εξίσωση: $2\eta\mu^3 x + 11\sigma\upsilon\nu^2 x + 12\eta\mu x - 2 = 0$

17. Να λύσετε την εξίσωση: $3\varepsilon\varphi^2 x + 3 = \dfrac{16\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$

18. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{3}$.

19. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{x+4} + 2\sqrt{x+1} = \sqrt{x+20}$

20. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-6} = \sqrt{x+6} + \sqrt{x-9}$

21. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{x-1} = \dfrac{1}{\lambda+3}$, $\lambda \neq -3$

22. Να λύσετε την ανίσωση: $\sqrt{1-2x} > \sqrt{4x+1}$

23. Να λύσετε την ανίσωση: $\sqrt{x^2-2x+6} \geq 2x-3$

24. Να λύσετε την ανίσωση: $\sqrt{x-8} + \sqrt{x-5} < 3$

25. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\sqrt[3]{5\varphi-7} = \varphi - 1$ **ii.** $t^2 - 6t - 2\sqrt{t^2-6t+2} = 1$

26. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt[3]{2x^3+x^2+x+5} - x = 1$

27. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{x-2} + \dfrac{6}{\sqrt{x-2}} = 5$

28. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = \dfrac{x+7}{\sqrt{x+4}}$

29. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{x-4} = \lambda - 1$

30. Να λύσετε την ανίσωση: $\sqrt{x^2-4x+3} > x-2$

Κεφάλαιο 4ο

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

46

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

1. Να βρείτε τα α και β ώστε το πολυώνυμο

$$P(x)=x^4-\alpha x^3+2^{\beta}x^2+x-1$$

α. να έχει παράγοντα το $x-1$ και

β. το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x-2$ να είναι υ=1.

Μονάδες (12+13)=25

2. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\lambda x^2-3x+1$ με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να βρεθεί το λ ώστε το πολυώνυμο P(x) να έχει παράγοντα το x+1.

β. Για την τιμή του λ που βρήκατε, να λυθεί η εξίσωση P(x)=0.

Μονάδες (12+13)=25

3. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=-x^3+2\alpha x-\beta+\alpha$

α. να έχει παράγοντα το x+2 και

β. το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1 να είναι 5.

Μονάδες (12+13)=25

4. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+2x+8$

α. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in R$ έτσι ώστε το P(x) να έχει παράγοντα το πολυώνυμο

$$x^2-3x-4.$$

β. Να λυθεί η ανίσωση P(x)≥0.

Μονάδες (13+12)=25

5. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-6x^3+9x^2+\alpha x+\beta$

α. Να βρείτε τα α, β ώστε το (x+1) να είναι παράγοντας του P(x) και $P(0)=-12$

β. Να λυθεί η εξίσωση P(x)=0.

Μονάδες (13+12)=25

6. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$

α. Να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου P(x) για $x=-1$.

β. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$

Μονάδες (10+15)=25

7. Αν το $x-\omega$ είναι παράγοντας του $P(x)=x^3-\omega x^2+5x+\lambda$

α. να βρεθεί το λ και

β. το διάστημα που η γραφική παράσταση του P(x) βρίσκεται από τον άξονα x΄x.

Μονάδες (10+15)=25

8. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2-3x-5$

α. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$ είναι ίσο με -2 τότε να βρεθεί ο α.

β. Για α=4 να λυθεί η εξίσωση P(x)=0.

Μονάδες (10+15)=25

9. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2-4x+4$

α. Να δειχτεί ότι ο αριθμός ρ=1 είναι ρίζα του P(x).

β. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του P(x) με το $x-1$.

γ. Να λύσετε την P(x)≥0.

Μονάδες (5+10+10)=25

10. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=2x^3+x^2-13x+6$$

α. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x):(x+1)

β. Να αποδείξετε ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου P(x).

γ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της P(x) βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

Μονάδες (8+8+9)=25

11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-\alpha x-2$, $\alpha\in\mathbb{R}$ το οποίο έχει ρίζα άρτιο θετικό ακέραιο.

α. Να βρείτε τον α.

β. Αν α=3, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε για το υπόλοιπο υ της διαίρεσης του P(x) με το x+λ να ισχύει: $\upsilon>-4$.

Μονάδες (10+15)=25

12. Έστω $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+4$.

α. Αν το P(x) έχει ρίζα το 1 και διαιρούμενο με το x+1 δίνει υπόλοιπο 14, να βρεθούν τα α, β.

β. Για τα α, β που βρήκατε στο (α) να λυθεί η εξίσωση P(x)=0.

Μονάδες (13+12)=25

13. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x)=(\kappa-\mu)x^3-\mu x-3 \text{ και } Q(x)=2x^3+(2\kappa-1)x+\mu-2$$

που είναι ίσα.

α. Να δείξετε ότι: κ=1 και $\mu=-1$

β. Για τις παραπάνω τιμές να βρεθεί το πολυώνυμο P(x).

γ. Να δείξετε ότι το x=1 είναι ρίζα του P(x), και μάλιστα η μοναδική.

Μονάδες (10+5+10)=25

14. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=x^4-(\lambda+1)x^3+(\lambda-1)^2x^2-\lambda x+3\lambda-1$

το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$ και ισχύει $P(0)\neq 2\lambda-1$.

α. Να δειχτεί ότι λ=1

β. Να λυθεί η εξίσωση: P(x)=0.

γ. Αν $Q(x)=[x-P(x)]^2+3-x$ να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του Q(x) με το $(x-1)(x-2)$.

Μονάδες (7+9+9)=25

15. Δίνεται πολυώνυμο

$$P(x)=2x^3+x^2-\alpha x+2, \text{ όπου α πραγματικός αριθμός.}$$

α. Να βρεθεί η τιμή του α ώστε το πολυώνυμο P(x) να έχει παράγοντα το $x-1$.

β. Για α=5, να βρεθούν με το σχήμα Horner το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$ και να γραφτεί η ταυτότητα της διαίρεσης αυτής.

γ. Να λυθεί η εξίσωση P(x)=0.

Μονάδες (5+12+8)=25

16. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=x^4+(\lambda-\mu)x^3-(2\lambda+\mu-6)x^2-x-2$

α. Αν το x+1 είναι παράγοντας του f(x) και το f(x) διαιρούμενο με το $x-1$ δίνει υπόλοιπο -4, τότε να αποδείξετε ότι: λ=2 και μ=3.

β. Για λ=2 και μ=3 να λυθεί η ανίσωση $f(x)\geq 0$.

Μονάδες (13+12)=25

17. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+12 \text{ και } g(x)=x^2-x-6 \text{ με } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

α. Αν το g(x) είναι παράγοντας του P(x), να αποδείξετε ότι: $\alpha=-3$ και $\beta=-4$

β. Για τις παραπάνω τιμές των α, β να αποδείξετε ότι το πηλίκο της διαίρεσης P(x):g(x) είναι $\pi(x)=x-2$.

γ. Να υπολογιστεί το άθροισμα: π(1)+π(3)+π(5)+…+π(2009), όπου π(x) είναι το πηλίκο της προηγούμενης διαίρεσης.

Μονάδες (10+5+10)=25

18. Έστω $P(x)=x^3-5x^2-\lambda x+5$.

α. Αν x+1 παράγοντας του P(x) να βρεθεί το λ.

β. Αν λ=1 να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης $(x^3-5x^2-x+5):(x+1)$

γ. Αν λ=1 να λυθεί η ανίσωση $P(x)\leq 0$.

Μονάδες (8+8+9)=25

19. Αν $P(x)=x^4-\alpha x^3+3x^2+\beta x+2$

α. Βρείτε τα α, β έτσι ώστε $x-1$, x+2 να είναι παράγοντες του P(x).

β. Βρείτε το πηλίκο της $P(x):(x^2+x-2)$.

Μονάδες (13+12)=25

20. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-\alpha x+2$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

Αν το 1 είναι η ρίζα του πολυωνύμου, τότε:

α. Να δείξετε ότι α=5.

β. Για α=5 να λύσετε:

i. Την εξίσωση P(x)=0

ii. Την ανίσωση $P(x)\geq 0$

Μονάδες [10+(8+7)]=25

21. Έστω $P(x)=\alpha x^3+x^2+\beta x-6$

α. Ποια τα α, β ώστε το P(x) να έχει ρίζα το 2 και παράγοντα το $x-1$.

β. Να λυθεί η P(x)=0.

Μονάδες (13+12)=25

22. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-16x^2+34x-20$

α. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x-2)$

β. Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0.

Μονάδες (12+13)=25

23. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3-(\alpha+\beta)x^2+\beta x+1$

α. Αν ισχύει ότι $P\left(-\dfrac{1}{2}\right)=7$ και $P(-1)=23$, να αποδείξετε ότι $\alpha=-6$ και $\beta=-5$

β. Να κάνετε τη διαίρεση του P(x), για $\alpha=-6$ και $\beta=-5$, με το πολυώνυμο 2x+1 και να γράψετε το P(x) με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

Μονάδες (13+12)=25

24. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-5x^2+\alpha x+3$, όπου α πραγματικός αριθμός.

α. Αν ο αριθμός -1 είναι ρίζα το P(x), τότε να βρείτε την τιμή του α.

β. Αν $\alpha=-4$, τότε να λύσετε:

i. Την εξίσωση P(x)=0

ii. Την ανίσωση $P(x)\leq 0$

Μονάδες [7+(10+8)]=25

25. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-21x^2+131x-231$

α. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x-11)$.

β. Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0.

Μονάδες (13+12)=25

26. **α.** Να λυθεί η εξίσωση: $x^3-2x^2=x-2$.

β. Δίνεται η εξίσωση $ημ^3x-2ημ^2x-ημ+2=0$.

Να λύσετε την εξίσωση ως προς το x αν $x\in[0,2\pi]$

Μονάδες (10+15)=25

27. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2αx^2+βx+4$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $x-2$ είναι 6.

α. Να βρείτε τις τιμές των α και β.

β. Για $α=-1$ και $β=-7$ βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+3.

γ. Για $α=-1$ και $β=-7$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)>-4x+10$.

Μονάδες (8+8+9)=25

28. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3+αx^2-4x-4α$$

α. Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός 3 είναι ρίζα του P(x), τότε $α=-3$.

β. Για $α=-3$, να λυθούν:

i. η εξίσωση P(x)=0

ii. η ανίσωση P(x)<0

Μονάδες [7+(9+9)]=25

29. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=αx^3+(β-1)x^2-3x-2β+6,$$

όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α. Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x) και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1 είναι ίσο με 2, τότε να δείξετε ότι α=2 και β=4

β. Για α=2 και β=4 να λύσετε:

i. την εξίσωση P(x)=0 **ii.** την ανίσωση P(x)>0

Μονάδες [9+(8+8)]=25

30. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-(\alpha+1)x^2+(\alpha-1)x+2$

το οποίο έχει παράγοντα το $x-2$.

α. Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$

β. Για α=2 να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του P(x) με το $x-2$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=x-2$

Μονάδες (8+7+10)=25

31. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x)=x^3+\alpha x^2-\beta x+2$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$.

α. Αν ο αριθμός -1 είναι ρίζα του πολυώνυμου P(x) και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $x-1$ είναι ίσο με 8, τότε να δείξετε ότι: α=2 και $\beta=-3$

β. Για τιμές των α και β του ερωτήματος (α) να λύσετε:

i. την εξίσωση P(x)=0

ii. την ανίσωση P(x)<0

Μονάδες [13+(6+6)]=25

32. Αν $P(x)=x^3+2x^2+(\lambda-1)x-\lambda^2$

α. Για ποιες τιμές του λ το $x-1$ είναι παράγοντας του P(x).

β. Για λ=2, ποιο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x):(x+2).

Μονάδες (13+12)=25

33. Αν μια ρίζα του πολυωνύμου $P(x)=x^3-2x^2-5x+\alpha$ είναι το 3 και ένας παράγοντας του πολυωνύμου $Q(x)=x^2+x+\beta$ είναι το x+1 τότε:

α. Να αποδείξετε ότι α=6 και β=0

β. Για α=6 να λύσετε την εξίσωση P(x)=0.

γ. Για α=6 και β=0

i. Να κάνετε τη διαίρεση P(x):Q(x) και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

ii. Ποιος είναι ο βαθμός του υπολοίπου της διαίρεσης P(x):Q(x);

Μονάδες [7+8+(7+3)]=25

34. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda+\lambda^3)x^4-(\lambda^2-1)x^3+(\lambda-1)x-2\lambda+2$, $\lambda\in\mathbb{R}$

α. Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε το P(x) να είναι 3ου βαθμού.

β. Για λ=0

i. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+2.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<-4$.

Μονάδες [7+(10+8)]=25

35. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-6x^2+\alpha x+\beta$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$ και όταν διαιρείται με το x+1 δίνει υπόλοιπο -24.

α. Να δείξετε ότι: α=11 και $\beta=-6$

β. Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0

γ. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$

Μονάδες (9+8+8)=25

36. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3-4x^2-3x+2\alpha+6$ το οποίο διαιρούμενο με x+1 δίνει υπόλοιπο 6.

α. Να δειχτεί ότι α=0

β. Να λυθεί η εξίσωση P(x)=0

γ. Αν $Q(x)=[P(x)]^2+x-1$ να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του Q(x) με το $(x-1)(x-2)$

Μονάδες (7+9+9)=25

37. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-4x^2+x+6$

α. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να γίνει η διαίρεση $P(x):(x-2)$ δηλ. να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο.

β. Να λυθεί η εξίσωση P(x)=0

Μονάδες (15+10)=25

38. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-(2\kappa+1)+\kappa$ όπου $\kappa\in\mathbb{R}$

α. Να βρείτε την τιμή του $\kappa\in R$ ώστε το 2 να είναι ρίζα του P(x).

β. Για κ=6

i. Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x) βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

iii. Να βρείτε το πρόσημο της τιμής P(1,1997)

Μονάδες [8+(8+6+3)]=25

39. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=x^3-\alpha x^2-\beta x-2$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α. Βρείτε τους αριθμούς α, β αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x-1$ και το $x-2$

β. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{P(x)}=x-1$

Μονάδες (12+13)=25

40. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+(\beta-1)x^2-3x-2\beta+6$,

όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α. Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυώνυμου P(x) και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το (x+1) είναι ίσο με 2, τότε να δείξετε ότι α=2 και β=4.

β. Για τις τιμές των α και β του προηγούμενου ερωτήματος, να λύσετε την εξίσωση P(x)=0.

Μονάδες (15+10)=25

41. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\beta x^3-\alpha x^2+x-3$ και η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x)=2\beta-9\eta\mu^2\alpha x-7\sigma\upsilon\nu^2 2x+\alpha\eta\mu^2 x$$

α. Να δείξετε ότι αν το πολυώνυμο P(x) έχει για ρίζα τον αριθμό 1 και διαιρούμενο με το x+1 δίνει υπόλοιπο $\upsilon=-10$ οι τιμές των α και β είναι 2 και 4 αντίστοιχα.

β. Για τις παραπάνω τιμές των α, β να δείξετε ότι: $f(x)=\sigma\upsilon\nu 4x+2\eta\mu^2 x$

γ. Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση: f(x)=0

Μονάδες (7+8+10)=25

42. Να λυθεί η ανίσωση: $\dfrac{(x^2-4x+3)(x+4)}{x^2-4}\le 0$

43. Να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{(x+3)(x^2+4x+5)}{x^2-7x+10}\le 0$

44. Να λυθεί η ανίσωση: $(2-x)(-x^2+3x-2)(x^2+6x+13)\le 0$

45. Να λύσετε την ανίσωση: $(x-2)^2(x^2-5x+5)(-x-5)\le 0$

46. Να λυθεί η ανίσωση: $\dfrac{(3x^2-2x-1)(x^2-3x+2)}{(-3x+2)(4-x^2)}\le 0$

Κεφάλαιο 4ο ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 14

ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε.

1. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$P(x)=2x^3+\alpha x^2+x+2$, $Q(x)=\beta x^2+\gamma x+1$ και $F(x)=x^3+(2\beta+\gamma)x^2-10x+4\beta$,

όπου $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $x\in\mathbb{R}$.

Το P(x) έχει ρίζα το -1, το υπόλοιπο της διαίρεσης $Q(x):(x-2)$ είναι 15 και η αριθμητική τιμή του F(x) για x=1 είναι 6.

α. Ν' αποδείξετε ότι: α=1, β=2 και γ=3.

β. Να λύσετε:

i. την εξίσωση P(x)=Q(x)

ii. την ανίσωση P(x)<F(x)

iii. την εξίσωση $2\eta\mu^3x-\eta\mu^2x-2\eta\mu x+1=0$

Μονάδες (7+5+6+7)=25

2. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=(\lambda^3-4\lambda)x^3+(\lambda^2-2\lambda)x-\lambda+2$$

α. Να βρείτε τον βαθμό του P(x) για τις διάφορες τιμές του λ.

β. Για λ=1 να βρεθεί το P(x) και να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης P διέρχεται από το σημείο $(1,-3)$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $P(x)<-3$

Μονάδες (8+7+10)=25

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-(\alpha+1)x^3+\beta x^2-\beta x+\alpha$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, α≠0, για το οποίο είναι γνωστό ότι έχει παράγοντα το $(x-1)^2$ και ρίζα το 2.

α. Βρείτε τους αριθμούς α, β.

β. Αν α=6, β=17 και x_1, x_2, x_3 οι ρίζες του P(x) με $x_1 < x_2 < x_3$, δείξτε ότι οι αριθμοί x_1, x_2, x_3, με τη σειρά αναφέρονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, ενώ οι αριθμοί $e^{x_1}, e^{x_2}, e^{x_3}$, επίσης με τη σειρά που αναφέρονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους της ίδιας γεωμετρικής προόδου.

Μονάδες (11+6+8)=25

4. α. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός x αν οι αριθμοί $1, x, 2-x$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + (\alpha-\beta)x^3 - (2\alpha-3\beta)x^2 + x - 2$.

Να βρεθούν τα α και $\beta \in R$ αν το P(x) έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το x+2.

Μονάδες (10+15)=25

5. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$ όπου $\alpha, \beta \in R$ έχει παράγοντες τους x+1, $x-2$.

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha = -3$ και β=0.

β. Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0.

γ. Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x). Να βρείτε:

i. τις συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η C τέμνει τον άξονα y΄y.

ii. Τις τιμές του x για τις οποίες η C είναι κάτω από τον άξονα x΄x.

Μονάδες (8+8+3+6)=25

6. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 20 \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

α. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x+2 και το υπόλοιπο της διαίρεσης με το x+1 είναι το -16 να αποδείξετε ότι α=12 και β=6.

β. Να λυθεί η εξίσωση: P(x)=0

γ. Να λυθεί η ανίσωση: P(x)>0

Μονάδες (8+8+9)=25

7. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^3-5x^2+16x-12$ και $F(x)=x^2+5x-6$.

α. Να λύσετε την εξίσωση P(x)=F(x) (1).

β. Να βρείτε το διάστημα, που ανήκει το x, έτσι ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x), να βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

Μονάδες (8+8+5+4)=25

8. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-(\alpha+3)x^2+(2\beta+1)x-2\alpha$, όπου α και β είναι πραγματικοί αριθμοί.

α. Αν ο αριθμός 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x) και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) δια του x+1 είναι -18, να βρεθούν τα α και β.

β. Για α=2 και $\beta=\frac{7}{2}$:

i. Να λυθεί η εξίσωση P(x)=0

ii. Να γίνει η διαίρεση του πολυωνύμου P(x) δια του πολυωνύμου x^2+1 και να γραφεί το P(x) με την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

iii. Να λυθεί η ανίσωση $P(x)\geq 7x+1$.

Ο.Ε.Φ.Ε. Μονάδες (10+5+5+5)=25

9. Δίνεται το πολυώνυμο

$P(x)=x^3+\alpha x^2-x+\beta$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και το πολυώνυμο $Q(x)=x^2+x-1$.

α. Να βρεθούν $\alpha,\beta\in R$ αν η αριθμητική τιμή του P(x) για $x=-3$ είναι -8 και έχει παράγοντα το x+2.

β. Αν α=2 και $\beta=-2$, να βρείτε το πηλίκο Π(x) της διαίρεσης του P(x) δια του Q(x) και να γράψετε το P(x) με την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=Q(x)-1$.

Μονάδες (10+8+7)=25

10. Δίνεται πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 + \alpha x^3 - 7x^2 + \beta x + 2,$$

όπου α και β είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν η διαίρεση του P(x) δια $x-1$ δίνει υπόλοιπο 1 και η αριθμητική τιμή του για $x=-2$ είναι 10, τότε:

α. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in R$.

β. Για τις τιμές $\alpha=-5$ και β=10,

i. Να βρείτε το πηλίκο Π(x) της διαίρεσης του P(x) δια του $Q(x) = x^3 + x^2 - 2x$ και να γράψετε το P(x) με τη βοήθεια της ταυτότητας ευκλείδειας διαίρεσης.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = \upsilon(x)$, όπου υ(x) το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) δια Q(x).

iii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης Q(x) βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

Μονάδες (7+6+7+5)=25

11. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1.$$

α. Να λύσετε την εξίσωση f(x)=0.

β. Να λύσετε τις τριγωνομετρικές εξισώσεις ημx=α, συνx=β, όπου α η διπλή ρίζα της παραπάνω εξίσωσης και β η άλλη ρίζα της ίδιας εξίσωσης.

γ. Να βρείτε τις τιμές του $x \in R$ έτσι, ώστε η γραφική παράσταση της f, να μην είναι πάνω από τον άξονα x΄x.

δ. Να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης $f(-x):(x^2+1)$.

Μονάδες (6+6+8+5)=25

12. Έστω το πολυώνυμο

$$P(x) = 2x^3 + (\alpha+\beta)x^2 + (2\alpha+5\beta)x + 3 \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

α. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in R$ έτσι ώστε το x+1 να είναι παράγοντας του P(x) και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$ να ισούται με -9.

β. Για $\alpha=-7$ και β=2:

i. Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0.

ii. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

iii. Αν υ(x) το υπόλοιπο της προηγούμενης διαίρεσης να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{\upsilon(x)}{P(x)}\geq 0$

Μονάδες (8+5+6+6)=25

13. Έστω $P(x)=x^3+2\alpha x^2-\alpha^2 x+2$ πολυώνυμο, $\alpha\in R$.

Αν το πολυώνυμο P(x) διαιρεθεί με το $x-1$, δίνει υπόλοιπο 3α+1.

α. Να βρείτε τις τιμές του αριθμού α.

β. Για α=1 και πολυώνυμο $Q(x)=x^2+x+1$:

i. Να αποδείξετε ότι το πηλίκο π(x) και το υπόλοιπο υ(x) της Ευκλείδειας διαίρεσης του P(x) με το Q(x) είναι x+1 και $-3x+1$ αντίστοιχα.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{P(x)+x-2}{Q(x)}\geq 1$

iii. Να λύσετε την εξίσωση $\pi(x)=\sqrt{Q(x)}$.

Μονάδες (7+4+8+6)=25

14. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$, για την οποία ισχύουν:

- Το υπόλοιπο της διαίρεσης της f(x) δια x+2 είναι 24.
- Η C_f διέρχεται από το σημείο Α(0, 8).
- Η f(x) έχει παράγοντα το $x-1$.

α. Να δείξετε ότι: α=1, $\beta=-10$ και γ=8.

β. **i.** Να λυθεί η εξίσωση f(x)=0

ii. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{x+4}{f(x)}\leq\dfrac{2}{f(x)+f(-x)-18}$

Μονάδες [9+(4+4)+8]=25

Κεφάλαιο 4ο ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 12

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ 2000-2004

1. Δίνεται το πολυώνυμο $F(x)=x^3-x^2+3x-3$.

α. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του F(x) με το $x-2$.

β. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του F(x) με το $x-1$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση: F(x)=0.

2001 Μονάδες (8+8+9)=25

2. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x)=x^3-(k+1)x^2+(k-1)x+2,\quad k\in\mathbb{R}$,

για το οποίο ισχύει ότι P(2)=0.

α. Να αποδείξετε ότι k=2.

β. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του P(x) με το πολυώνυμο x+3.

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $P(x)=x-2$

2002 Μονάδες (8+8+9)=25

3. Δίνεται το πολυώνυμο $F(x)=3x^3-x^2+3x-k$.

α. Να βρείτε το k, αν το F(x) έχει παράγοντα το $x-1$.

β. Αν k=6, να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $F(x):(x-2)$.

2001 Μονάδες (10+15)=25

4. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+(\beta-1)x^2-3x-2\beta+6$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α. Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x) και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1 είναι ίσο με 2, τότε να δείξετε ότι α=2 και β=4.

β. Για τις τιμές των α και β του ερωτήματος (α), να λύσετε την εξίσωση P(x)=0.

2000 Μονάδες (15+10)=25

5. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = kx^3 - (k+\lambda)x^2 + \lambda x + 1$.

Αν $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$ και $P(-1) = 23$, να αποδείξετε ότι $k = -6$ και $\lambda = -5$.

α. Να γίνει η διαίρεση του P(x), για $k = -6$ και $\lambda = -5$, με το πολυώνυμο $2x+1$ και να γραφεί το P(x) με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

β. Να λυθεί η ανίσωση: $P(x) > 7$ για $k = -6$ και $\lambda = -5$.

2002 Μονάδες (8+8+9)=25

6. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 8x^3 + (5\alpha - 1)x^2 + 8x - 3\alpha - 6$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$

α. Να κάνετε τη διαίρεση του P(x) δια του $x^2 - 1$ και να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.

β. Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

γ. Για α=3 να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης P(x)=0 καθώς και τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) είναι κάτω από τον άξονα x΄x.

2004 Μονάδες (9+4+12)=25

7. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

α. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός ρ=1 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x).

β. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο $(x-1)$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $x^3 + 4 = x^2 + 4x$

δ. Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \geq 0$

2000 Μονάδες (5+7+8+5)=25

8. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

α. Να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου P(x) για $x = -1$.

β. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο $x - 1$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση P(x)<0.

2003 Μονάδες (5+10+10)=25

9. Δίνεται το πολυώνυμο: $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2,\ \ x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι το x+1 είναι παράγοντας του f(x) και να βρείτε το πηλίκο π(x) της διαίρεσης του f(x) με το x+1.

β. Να αποδείξετε ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του π(x) και να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του π(x) με το $x-2$.

γ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης f(x) βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

2001 Μονάδες (9+9+7)=25

10. Έστω P(x) πολυώνυμο 3ου βαθμού, το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο x^2+1, έχει ρίζα το 0 και του οποίου το άθροισμα των συντελεστών είναι ίσο με 2.

α. Να αποδείξετε ότι $P(x) = x^3 + x$

β. Να λύσετε την ανίσωση: $(P(x)-2)^3 + (P(x)-2)^2 + P(x) > 2$

2004 Μονάδες (14+11)=25

11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + kx + 1$, όπου k πραγματικός αριθμός.

α. Για $k = -3$, να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο $(x-3)$.

β. Να βρείτε τις τιμές του k για τις οποίες το πολυώνυμο P(x) έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

γ. Για k=0, να λύσετε την εξίσωση: P(x)=0.

2003 Μονάδες (10+10+5)=25

12. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = 4\alpha^2 x^3 + \frac{8}{3}(1-\alpha^2)x^2 - x - 2$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ με α>0, για το οποίο ισχύει P(1)=0.

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha = \frac{1}{2}$.

β. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο $x-1$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση: P(x)=0.

2004 Μονάδες (10+8+7)=25

Κεφάλαιο 5ο ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

5.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Δυνάμεις

Αν ο α είναι πραγματικός αριθμός και ο ν φυσικός, έχουμε ορίσει ότι:

$$\boldsymbol{\alpha^\nu = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\cdots\cdot\alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}},} \quad \text{για } \nu > 1 \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\alpha^1 = \alpha}, \quad \text{για } \nu = 1.$$

Αν επιπλέον είναι $\alpha \neq 0$, τότε ορίσαμε ότι:

$$\boldsymbol{\alpha^0 = 1} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}}$$

Αν α>0, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$$

Δυνάμεις με άρρητο εκθέτη

Αν α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τότε:

$$\alpha^{x_1}\alpha^{x_2} = \alpha^{x_1+x_2}$$

$$\alpha^{x_1} : \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1-x_2}$$

$$(\alpha\beta)^x = \alpha^x\beta^x$$

$$(\alpha^{x_1})^{x_2} = \alpha^{x_1x_2}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{\alpha^x}{\beta^x}$$

Εκθετική συνάρτηση

Έστω **α ένας θετικός** πραγματικός αριθμός.

Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in R$ στη δύναμη α^x ορίζουμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha^x$ η οποία στην περίπτωση που είναι $\alpha \neq 1$ λέγεται **εκθετική συνάρτηση με βάση α**.

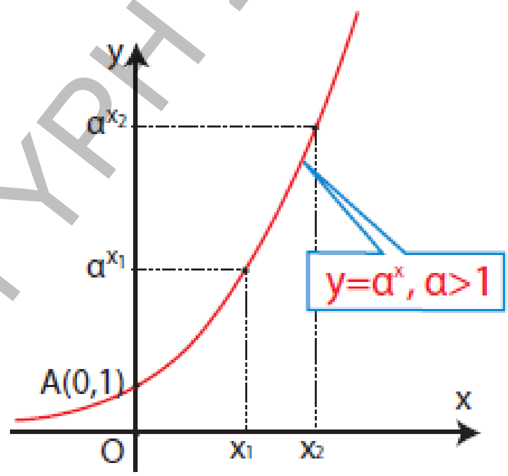
Αν είναι **α=1** τότε έχουμε τη **σταθερή** συνάρτηση **f(x)=1**.

Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = \alpha^x$ με α>1 αποδεικνύεται ότι:

- έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$
- έχει **σύνολο τιμών** το διάστημα **(0,+∞)** των θετικών πραγματικών αριθμών
- Είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

  Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

  $$\text{αν } x_1 < x_2 \text{ τότε } \alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$$
- Η γραφική παράσταση **τέμνει** τον άξονα y΄y στο σημείο Α(0,1) και έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα των x.

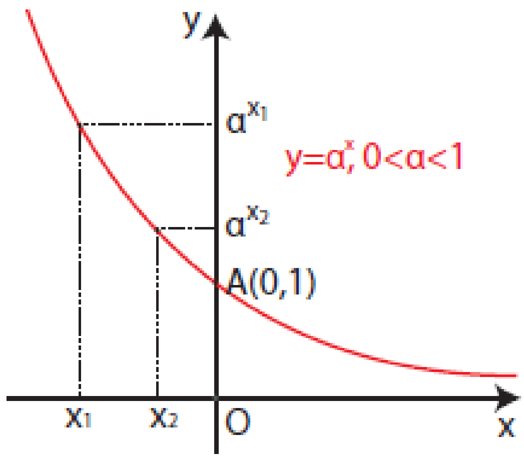


Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = \alpha^x$ με 0<α<1 αποδεικνύεται ότι:

- έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$
- έχει **σύνολο τιμών** το διάστημα **(0,+∞)** των θετικών πραγματικών αριθμών
- Είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.

  Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in R$ ισχύει:

  $$\text{αν } x_1 < x_2 \text{ τότε } \alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}$$
- Η γραφική παράσταση **τέμνει** τον άξονα **y΄y** στο σημείο **Α(0,1)** και έχει ασύμπτωτο το θετικό ημιάξονα των x.

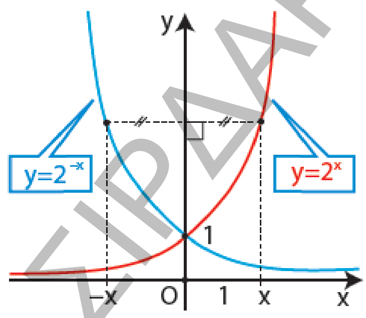


Παρατήρηση 1

Για τις συναρτήσεις $f(x)=2^x$ και $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{2^x}=2^{-x}=f(-x)$$

Αυτό σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις τους είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y΄y.



Σχόλιο

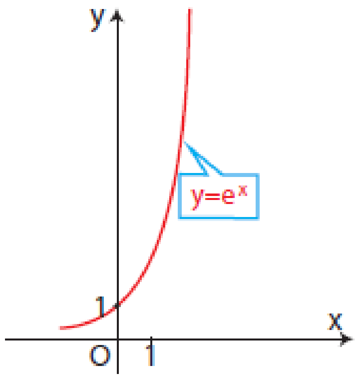
Από την μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$ προκύπτει ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$\alpha^{x_1}=\alpha^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2 .$$

Η ιδιότητα αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την επίλυση εξισώσεων, όπου ο άγνωστος εμφανίζεται στον εκθέτη. Οι εξισώσεις αυτές λέγονται **εκθετικές** εξισώσεις.

Παρατήρηση 2

Σε πολλές πραγματικές εφαρμογές εμφανίζονται εκθετικές συναρτήσεις με βάση τον αριθμό e. Η απλούστερη τέτοια συνάρτηση είναι η $f(x)=e^x$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται απλώς **εκθετική** και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



[Ο αριθμός e με προσέγγιση πέντε δεκαδικών ψηφίων είναι **e=2,71828]**

Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής

Η εκθετική συνάρτηση $Q(t)=Q_0\cdot e^{ct}$ με βάση το e γνωστή ως **νόμος της εκθετικής μεταβολής** εκφράζει ένα φυσικό μέγεθος που μεταβάλλεται με το χρόνο t.

Το Q_0 είναι η αρχική τιμή του Q (για t=0) και είναι $Q_0>0$ ενώ το c είναι μια σταθερά που εξαρτάται κάθε φορά από τη συγκεκριμένη εφαρμογή.

Αν **c>0** η συνάρτηση Q είναι **γνησίως αύξουσα** και εκφράζει το **νόμο της εκθετικής αύξησης** ενώ

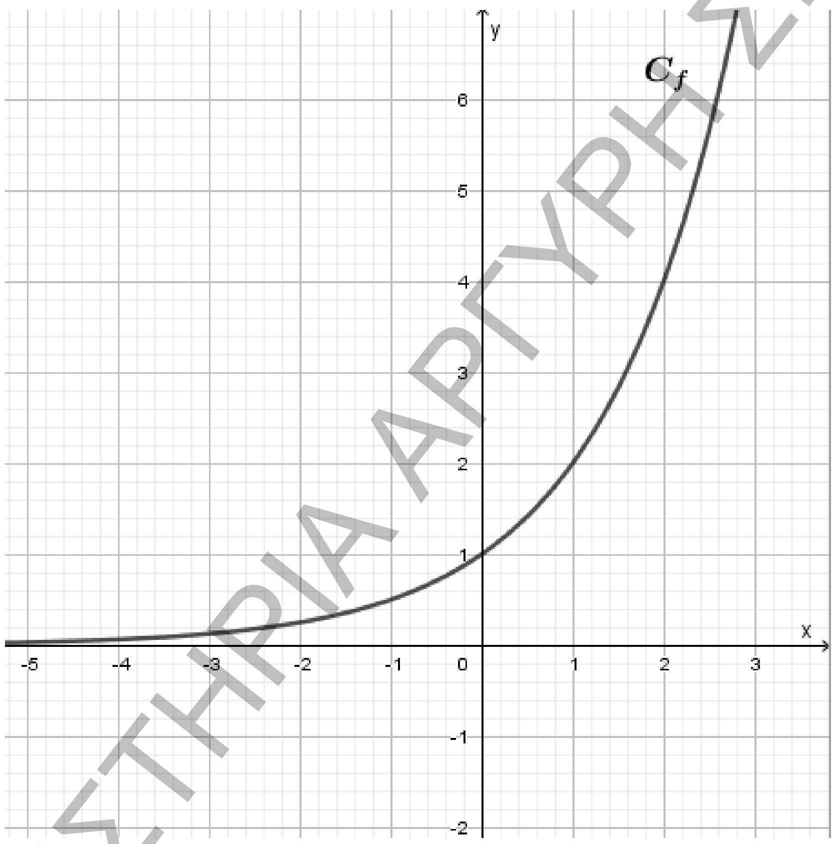
αν **c<0** είναι γνησίως φθίνουσα και εκφράζει το νόμο της εκθετικής απόσβεσης.

Ο χρόνος που χρειάζεται για να διασπαστεί ή να εξαφανιστεί η μισή ποσότητα μιας ραδιενεργού ουσίας λέγεται **ημιζωή** ή **χρόνος υποδιπλασιασμού** της ραδιενεργού ουσίας.

5.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ (7)

1. ΘΕΜΑ Β 5.1 18866

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2^x$, $x\in\mathbb{R}$.



α. Να λύσετε την εξίσωση $2^x-1=0$.

β. **i.** Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2^x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες συντεταγμένων.

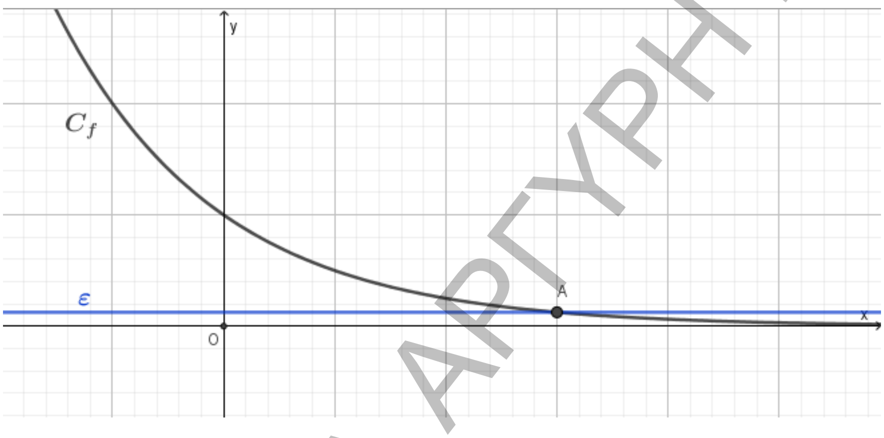
Μονάδες [10+(10+5)]=25

2. **ΘΕΜΑ Β** **5.1** **20855**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

α. Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{8}$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f και της ευθείας $\varepsilon: y=\frac{1}{8}$.



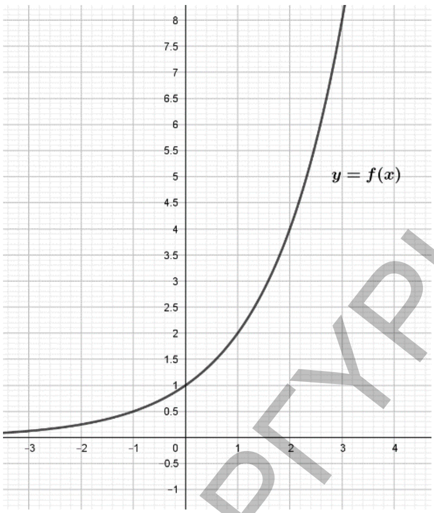
β. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία ε.

γ. Να βρείτε για ποιές τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από την ευθεία ε.

Μονάδες (12+5+8)=25

3. **ΘΕΜΑ Β** **5.1** **21091**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης f, με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.



α. **i.** Με βάση την γραφική της παράσταση, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f .

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$					

ii. Να βρείτε τον τύπο της εκθετικής συνάρτησης f .

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 32$.

Μονάδες [(10+7)+8]=25

4. **Θ Ε Μ Α Β** **5.1** **21163**

Δίνεται το σημείο $A\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f.

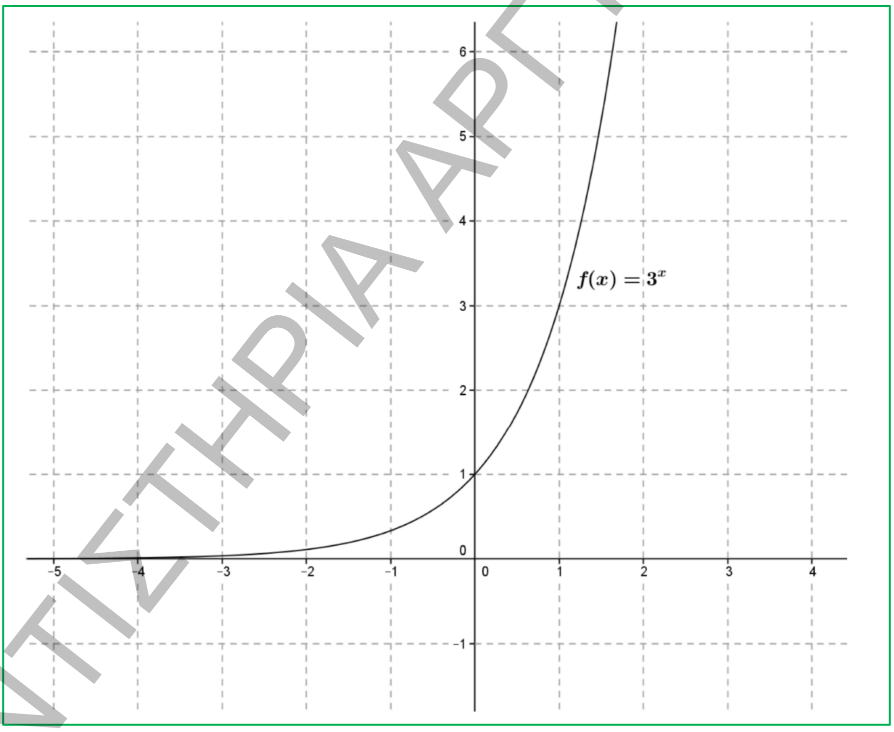
α. Αν η συνάρτηση f είναι εκθετική συνάρτηση α^x, $0<\alpha<1$, να βρείτε το α.

β. Για $\alpha=\dfrac{1}{2}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha^{\sqrt{2}}$, $\alpha^{\sqrt{3}}$.

Μονάδες (13+12)=25

5. **Θ Ε Μ Α Β** **5.1** **21451**

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=3^x$ με $x\in\mathbb{R}$.



α. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x)=3^x+1 \text{ και } h(x)=3^x-1,$$

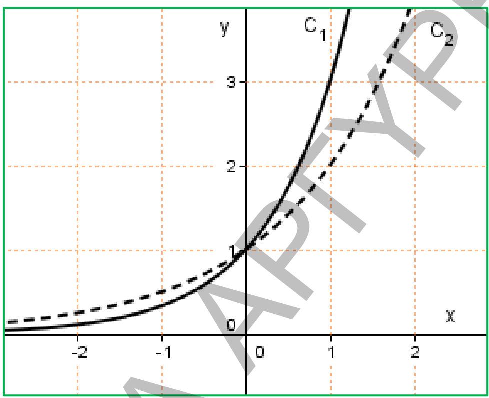
μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

β. Ποια είναι η ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g και ποια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h;

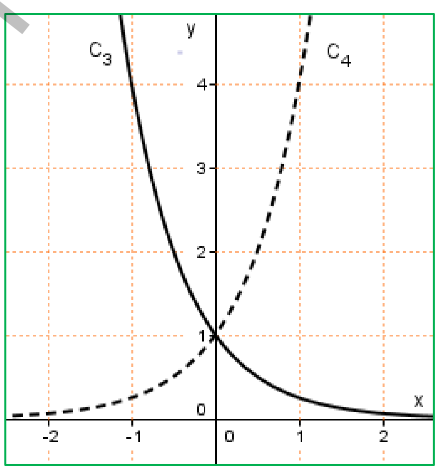
Μονάδες $(12+13)=25$

6. **ΘΕΜΑ Β** **5.1** **21993**

α. Ποια από τις δύο καμπύλες C_1 (συνεχής γραμμή) και C_2 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2^x$ και ποια της συνάρτησης $g(x)=3^x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



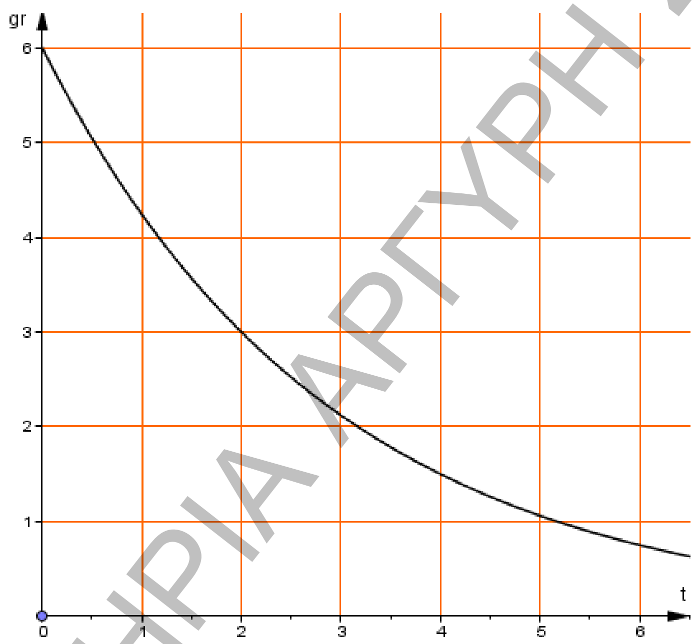
β. Ποια από τις δύο καμπύλες C_3 (συνεχής γραμμή) και C_4 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x)=4^x$ και ποια της συνάρτησης $\psi(x)=4^{-x}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Μονάδες $(12+13)=25$

7. **Θ Ε Μ Α Β** **5.1** **21994**

Η καμπύλη που φαίνεται στο παρακάτω σύστημα αξόνων δείχνει την εκθετική απόσβεση ενός ραδιενεργού υλικού σε συνάρτηση με το χρόνο. Ειδικότερα, ο οριζόντιος άξονας δηλώνει τον χρόνο t σε ημέρες (π.χ. η 1^{η} ημέρα αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα από $t=0$ μέχρι $t=1$, η 2^{η} ημέρα στο χρονικό διάστημα από $t=1$ μέχρι $t=2$ κ.λπ.) και ο κατακόρυφος άξονας δηλώνει την ποσότητα του υλικού σε γραμμάρια (gr).



α. Πόσα γραμμάρια ήταν η αρχική $(t=0)$ ποσότητα του ραδιενεργού υλικού;

β. Πόση είναι η ημιζωή (ή χρόνος υποδιπλασιασμού) του ραδιενεργού υλικού;

γ. Κατά τη διάρκεια ποιάς ημέρας θα έχει απομείνει ποσότητα ραδιενεργού υλικού μικρότερη από 1gr;

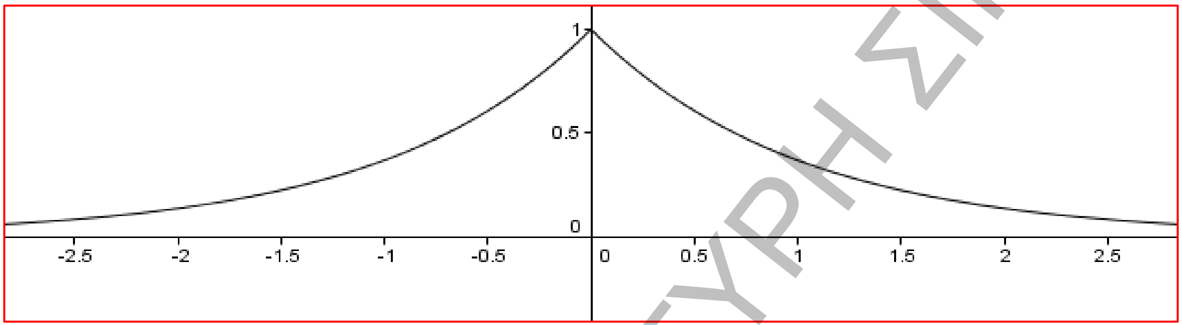
Σε όλα τα ερωτήματα, να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (8+9+8)=25

5.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ (10)

1. **ΘΕΜΑ Δ** **5.1** **15269**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διπλού τύπου.



α. Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε μια ακριβώς από τις παρακάτω συναρτήσεις να επιλέξετε ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f.

A. $f(x)=\begin{cases} e^{x}, & x<0 \\ e^{-x}, & x\geq 0 \end{cases}$ **B.** $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x<0 \\ e^{x}, & x\geq 0 \end{cases}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να βρείτε τη μονοτονία και την μέγιστη τιμή της.

γ. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α, το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

δ. Να αιτιολογήσετε γιατί το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f με την παραβολή $y=x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$ είναι το σημείο $(0,1)$.

Μονάδες (8+5+7+5)=25

2. **ΘΕΜΑ Δ** **5.1** **18693**

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\left(\frac{2-\lambda}{4}\right)^{x}$.

α. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η f είναι εκθετική συνάρτηση.

β. Για ποιες τιμές του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα;

γ. Για $\lambda=0$

i. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f(x+1)=6$.

Μονάδες [5+7+(6+7)]=25

3. **ΘΕΜΑ Δ** **5.1** **20642**

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη και περιττή συνάρτηση και $g(x)=e^{x}-1,\ x\in\mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από το σημείο $A(-1,\ 2)$, τότε:

α. Να βρείτε το $f(1)$ και να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $O(0,\ 0)$.

γ. Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης f και να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το O.

δ. Έστω $f(x)=-2x^{3}$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε 2 μονάδες αριστερά και μια μονάδα πάνω.

Μονάδες (6+6+7+6)=25

4. **ΘΕΜΑ Δ** **5.1** **20689**

α. Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x-2}{x+1}>0$.

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{\alpha-2}{\alpha+1}\right)^x$, με $x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι καλώς ορισμένη.

ii. Για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα;

iii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Μονάδες [7+(3+10+5)]=25

5. **ΘΕΜΑ Δ** **5.1** **20854**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{|x|}$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

β. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$ και να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της.

γ. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f.

δ. Αν $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, τότε να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

Μονάδες (5+5+10+5)=25

6. **ΘΕΜΑ Δ** **5.1** **21444**

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους $f(x)=4^x$ και $g(x)=2^x-\frac{1}{4}$.

α. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο A, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

β. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g, με εξαίρεση το σημείο A.

γ. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων..

Μονάδες (9+9+7)=25

7. **ΘΕΜΑ Δ** **5.1** **21448**

Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου τη χρονική στιγμή $t=0$, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του $f(t)$ (σε mg) να μειώνεται μετά από t ημέρες σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$f(t)=q_0\cdot\alpha^t,\ t\geq 0,$$

όπου οι αριθμοί α, q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α. Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0<\alpha<1$

β. Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\frac{1}{2}$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f, εκφράζοντας τις τιμές $f(t)$ ως συνάρτηση της αρχικής τιμής q_0.

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$					

γ. Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha=\frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της $4^{ης}$ ημέρας είναι 25 mg.

i. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής.

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6]$.

Μονάδες $[6+(5+4)+(5+5)]=25$

8. ΘΕΜΑ Δ 5.1 21471

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot 2^x+\beta$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$.

α. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β.

Αν $\alpha=5$ και $\beta=-7$,

β. Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$

γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>4^x-3$.

Μονάδες $(7+4+7+7)=25$

9. ΘΕΜΑ Δ 5.1 21677

Είναι γνωστό ότι όταν κάποιος μελετάει για να συμμετάσχει σε κάποιες εξετάσεις, με την πάροδο του χρόνου δεν συγκρατεί στη μνήμη του το σύνολο όσων μελέτησε. Ένα μοντέλο που δείχνει το ποσοστό $P(t)$ της γνώσης που παραμένει στην μνήμη του t εβδομάδες μετά το τέλος της μελέτης, είναι το μοντέλο Ebbinghaus και περιγράφεται από τον τύπο:

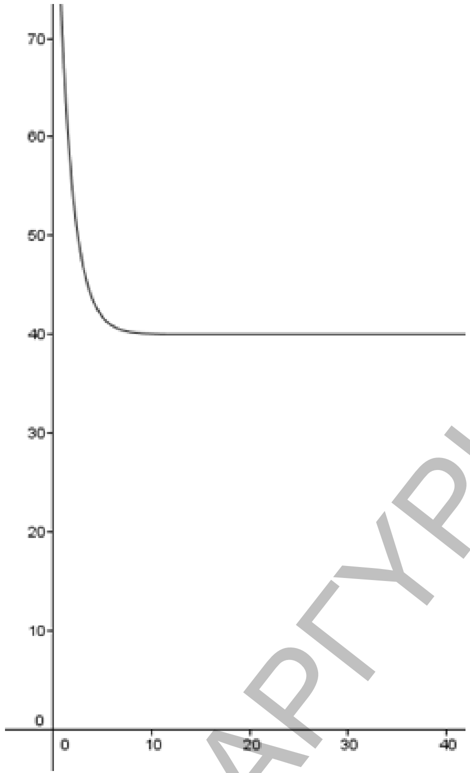
$$P(t)=Q+(100-Q)e^{-ct},\ t\in[0,40]$$

όπου Q είναι το ποσοστό της γνώσης που θυμάται πάντα και c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το μάθημα. Αν $Q=40$ και $c=0{,}7$ τότε:

α. Τι δείχνει το $P(0)$ στα πλαίσιο του προβλήματος;

β. Μετά από πόσες εβδομάδες θα έχει παραμείνει στην μνήμη του το 50% της γνώσης που απέκτησε.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Με βάση το σχήμα:



γ. Να εκτιμήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση, αν μετά από τρείς εβδομάδες θα θυμάται πάνω ή κάτω από το 50% του υλικού που μελέτησε. Η εκτίμησή σας συμφωνεί με το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος;

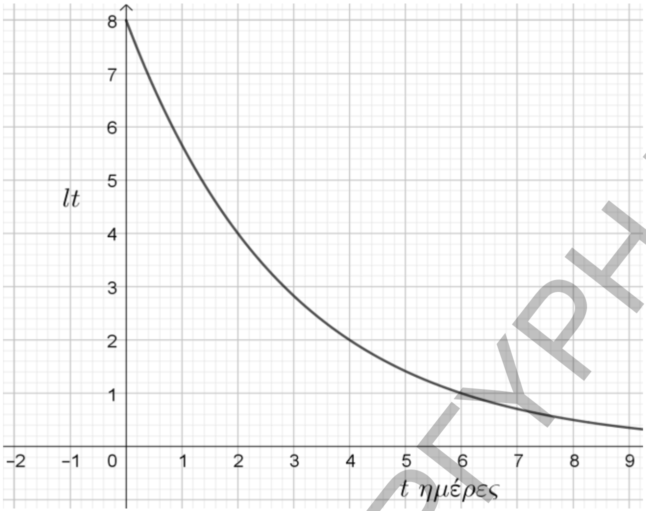
δ. Πως αιτιολογείται ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης, για μεγάλες τιμές του t, φαίνεται να προσεγγίζει πάρα πολύ την ευθεία $y = 40$. Γιατί δεν μπορεί να «κατέβει» κάτω από την ευθεία αυτή;

(Θεωρήστε: $\ln 6 = 1{,}79$)

Μονάδες (6+9+5+5]=25

10. **ΘΕΜΑ Δ** **5.1** **21854**

Ένα δοχείο περιέχει υγρό το οποίο εξατμίζεται. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η ποσότητα Q, σε λίτρα, του υγρού που έχει απομείνει στο δοχείο μετά από t ημέρες.



Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο μειώνεται εκθετικά και μετά από t ημέρες δίνεται από τη σχέση $Q(t)=Q_0 2^{-\frac{t}{c}}, c\in\mathbb{R}$, όπου Q_0 η αρχική ποσότητα του υγρού.

α. Με βάση το διάγραμμα:

i. να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος t σε ημέρες	0	2	4	6
Ποσότητα $Q(t)$ του υγρού σε λίτρα.				

ii. να βρείτε την αρχική ποσότητα Q_0 του υγρού,

iii. να βρείτε το χρόνο που χρειάζεται για να εξατμιστεί η μισή ποσότητα του υγρού που υπήρχε τη χρονική στιγμή $t=0$ στο δοχείο.

β. Αν $Q_0=8$ και $Q(2)=4$, να δείξετε ότι $c=2$.

γ. Αν $Q(t)=8\cdot 2^{-\frac{t}{2}}$, να δείξετε ότι χρειάζεται να περάσουν δύο ημέρες για να εξατμιστεί η μισή ποσότητα $Q(t)$ του υγρού που υπάρχει στο δοχείο οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

Μονάδες $[(5+3+5)+7+5]=25$

Κεφάλαιο 5ο ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 58

5.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

§5.1 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Δίνεται συνάρτηση $\alpha^x : \mathrm{IR} \to (0,+\infty)$ με $\alpha^{38} < \alpha^{24}$, $\alpha \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

α. Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β. Να λύσετε την ανίσωση $2^{x-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5}$.

Μονάδες (13+12)=25

2. Σε μια περιοχή της ευρωπαϊκής ένωσης λόγω των μέτρων που πάρθηκαν ο πληθυσμός των αγροτών (σε χιλιάδες) μειώνεται σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής μεταβολής $\left(Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}\right)$. Ο αρχικός πληθυσμός ήταν 8 χιλιάδες αγρότες και μετά από δύο χρόνια έμεινε ο μισός.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που δίνει τον πληθυσμό των αγροτών μετά από t χρόνια είναι: $Q(t) = 8 \cdot e^{-\frac{t}{2}\ln 2}$

β Ποιος θα είναι ο πληθυσμός των αγροτών ύστερα από τέσσερα χρόνια;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Πόσος χρόνος θα έχει περάσει όταν ο αγροτικός πληθυσμός της περιοχής θα έχει μειωθεί στους χίλιους αγρότες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (10+6+9)=25

3. Μια ποσότητα ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής

$$\left(Q(t)=Q_0\cdot e^{ct}\right).$$

α. Αν γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας, να δείξετε ότι $Q(t)=Q_0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$

β. Αν μετά από τέσσερα χρόνια η ποσότητα που έχει απομείνει είναι 1 κιλό, να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε.

γ. Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια, η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

Μονάδες (10+6+9)=25

4. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i. $f(x)=4^x-1$, **ii.** $g(x)=4^{x-2}$, **iii.** $\varphi(x)=4^{x-2}+1$

5. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ και $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ **ii.** $y=3^{-x}$ και $y=3^{x+2}-1$

6. Να λύσετε την εξίσωση: $(\sqrt{3}+1)^{x^4-5x^2+4}=1$

7. Να λύσετε την εξίσωση: $2\cdot 9^x-3^{x+1}-135=0$.

8. Να λύσετε την εξίσωση $2^{4x+10}-3\cdot 2^{2x+5}+2=0$

9. Να λύσετε την εξίσωση: $3^{\frac{2}{x}}-4\cdot 3^{\frac{1}{x}}+3=0$

10. Να λύσετε την εξίσωση: $5^{x^2+1}+25^{x^2}=6$

11. Να λύσετε την εξίσωση: $3\cdot 3^{2x^2-4}-10\cdot 3^{x^2-2}+3=0$

12. Να λύσετε την εξίσωση: $3\left(\frac{3}{2}\right)^x+2\left(\frac{2}{3}\right)^x=5$

13. Να λύσετε την εξίσωση: $2^{\eta\mu x}+8\cdot 2^{-\eta\mu x}=6$

14. Να λύσετε την εξίσωση: $2\cdot 4^{x^3}\cdot 16^{x^2-x}=8$

15. Να λύσετε την εξίσωση: $8^x-3\cdot 4^x-3\cdot 2^{x+1}+8=0$

16. Να λύσετε την εξίσωση: $3^{x-1}-\frac{4}{3}\sqrt{3^x}=-1$

17. Να λύσετε την εξίσωση: $9^{x-1}+\sqrt{9^{x+1}}-10=0$

18. Να λύσετε την εξίσωση: $3^{x-1}+\sqrt{3^{x+1}}-108=0$

19. Να λύσετε την εξίσωση: $3\cdot 2^{x-4}-2^{x-1}=5^{x-2}-6\cdot 5^{x-3}$

20. Να λύσετε την εξίσωση: $9^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{7}{2}}-3^{2x-1}$

21. Να λύσετε την εξίσωση: $2^{3x}(1-2^{3x})+3(2^{5x}-4^{2x})=0$

22. Να λύσετε την εξίσωση: $2^{\eta\mu^2 x}-5\cdot 2^{\sigma\upsilon\nu^2 x}+9=0$

23. Να λύσετε την εξίσωση: $3^x=81^{2-|x|}$.

24. Να λύσετε την εξίσωση: $15^{2x-3}=3^x\cdot 5^{3x-6}$

25. Να λυθούν οι εξισώσεις: $5^{2x-3}-2\cdot 5^{x-2}=3$

26. Να λύσετε την εξίσωση: $4^{2x+1}+2^{2x+6}-4\cdot 8^{x+1}=0$

27. Να λύσετε την εξίσωση: $3^{x+2}\cdot 9^{x+1}=81\left(27^x+\frac{9}{3^x}-1\right)$

28. Να λύσετε τις εξισώσεις: **i.** $2^x+16\cdot 2^{-x}-10=0$ **ii.** $5^x+\frac{1}{5^{x-2}}-26=0$

29. Να λύσετε την εξίσωση: $3^{\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{2}}+3^{\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{2}}+3^{\sigma\upsilon\nu x+\frac{3}{2}}=13$

30. Να λύσετε την εξίσωση: $2^{2(1+\eta\mu x)}+2\cdot 5^{2\eta\mu x}=7\cdot 10^{\eta\mu x}-2^{2\eta\mu x}$

31. Να βρείτε τα $x\in\mathbb{R}$ ώστε οι αριθμοί 3^{x+2}, $2^{x+4}+\frac{1}{2}3^{x}$, $5\cdot 2^{x}$ να είναι δ.ο. Α.Π.

32. Να λυθεί η ανίσωση: $\alpha^{x^2-4}>1$ με α>0.

33. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i. $2^{x^2-7x+12}<1$ **ii.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-2x+1}<\left(\frac{2}{3}\right)^{4}$.

34. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i. $\sqrt{2}^{x^2+5x+6}>1$ **ii.** $3^{x^2-7x+9}<\frac{1}{3}$

35. Να λύσετε την ανίσωση: $6^{x}+6^{x+1}<2^{x}+2^{x+1}+2^{x+2}$

36. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{9\cdot 3^{x-1}+1}{3^{x}+2}<2$

37. Να λύσετε την ανίσωση: $3^{2x+1}+2\cdot 3^{x}\leq 4\cdot 3^{x+1}-3$

38. Να λύσετε την ανίσωση: $3^{x+\frac{1}{2}}+3^{x-\frac{1}{2}}>4^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$

39. Αν ισχύει 0<α<1 να λύσετε την ανίσωση: $\alpha^{2x-x^2}<1$

40. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $4^{\sigma\upsilon\nu 2x}+4^{\sigma\upsilon\nu^2 x}=3$ που βρίσκονται στο [0,π].

41. Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$f(x)=\left(\frac{1}{8}\right)^{x}-21\cdot 2^{-x}+20$ με τον άξονα x΄x.

42. Για ποιες τιμές του πραγματικού x η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$f(x)=e^{3x^2-2x}-(e^{2})^{x+2}$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

43. Δίνονται οι συναρτήσεις:

i. $f(x)=\left(3\alpha+\dfrac{2}{\alpha}\right)^x$ **ii.** $g(x)=\left(2-\dfrac{2}{\alpha}\right)^x$ **iii.** $h(x)=\left(\dfrac{3-\alpha}{\alpha+7}\right)^x$

Να βρείτε

α. τις τιμές του α για τις οποίες ορίζονται οι παραπάνω συναρτήσεις και

β. για ποιες από αυτές είναι κάθε συνάρτηση γνησίως αύξουσα–γνησίως φθίνουσα.

44. Να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς:

i. $3^{\frac{2}{3}},\ 3^{\frac{3}{4}}$ **ii.** $5^{-\sqrt{2}},\ 5^{-\sqrt{3}}$ **iii.** $\sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3},\ \sqrt[7]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^5}$

45. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 5^{3x-1}\cdot 25^{y+1}=1 \\ 4^{2x+4}\cdot 8^{y-1}=8 \end{cases}$

46. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 8^{2x+1}=32\cdot 2^{4y-1} \\ 3\cdot 3^{x-y}=\sqrt{9^{2y+1}} \end{cases}$

47. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 3^x-5^y=4 \\ 27^x-125^y=604 \end{cases}$

48. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 5^x-4^{y+1}=9 \\ 5^{x-1}+4^{y+2}=69 \end{cases}$

49. Να λύσετε το σύστημα:: $\begin{cases} 3^x-4^y=77 \\ \sqrt{3^x}-2^y=7 \end{cases}$

50. Να λύσετε το σύστημα:: $\begin{cases} 2^{x+2y}-3^{2x-y}=15 \\ 2^{\frac{x}{2}+y}+3^{x-\frac{y}{2}}=5 \end{cases}$

51. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 9\cdot 5^x+7\cdot 2^{x+y}=457 \\ 6\cdot 5^x-14\cdot 2^{x+y}=-890 \end{cases}$

52. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 2^{4x+y}-3^{x-y}=-1 \\ 2^{4x+y+1}+3^{x-y+1}=43 \end{cases}$

53. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 2^{x}\cdot 3^{y}=12 \\ 2^{y}\cdot 3^{x}=18 \end{cases}$

54. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 2^{x}=3y \\ 3^{x}=2y \end{cases}$

55. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} 4^{x}8^{y}=256 \\ 64\cdot 4^{x}-8^{y}=0 \end{cases}$ **ii.** $\begin{cases} e^{x}\cdot e^{3-y}=e^{2} \\ e^{x+2}e^{y}=1 \end{cases}$

56. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} 2^{y}-2^{x}=4 \\ \dfrac{2x+2}{y+3}=1 \end{cases}$ **ii.** $\begin{cases} 2^{ημx}+3^{\frac{συνx}{2}}=3 \\ 4^{ημx}-3^{συνx}=3 \end{cases}$

57. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 2^{x+y}=4 \\ 2^{x+1}+2^{y+1}=10 \end{cases}$

58. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 2^{x}+2^{y}=12 \\ x+y=5 \end{cases}$

5.2 ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Θεωρούμε την εξίσωση $\alpha^x = \theta$ όπου **α>0 με α≠1 και θ>0**.

Η παραπάνω εξίσωση έχει **μοναδική** λύση αφού η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ είναι **γνησίως μονότονη** και ο **θ** ανήκει στο **σύνολο τιμών** της.

Τη **μοναδική** αυτή λύση τη συμβολίζουμε με $\log_\alpha \theta$ και την ονομάζουμε λογάριθμο του θ ως προς βάση α.

Ώστε αν **α>0** με **α≠1** και **θ>0** τότε: $\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha \theta$

Ισοδύναμα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

Ο $\log_\alpha \theta$ είναι ο **εκθέτης** στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον **α** για να βρούμε το **θ.**

Από τον παραπάνω ορισμό του λογάριθμου προκύπτει αμέσως ότι αν α>0 με α≠1 τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε θ>0 ισχύει:

- $\log_\alpha \alpha^x = x$
- $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$
- $\log_\alpha 1 = 0$
- $\log_\alpha \alpha = 1$

Ιδιότητες λογαρίθμων

Αν α>0 με α≠1 τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

1. $\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$

2. $\log_\alpha\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$

3. $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha \theta$

Παρατήρηση:

Επειδή για κάθε θ>0 ισχύει $\sqrt[\nu]{\theta}=\theta^{\frac{1}{\nu}}$ έχουμε:

$$\log_\alpha \sqrt[\nu]{\theta}=\log_\alpha \theta^{\frac{1}{\nu}}=\frac{1}{\nu}\log_\alpha \theta$$

Δεκαδικοί λογάριθμοι

Οι λογάριθμοι με **βάση** το **10** λέγονται **δεκαδικοί** ή κοινοί λογάριθμοι.

Ο **δεκαδικός** λογάριθμος ενός **θετικού** αριθμού **θ**, συμβολίζεται απλά με $\log\theta$ και όχι με $\log_{10}\theta$.

Επομένως

$$\log\theta=x \Leftrightarrow 10^x=\theta$$

Φυσικοί λογάριθμοι

Στα μαθηματικά είναι πολύ χρήσιμοι και οι λογάριθμοι με **βάση** τον αριθμό **e**.

Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται **φυσικοί** ή **νεπέριοι** λογάριθμοι.

Ο **φυσικός** λογάριθμος ενός **θετικού** αριθμού **θ**, συμβολίζεται με **lnθ**, και όχι με $\log_e\theta$.

Είναι:

$$\ln\theta=x \Leftrightarrow e^x=\theta$$

Αλλαγή βάσης

Αν α, β>0 με α, β≠1 τότε για κάθε θ>0 ισχύει:

$$\log_\beta\theta=\frac{\log_\alpha\theta}{\log_\alpha\beta}$$

5.2 ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ (9)

1. ΘΕΜΑ Β 5.2 15687

Δίνεται η παράσταση $A = \log_4 3 + \log_4 \alpha - \log_4 \beta$, όπου α, β θετικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι $A = \log_4 \frac{3\alpha}{\beta}$

β. Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $3\alpha = 16\beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης Α.

Μονάδες 913+12)=25

2. ΘΕΜΑ Β 5.2 15816

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2$, $\beta = \ln 4$, $\gamma = \ln 8$.

α. Να αποδείξετε ότι $2\beta = \alpha + \gamma$.

β. Να αποδείξετε ότι $\beta + \gamma = 5\alpha$

Μονάδες (12+13)=25

3. ΘΕΜΑ Β 5.2 15817

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2$ και $\beta = \ln 3$.

α. Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < \alpha < \beta$.

β. Να αποδείξετε ότι $\beta - \alpha < 1$.

Μονάδες (12+13)=25

Δίνεται $e \simeq 2.71$.

4. ΘΕΜΑ Β 5.2 19903

Αν $\alpha = \log 100 + \log 5 + \log 2 - \log 1$, τότε:

α. Να δείξετε ότι $\alpha = 3$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $9 \cdot 2^x = 4 \cdot \alpha^x$.

Μονάδες (10+15)=25

5. ΘΕΜΑ Β 5.2 20663

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\log_2 8)\cdot x^3+\left(4\log_2\sqrt{2}\right)\cdot x^2-(4\log_2 1)\cdot x+1990$.

α. Να αποδείξετε ότι $\log_2 8+2\log_2\sqrt{2}-\log_2 1=4$.

β. Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$.

Μονάδες (15+10)=25

6. ΘΕΜΑ Β 5.2 20710

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\log 20$ και $\beta=\log 50$. Να αποδείξετε ότι

α. $\beta+\alpha=3$.

β. $\ln(\beta+\alpha)>1$.

γ. $10^{\beta}-10^{\alpha}=10\cdot(\beta+\alpha)$. Δίνεται ότι $e\simeq 2,71$.

Μονάδες (7+6+12)=25

7. ΘΕΜΑ Β 5.2 20711

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\log 3$ και $\beta=\log 4$.

α. Να αιτιολογήσετε γιατί $0<\alpha<\beta$.

β. Να αποδείξετε ότι :

i. $\beta+\alpha>1$. **ii.** $\ln\frac{\alpha}{\beta}<0$.

Μονάδες (12+6+7)=25

8. ΘΕΜΑ Β 5.2 21676

Αν είναι γνωστό ότι $\ln 4=1,386$ και $\ln 5=1,609$ τότε:

α. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\ln\frac{e}{5}-\ln\frac{4}{e}$

β. Με τη βοήθεια της ισότητας $80=5\cdot 4^2$ να αποδείξετε ότι $\ln 80=4,381$.

Μονάδες (12+13)=25

9. **ΘΕΜΑ Β** **5.2** **21858**

Δίνεται η παράσταση $A = 2\log 5 + 2\log 2$.

α. Να αποδείξετε ότι $A = 2$.

β. Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία ισχύει ότι $e^{\lambda} = A$.

γ. Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να αποδείξετε ότι $\ln \lambda < 0$.

Μονάδες (12=6+7)=25

5.2 ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ (15)

1. ΘΕΜΑ Δ 5.3 15021

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

γ. Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2)+f(\ln\frac{1}{2})$.

δ. Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta)+f(\eta\mu(\pi+\theta))=0$, για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$.

Μονάδες (5+6+7+7)=25

2. ΘΕΜΑ Δ 5.2 15251

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-9x^2+(\alpha-2)x-6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$.

α. Να βρείτε τον αριθμό α.

β. Για $\alpha=15$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2-3x+2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

ii. αν $P(x)=(x^2-3x+2)(2x-3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2)<0$.

Μονάδες [6+(6+7+6)]=25

3. ΘΕΜΑ Δ 5.2 15474

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)= e^{\ln e}x^3+4x^2\ln\sqrt{e}+2$.

α. Να δείξετε ότι $P(x)=ex^3+2x^2+2$.

β. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία $\varepsilon\colon y=ex+4$.

γ. Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία $\varepsilon\colon y=ex+4$.

δ. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης: $P(e)-e^2-4$.

Μονάδες (5+8+8+4)=25

4. ΘΕΜΑ Δ 5.2 15822

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+x$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ και $\alpha\neq 0$, το οποίο έχει 3 ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

α. Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$.

β. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=0$.

γ. Με $\alpha=-1$ και $\beta=0$,

i. να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$.

ii. να αποδείξετε ότι $P(\log\sqrt{10})>0$.

Μονάδες [7+6+(6+6)]=25

5. ΘΕΜΑ Δ 5.2 15823

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2-1$ δίνει πηλίκο $3x-2$ και υπόλοιπο 1.

α. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=1$.

β. Να αποδείξετε ότι $P(\log 5)\neq 1$.

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

Μονάδες (10+10+5)=25

6. **Θ Ε Μ Α Δ** **5.2** **18110**

α. **i.** Να λύσετε την εξίσωση $x\left(e^x - 1\right) = 0$

ii. Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου $x\left(e^x - 1\right)$

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x\left(e^x - 1\right)}$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ii. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0), f(\ln 2)$ και $f(-\ln 2)$.

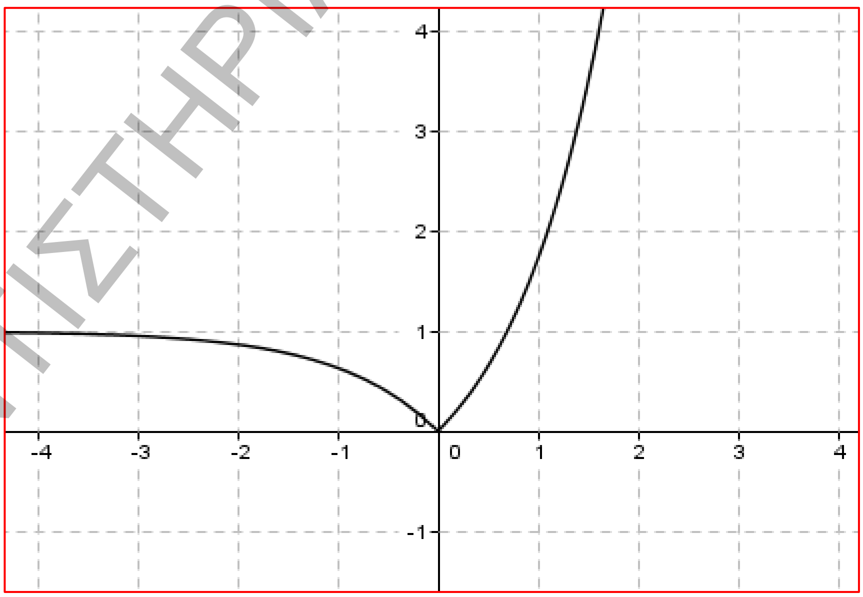
iii. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παρακάτω ισχυρισμός: « η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x\left(e^x - 1\right)}$ είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της».

Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδες [(3+6)+(5+6+5)]=25

7. **Θ Ε Μ Α Δ** **5.2** **18235**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = |e^x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$.



α. Να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να περιγράψετε πως αυτή μπορεί να προκύψει από τη γνωστή γραφική παράσταση της $g(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

β. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να συμπεράνετε τη μονοτονία και την ελάχιστη τιμή της f.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$.

δ. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α, το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής της παράστασης C_f με την ευθεία $y=\alpha$.

Μονάδες (7+6+5+7)=25

8. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **18429**

Η μονάδα μέτρησης της έντασης του ήχου είναι το ένα Watt ανά τετραγωνικό μέτρο $\left(1W/m^2\right)$. Στο ανθρώπινο αυτί, η ελάχιστη ένταση που γίνεται αντιληπτή είναι $10^{-12}\,w/m^2$. Για να μετρήσουμε την στάθμη της έντασης ενός ήχου, χρησιμοποιούμε την κλίμακα Decibel (Db). Το επίπεδο της στάθμης σε Db δίνεται από τη σχέση $D=10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ όπου I_0 η ελάχιστη αντιληπτή ένταση και I η ένταση του ήχου.

α. Να βρείτε το επίπεδο των Db που παράγει ένα μαχητικό αεροσκάφος, αν γνωρίζουμε ότι η ένταση του ήχου του είναι $100\,w/m^2$.

β. Να αποδείξετε ότι μια αύξηση του επιπέδου στάθμης οποιουδήποτε ήχου κατά 20 Db αντιστοιχεί σε ήχο έντασης 100 φορές μεγαλύτερης.

γ. Το όριο πόνου του ανθρώπινου αυτιού λόγω έντασης ήχου είναι 120 Db. Η έκθεση σε ήχους πάνω από 120 Db μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα ακοής ή κώφωση. Ποια είναι η αντίστοιχη ένταση ήχου στο όριο του πόνου για τον άνθρωπο;

Μονάδες (8+10+7)=25

9. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **18434**

Ο Νόμος των Bouguert-Lambert στη φωτομετρία, λέει ότι η ένταση I μιας ακτινοβολίας (ηλιακό φως, ακτίνες Χ, κ.λπ.) που εισχωρεί κατακόρυφα σε ένα διαφανές μέσο (νερό λιμνών, θαλάσσης, γυαλί, κ.λ.π.) μειώνεται εκθετικά, απορροφούμενη από το μέσο, συναρτήσει του βάθους (πάχους) h του μέσου, σύμφωνα με τη συνάρτηση $I = I_0 \cdot e^{-\lambda h}$, όπου $\lambda > 0$ σταθερά και I_0 η αρχική ένταση.

α. Να εξετάσετε αν υπάρχει κάποιο βάθος h στο οποίο η ένταση της ακτινοβολίας να είναι μηδέν.

β. Γνωρίζουμε ότι για καθαρό νερό θαλάσσης είναι $\lambda = 1,4\mathrm{m}^{-1}$ (το m παριστάνει μέτρα) και ότι μια συγκεκριμένη μορφή φυτικής ζωής δεν μπορεί να υπάρξει, όταν η ένταση του ηλιακού φωτός γίνει μικρότερη ή ίση από το $\frac{1}{4}$ της αρχικής έντασης.

Να βρείτε για ποιες τιμές του βάθους h συμβαίνει αυτό. (Δίνεται ότι $\ln 2 = 0,7$)

γ. Σε κάποιο άλλο διαφανές μέσο, γνωρίζουμε ότι σε βάθος $10\mathrm{m}$ η ένταση μιας ακτινοβολίας μειώνεται στο μισό της έντασης της αρχικής ακτινοβολίας. Να αποδείξτε ότι στην συγκεκριμένη κατάσταση ισχύει $I = I_o \cdot 2^{-\frac{h}{10}}$.

(Μονάδες (3+12+10)=25

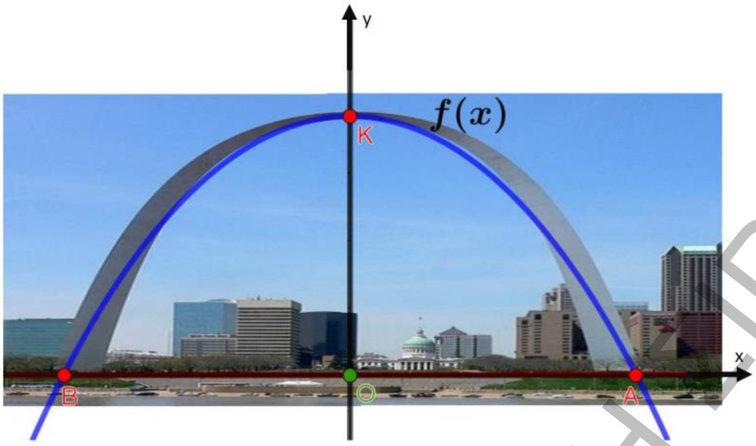
10. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **18437**

Ένα από τα επιβλητικότερα μνημεία του κόσμου είναι η αψίδα Gateway Arch στην πόλη Saint-Louis των Η.Π.Α. Θεωρώντας κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, όπως στο παρακάτω σχήμα, η πρόσοψη της αψίδας προσεγγίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = -192\left(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}}\right) + 576,$$

με $f(x) \geq 0$, όπου οι αριθμοί x, $f(x)$ μετρούνται σε μέτρα (m).

(Η γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης λέγεται αλυσοειδής καμπύλη).



α. Να αποδείξετε ότι το μέγιστο ύψος ΟΚ της αψίδας είναι 192 m.

β. Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Α στο οποίο η καμπύλη τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox. Δίνεται ότι $\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cong 0,96$.

γ. Αν γνωρίζουμε ότι τα σημεία Α και Β έχουν αντίθετες τετμημένες, να αποδείξετε ότι το πλάτος ΑΒ της αψίδας είναι ίσο με το μέγιστο ύψος της ΟΚ.

Μονάδες (7+13+5)=25

11. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **18863**

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$\varphi(x)=\sqrt{x},\ \text{με } x \geq 0,\ f(x)=\sqrt{x-1},\ \text{με } x \geq 1 \text{ και } g(x)=\frac{x+1}{3},\ \text{με } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

β. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ.

i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

ii. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, να σχεδιάσετε και την γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

γ. Με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g.

δ. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\ln 10 - 1} > \dfrac{1+\ln 10}{3}$.

Μονάδες [8+(2+4)+6+5]=25

12. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **20657**

Σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, η θερμοκρασία θ, σε βαθμούς Κελσίου, ενός αντικειμένου μειώνεται με την πάροδο του χρόνου t, σε λεπτά, σύμφωνα με τη συνάρτηση $\theta(t) = T + (\theta_0 - T)e^{kt}$, όπου k μια σταθερά με $k<0$, θ_0 η αρχική θερμοκρασία του αντικειμένου, ενώ T είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο τοποθετείται το αντικείμενο, με $\theta_0 > T$.

Ένα αντικείμενο έχει θερμανθεί στους 100^{o} C και στη συνέχεια αφήνεται να κρυώσει σε ένα δωμάτιο με σταθερή θερμοκρασία 30^{o} C. Γνωρίζουμε ότι 5 λεπτά μετά την τοποθέτησή του αντικειμένου στο δωμάτιο, η θερμοκρασία του αντικειμένου είναι 80^{o} C.

α. Να αποδείξετε ότι $k=-0,0672$.

β. Να αποδείξετε ότι $\theta(t)=30+70\left(\frac{5}{7}\right)^{t/5}$.

γ. Να βρείτε, με προσέγγιση εκατοστού, τη θερμοκρασία του αντικειμένου μετά από 1 ώρα και 40 λεπτά.

Μονάδες (9+8+8)=25

Δίνεται ότι $\ln\left(\frac{5}{7}\right)=-0,336$ (προσεγγιστικά) και $\left(\frac{5}{7}\right)^{10}\cong 0,034$.

13. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **20669**

α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2+1}-x>0$, για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

β. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(-x)+g(x)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O.

Μονάδες [(3+9)+(9+4)]=25

14. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **20845**

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=e^{\kappa x}$, $\kappa \ge 0$.

α. Να αποδείξετε ότι: $f(1)-f(0)\ge f(0)-f(-1)$.

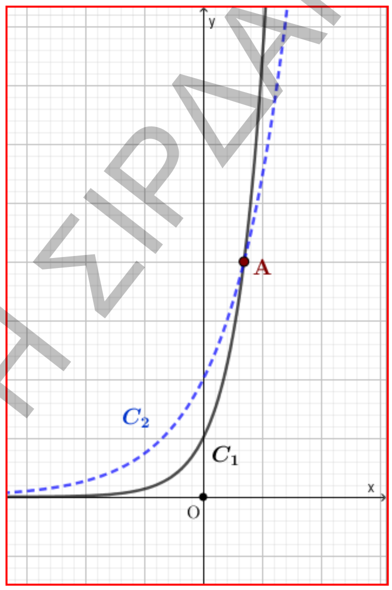
Πότε ισχύει η ισότητα;

β. Να αποδείξετε ότι αν $\kappa>0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

γ. **i.** Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει: $e^{2x}>2e^{x}$.

ii. Χρησιμοποιώντας το διπλανό σχήμα, να αντιστοιχίσετε τις C_1, C_2 με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\varphi(x)=2e^{x}$ και $k(x)=e^{2x}$.

Ποιες είναι οι συντεταγμένες του κοινού τους σημείου Α;



Μονάδες [8+7+(5+5)]=25

15. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **20847**

Αν I είναι η ένταση του ήχου (σε W/m^2 - Watt ανά τετραγωνικό μέτρο), τότε η αντίστοιχη ηχοστάθμη D (σε ντεσιμπέλ) δίνεται από τον τύπο: $D = 10 \cdot \log\left(10^{12} \cdot I\right)$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα ηχοστάθμης.

Όριο ακοής	**0 *ντεσιμπέλ***
Θρόισμα φύλλων	10 *ντεσιμπέλ*
Συνήθης ψίθυρος	20 *ντεσιμπέλ*
Αθόρυβο αυτοκίνητο	50 *ντεσιμπέλ*
Συνήθης ομιλία	65 *ντεσιμπέλ*
Κυκλοφοριακή κίνηση	80 *ντεσιμπέλ*
Αεροσυμπιεστής (κομπρεσέρ) σε απόσταση 3 μέτρων	90 *ντεσιμπέλ*
Όριο πόνου	120 *ντεσιμπέλ*
Αεριωθούμενο	140 *ντεσιμπέλ*

α. Να βρείτε την ένταση του ήχου που δημιουργεί το θρόισμα των φύλλων.

β. Αν η ένταση του ήχου σε μία ροκ συναυλία είναι 1 W/m^2 να ελέγξετε αν η ηχοστάθμη στην οποία εκτίθεται το κοινό αγγίζει το όριο του πόνου.

γ. Αν διπλασιάσουμε την ένταση του ενισχυτή ενός στερεοφωνικού συστήματος, τότε να υπολογίσετε πόσα ντεσιμπέλ θα αυξηθεί η στάθμη του εξερχόμενου ήχου. (Δίνεται ότι $\log 2 \approx 0{,}3$).

Μονάδες (8+7+10)=25

Κεφάλαιο 5ο ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 15

§ 5.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να προσδιορίσετε το ευρύτερο υποσύνολο A στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\log(3^{2x}-4\cdot 3^{x}+3)$$

2. Αν ln2=x και ln3=y να εκφράσετε σε συνάρτηση με τους x, y τους παρακάτω αριθμούς:

i. $\ln 72$ **ii.** $\ln\frac{1}{8}$ **iii.** $\frac{1}{8}\ln 256$ **iv.** $\ln 216$ **v.** $\ln 243$ **vi.** $\ln 288$ **vii.** $\ln 6{,}75$

3. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A=\ln e^{2}+\ln\sqrt{e},\quad B=\ln(e\sqrt{e}),\quad \Gamma=\ln e+\ln\frac{1}{e},\quad \Delta=\ln e^{2}-\ln e^{-2}$$

4. Να συγκρίνετε τους αριθμούς x, y χωρίς τη χρήση υπολογιστή.

i. x=ln7 και y=3, **ii.** x=2ln2 και $y=\ln 11-\ln 3$, **iii.** x=4ln3 και y=4ln2+ln5,

iv. $x=9\ln\sqrt{e}$ και $y=2\ln e^{2}$, **v.** $x=1+3\ln e^{2}$ και $y=8+\ln\frac{1}{e}$

5. Να αποδείξετε ότι αληθεύει η ισότητα: $2\log\frac{5}{2}+\log\frac{3}{11}-\log\frac{40}{77}-\log\frac{105}{32}=0$

6. Να αποδείξετε ότι:

i. $7\log\frac{16}{15}+5\log\frac{25}{24}+3\log\frac{81}{80}=\log 2$ **ii.** $3\log\frac{36}{25}+\log\left(\frac{6}{27}\right)^{3}-2\log\frac{16}{125}=\log 2$

7. Αν log2=0,3 να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A=\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{2})+\frac{1}{2}\log\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}\log\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$$

8. Να δείξετε ότι: $x^{\ln y-\ln z}\cdot y^{\ln z-\ln x}\cdot z^{\ln x-\ln y}=1$

9. Αν α, β>0 και $\alpha^2+\beta^2=23\alpha\beta$ να δείξετε ότι: $\ln\alpha+\ln\beta=2\ln\dfrac{\alpha+\beta}{5}$

10. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο το logα και δεύτερο όρο το logβ είναι:

$$S_\nu=\frac{1}{2}\log\frac{\beta^{\nu(\nu-1)}}{\alpha^{\nu(\nu-3)}}$$

11. Σε αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1=\ln 3$ και $\alpha_2=\ln 27$. Να βρείτε το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων.

12. Ο πρώτος όρος μια γεωμετρικής προόδου είναι ίσος με log2 και ο δεύτερος όρος ίσος με log8. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο:

$$S_\nu=\frac{\log 2(3^\nu-1)}{2}$$

13. Αν log2=0,3 και log3=0.48 να υπολογίσετε τον $\log\sqrt[10]{12}$.

14. Αν α>1, β>1 να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\log(\alpha^2-1)+\log(\beta^2-1)-\log\left[(\alpha\beta+1)^2-(\alpha+\beta)^2\right]$$

15. Η ένταση ενός σεισμού σε βαθμούς Richter δίνεται από τη συνάρτηση $M=\dfrac{2}{3}\log\dfrac{E}{E_0}$ όπου Ε η ενέργεια που εκλύεται από το σεισμό (σε Joule) και E_0 μια σταθερά. Το 1933 στην Καλιφόρνια ένας σεισμός είχε ένταση 6,3 βαθμούς της κλίμακας Richter ενώ το 1964 στην Αλάσκα έγινε σεισμός 8,3 βαθμών της κλίμακας Richter. Πόσες φορές πιο ισχυρός –από πλευράς ενέργειας- ήταν ο δεύτερος σεισμός από τον πρώτο;

Κεφάλαιο 5ο ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

5.3 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω α ένας θετικός αριθμός διαφορετικός της μονάδας. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in (0,+\infty)$ στο $\log_\alpha x$ ορίζουμε μια συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to R$ με

$$f(x) = \log_\alpha x$$

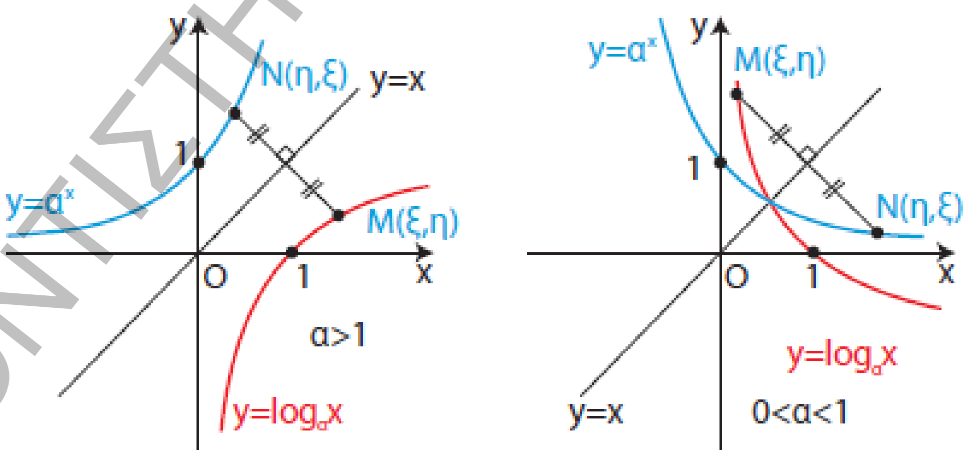
Η συνάρτηση αυτή λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση** με βάση α.

Παρατήρηση

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$y = \log_\alpha x \quad \text{και} \quad y = \alpha^x$$

είναι **συμμετρικές** ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.



Αν α>1 τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\log_\alpha x$ **:**

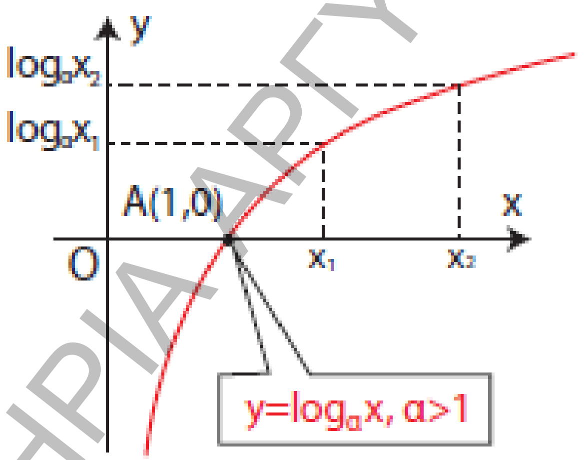
- έχει **πεδίο ορισμού** το διάστημα **(0,+∞)**
- έχει **σύνολο τιμών** το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών
- Είναι **γνησίως αύξουσα** που σημαίνει ότι:

$$\text{αν} \quad x_1<x_2 \quad \text{και} \quad \log_\alpha x_1<\log_\alpha x_2$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$\log_\alpha x<0 \quad \text{αν} \quad 0<x<1, \ \text{και} \ \log_\alpha x>0 \quad \text{αν} \quad x>1$$

- έχει γραφική παράσταση που **τέμνει** τον άξονα **x΄x** στο σημείο **A(1,0)** και έχει **ασύμπτωτο** τον **ημιάξονα Oy΄**



Αν 0<α<1 τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\log_\alpha x$ **:**

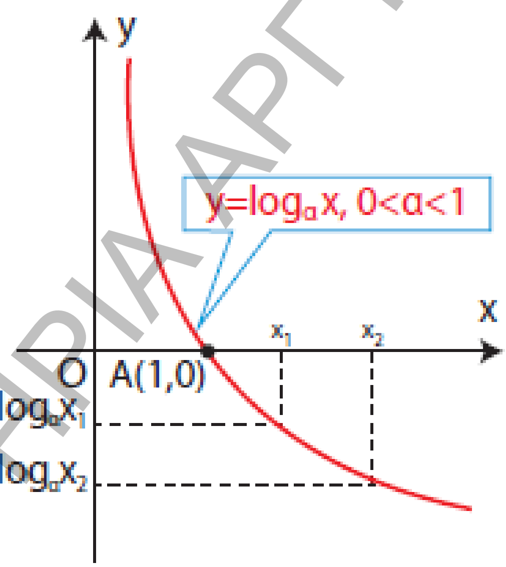
- έχει **πεδίο ορισμού** το διάστημα **(0,+∞)**
- έχει **σύνολο τιμών** το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών
- Είναι **γνησίως φθίνουσα** που σημαίνει ότι:

$$\text{αν}\quad x_1<x_2\quad\text{τότε}\quad \log_\alpha x_1>\log_\alpha x_2$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$\log_\alpha x>0\quad\text{αν}\quad 0<x<1\ \text{και}\quad \log_\alpha x<0\quad\text{αν}\quad x>1$$

- έχει γραφική παράσταση που **τέμνει** τον άξονα **x΄x** στο σημείο **Α(1,0)** και έχει **ασύμπτωτο** τον ημιάξονα **Οy**.



Από τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης έχουμε:

$$\log_\alpha x_1=\log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$$

Εξισώσεις όπου ο **άγνωστος** εμφανίζεται στο **λογάριθμο** λέγονται **λογαριθμικές** εξισώσεις.

5.3 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ (25)

1. ΘΕΜΑ Β 5.3 15267

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2+1)=1+\log 3-\log 6$.

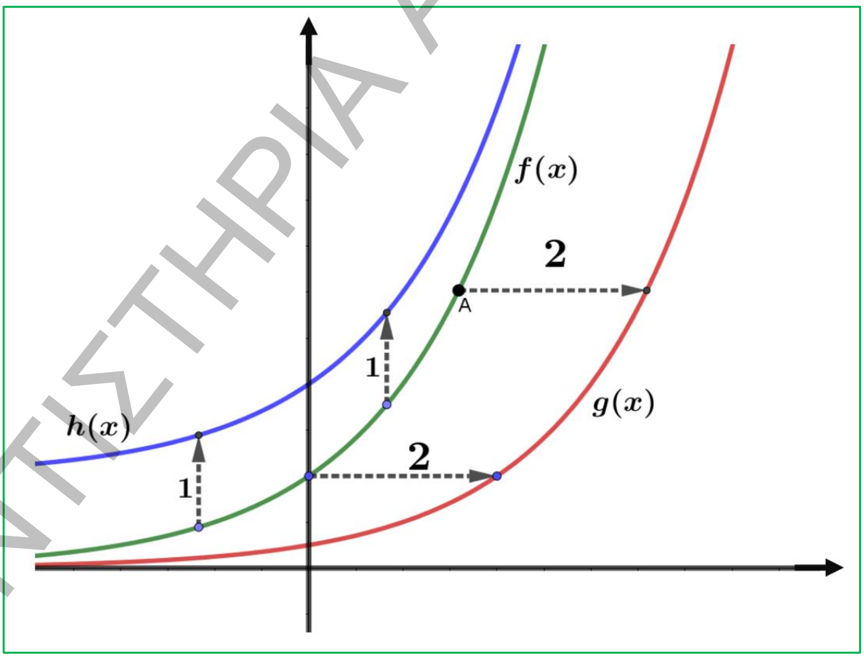
α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται $\log(x^2+1)=\log 5$.

β. Να λύσετε την εξίσωση.

Μονάδες (12+13)=25

2. ΘΕΜΑ Β 5.3 15393

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=2^x$, $x\in\mathbb{R}$ και δύο άλλων συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$ $x\in\mathbb{R}$ που προέκυψαν από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $f(x)$.



α. Να εξηγήσετε με τι είδους μετατοπίσεις προέκυψαν οι γραφικές παραστάσεις των $g(x)$ και $h(x)$ από την γραφική παράσταση της $f(x)$.

β. Να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$

γ. Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Α της γραφικής παράστασης της f του οποίου η τεταγμένη είναι 16.

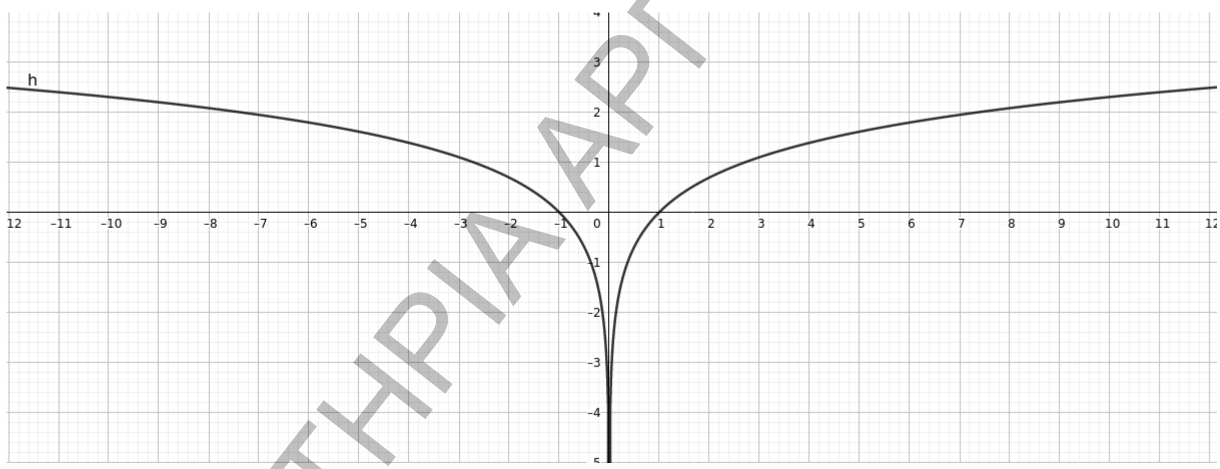
Μονάδες (8+8+9)=25

3. **ΘΕΜΑ Β** **5.3** **15617**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=-\ln|x|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β. **i.** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=\ln|x|$.



Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

ii. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $f, g(x)=\ln(x), x>0$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο για $x=1$.

Μονάδες [10+(7+8)]=25

4. **ΘΕΜΑ Β** **5.3** **15675**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-1)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

Μονάδες (10+15)=25

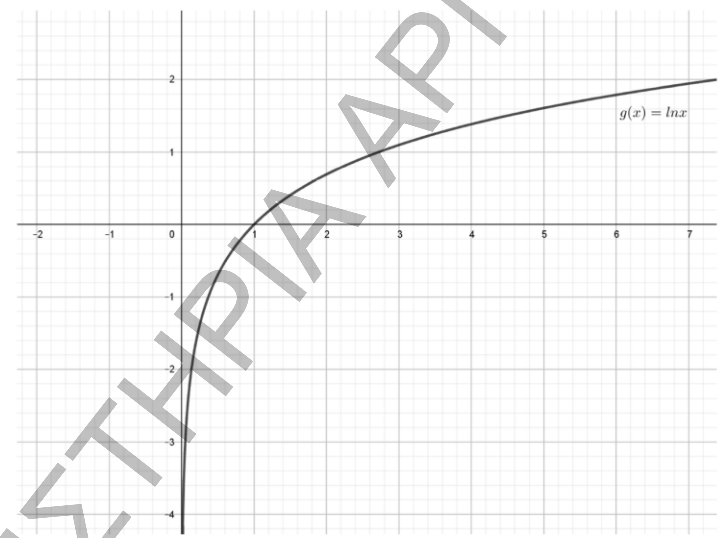
5. **ΘΕΜΑ Β** **5.3** **15808**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+2)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

γ. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\ln x$.



Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $f(x)=\ln(x+2)$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g.

Μονάδες (7+8+10)=25

6. ΘΕΜΑ Β 5.3 17318

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2-2x+3)$ με $x\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το $f(3)$.

β. Να δείξετε ότι $\ln 3+3\ln 2-f(3)=\ln 4$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\ln 4$

Μονάδες (5+7+13)=25

7. ΘΕΜΑ Β 5.3 19908

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

Μονάδες (13+12)=25

8. ΘΕΜΑ Β 5.3 20635

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να εξετάσετε αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $O(0,\ 0)$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$.

Μονάδες (7+8+10)=25

9. ΘΕΜΑ Β 5.3 20692

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log x,\ x>0$.

α. Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(100)$, $f(\sqrt{10})$

β. Για $x>1$, να επιλύσετε την εξίσωση $f(x+1)+f(x-1)=\log 10-\log 5$.

Μονάδες (12+13)=25

10. ΘΕΜΑ Β 5.3 20725

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\log x$ και $g(x)=\log(x+2)$.

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $f(x)=2$.

ii. $g(x)=2f(x)$.

Μονάδες (10+7+8)=25

11. ΘΕΜΑ Β 5.3 20727

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\log x$ και $g(x)=\ln(x-1)$.

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $\log x=3$.

ii. $\ln(x-1)=1$.

Μονάδες (10+7+8)=25

12. ΘΕΜΑ Β 5.3 20729

Δίνετε η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-1)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

γ. Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Μονάδες (6+9+10)=25

13. ΘΕΜΑ Β 5.3 20730

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1-x)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να λυθεί η εξίσωση $\ln(1-x) = \ln(x^2+1)$.

Μονάδες (12+13)=25

14. ΘΕΜΑ Β 5.3 20851

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = 2\log 6 - \log 12$ και $B = \log 5 + \log 2$

α. Να αποδείξετε ότι $A = \log 3$ και $B = 1$.

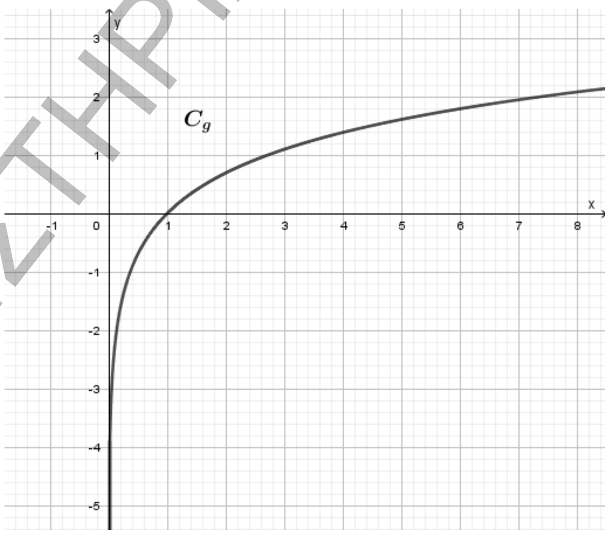
β. Να αποδείξετε ότι $A < B$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $\log x < 1$.

Μονάδες (12+5+8)=25

15. ΘΕΜΑ Β 5.3 20853

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1)$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x,\ x > 0$.



α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

γ. Να βρείτε το διάστημα, στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες (5+8+12)=25

16. ΘΕΜΑ Β 5.3 21174

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η εξίσωση:

$$\log(x+1) = -\log 2 - \log(1-x) \quad (1).$$

β. Να λύσετε την εξίσωση $\log(x+1) = \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log(1-x)$.

Μονάδες (10+15)=25

17. ΘΕΜΑ Β 5.3 21449

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f..

β. Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y = \ln x$.

Μονάδες (8+10+7)=25

18. ΘΕΜΑ Β 5.3 21450

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x^2+4)$ και $g(x) = \ln x + \ln 4$.

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

Μονάδες (12+13)=25

19. ΘΕΜΑ Β 5.3 21472

α. Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(x+1)=\ln(2x)$.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(x+1)>\ln(2x)$.

Μονάδες (13+12)=25

20. ΘΕΜΑ Β 5.3 21473

α. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση

$$\mathrm{A}=\ln x+\ln(x+6).$$

β. Να λύσετε την εξίσωση $\ln x+\ln(x+6)=\ln 7$.

Μονάδες (10+15)=25

21. ΘΕΜΑ Β 5.3 21675

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2+1)=1-\log 2$.

α. Να αποδείξετε ότι $1-\log 2=\log 5$.

β. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

(Μονάδες (12+13)=25

22. ΘΕΜΑ Β 5.3 21952

Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A}=\ln\sqrt{e}+\log\sqrt[3]{100}$. Να αποδείξετε ότι

α. $\mathrm{A}=\dfrac{7}{6}$.

β. $0<\ln \mathrm{A}<1$.

Δίνεται $e\simeq 2.71$.

Μονάδες (12+13)=25

23. ΘΕΜΑ Β 5.3 21953

Δίνεται η παράσταση $A = e^{\ln 2} + 10^{2\log\sqrt{5}}$. Να αποδείξετε ότι

α. $A = 7$.

β. $0 < \log A < 1$.

Μονάδες (12+13)=25

24. ΘΕΜΑ Β 5.3 21954

Δίνεται η παράσταση $A = \ln(\ln e) + \log(\log 10^{10})$.

α. Να αποδείξετε ότι :

i. $\log 10^{10} = 10$

ii. $A = 1$.

β. Να λυθεί η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = A$.

Μονάδες (6+6+13)=25

25. ΘΕΜΑ Β 5.3 21956

Δίνεται η παράσταση $A = 2\log 5 + 3\log 2 - \log 20$.

α. Να αποδείξετε ότι $A = 1$.

β. Να λυθεί η εξίσωση $\ln(e^x - 1) = A$.

Μονάδες (12+13)=25

5.3 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ (23)

1. ΘΕΜΑ Δ 5.3 15015

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2-2x$.

α. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x-\ln^2 x-2\ln x=0$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x-\ln^2 x-2\ln x>0$.

Μονάδες (7+8+10)=25

2. ΘΕΜΑ Δ 5.3 15093

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(10^x-1)$.

α. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0,+\infty)$.

β. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ. Να αποδείξετε ότι $f(x)+x=\log(10^{2x}-10^x)$, $x>0$.

δ, Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y=-x$.

Μονάδες (5+7+7+6)=25

3. ΘΕΜΑ Δ 5.3 15591

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+5}\right)^x$.

α. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι εκθετική και ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

β. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Για τη μεγαλύτερη τιμή του $\alpha\in\mathbb{Z}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα εκθετική με βάση ακέραιο αριθμό, να λύσετε την εξίσωση: $f(x)+f(x+1)=14$

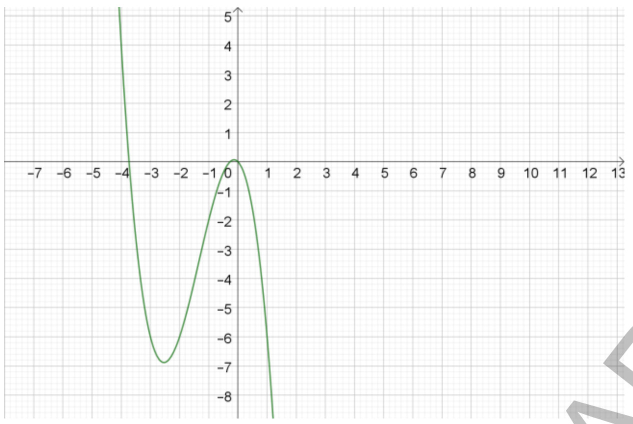
Μονάδες (8+8+9)=25

4. **Θ Ε Μ Α Δ** **5.3** **15678**

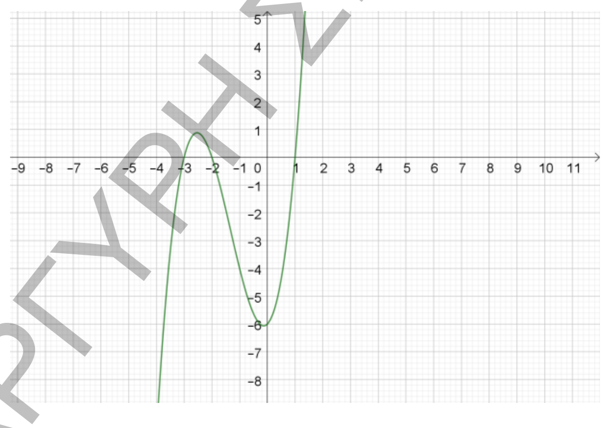
Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$.

α. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

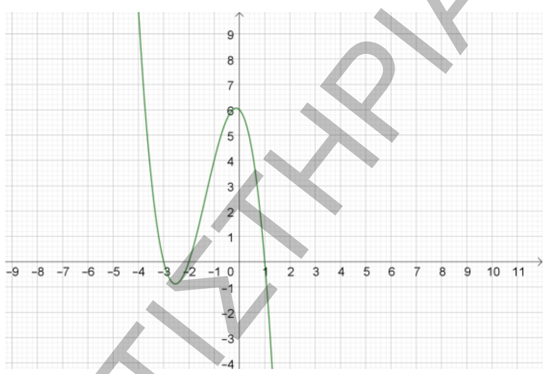
β. Από τα παρακάτω σχήματα, ένα μόνο μπορεί να αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. Να βρείτε ποιο αιτιολογώντας την απάντησή σας.



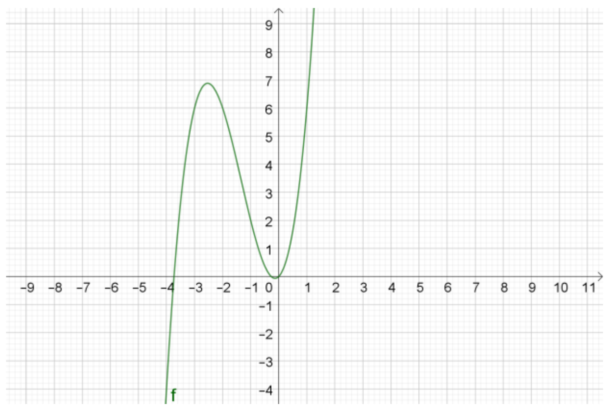
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

Μονάδες (10+7+8)=25

5. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **15679**

Δίνεται η παράσταση $A=\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{x}-3}\right)$.

α. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{\omega^2-1}{\omega-3}>0$.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $A=-\ln 3$.

Μονάδες (8+8+9)=25

6. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **15688**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-1)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα $x'x$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x-1$.

γ. Να αποδείξετε ότι αν α>0, τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y=x+\alpha$.

Μονάδες (9+8+8)=25

7. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **15690**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2,\ x\neq 0$.

α. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)=\ln x$.

γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2,\ x\neq 0$.

δ. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y=2$

Μονάδες (5+6+7+7)=25

8. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **15694**

Στην Αστρονομία, οι αστέρες ταξινομούνται ανάλογα με την λαμπρότητα τους με βάση την σχέση $m - M = 5\log\left(\frac{d}{10}\right)$, (I) όπου d η απόσταση του αστέρα από τον παρατηρητή, m είναι το φαινόμενο μέγεθός τους (το πόσο λαμπροί φαίνονται) και M το απόλυτο μέγεθός τους. Το απόλυτο μέγεθος ορίζεται να είναι το φαινόμενο μέγεθος σε απόσταση 10 parsec από τον παρατηρητή, όπου 1 parsec είναι η μονάδα μέτρησης της απόστασης d και ισούται με $3,26$ έτη φωτός $= 30,9\cdot 10^{12}\,\mathrm{Km}$.

α. Για ποιες τιμές της απόστασης d το φαινόμενο μέγεθος ενός αστέρα είναι μικρότερο από το απόλυτο μέγεθός του;

β. Ένας αστέρας έχει φαινόμενο μέγεθος $m = 1,157$ και βρίσκεται σε απόσταση $d = 100$ parsec από έναν παρατηρητή. Ποιο είναι το απόλυτο μέγεθος αυτού του αστέρα;

γ. Να επιλύσετε την σχέση (I) ως προς d.

δ. Ο αστέρας Betelgeuse έχει φαινόμενο μέγεθος $0,46$ και απόλυτο μέγεθος $-5,14$. Ποια είναι η απόστασή του από τον παρατηρητή; Δίνεται ότι $\sqrt[25]{10^{53}} \cong 131$.

Μονάδες (7+6+7+5)=25

9. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **16001**

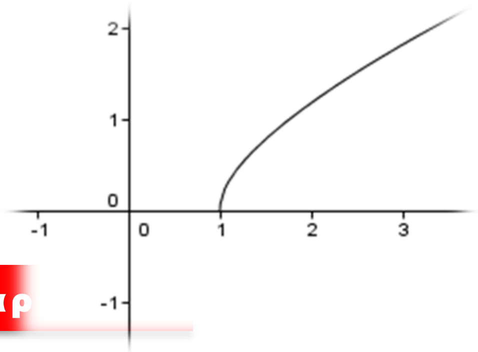
Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x\ln x} \text{ και } g(x) = \sqrt{\ln x}\,.$$

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

β. Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f.



γ. **i.** Να βρείτε τη μονοτονία της.

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$.

δ. Να σχεδιάσετε την ευθεία $y=1-x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x)=1-x$

Μονάδες $[4+5+(4+5)+7)]=25$

10. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **18865**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να προσδιορίσετε το είδος της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f.

γ. Να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

δ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $E(x)=\frac{1}{2}(x-1)\ln x$, με $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ μπορεί να περιγράψει το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου $A(1,0)$, $B(x,0)$ και $\Gamma(x,\ln x)$.

Μονάδες $(3+6+6+10)=25$

11. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **20857**

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-\alpha x^2+7x-\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x-3$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$ είναι $\upsilon=-16$, τότε:

α. Να υπολογισθούν οι τιμές των α,β.

Αν είναι $\alpha=5$, $\beta=3$,

β. να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

γ. να λυθεί η ανίσωση $P(x)<0$.

δ. Αν $P(\ln\kappa)<0$, τότε να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού κ.

Μονάδες $(6+7+6+6)=25$

12. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **21445**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\dfrac{4^x-1}{2^x+5}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\log 3-\log 7$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>\log 3-\log 7$.

Μονάδες (7+9+9)=25

13. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **21446**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-2\right)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+x=3\ln 2$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)+x\geq 3\ln 2$.

Μονάδες (7+9+9)=25

14. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **21447**

Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο

$$P(t)=200\cdot e^{ct},$$

Όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος ($t=0$). Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328.

(Δίνεται ότι $\ln(1{,}64)\cong 0{,}5$ και $\ln 10\cong 2{,}3$)

α. Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.

β. Να αποδείξετε ότι $c=\dfrac{1}{2}$.

γ. Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

Μονάδες (7+9+9)=25

15. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **21470**

Μια ποσότητα Q ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου *t* (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t)=Q_0\cdot e^{ct}$. Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας και μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό.

α. Να δείξετε ότι $Q(t)=Q_0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$.

β. Να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε (για $t=0$).

γ. Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

Μονάδες (10+6+9)=25

16. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **21474**

Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 λίτρα ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

α. Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της $1^{ης}$ και στο τέλος της $2^{ης}$ εβδομάδας.

β. Ο όγκος V του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση $V(t)=V_0\cdot\alpha^t$, όπου V_0 και α σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς V_0 και α.

γ. Αν ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη σχέση $V(t)=10\cdot(0{,}85)^t$, να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής. (Δίνεται ότι: $\log(0{,}5)\simeq-0{,}3$ και $\log(0{,}85)\simeq-0{,}07$).

Μονάδες (8+8+9)=25

17. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **21674**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\sqrt{10^x-2}$.

α. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=(\log 2,+\infty)$.

β. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\log\sqrt{\dfrac{10^x}{3}}, x\in\mathbb{R}$.

i. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{\dfrac{10^x}{3}}=\sqrt{10^x-2}$ με $x\in(\log 2,+\infty)$.

ii. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων, των συναρτήσεων f και g.

Μονάδες [7+(9+9)]=25

18. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **21678**

Ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού λέμε τον χρόνο που απαιτείται για να διασπασθεί η μισή από την αρχική του ποσότητα, οπότε να απομείνει το 50% από αυτή.

Αν Q_o είναι η αρχική ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού, τότε η ποσότητα $Q(t)$ που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο $Q(t)=Q_o e^{ct}$, όπου c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το υλικό.

α. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος ημιζωής t' δίνεται από τον τύπο $t'=-\dfrac{\ln 2}{c}$.

Το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας -14 έχει χρόνο ημιζωής 5730 χρόνια.

β. Να αποδείξετε ότι η ποσότητα του άνθρακα -14 που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο $Q(t)=Q_o e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$

γ. Κατά την εξέταση ενός οστού που ανακάλυψαν οι παλαιοντολόγοι διαπιστώθηκε ότι έχει απομείνει σ' αυτό το 25% της ποσότητας του άνθρακας -14 που περιείχε αρχικά. Να βρείτε την ηλικία του οστού.

Μονάδες (8+8+9)=25

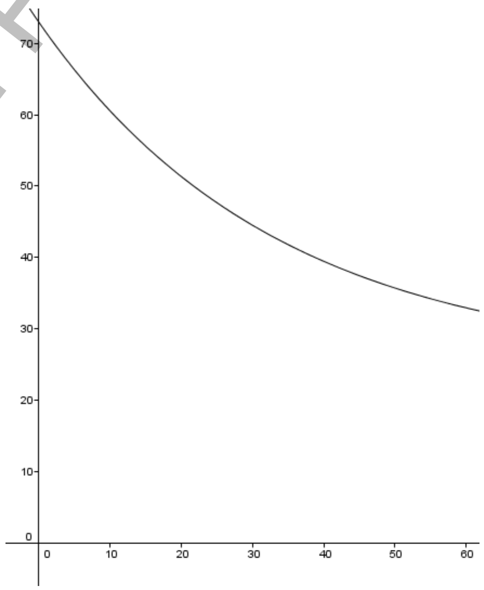
19. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **21679**

Ένα ζεστό ρόφημα τη στιγμή που σερβίρεται, σε θερμοκρασία του περιβάλλοντος που είναι $T_\alpha = 25^\circ C$, έχει θερμοκρασία $T_o = 73^\circ C$. Η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από t λεπτά δίνεται, σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, από την συνάρτηση $T(t) = T_\alpha + ce^{-\kappa t}$ όπου όπου c , κ κατάλληλες σταθερές και $t \in [0, 60]$. Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από 10 λεπτά είναι $61^\circ C$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $c = 48$.

β. Να βρείτε την σταθερά κ. (Θεωρήστε $\ln 0,75 = -0,3$).

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t)$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



γ. Να βρείτε την θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμα. (Θεωρήστε $e^{-1,2} = 0,3$).

δ. Αν θεωρήσουμε ότι ο καταναλωτής έχει την αίσθηση του ζεστού όταν η θερμοκρασία του ροφήματος είναι μεγαλύτερη από $40^\circ C$, να αιτιολογήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση και το αποτέλεσμα του ερωτήματος γ), γιατί πριν περάσουν 40 λεπτά ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό.

Μονάδες (6+8+5+6)=25

20. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **21680**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x,\ x > 0$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 2$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(4) = \dfrac{1}{3} f(8)$.

β. Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι από τον άξονα $x'x$ και πάνω.

γ. Να βρείτε:

i. Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία.

ii. Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία.

Μονάδες [8+8+(4+5)]=25

21. ΘΕΜΑ Δ 5.3 21950

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^{x}-12}$.

α. Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\dfrac{\omega^3-8}{\omega^2+4\omega-12}>0$ είναι το $(-6,2)\cup(2,+\infty)$.

β. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}-\{\ln 2\}$.

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα xx΄.

Μονάδες (8+8+9)=25

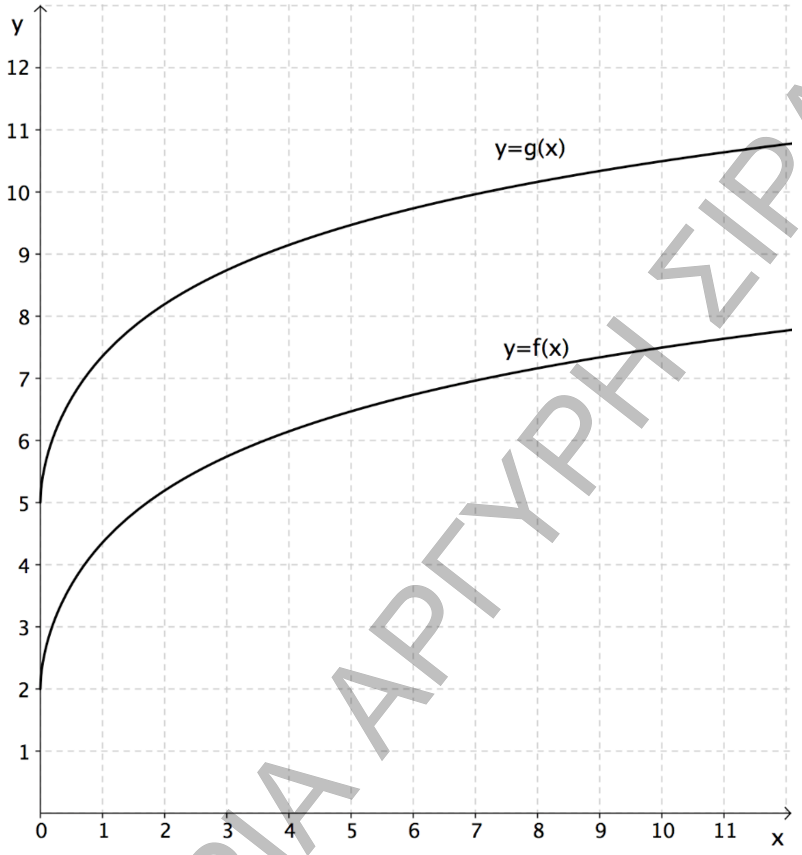
22. ΘΕΜΑ Δ 5.3 25463

Ένας ερευνητής πραγματοποίησε μια στατιστική μελέτη για την μεταβολή του βάρους των Ελληνοπαίδων. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, όπου παριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g. Στον οριζόντιο άξονα x΄x καταγράφεται η ηλικία σε μήνες και στον κατακόρυφο άξονα y΄y το βάρος σε κιλά. Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει τις ελάχιστες φυσιολογικές τιμές και η γραφική παράσταση της g τις μέγιστες φυσιολογικές τιμές που μπορεί να έχει ένα παιδί κατά την διάρκεια του πρώτου έτους της ηλικίας του.

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f έχει τύπο

$$f(x)=\alpha\sqrt{\ln(x+1)}+\ln(x+1)+\beta,\ x\geq 0,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

και ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B\left(e^2-1,\ 2\sqrt{2}+4\right)$ ενώ για την γραφική παράσταση της g, γνωρίζουμε ότι προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.



α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=2$. Στην συνέχεια να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g.

β. Να προσδιορίσετε γραφικά (κατά προσέγγιση) την ηλικία κατά την οποία η ελάχιστη φυσιολογική τιμή του βάρους ενός παιδιού είναι τα 5 κιλά. Στη συνέχεια , με αλγεβρικό τρόπο, να βρείτε με ακρίβεια την ηλικία.

γ. Το βάρος ενός παιδιού στο τέλος του 12^{o} μήνα βρέθηκε 13 κιλά. Πως θα το χαρακτηρίζατε:

υπέρβαρο, φυσιολογικό ή λιποβαρές;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με αλγεβρικό τρόπο.

Μονάδες (10+8+7)=25)

23. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **37476**

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2-x+2$. Να αποδείξετε ότι

α. το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$

β. $P(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(1,2)$.

γ. $1<\log 20<2$.

δ. $P(\log 20)<0$.

Μονάδες $(6+7+6+6)=25$

Κεφάλαιο 5ο ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 43

§5.3 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. **α.** Να λύσετε την εξίσωση: $\ln\left(x^2-8\right)=\ln 7x$

β. Να λύσετε την ανίσωση: $\ln\left(x^2-8\right)\geq\ln 7x$

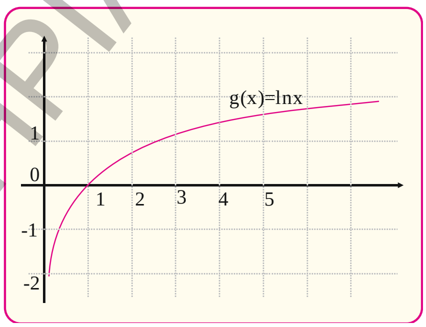
Μονάδες (13+12)=25

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-3)$, $x>3$

α. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\ln x$

β. Σε ποιο σημείο τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα x’x; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Ποια είναι η ασύμπτωτη της C_f;



Μονάδες (8+8+9)=25

3. **α.** Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση

$$A=\ln x+\ln(x+6)$$

β. Να λύσετε την εξίσωση $\ln x+\ln(x+6)=\frac{1}{2}\ln(49)$

Μονάδες (10+15)=25

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^{2x}-e\right)-1$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

Μονάδες (12+13)=25

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(3-\sqrt{x+1}\right)$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

Μονάδες (13+12)=25

6. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+6$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β ώστε το πολυώνυμο P(x) να έχει παράγοντα το $x+1$ και η αριθμητική τιμή του για x=2 να είναι ίση με 12.

β. Για $\alpha=-2$ και β=3

i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το $x=2$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\le -x+14$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $P(\ln x)\le -\ln x+14$.

[7+(5+7+6)]=25

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)$ και $g(x)=\ln x^2$.

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β. Να λύσετε τις ανισώσεις $f(x)>0$ και $g(x)<0$.

γ. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 3)$ και $g\left(\frac{2}{e}\right)$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(2x)-f(x)=g\left(\sqrt{e}-1\right)$

Μονάδες (4+8+6+7)=25

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(x-2)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log\sqrt{6}}$

γ. Να λύσετε την εξίσωση $4\cdot 4^{f(x)}-9\cdot 2^{f(x)}+100^{\log\sqrt{6}}-4=0$

Μονάδες (5+7+13)=25

9. Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο $P(t)=200\cdot e^{ct}$, όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος. Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328.

(Δίνεται ότι: $\log(1,64)\cong 0,5$ και $\log 10\cong 2,3$)

α. Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.

β. Να αποδείξετε ότι $c=\frac{1}{2}$

γ. Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

Μονάδες (7+9+9)=25

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-2\right)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+x=3\ln 2$

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)+x\geq 3\ln 2$

Μονάδες (7+9+9)=25

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\frac{4^x-1}{2^x+5}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\log 3-\log 7$

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>\log 3-\log 7$

Μονάδες (7+9+9)=25

12. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=5x^3-8x^2+\alpha$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x-2$ να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$.

β. Για $\alpha=-8$ να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{(\ln^2 x+1)^3}{(\ln^2 x+1)^2+1}=\dfrac{8}{5}$

Μονάδες (8+9+8)=25

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e\cdot x+1)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(2x)<f(x)$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\sqrt{3}\cdot \eta\mu x\right)=f(\sigma\upsilon\nu x)$ στο διάστημα $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες (5+7+13)=25

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$

γ. Αν $x>6$ να λύσετε την ανίσωση $f(x)>1$

Μονάδες (9+8+8)=25

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-1)$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(e^x\right)+f\left(e^x-2\right)=3\ln 2$

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f\left(e^x\right)+f\left(e^x-2\right)\le 3\ln 2$

Μονάδες (5+10+10)=25

16. Να λύσετε την εξίσωση: $2\log x=\log\left(x+\dfrac{11}{10}\right)+1$

17. Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{1}{2}\log(x+2)+\log\sqrt{x-3}=1+\log\sqrt{3}$

18. Να λύσετε την εξίσωση: $\log(4x-1)=2\log 2+\log(x^2-1)$

19. Να λύσετε την εξίσωση: $\ln x+\ln(1+x)+\ln(x+2)=\ln 24$

20. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\log(x^2+1)+2\log(\sqrt{5}x)=2$ **ii.** $\log\left[\log(2x^2+x-11)\right]=0$

21. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\ln|x+1|=0$ **ii.** $\ln|x+1|=\ln 2$

22. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\ln(x^2-2e^2)=1+\ln(-x)$ **ii.** $\ln(x-2e)+\ln(x+e)=2\ln 2+2$

23. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $x^{1+\log x}=100$ **ii.** $x^{\log x}=x^2\sqrt{x}$

24. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $(\ln x)^3-2(\ln x)^2-5\ln x+6=0$ **ii.** $2(\log x)^2+\log x^2=4$

25. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού x οι αριθμοί:

$$\log\frac{1}{x+1},\ \log\sqrt{5x},\ 2 \text{ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.}$$

26. Να βρείτε τον πραγματικό x ώστε οι αριθμοί:

$$\log 2^{x-2},\ \log\sqrt{5^x+2^{x-3}},\ \log 63$$

να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

27. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\log(3^x+2)=2x\log 3$ **ii.** $\log(1+2^x)-\log 2=1-x\log 2$

28. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $x+\log(1+2^x)=x\log 5+\log 6$ **ii.** $\log 2+\log(4^{x-2}+9)=1+\log(2^{x-2}+1)$

29. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\log(2^x+2\cdot 3^x)+\log 81=x\log 3+\log 178$ **ii.** $\log\sqrt{x}+\sqrt{\log x}=\log x$

30. Να λύσετε την εξίσωση: $(\log x^3)^2-2\log x^2-5=0$

31. Να βρείτε τον πραγματικό α ώστε η εξίσωση:

$$(\log\alpha-2)x^2-(\log\alpha+3)x+9=0 \text{ να έχει δύο ρίζες ίσες.}$$

32. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $2^{\log x}+2^{5-\log x}=12$ **ii.** $2^{\log x}+3\cdot 4^{\log x}=52$

33. Να λύσετε την εξίσωση: $5^{\log x}-3^{\log x-1}=3^{\log x+1}-5^{\log x-1}$

34. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\log(\log x)=1$ **ii.** $\ln(\log(\ln x))=0$

35. Να λύσετε την ανίσωση: $\log(x+1)+\log(x+2)\geq \log 3+\log\left(\frac{3}{2}x+1\right)$

36. Να λύσετε την ανίσωση: $\ln\left[(2x-1)(x+3)\right]\geq 2\ln 3$

37. Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(x+e)+\ln(x-e)\leq 2+\ln 3$

38. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ \log x+\log y=\log 6 \end{cases}$ **ii.** $\begin{cases} 5^x-2^y=1 \\ x\log 5+y\log 2=\log 20 \end{cases}$

39. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} \log x+\log y=1 \\ 3^{x-2}\cdot 9^{y-4}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$ **ii.** $\begin{cases} \ln(xy)=4 \\ \ln x+\ln y=-12 \end{cases}$

40. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} x+y=2 \\ \ln x-\ln y=\ln 3 \end{cases}$ **ii.** $\begin{cases} x+y=15 \\ \ln x+\ln y=\ln 36 \end{cases}$

41. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} \ln x+\ln y=0 \\ e^x\cdot e^{x+y}=e^3 \end{cases}$ **ii.** $\begin{cases} \ln x-\ln 4=\ln 3-\ln y \\ e^x=e^{y+1} \end{cases}$

42. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$ είναι περιττή.

43. Τρεις διαδοχικοί αριθμοί Γ.Π. έχουν άθροισμα 21,05 και το άθροισμα των λογαρίθμων τους με βάση το 10 είναι 0. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

Κεφάλαιο 5ο ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 43

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

1. **α.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $3^{2x+1}=1$ **ii.** $\log x^{2005}=2005$ **iii.** $\log(1+x)=\log(1-x)$

β. Να λυθεί η ανίσωση: $\left(\frac{1}{2}\right)^x<16$.

Μονάδες (18+7)=25

2. Έστω $f(x)=\left(\frac{\alpha-3}{2}\right)^x$

α. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες ορίζεται η f.

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(2x)-5f(x)-4=0$ για α=7.

γ. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες (5+10+10)=25

3. **α.** Να λυθεί η εξίσωση $25^x-4\cdot5^x-5=0$

β. Να λυθεί η ανίσωση $\frac{1}{3^x}<9$

Μονάδες (13+12)=25

4. **α.** Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log\sqrt{3}}$

β. Να λύσετε την εξίσωση: $3^{2\log x}-2\cdot3^{\log x}-100^{\log\sqrt{3}}=0$

Μονάδες (10+15)=25

5. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\geq 0$.

Μονάδες (12+13)=25

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$.

γ. Αν $g(x)=1$ και $x>6$, να λύσετε την ανίσωση: $f(x)>g(x)$

Μονάδες (10+10+5)=25

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(2x^2-1)+2\alpha$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο A(1,2).

γ. Για α=1 να λυθεί η εξίσωση $f(x)=2(1+\log 7)$.

Μονάδες (8+5+12)=25

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha(\ln x)^4+8(\ln x)^2\cdot\ln(e^2x)$

α. Αν f(e)=25 να βρεθεί ο αριθμός α.

β. Για α=1 να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$.

Μονάδες (13+12)=25

9. Αν οι αριθμοί $\log 2$, $\log[\sqrt{2}(2^x-1)]$, $\log(2^x+5)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να βρείτε το x, $x\in R$.

Μονάδες 25

10. Δίνεται η εκθετική συνάρτηση

$$f(x)=(1+\alpha^2)^x,\ x\in R,\ \alpha\in\mathbb{R}^*.$$

α. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Για α=3 να λύσετε:

i. την εξίσωση $100^x - 11f(x) + 10 = 0$

ii. την ανίσωση $f(\log x) \leq 10$

γ. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η γραφική παράσταση της f να είναι συμμετρική με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g(x)=log(x), ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.

Μονάδες [4+(7+7)+7]=25

11. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \ln\left(e^x - 3 + \frac{2}{e^x}\right)$$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να βρεθεί το x ώστε οι αριθμοί f(x), $\ln(2\sqrt{3})$, x να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Μονάδες (13+12)=25

12. Για ποιες τιμές του $x \in R$ οι αριθμοί:

$$\log 178,\ \log\sqrt{81(2^x + 2\cdot 3^x)},\ x\cdot\log 3$$

με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου;

Μονάδες 25

13. α. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\log 2 + \log 3}{\log 3{,}6 + 1} = \dfrac{1}{2}$

β. Να λυθεί η εξίσωση: $2(\log 2 - 1) + \log(5^x + 1) = \log(5^{1-x} + 5)$

Μονάδες (8+17)=25

14. α. Να λύσετε την εξίσωση: $14(5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}) = 155(2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2})$

β. Να δειχτεί ότι: $\ln\dfrac{e}{x^2} + \ln^2 x = (\ln x - 1)^2$ για κάθε x>0

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $3\log x^2 - \log^2(-x) = 9$

Μονάδες (8+9+8)=25

15. α. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu x = 1 - \sigma\upsilon\nu 2x - \eta\mu x$

β. Να λύσετε την εξίσωση: $8^x - 4^x = 2^{x+1}$

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $\log(-10x)\log(-x) = 6$

Μονάδες (8+9+8)=25

16. Αν οι $\log 4,\ \log\sqrt{2^{2x+1}},\ x\log 2$ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. τότε:

α. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

β. Για x=1 βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

γ. Αν $\log 4 = \alpha_1$ βρείτε τον α_{11}.

Μονάδες (12+7+6+9

17. α. Να λυθεί η εξίσωση $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\log 4}{\log 8}$

β. Να λυθεί η εξίσωση: $3^{\eta\mu 2x} = 1$ στο $[0,\pi]$.

Μονάδες (13+12)=25

18. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{1-\ln x}$$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$

γ. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\sqrt{e}),\ f(e^2)$

Μονάδες (5+10+10)=25

19. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\log 3 - \log(1+3^{x-1}) + \log(3^x - 3)$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β. Να δείξετε ότι $f(x) = \log\frac{3^{2x} - 3^{x+1}}{3+3^x}$

γ. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) \le \log 9 - \log 2$

Μονάδες (5+10+10)=25

20. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\ln(2^x-8)$$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης C_f

β. Να βρεθούν τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες (αν υπάρχουν)

γ. Πότε η γραφική παράσταση C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x

Μονάδες (5+10+10)=25

21. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\ln(e^x-1) \quad \text{και} \quad g(x)=\ln\sqrt{e^{2x}-3}$$

α. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των f και g καθώς και η τομή αυτών (το διάστημα στο οποίο ορίζονται και οι δύο)

β. Να λυθεί η εξίσωση: f(x)=2g(x).

γ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

Μονάδες (9+8+8)=25

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(3^{\alpha+1})^x$, $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq-1$.

α. Αν το σημείο Μ(1,3) ανήκει στη γραφική παράσταση της f, να βρείτε το α.

β. Για α=0 να λύσετε τις εξισώσεις:

i. f(x)+f(2x)=2

ii. f(2ημx)=3

Μονάδες [8+(8+9)]=25

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης

β. Να λύσετε την εξίσωση f(x)=1

γ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

Μονάδες (8+8+9)=25

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2^{1-x^2}$ με x πραγματικό αριθμό.

α. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x για κάθε τιμή του x.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1$

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<1/32$

Μονάδες (5+10+10)=25

25. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$g(x)=\eta\mu(\ln x) \quad \text{και} \quad h(x)=-\sigma\upsilon\nu(\ln x-3\pi)$$

α. Να δείξετε ότι: $g(e^{\pi/2})+g(e^{\pi})=2g(e^{\pi/6})$

β. Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα x΄x.

γ. Να βρείτε το κοινό σημείο (ή τα κοινά σημεία) των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων g και h στο διάστημα $[1,e^{x})$.

Μονάδες (8+8+9)=25

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-1)$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της παραπάνω συνάρτησης.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>0$

γ. Να αποδείξετε ότι $f(\ln 5)=2f(\ln 3)$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(2x)=f(x)+1$.

Μονάδες (5+7+5+8)=25

27. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\log(10^{x-1}-1)$

α. Βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{f(x)}{2}=\log 3$

δ. Να λύσετε την ανισότητα $10^{f(x)}<9$

Μονάδες (4+8+6+7)=25

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2^x$ με $x\in R$

α. Να λυθεί η ανίσωση: $f(3x)+f(x)\geq 2$

β. Να δείξετε ότι: $\dfrac{\log(f(0))+\log(f(2))-\log(f(3))}{\log(f(1))}=-1$

γ. Να βρεθεί η τιμή του x>0 για την οποία ισχύει:

$$f(0)+f(1)+f(2)+......+f(99)=f(50\ln x)-1$$

Μονάδες (10+7+8)=25

29. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=2\ln(x-1)-1$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης f(x)=0 και να κάνετε τον πίνακα προσήμου της f.

γ. Να βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα x΄x.

Μονάδες 7+10+8=25

30. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\kappa+\log(x^2-3)$ $\kappa\in\mathbb{R}$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Να υπολογίσετε την τιμή του κ ώστε f(2)=log100

γ. Για κ=2

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την $y=-\log\dfrac{1}{1000}$

ii. Να λυθεί η f(x)>2

Μονάδες [6+5+(7+7)]=25

31. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln(2e^x-1)+1-\log^2\alpha$ με α>1, για την οποία είναι f(0)=0

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να δείξετε ότι α=10.

γ. Για α=10 να λύσετε

i. την εξίσωση $e^{f(x)}=3e^{-x}$

ii. την ανίσωση x+f(x)≥0

Μονάδες [6+6+(7+6)]=25

32. Δίνονται οι εξισώσεις:

$$3^{3u}-19\cdot 9^{u}+11\cdot 3^{u+2}-81=0 \quad (1) \text{ και}$$

$$3^{3\text{συνx}}-19\cdot 9^{\text{συνx}}+11\cdot 3^{\text{συνx}+2}-81=0 \quad (2)$$

α. Να λύσετε την εξίσωση (1).

β. Να λύσετε στο διάστημα [0,2π] την εξίσωση (2).

Μονάδες (15+10)=25

33. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\ln(2-e^{x})$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β. Να λυθεί η εξίσωση f(x)=2x

γ. Να λυθεί η ανίσωση: $e^{f(x)}>2-e^{2x}$

Μονάδες (7+10+8)=25

34. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\log(2^{2x}-8) \quad \text{και} \quad g(x)=\log(4+2^{x}).$$

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g

β. Να λύσετε την ανίσωση: f(x)>g(x)

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $2f\left(\frac{x}{2}\right)=g(x)$

Μονάδες (6+10+9)=25

35. Θεωρούμε την εξίσωση

$$2^{-3x}=4^{x^2-1} \quad (1)$$

α. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση (1).

β. Αν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι οι αριθμοί $x_1=\frac{1}{2}$ και $x_2=-2$,

τότε να λύσετε την εξίσωση: $2^{-3\text{ημx}}=4^{\text{ημ}^2x-1}$

Μονάδες (13+12)=25

36. Δίνονται οι εξισώσεις:

$$8^x - 24\cdot 4^{x-1} + 9\cdot 2^x - 4 = 0 \qquad (1)$$

$$8^{συν2x} - 24\cdot 4^{συν2x-1} + 9\cdot 2^{συν2x} - 4 = 0 \qquad (2)$$

α. Να λύσετε την εξίσωση (1).

β. Να λύσετε την εξίσωση (2) στο διάστημα [6π,7π].

Μονάδες (12+13)=25

37. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln(e^{2x} - 1) \ \text{ και } \ g(x) = \sqrt{f(x)}$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $g^2(x) = \ln(3e^x + 3)$.

Μονάδες (5+10+10)=25

38. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(2^x - 1)$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να λύσετε την εξίσωση: $2^{2x} - 7\cdot 2^x - 8 = 0$

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $2f(x) \le \ln(5\cdot 2^x + 9)$

Μονάδες (7+10+8)=25

39. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(2^x - 8).$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να αποδείξετε ότι f(4)=3ln2.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - f(4) = \ln 3$.

Μονάδες (8+5+12)=25

40. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - 3x + 4^{\log\sqrt{e}} \qquad \text{όπου } θ>0 \text{ παράμετρος.}$$

α. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης της f(x) με το x+1 ισούται με 4, να δείξετε ότι θ=10.

β. Για θ=10 δείξτε ότι $f(x)=x^3-3x+2$

γ. Να βρείτε κάθε x ώστε η γραφική παράσταση της f να μη βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

Μονάδες (10+5+10)=25

41. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\log(4^{x-1}+1)-\log(2^{x-2}-1)$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=1-\log 2$

γ. Να δείξετε ότι f(x)>0 για κάθε x>2.

Μονάδες (8+8+9)=25

42. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\ln\frac{3-x}{3+x}$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-\ln 2$

γ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f, βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(3e^x)=f(1)$.

Μονάδες (4+7+7+7)=25

43. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=e^{3x}+e^x-2 \quad \text{με} \quad x\in\mathbb{R}$$

α. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει f(x)=0

β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα x΄x

γ. Να δείξετε ότι: $f(-1)<0$.

Μονάδες (10+10+5)=25

Κεφάλαιο 5ο ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 15

ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε.

1. Δίνεται η συνάρτηση f με f(0)=f(1)=0 και τύπο

$$f(x)=\log(1+e^x)-\alpha-\beta x,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

α. N’ αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

β. Να βρείτε τις τιμές των α, β.

γ. N’ αποδείξετε ότι: $f(x)=\log\left[\dfrac{1+e^x}{(1+e)^x}\cdot 2^{x-1}\right]$

δ. Να λύσετε την ανίσωση: $\log\left[(1+e^x)\cdot 2^{x-1}\right]-f(x)\le x$

Μονάδες (5+7+6+7)=25

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=5^{\log x}$, $g(x)=x^{\log 5}$, $x\in(0,+\infty)$

α. Να αποδείξετε ότι:

1. f(x)=g(x) **2.** f(x·y)=f(x)·f(y)

3. $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$ **4.** $f(x^\nu)=[f(x)]^\nu\quad \nu\in N$

β. Να λύσετε την εξίσωση: $f^2(x)=5+4g(x)$

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $f(3x)>f(x^2-4)$

Μονάδες (8+8+9)=25

3. Έστω x, y θετικοί αριθμοί με x≠1.

α. Δείξτε ότι ισχύει: lny·logx=logy·lnx

β. Αν ισχύει η ισότητα $\left(\dfrac{\ln y}{\ln x}\right)^2-4\dfrac{\log y}{\log x}+4=0$ βρείτε ποια σχέση συνδέει τους αριθμούς x, y.

γ. Αν είναι $y=x^2$ και το y είναι λύση της εξίσωσης $e^{2y^2-3y+1}=(2004)^0$, να βρείτε τους αριθμούς x, y.

δ. Αν για το πολυώνυμο $P(x)=x^2-4x+4$ ισχύει $P(\ln x)\le 1$, να δείξετε ότι: $y\in[e^2,e^6]$.

Μονάδες (5+8+5+7)=25

4. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\ln(2e^{2x+1}+e^{x+1})$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και να δειχθεί ότι το γράφημά της τέμνει τον yy΄ στο σημείο Α(0, 1+ln3).

β. Να λυθεί η εξίσωση f(x)=1.

γ. Να βρεθούν τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία y=1.

Μονάδες (7+10+8)=25

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x$, $x>0$.

α. Να λύσετε την εξίσωση: $f(2-\eta\mu x)-f(\sigma\upsilon\nu 2x)=f(3)$ αν $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$

β. Αν α>0 και $f(\alpha)+f(\alpha^2)+\ldots+f(\alpha^{100})=5050$ να αποδείξετε ότι α=e.

γ. Έστω α, β, γ>0.

Να αποδείξετε ότι: αν οι f(α), f(β), f(γ) είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

δ. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\sqrt{f(x)}+f(x)-12>0$.

Μονάδες 96+6+5+8)=25

6. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-2)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να λύσετε την εξίσωση: f(2x)=ln7+f(x)

γ. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί f(α), f(β), f(γ) είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν: $(e^{\beta}-2^2)=(e^{\alpha}-2)(e^{\gamma}-2)$

δ. Να αποδείξετε ότι: $e^{f(1)}+e^{f(2)}+\ldots+e^{f(100)}=\dfrac{e^{101}-201e+200}{e-1}$

Μονάδες (3+7+7+8)=25

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+\alpha-\beta)$, όπου $\alpha,\beta\in R$.

α. Αν $\ln 6+f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\ln 5=\ln\pi$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι: $\alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu(e^{f(x)})\cdot\sigma\upsilon\nu(e^{f(x)})=\frac{1}{2}$.

β. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α(1,0), τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha-\beta=0$

ii. Να λύσετε την ανίσωση: $16\cdot 2^{f(x)}<2^{\ln(2e^4)}$.

Μονάδες [(8+5)+(4+8)]=25

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2\ln x+1}{2\ln x-1}$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα x΄x.

β. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$ για κάθε x>0 και $x\neq e^{\frac{1}{2}}$, $x\neq e^{-\frac{1}{2}}$.

γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3$ για κάθε x>0 και $x\neq e^{\frac{1}{2}}$, $x\neq e^{-\frac{1}{2}}$.

δ. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\ln f(e^{1000})+\ln f(e^{1001})+\ln f(e^{1002})+\ln f(e^{1003})+\ln f(e^{1004})$$

Μονάδες (6+6+7+6)=25

9. **α.** Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=\frac{\ln(x+1)}{\ln x}$, για x>1

i. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης L=φ(2)·φ(3)·φ(4)·…·φ(63)+2004

ii. Να λυθεί η ανίσωση $\varphi(x)>\varphi(x^2)$

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln[e^{2x}-(e+1)e^{x}+e]$.

i. Για ποιες τιμές του x, με x>0 ορίζεται η συνάρτηση f.

ii. Να λυθεί η εξίσωση $f(\ln x)=\ln(x-1)$ για κάθε x>e.

Μονάδες 96+6+7+7)=25

10. α. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=συνx.

i. Να λυθεί η εξίσωση f(2x)+3f(x)+2=0

ii. Αν $x=\dfrac{\pi}{3}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$L=[1+f(x)+f^{2}(x)+...+f^{10}(x)]2^{10}-38$$

β. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=(1-2\alpha)^{x},\ x\in\mathbb{R}$

i. Για ποιες πραγματικές τιμές του α ορίζεται στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση g και είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

ii. Για $\alpha=-1$ να λυθεί η εξίσωση

$$g(\eta\mu^{2}x)+g(\sigma\upsilon\nu^{2}x)2\sqrt{3}$$

Μονάδες [(6+7)+(6+6)]=25

11. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right)$$

α. Να ορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$$

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x)-f(-x)<-2\ln 3$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση: $e^{2f(x)}+3=4e^{f(x)}$.

Μονάδες (5+6+7+7)=25

12. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$g(x)=\frac{\ln x}{\ln 2}\ \text{και}\ f(x)=\frac{1}{\ln(2^{x}-3)}.$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g και να συγκρίνετε τους αριθμούς g(3), 2.

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

γ. Αν κ>4 να λύσετε την ανίσωση $f(\log_2 \kappa) < \frac{1}{2}$.

δ. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης $(-x^3 - 7x^2 + 6):(x+1)$ είναι το πολυώνυμο:

$$\upsilon(x) = (f(\beta)-1)\cdot x + g(\alpha) + g(\alpha^2) + g(\alpha^3) + \ldots + g(\alpha^{20}) - \frac{210}{\ln 2}$$

να δείξετε ότι $\alpha + 3 = e^{\beta \cdot \ln 2}$, όπου α ανήκει στο πεδίο ορισμού της g και β ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

Μονάδες (6+6+6+7)=25

13. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{[\ln(e^x - e^2)]^2 - 3}{\ln(e^x - e^2) - 2}$$

α. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\ln(2e^2)$, $\ln(e^3 + e^2)$, 2 και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{y^2 - 3}{y - 2} \geq 6$

γ. Έστω $x_0 = \ln(e^3 + e^2)$:

i. Να αποδείξετε ότι $f(x_0) = 6$

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in (\ln(2e^2), +\infty)$. (μον. 5)

Είναι το $f(x_0)$ ελάχιστο της συνάρτησης; (μονάδες 3)

Μονάδες [7+5+(5+8)]=25

14. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln\left(\frac{4 - 2^x}{4 \cdot 2^x - 1}\right).$$

α. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $A = (-2, 2)$.

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

γ. Να βρείτε (αν υπάρχει) την τετμημένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της f με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$h(x) = x\ln 2 - \ln 3.$$

δ. Να λύσετε την ανίσωση $-\ln^2(e^2)\cdot f(x) > 4\cdot f(-x) + \ln^2|x| - \ln x^2 - 3$.

Μονάδες (6+5+6+8)=25

15. Δίνεται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 2^x - (\frac{1}{2})^x, \text{ με } x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$h(x) = \ln\frac{3}{x} + \ln(1-\frac{1}{x+1}) + \ln(1-\frac{1}{x+2}) + \ln(1+\frac{x}{2}), \text{ με } x > 0.$$

α. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln(f(\ln x))$

α. Να υπολογίσετε το f(lnx).

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \ln(f(\ln x))$

β. Να δείξετε ότι $h(x) = \ln\frac{3}{2}$

γ. Να λύσετε την εξίσωση $g(x) = h(x)$ $x > 1$

δ. Να βρείτε τις τιμές του $x \in R$, ώστε να υπάρχει $\theta \in R$ και να ισχύει:

$$\eta\mu\theta = \frac{f(1)\cdot\ln^2 x - 2f(2)\cdot\ln x}{6f(1)}.$$

Μονάδες [(3+4)+5+7+6]=25

Κεφάλαιο 5ο

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

7

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ 2000-2004

1. Έστω Q(t) η τιμή ενός προϊόντος (σε εκατοντάδες χιλιάδες δραχμές), t έτη μετά την κυκλοφορία του προϊόντος στην αγορά. Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 300.000 δραχμές, ενώ μετά από 6 μήνες η τιμή του έχει μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει $\ln Q(t) = \alpha t + \beta \quad t \geq 0$ όπου $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, τότε:

α. να δείξετε ότι $Q(t) = 3 \cdot 4^{-t},\ t \geq 0$

β. να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος θα γίνει ίση με $\frac{1}{16}$ της αρχικής του τιμής.

γ. να βρείτε τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το $\frac{1}{9}$ της αρχικής του τιμής.

2001 Μονάδες (10+8+7)=25

2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}\right)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f(x).

β. Να λύσετε την εξίσωση: f(x)=2ln2.

γ. Να λύσετε την ανίσωση: f(x)>0.

2002 Μονάδες (5+10+10)=25

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$ και $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f(x) και g(x).

β. Να λύσετε την εξίσωση f(x)=g(x)

γ. Να λύσετε την ανίσωση f(x)>2g(x).

2003 Μονάδες (6+10+9)=25

4. **α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x)=\sqrt{-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}+3\left(\frac{1}{5}\right)^{x}-1}$$

β. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=5^x$.

Να λύσετε την εξίσωση:

$$g(x)+g(x+1)+g(x+2)+...+g(x+49)=\frac{125(5^{50}-1}{4}$$

2004 Μονάδες (13+12)=25

5. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\alpha(\log x)^4+8(\log x)^2\cdot\log(100x),\ x>0 \text{ όπου } \alpha\in\mathbb{R}$$

α. Αν f(10)=25, να δείξετε ότι α=1.

β. Για την τιμή α=1 να:

i. δείξετε ότι η f(x) γράφεται στη μορφή: $f(x)=(\log^2 x+4\log x)^2$

ii. λύσετε την εξίσωση: f(x)=0.

2001 Μονάδες (5+10+10)=25

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{\alpha-1}{5}\right)^x$.

α. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in R$, για τις οποίες η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

β. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in R$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Εάν α=11, να λύσετε την εξίσωση: $f(x)+f(x+1)=6$.

2003 Μονάδες (7+8+10)=25

7. **α.** Για ποιες τιμές του $x\in R$ οι αριθμοί

$$\log(3,2^x-1),\ \log(4,2^x-1),\ \log(8,2^x-2)$$

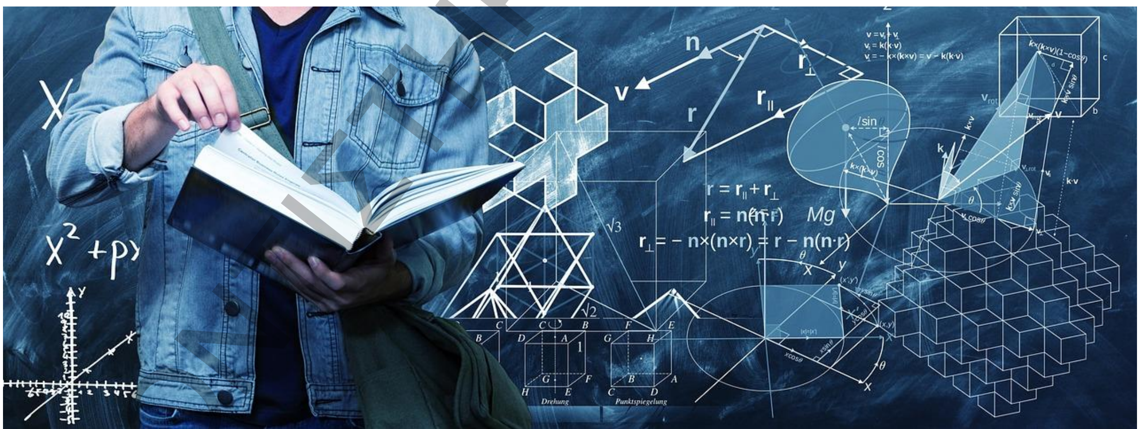
με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου;

β. Εάν ο τέταρτος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_4=-\log 2$ να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.

2004 Μονάδες (13+12)=25

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ 40

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ



ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2024

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ ΕΦΟΛΗΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ 2024

1

40

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν 0<α<1 και 0<x<1 τότε ισχύει $\log_\alpha x < 0$.

β. Για κάθε γωνία ω ισχύει πάντα ότι: $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)=\eta\mu\omega$.

γ. Για $0<\alpha\neq 1$, θ_1, $\theta_1-\theta_2>0$ και $0<\theta_2\neq 1$, ισχύει πάντα ότι:

$$\frac{\log_\alpha \theta_1}{\log_\alpha \theta_2}=\log_\alpha(\theta_1-\theta_2)$$

δ. Το $x-\rho$ είναι παράγοντας του P(x) αν και μόνο αν P(ρ)=0.

ε. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x)=e^x$ για κάποια $x\in\mathbb{R}$ είναι κάτω από τον άξονα x΄x.

Μονάδες 10

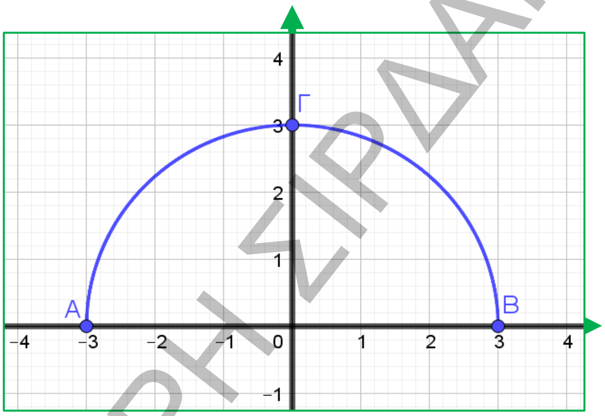
Α2. Αν $0<\alpha\neq 1$ και θ_1,θ_2 θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$$\log_\alpha(\theta_1\theta_2)=\log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_2$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 2.1 16129

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$.



α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

γ. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f και τις θέσεις των ακροτάτων.

Μονάδες (6+9+10)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+(\beta-1)x^2-3x-2\beta+6$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α. Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x) και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1 είναι ίσο με 2, τότε να δείξετε ότι α=2 και β=4.

β. Για τις τιμές των α και β του ερωτήματος (Γ1), να λύσετε την εξίσωση P(x)=0.

Μονάδες (15+10)=25

ΘΕΜΑ Δ 5.3 15021

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

γ. Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2)+f(\ln\frac{1}{2})$.

δ. Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta)+f(\eta\mu(\pi+\theta))=0$, για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$.

Μονάδες (5+6+7+7)=25

2

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. $e^x = \theta \Leftrightarrow \ln\theta = x$, θ>0

β. Η συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega x)$ με $\rho,\ \omega > 0$ έχει μέγιστο ρ, ελάχιστο $-\rho$ και περίοδο $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

γ. Αν $\theta \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \theta,\ \kappa \in \mathbb{Z}$.

Για τις παρακάτω ερωτήσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση, δίπλα στον αριθμό κάθε ερώτησης.

δ. Η συνάρτηση $f(x) = \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^x$ με α>1 είναι:

Α. γνησίως αύξουσα στο R **Β.** σταθερή στο R

Γ. γνησίως φθίνουσα στο R **Δ.** κανένα από τα προηγούμενα

ε. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ και g(x)=lnx είναι συμμετρικές ως προς:

Α. τον άξονα y΄y **Β.** την ευθεία x=y

Γ. τον άξονα x΄x **Δ.** την ευθεία y=2x

Μονάδες 5x2=10

Α2. Αν $0 < \alpha \neq 1$ και θ_1, θ_2 θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$$\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 3.4 15091

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x, \quad x \in R.$$

α. **i.** Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης.

ii. Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμής της.

β. Να υπολογίσετε τον αριθμό $f(2025\pi)$.

Μονάδες (7+10+8)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο P με $P(x)=x^3+\alpha x^2-\beta x-6$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ το οποίο έχει ρίζα το -1 και η διαίρεσή του με το $x-1$ δίνει υπόλοιπο -8.

α. Να αποδείξετε ότι α=2, β=5.

β. Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{P(x)}{x-2}\le 4x+7$.

Μονάδες (8+8+9)=25

ΘΕΜΑ Δ 5.3 15093

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\log\left(10^x-1\right).$$

α. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0,+\infty)$.

β. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ. Να αποδείξετε ότι $f(x)+x=\log\left(10^{2x}-10^x\right),\ x>0$.

δ, Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y=-x$.

Μονάδες (5+7+7+6)=25

3

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν για την συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A$ τότε η f είναι περιττή.

β. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_2) < f(x_1)$.

γ. Είναι $1 + εφ^2 x = \dfrac{1}{συν^2 x}$ για κάθε $x \neq κπ + \dfrac{π}{2}$ όπου $κ \in Z$

δ. Για το πολυώνυμο P(x) ισχύει P(ρ)=ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου.

ε. Η συνάρτηση $f(x) = α^x$, όπου 0<α<1 είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 10

Α2. Αν $0 < α \neq 1$ και $θ_1, θ_2$ θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$$\log_α(θ_1 θ_2) = \log_α θ_1 + \log_α θ_2$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 3.4 21235

Δίνεται η παράσταση $A = \dfrac{ημ(180^\circ - 20^\circ) \cdot συν(-3x)}{συν(90^\circ - 20^\circ)}$.

α. Να δείξετε ότι $A = συν3x$.

β. Να βρείτε την μέγιστη τιμή και την περίοδο της συνάρτησης $f(x) = συν3x$.

Μονάδες (13+12)=25

Θ Ε Μ Α Γ

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2-16x-12 \quad \text{με} \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

που έχει ρίζα το -1 και όταν διαιρεθεί με το $x-1$ αφήνει υπόλοιπο -24.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=4$ και $\beta=-1$

β. Για $\alpha=4$ και $\beta=-1$

i. Να κάνετε την διαίρεση $P(x):(x^2-x-2)$

ii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\le 0$

Μονάδες [9+(7+9)]=25

Θ Ε Μ Α Δ 5.3 15688

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\ln(e^x-1).$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα $x'x$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x-1$.

γ. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha>0$, τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y=x+\alpha$.

Μονάδες (9+8+8)=25

4

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Σε οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$ η αριθμητική τιμή $P(0)$ είναι ο σταθερός όρος του πολυωνύμου.

β. Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

γ. Αν για την εξίσωση με ακέραιους συντελεστές $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots.. + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ ο ακέραιος αριθμός ρ είναι διαιρέτης του α_0, τότε ο ρ είναι ρίζα της εξίσωσης.

δ. Για κάθε $1 \neq \alpha > 0$ και $\theta > 0$ ισχύει $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$

ε. Το σύνολο τιμών της f(x)=lnx είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

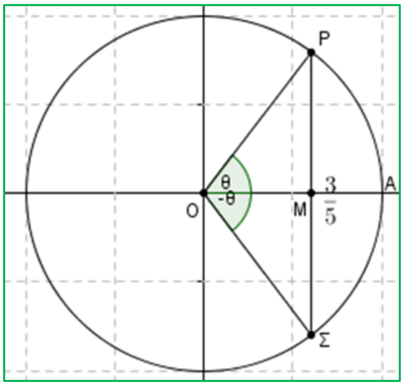
Μονάδες 5x2=10

Α2. Αν $0 < \alpha \neq 1$ και θ_1, θ_2 θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι: $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 3.2 15266

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος και οι γωνίες θ και $-\theta$.



α. Να αιτιολογήσετε γιατί $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3}{5}$.

β. Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

γ. Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας $-\theta$.

Μονάδες (8+9+8)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα ίσα πολυώνυμα :

$$P(x)=(2\alpha-1)x^3-(5+\beta)x^2+4x+\beta \quad \text{και}$$

$$Q(x)=x^3+(2\beta+4)x^2+(\alpha-\beta)x-3$$

α. Να δείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=-3$ και να βρείτε το $P(x)$

β. Να δείξετε ότι το $x=1$ είναι ρίζα του $P(x)$ και μάλιστα η μοναδική.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{P(x)}{x^2-1}\ge 0$

Μονάδες (7+10+8)=25

ΘΕΜΑ Δ 5.3 15690

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2,\ x\neq 0.$$

α. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)=\ln x$.

γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln x^2,\ x\neq 0$.

δ. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y=2$

Μονάδες (5+6+7+7)=25

5

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Αν $x \in (0, \pi)$ τότε $\etaμx > 0$

β. Ισχύει η ισοδυναμία: $εφx = εφθ \Leftrightarrow x = 2κπ + θ$ όπου $κ \in \mathbb{Z}$

γ. Αν $α > 0$ με $α \neq 1$ ισχύει η ισοδυναμία: $α^{x_1} = α^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

A2. Να αντιστοιχίσετε κάθε αριθμό της πρώτης στήλης του παρακάτω πίνακα με ένα γράμμα από την δεύτερη στήλη του, ώστε να είναι ίσα.

1. $ημ(π - x)$	**α.** $-εφx$
2. $ημ\left(\frac{π}{2} - x\right)$	**β.** $-συνx$
3. $συν(π - x)$	**γ.** $ημx$
4. $εφ(π - x)$	**δ.** $συνx$

Μονάδες [(3x2)+(4x1)]=10

A3. Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x–ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x=ρ.

Είναι δηλαδή

$$υ=P(ρ)$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 4.2 15642

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2(x-1)^{20}-3(x-1)^{10}+5x^2-3x-2$.

α. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$.

β. **i.** Να υπολογίσετε την τιμή $P(0)$.

ii. Είναι το x παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (10+5+10)=25

ΘΕΜΑ Γ

Για τη γωνία x ισχύουν:

- $\frac{\pi}{2}<x<\pi$
- $5\text{συν}^2x-7\text{συν}x-6=0$

α. Να δείξετε ότι: $\text{συν}x=-\frac{3}{5}$

β. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημx και εφx.

γ. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\frac{\text{συν}(\pi-x)-\text{ημ}(7\pi-x)}{\text{εφ}(\pi+x)}$

Μονάδες (10+8+7)=25

ΘΕΜΑ Δ 5.3 18865

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να προσδιορίσετε το είδος της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f.

γ. Να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

δ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $E(x)=\frac{1}{2}(x-1)\ln x$, με $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ μπορεί να περιγράψει το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου $A(1,0)$, $B(x,0)$ και $\Gamma(x,\ln x)$.

Μονάδες (3+6+6+10)=25

6

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

β. Για το πολυώνυμο P(x) ισχύει P(ρ)=0 αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου.

γ. Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ με α>1 είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Α2. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τις παρακάτω προτάσεις συμπληρώνοντας τα κενά που σημειώνονται με ....

δ. Οι λύσεις της εξίσωσης ημx=ημθ είναι x= .... ή x= ....όπου $\kappa\in$...

ε. Η συνάρτηση $f(x)=\log_\alpha x$ με $0<\alpha\neq 1$ έχει πεδίο ορισμού το ....

και σύνολο τιμών το ....

Μονάδες [(3x2)+(2x2)]=10

Α3. Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x–ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x=ρ. Είναι δηλαδή υ=P(ρ)

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 4.3 15040

Δίνεται η εξίσωση $x^3-7x+6=0$.

α. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της.

β. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3-7x+6):(x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $x^3-7x+6=0$.

Μονάδες (5+10+10)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παράσταση $K=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^4 x-\eta\mu^4 x+\eta\mu^2 x}{1-\eta\mu x}$.

α. Να δείξετε ότι Κ=1+ημx.

β. Αν $\sigma\upsilon\nu x=\dfrac{4}{5}$ με $\dfrac{3\pi}{2}<x<2\pi$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης Κ.

γ. Να λύσετε την εξίσωση Κ+ημ3x=1.

Μονάδες (8+9+8)=25

ΘΕΜΑ Δ 5.3 16001

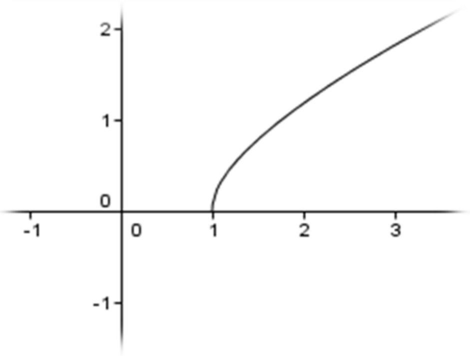
Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\sqrt{x\ln x} \text{ και } g(x)=\sqrt{\ln x}.$$

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

β. Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f.



γ. **i.** Να βρείτε τη μονοτονία της.

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\dfrac{5}{3}\right)$ και $f\left(\dfrac{7}{5}\right)$.

δ. Να σχεδιάσετε την ευθεία $y=1-x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x)=1-x$

Μονάδες [4+5+(4+5)+7)]=25

7

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα τότε η $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Αν ημω = 1, τότε υποχρεωτικά θα είναι συνω = 0

γ. Η συνάρτηση $f(x) = ημx$ είναι περιττή.

δ. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = α^x$ είναι γνησίως αύξουσα όταν $0 < α < 1$

ε. Ισχύει log0 = 1.

Μονάδες [(2x2)+(3x2)=10

Α3. Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x–ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x=ρ.

Είναι δηλαδή

$$υ=P(ρ)$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.1 31570

Δίνονται οι ευθείες:

$$ε_1: \ 2x + y = 6 \ \text{και} \ ε_2: \ x - 2y = -2.$$

α. Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο Μ.

β. Να δείξετε ότι η ευθεία $ε_3 : 3x + y = 8$ διέρχεται από το Μ.

Μονάδες (13+12)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{x}+1}\right)$$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=2\ln 2$

γ. Να λυθεί η ανίσωση $f(x)>0$

Μονάδες (5+10+10)=25

ΘΕΜΑ Δ 4.4 20647

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-\beta x+3,\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{R}.$$

Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 2, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας συντελεστής του δεν είναι ακέραιος.

Αν επιπλέον $P(1)=0$, τότε:

β. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-3$ και $\beta=\dfrac{21}{2}$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\le 0$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $P(\text{συν}x)=0$.

Μονάδες (7+6+6+6)=25

8

ΘΕΜΑ Α

Α1. **Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.**

α. Αν συνάρτηση f με τύπο f(x) και $x \in \mathbb{R}$ και $f(-x)=-f(x)$ τότε η f είναι περιττή

β. Η εξίσωση εφx=εφω έχει λύσεις τις x=κπ+ω, $\kappa \in \mathbb{Z}$ όπου ω γνωστή γωνία

γ. Η συνάρτηση $f(x)=\log_\alpha x$ έχει πεδίο ορισμού το A=R

δ. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ όπου $0<\alpha\neq 1$ είναι γνησίως αύξουσα αν $0<\alpha<1$

ε. Για κάθε $x \in R$ ισχύει $\eta\mu(x-\pi)=-\eta\mu x$

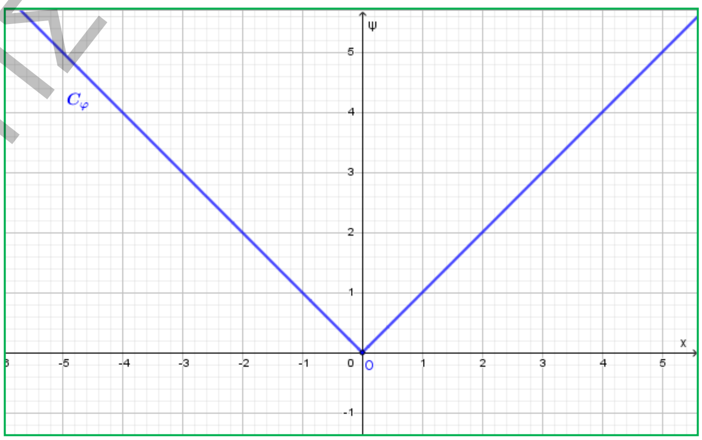
Μονάδες 10

Α2. **Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x-\rho$ $(\rho \in \mathbb{R})$ αν και μόνο αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του P(x).**

Μονάδες 15

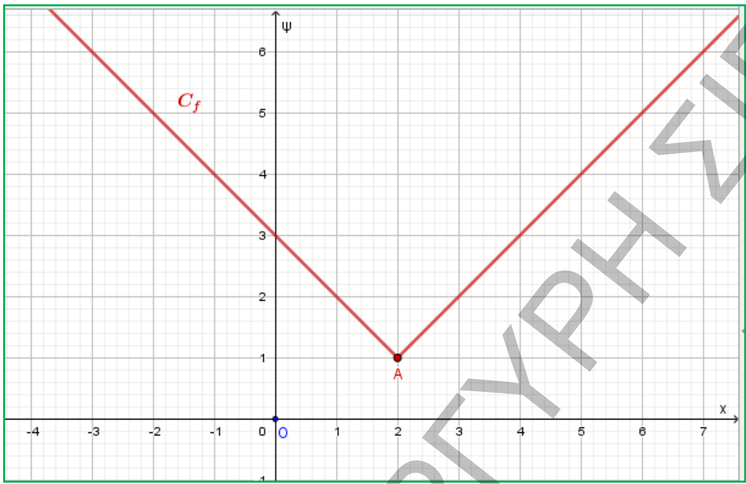
ΘΕΜΑ Β 2.2 14972

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=|x|$, $x \in \mathbb{R}$ με γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα. Επιπλέον οι συναρτήσεις $g(x)=|x-2|$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x)=|x-2|+1$, $x \in \mathbb{R}$.



α. Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις g, f και να εξηγήσετε πώς προκύπτουν μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της φ.

β. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f, η οποία δίνεται παρακάτω,



να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια αύξουσα και γνήσια φθίνουσα.

ii, Το ολικό ακρότατο της f και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

Μονάδες [13+((6+6)]=25

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{1-\eta\mu x}{1+x}+\frac{1+\eta\mu x}{1-x}$$

α. Βρείτε το πεδίο ορισμού της

β. Εξετάστε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή

γ. Αποδείξτε ότι το διάγραμμα της διέρχεται από το σημείο A(0,2)

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{2}{1-x}$

Μονάδες (5+6+4+10)=25

ΘΕΜΑ Δ **5.3** **21445**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\log\frac{4^x-1}{2^x+5}\ .$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x)=\log 3-\log 7\,.$$

γ. Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x)>\log 3-\log 7\,.$$

Μονάδες (7+9+9)=25

9

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο όταν: $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.

β. Για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι: $10^{\log x} = x$.

γ. Η εξίσωση ημx= ημθ $\Leftrightarrow$ x= 2κπ+θ ή x=2κπ-θ

δ. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$ με $0 < \alpha \neq 1$ είναι το $\mathbb{R}$.

ε. Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

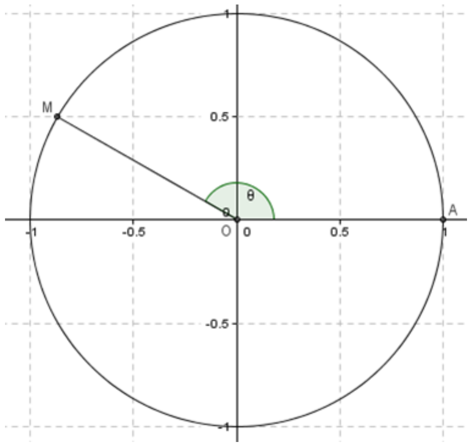
Μονάδες 5x2=10

A2. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x-ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x=ρ. Είναι δηλαδή υ=P(ρ).

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 3.2 15060

Στον τριγωνομετρικό κύκλο του σχήματος θεωρούμε το σημείο $M\left(x, \frac{1}{2}\right)$ και τη γωνία θ με $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ η οποία έχει αρχική πλευρά την ΟΑ και τελική την ΟΜ.



α. Να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$

β. Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας θ.

γ. Να βρείτε τη γωνία θ.

Μονάδες (5+5+13)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(\frac{3-x}{3+x})$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $f(\frac{1}{3})$

γ. Να βρείτε τους αριθμούς f(0) , f(2) , f(-2).

δ. Να λύσετε την ανίσωση :

$$f(3^x) + f(0) > f(2) + f(-2) + f(\frac{1}{3}).$$

Μονάδες (6+4+6+9)=25

3. ΘΕΜΑ Δ 4.3 15066

Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2.$$

α. Να αποδείξετε ότι:

i. Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του.

ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του.

β. Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

Μονάδες [(4+4)+5+7+5)=25

10

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. $e^x = \theta \Leftrightarrow \ln\theta = x, \quad \theta > 0$

β. $\text{συν}(90^0 - x) = \text{συν}x$ για κάθε $0^0 < x < 90^0$

γ. $\text{εφ}\omega = \dfrac{\text{συν}\omega}{\text{ημ}\omega}$ εφόσον $\text{ημ}\omega \neq 0$

δ. $\log_\alpha 1 = 1$ αν $0 < \alpha \neq 1$

ε. Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό μηδέν.

Μονάδες 5x2=10

Α2. Αν α>0 με α ≠1 τότε για οποιοδήποτε θ > 0 και k ∈ ℝ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\log_\alpha \theta^k = k \cdot \log_\alpha \theta$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 3.5 15036

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 3\text{συν}2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α. i. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

ii. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -3$ στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες [(10+5)+10]=25

ΘΕΜΑ Γ

Το πολυώνυμο

$$P(x)=2x^3+(\kappa+1)x^2-4\kappa x+3$$

έχει παράγοντα το $x-1$.

α. Να βρείτε την τιμή του κ.

β. Για $\kappa=2$

i. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) βρίσκεται πάνω από τον άξονα x’x.

Μονάδες [8+(10+7)]=25

ΘΕΜΑ Δ 5.1 18693

Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=\left(\frac{2-\lambda}{4}\right)^x.$$

α. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η f είναι εκθετική συνάρτηση.

β. Για ποιες τιμές του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα;

γ. Για $\lambda=0$

i. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

ii. Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x)+f(x+1)=6.$$

Μονάδες [5+7+(6+7)]=25

11

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Οι αντίθετες γωνίες έχουν αντίθετους όλους τους τριγωνομετρικούς αριθμούς τους.

β. Αν $P(\rho)=0$ τότε ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

γ. Το σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

δ. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ με $\alpha>1$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ε. Αν $\alpha>0$ και $\alpha\neq1$ τότε για οποιαδήποτε $\theta_1,\theta_2>0$, ισχύει ο τύπος:

$$\log_\alpha(\theta_1+\theta_2)=\log_\alpha\theta_1\cdot\log_\alpha\theta_2$$

Μονάδες 5x2=10

A2. Να δείξετε ότι για κάθε γωνία ω ισχύει: $\varepsilon\varphi\omega\cdot\sigma\varphi\omega=1$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 4.2 15643

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=2x^3-3x^2-11x+6.$$

α. i. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-3$.

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης $P(x):(x-3)$

β. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-3)(2x-1)$.

Μονάδες [(7+7)+11]=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Αφού αποδείξετε ότι $g(\ln 2)=\frac{3}{4}$ να λύσετε την ανίσωση $g(x)\geq\frac{3}{4}$.

δ. Θεωρώντας γνωστή την ανισότητα $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2$ που ισχύει για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό α, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\text{συν}x$.

Μονάδες [6+6+(3+5)+5]=25

ΘΕΜΑ Δ   5.3   15679

Δίνεται η παράσταση

$$A=\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}\right).$$

α. Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{\omega^2-1}{\omega-3}>0.$$

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $A=-\ln 3$.

Μονάδες (8+8+9)=25

12

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $0 < x < \pi$ τότε $\eta\mu x > 0$.

β. Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το $-\rho$ είναι ρίζα του P(x).

γ. Με την προϋπόθεση ότι ορίζονται οι λογάριθμοι ισχύει:

$$\log_\alpha(\theta_1+\theta_2)=\log_\alpha\theta_1\cdot\log_\alpha\theta_2$$

δ. Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ είναι περιττή.

ε. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x)=logx είναι το $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5x2=10

A2. Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x-\rho$ $(\rho\in\mathbb{R})$ αν και μόνο αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του P(x).

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 4.2 20941

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3+2x^2+x+3.$$

α. Να δείξετε ότι το -2 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x+2)$

γ. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x+2)$.

Μονάδες (8+10+7)=25

ΘΕΜΑ Γ

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου:

$P(x)=x^3-5ημθ\cdot x^2-2x+2συν^2θ,\ \ θ\in R$ με το πολυώνυμο $x-1$ είναι ίσο με -2.

α. Να αποδείξετε ότι $2ημ^2θ+5ημθ-3=0$

β. Να αποδείξετε ότι $ημθ=\frac{1}{2}$ και στη συνέχεια να βρείτε τις τιμές που παίρνει η γωνία θ.

γ. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\frac{π}{2}<θ<π$, τότε να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς , δηλαδή το συνθ , την εφθ και την σφθ.

Μονάδες [8+(5+6)+6]=25

ΘΕΜΑ Δ 5.3 21446

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\ln\left(e^x-2\right).$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x)+x=3\ln 2.$$

γ. Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x)+x\geq 3\ln 2.$$

Μονάδες (7+9+9)=25

13

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

β. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$, α>1, έχει ασύμπτωτο τον θετικό ημιάξονα των x.

γ. Ισχύει η ισοδυναμία: $e^x=\theta \Leftrightarrow x=\log\theta$, $x\in R$, θ>0.

δ. Για κάθε γωνία ωω ισχύει $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$.

ε. Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο.

Μονάδες 5x2=10

Α2. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+....+\alpha_1 x+\alpha_0=0$**, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος** $\rho\neq 0$ **είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο** ρ **είναι διαιρέτης του σταθερού όρου** α_0**.**

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 4.3 15248

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $2x-1$ δίνει πηλίκο x^2-2 και υπόλοιπο 1.

α. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

β. Αν $P(x)=2x^3-x^2-4x+3$

i. να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

ii. να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

Μονάδες [12+(7+6)]=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$P(x)=6x^3-\lambda x^2-4x+4,$$

όπου λ πραγματικός αριθμός και το σημείο Α(−1, −9) το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x).

α. Να αποδείξετε ότι λ=11.

β. Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0 και να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης P(x) με τον άξονα y΄y.

γ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x) βρίσκεται πάνω από τον άξονα των x.

Μονάδες [6+(8+2)+9]=25

ΘΕΜΑ Δ 5.3 15591

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\left(\frac{\alpha}{\alpha+5}\right)^x.$$

α. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι εκθετική και ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

β. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Για τη μεγαλύτερη τιμή του $\alpha\in\mathbb{Z}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα εκθετική με βάση ακέραιο αριθμό, να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x)+f(x+1)=14$$

Μονάδες (8+8+9)=25

14

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f(x)=logx είναι το (0,+∞).

β. Η συνάρτηση που εκφράζει το νόμο της εκθετικής απόσβεσης είναι

$$Q(t)=Q_0e^{ct} \text{ όπου } c<0.$$

γ. Η εξίσωση συνx=α, με α>1 είναι αδύνατη.

δ. Η περίοδος της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x$ είναι 3π.

ε. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι πάντα ίσος με το γινόμενο των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

Μονάδες 5x2=10

Α2. Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x-\rho$ $(\rho\in\mathbb{R})$ αν και μόνο αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του P(x).

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 3.2 20761

Δίνεται γωνία ω η οποία είναι ίση με -1125^0.

α. Να αποδείξετε ότι η γωνία ω ισούται με $\frac{-25\pi}{4}$ ακτίνια (rad).

β. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

Μονάδες (9+16)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + \alpha x + 2\beta, \text{ όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

α. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x-1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $x+1$ είναι ίσο με 12, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β.

β. Αν $\alpha = -7$ και $\beta = 2$, να λύσετε:

i. την ανίσωση $P(x) > 0$

ii. την εξίσωση $\sqrt{P(x)} = (2-x)|x-1|$

Μονάδες [9+(8+8)]=25

ΘΕΜΑ Δ 5.2 18110

α. **i.** Να λύσετε την εξίσωση $x(e^x - 1) = 0$

ii. Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου $x(e^x - 1)$

β. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}.$$

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0), f(\ln 2)$ και $f(-\ln 2)$.

iii. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παρακάτω ισχυρισμός: « η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$ είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της».

Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδες [(3+6)+(5+6+5)]=25

15

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει $ημ\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=-συνω$

β. Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ με 0<α<1 είναι γνησίως. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ. Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x)=\log_\alpha x$, α>0, α≠1 έχει πεδίο ορισμού το διάστημα (0,+∞).

Α2. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις που αναφέρονται στις ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x)=\ln x$:

δ. Η συνάρτηση f(x)=lnx έχει πεδίο ορισμού το …………. και σύνολο τιμών το ……………

ε. Είναι γνησίως ………………..….. στο ……………δηλαδή

αν $x_1, x_2 \in$......... με $x_1 < x_2$ τότε και $\ln x_1$..........

Μονάδες [(3x2)+2+2]=10

Α3. Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x-\rho$ $(\rho\in\mathbb{R})$ αν και μόνο αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του P(x).

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 5.3 15267

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2+1)=1+\log 3-\log 6$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται $\log(x^2+1)=\log 5$.

β. Να λύσετε την εξίσωση.

Μονάδες (12+13)=25

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=(\alpha+1)\text{συν}(\beta\pi x)$, όπου α και β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

α. Αν η μέγιστη τιμή της f(x) είναι 3 και η περίοδός της είναι 4, να αποδείξετε ότι α=2 και $\beta=\frac{1}{2}$.

β. Για τις τιμές α=2 και $\beta=\frac{1}{2}$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{3}{2}$

Μονάδες (13+12)=25

ΘΕΜΑ Δ 4.4 18696

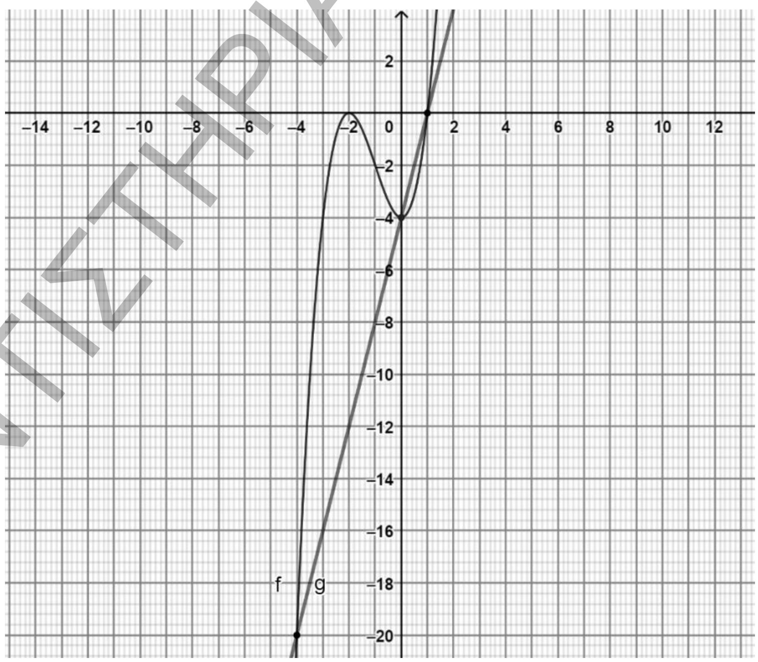
Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=x^3+3x^2-4 \text{ και } g(x)=4x-4 \text{ με } x\in\mathbb{R}.$$

α. Από τη γραφική παράσταση της f, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

β. Να λύσετε γραφικά και αλγεβρικά την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

γ. Να βρείτε αλγεβρικά τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Μονάδες (8+10+7)=25

16

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο.

β. Ισχύει εφω·σφω=1 (εφόσον συνω≠0 και ημω≠0).

γ. Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο όταν : $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.

δ. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ με $0<\alpha<1$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

ε. Η συνάρτηση $f(x) = \log_\alpha x$ με $0<\alpha\neq1$ έχει πεδίο ορισμού το R.

Μονάδες (5x2)=10

A2. Αν α>0 με α≠1 τότε για οποιοδήποτε θ>0 και $k \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\log_\alpha \theta^k = k \cdot \log_\alpha \theta$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 3.5 15969

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2\text{συν}(13\pi + x) - 2\text{ημ}(\frac{\pi}{2} - x).$$

α. Να δείξετε ότι $\text{συν}(13\pi + x) = -\text{συν}x$.

β. Να δείξετε ότι $f(x) = -4\text{συν}x$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.

Μονάδες (5+8+12)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (\alpha - 1)x^4 + \alpha x^3 - x + \alpha - 4,$$

όπου α πραγματικός αριθμός.

α. Να βρεθεί η τιμή του α για την οποία το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x+2.

Για α=2 να βρείτε:

β. Τις ρίζες της εξίσωσης P(x)=0, καθώς και τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) είναι πάνω από τον άξονα x΄x.

γ. Το πρόσημο του γινομένου $P(-99)\cdot P(-1{,}15)\cdot P(2013)$.

δ Το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο $x^2 + 2x - 1$.

Μονάδες (5+10+5+5)=25

ΘΕΜΑ Δ 5.3 21447

Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο

$$P(t) = 200\cdot e^{ct},$$

Όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος ($t = 0$). Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328.

(Δίνεται ότι $\ln(1{,}64) \cong 0{,}5$ και $\ln 10 \cong 2{,}3$)

α. Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.

β. Να αποδείξετε ότι $c = \frac{1}{2}$.

γ. Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

Μονάδες (7+9+9)=25

17

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Αν ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x) τότε P(ρ)=0

β. Η συνάρτηση f(x)=ημx είναι περιοδική με περίοδο T=π

γ. Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.

δ. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, με α>1 είναι γνησίως αύξουσα.

ε. Αν α>0, με α≠1, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1,\theta_2>0$ ισχύει: $\log_\alpha(\theta_1+\theta_2)=\log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_2$

Μονάδες 5x2=10

Α2. Για κάθε γωνία ω, να αποδείξετε ότι ισχύει: $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 4.3 15246

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3+x^2-x-1.$$

α. Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

β. Αν $P(x)=(x+1)^2(x-1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

Μονάδες (10+15)=25

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

α. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης αυτής.

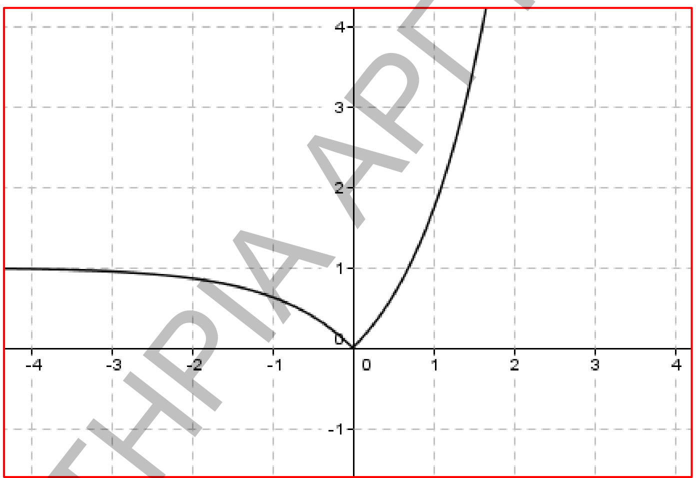
β. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(\pi) = 0$

γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=1$

Μονάδες (8+8+9)=25

ΘΕΜΑ Δ 5.2 18235

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = |e^x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$.



α. Να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να περιγράψετε πως αυτή μπορεί να προκύψει από τη γνωστή γραφική παράσταση της $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

β. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να συμπεράνετε τη μονοτονία και την ελάχιστη τιμή της f.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$.

δ. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α, το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής της παράστασης C_f με την ευθεία $y = \alpha$.

Μονάδες (7+6+5+7)=25

18

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται περιττή αν για κάθε $x \in A$, ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$.

β. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ με α>1 είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ. Η εξίσωση συνx=συνθ, έχει λύσεις $x=2\kappa\pi+\theta$ ή $x = 2\kappa\pi - \theta$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$

δ. Κάθε σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

ε. Για κάθε α>0 και α≠1 ισχύει $\log_\alpha \alpha = 1$.

Μονάδες 5x2=10

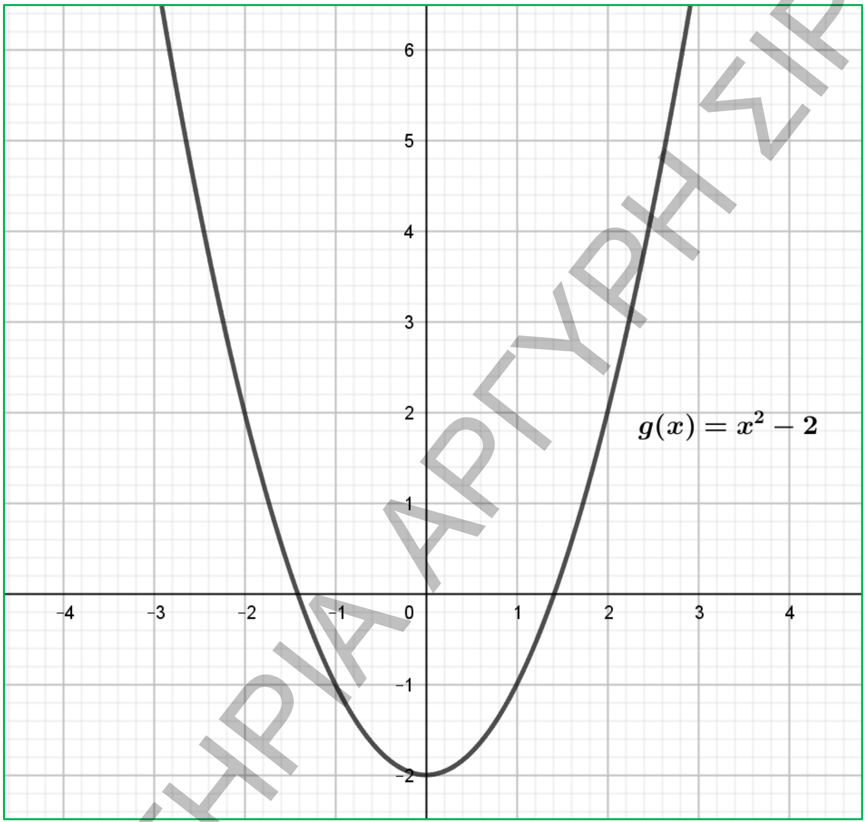
Α2. Αν α>0 με α≠1 τότε για οποιοδήποτε θ>0 και k∈ $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\log_\alpha \theta^k = k \cdot \log_\alpha \theta$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β **2.2** **15811**

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x^2-2$, $x\in\mathbb{R}$.



α. Με βάση τη γραφική της παράσταση,

i. να αιτιολογήσετε γιατί η g είναι άρτια.

ii. να βρείτε το ελάχιστο της g και τη θέση αυτού.

β. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x)=x^2$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Μονάδες (9+7+9)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\ln\frac{x-1}{x-2}$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να αποδείξετε ότι

$$f(3)+f(4)+f\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

γ. Να λυθεί η εξίσωση

$$f(x)+\ln(x-2)=e^{\ln 2}+\ln 1$$

Μονάδες (8+8+9)=25

ΘΕΜΑ Δ 4.3 15174

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x)=x^4+x^3+\alpha x-4 \quad \text{και} \quad \delta(x)=x^2-3x+2.$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $\upsilon(x)=24x-24$

α. Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού .α.

β. Για α=2

i. να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$.

ii. να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης . $P(x)$.

iii. να βρείτε τις τιμές του για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες [8+(2+8+7)]=25

19

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

β. Οι λύσεις της εξίσωσης ημx=ημθ δίνονται από τους τύπους:

$$x=2\kappa\pi+\theta \quad \text{ή} \quad x=2\kappa\pi-\theta,\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

γ. Ισχύει $\ln x=\theta \Leftrightarrow e^x=\theta$

Α2. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις που αναφέρονται στις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=e^x$:

δ. Η συνάρτηση $f(x)=e^x$ είναι γνησίως ………………… στο ………… δηλαδή αν $x_1,x_2\in$....... με $x_1<x_2$ τότε και e^{x_1}........

ε. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο …………… και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα …………

Μονάδες 5x2=10

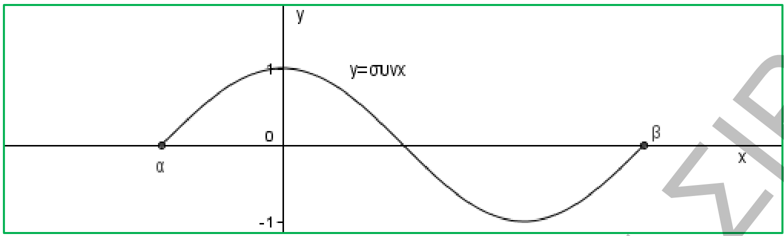
Α3. Αν α>0 με α≠1 τότε για οποιοδήποτε θ>0 και k∈ ℝ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\log_\alpha \theta^k = k\cdot\log_\alpha \theta$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 3.4 22007

Στο σχήμα φαίνεται απόσπασμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης συνx.



α. Να βρείτε τα α και β.

β. Προς ποια κατεύθυνση και κατά πόσο πρέπει να μετατοπιστεί η παραπάνω καμπύλη ώστε να συμπέσει με τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ημx ;

Μονάδες (12+13)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(e^{2x}-2e^{x})$ και $g(x)=\ln(2e^{x}-3)$

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f(x) και g(x).

β. Να λύσετε την εξίσωση f(x)=g(x).

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le g(x)$.

Μονάδες (8+9+8)=25

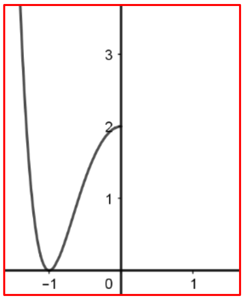
ΘΕΜΑ Δ 4.3 15005

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{6}-3x^{2}+2$.

α. Να αποδείξετε ότι f είναι άρτια.

β. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

γ. Να συμπληρώσετε στο διπλανό σχήμα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x>0$.



δ. Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες (5+10+4+6)=25

20

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Η συνάρτηση $f(x) = εφx$ είναι περιοδική με περίοδο π

β. Αν το x+ρ είναι παράγοντας ενός πολυωνύμου P(x), τότε P(ρ)=0.

γ. Ισχύει : $\frac{\log 4}{\log 2} = 2$.

δ. Η συνάρτηση $f(x) = α^x$ με α>1 είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

ε. Για κάθε θ>0 ισχύει η ισοδυναμία: $\ln θ = x \Leftrightarrow e^x = θ$

Μονάδες 5x2=10

Α2. Να αποδείξετε ότι: αν α>0 με α≠1, τότε για οποιουσδήποτε θ>0 και $κ \in R$ ισχύει:

$$\mathbf{\log_α θ^κ = κ \cdot \log_α θ}$$

Μονάδες 15

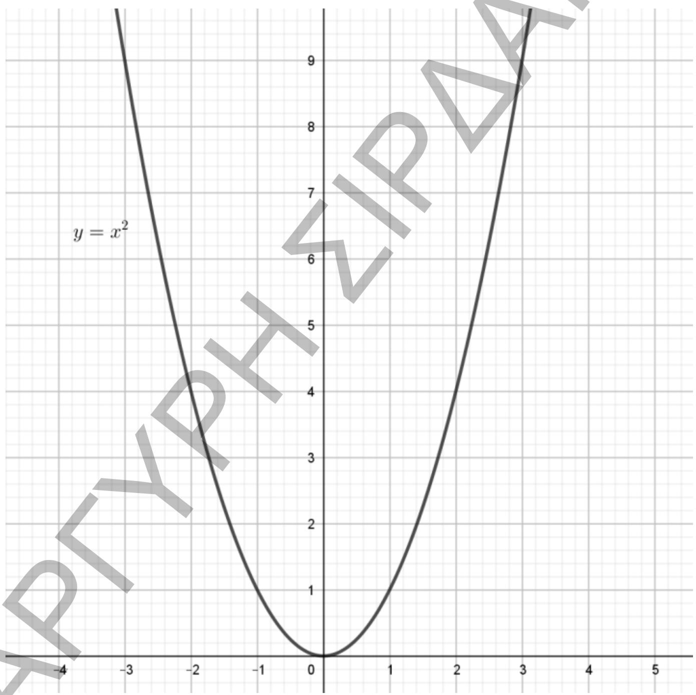
6. **ΘΕΜΑ Β** **2.2** **32674**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4x + 5,\ x \in \mathbb{R}.$$

α. Να δείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x-2)^2 + 1$.

β. Να αναφέρετε με ποιες μετατοπίσεις της $y(x) = x^2$ προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την οποία και να χαράξετε στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί.



Μονάδες (10+15)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 2x^3 - x^2 - \beta x + \alpha$$

το οποίο έχει ρίζα τον αριθμό 1 και διαιρούμενο με το $x-2$ δίνει υπόλοιπο 9.

α. Δείξτε ότι α=1 και β=2

β. Για α=1 και β=2 να λυθεί η εξίσωση P(x)=0 και η ανίσωση P(x)>0

γ. Να λυθεί η εξίσωση

$$2\sigma\upsilon\nu^3 x + \eta\mu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x = 0$$

Μονάδες (9+8+8)=25

Θ Ε Μ Α　Δ　　**5.3**　　**21680**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=(x-1)\ln x,\ x>0 \text{ και η ευθεία } \varepsilon: y=2x-2.$$

α. Να αποδείξετε ότι

$$f(2)+f(4)=\frac{1}{3}f(8).$$

β. Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι από τον άξονα $x'x$ και πάνω.

γ. Να βρείτε:

i. Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία.

ii. Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία.

Μονάδες [8+8+(4+5)]=25

21

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ είναι πάντοτε γνησίως αύξουσα στο R.

β. Ο βαθμός του γινομένου δύο πολυωνύμων είναι πάντα ίσος με το γινόμενο των βαθμών τους.

Μονάδες (2x2)=4

A2. Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α του παρακάτω πίνακα με τη λύση της που βρίσκεται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	ΣΤΗΛΗ Β ΛΥΣΕΙΣ
1. εφx=εφθ	**α.** $x=2\kappa\pi+\theta$ ή $x=2\kappa\pi-\theta,\ \kappa\in Z$
2. συνx=συνθ	**β.** $x=\kappa\pi+\theta,\ \kappa\in Z$
3. ημx=ημθ	**γ.** $x=2\kappa\pi+\theta$ ή $x=2\kappa\pi+(\pi-\theta),\ \kappa\in Z$

Μονάδες (3x2)=6

A3. Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x-\rho$ $(\rho\in\mathbb{R})$ αν και μόνο αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του P(x).

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 3.4 20660

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu(180°-x)+\sigma\upsilon\nu(90°-x),\ x\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=2\eta\mu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β. **i.** Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f.

ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f για $0\le x\le 2\pi$.

Μονάδες [12+(6+7)]]=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-2}{x}\right)$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\ln 3$.

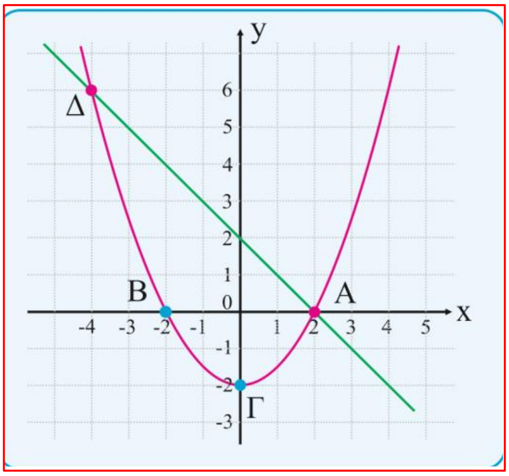
γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<f(-4)$.

δ. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\kappa=f(6)+f(4)+f(-4)+f(-1)$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $(f(e))^{2013}<\kappa$

Μονάδες [6+6+7+(3+3)]=25

ΘΕΜΑ Δ 2.2 14294

Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και της ευθείας $g(x)=-x+2$.



α. Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Γ να βρείτε τις τιμές των α, β, γ.

β. Αν $\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\beta=0$ και $\gamma=-2$, να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της παραβολής.

γ. Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Μονάδες (8+8+9)=25

22

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

β. Η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α έχει στο $x_0 \in A$ ελάχιστο όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

γ. Η τιμή του πολυωνύμου P(x) στο ρ είναι το P(ρ)

δ. Αν πολλαπλασιαστούν δύο πολυώνυμα, τότε το πολυώνυμο που προκύπτει έχει βαθμό ίσο με το γινόμενο των βαθμών τους.

ε. Ισχύουν: ln10=ln2+ln5 και 3ln2<2ln3

Μονάδες 5x2=10

Α2. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

Μονάδες 15

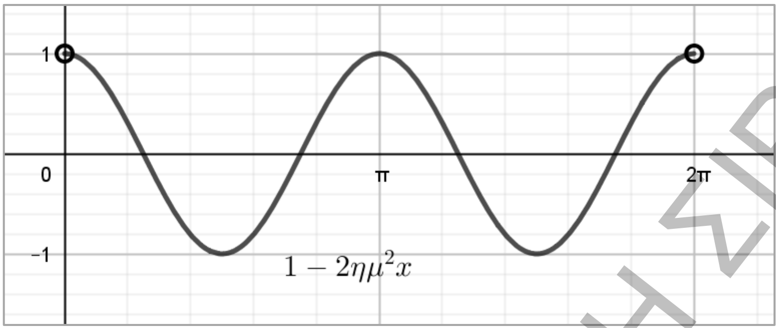
ΘΕΜΑ Β 3.4 20867

Δίνεται η παράσταση $A = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x$.

α. Να βρείτε την τιμή της παράστασης Α για $x = 0$.

β. Να δείξετε ότι $A = 1 - 2\eta\mu^2 x$.

γ. Με χρήση της παρακάτω γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $1-2\eta\mu^2 x$ και του ερωτήματος β), να λύσετε την εξίσωση $A=1$, για $0<x<2\pi$.



Μονάδες (7+9+9)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=x^3-\alpha x^2-\beta x+2$, με $\alpha,\beta\in R$.

α. Να υπολογιστούν τα $f(1)$ και $f(2)$.

β. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β αν τα $x-1$ και $x-2$ είναι παράγοντες του f(x).

γ. Αν α=2 και β=1 να βρεθούν τα σημεία που η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x

Μονάδες (10+5+10)=25

ΘΕΜΑ Δ 5.3 21950

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^x-12}$.

α. Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\dfrac{\omega^3-8}{\omega^2+4\omega-12}>0$ είναι το $(-6,2)\cup(2,+\infty)$.

β. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}-\{\ln 2\}$.

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα xx΄.

Μονάδες (8+8+9)=25

23

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Αν ισχύει $(\frac{1}{2})^{x} > (\frac{1}{2})^{5}$ τότε x > 5.

β. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha^{x_1} = \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

γ. Η συνάρτηση f(x)=ημx είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[2\pi, 2\pi + \frac{\pi}{2}\right]$

δ. Η συνάρτηση f(x)=lnx έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$

ε. Τα αντίθετα τόξα έχουν ίσα συνημίτονα.

Μονάδες 10

Α2. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\boldsymbol{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0}$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 5.3 15267

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2+1) = 1 + \log 3 - \log 6$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται $\log(x^2+1) = \log 5$.

β. Να λύσετε την εξίσωση.

Μονάδες (12+13)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu(2x - \pi) - 1$

α. Να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης f καθώς και οι θέσεις του μεγίστου και ελαχίστου αντίστοιχα.

β. Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία με εξίσωση y=1 των οποίων οι τετμημένες ανήκουν στο διάστημα $[-\pi,\pi]$

γ. Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση f(x)=2013; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (10+10+5)=25

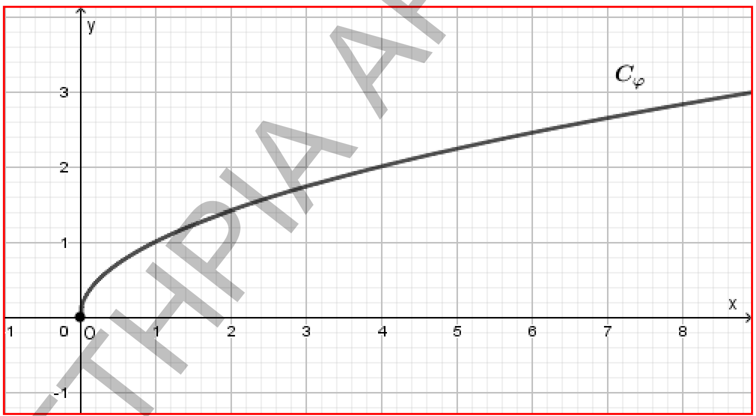
ΘΕΜΑ Δ **5.2** **18863**

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$\varphi(x)=\sqrt{x},\ \text{με } x\ge 0,\ f(x)=\sqrt{x-1},\ \text{με } x\ge 1 \text{ και } g(x)=\frac{x+1}{3},\ \text{με } x\in\mathbb{R}.$$

α. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

β. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ.



i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

ii. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, να σχεδιάσετε και την γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

γ. Με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g.

δ. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\ln 10-1}>\dfrac{1+\ln 10}{3}$.

Μονάδες [8+(2+4)+6+5]=25

24

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_2)<f(x_1)$

β. Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν $P(\rho)=0$.

γ. Για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς θ_1, θ_2 ισχύει $\log\frac{\theta_1}{\theta_2}=\frac{\log\theta_1}{\log\theta_2}$

δ. Η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

ε. Για κάθε $\theta>0$ ισχύει η ισότητα $\theta=e^{\ln\theta}$.

Μονάδες 5x2=10

Α2. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+....+\alpha_1 x+\alpha_0=0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho\neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 4.2 21997

Δίδεται το πολυώνυμο $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$.

α. Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Ποιο είναι το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ που προκύπτει από την διαίρεση $P(x):(x-2)$;

Μονάδες (12+13)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\kappa\ln(20-e^x)-\lambda\ln(e^x-2)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Αν η C_f περνά από τα σημεία $M(\ln3,\ln17)$, $N(\ln19,-\ln17)$ να βρείτε τα κ, λ.

γ. Αν κ=1 και λ=1:

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2x-\ln5$

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<1$.

Μονάδες [5+5+(5+10)]=25

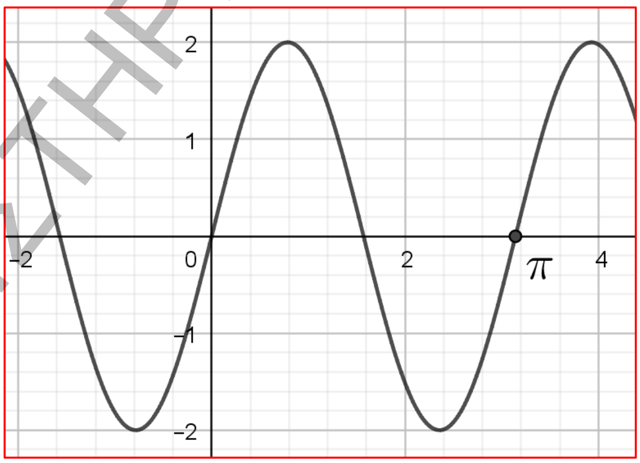
ΘΕΜΑ Δ 3.5 15003

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\eta\mu\alpha x\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha x\right)+2\right]-\sigma\upsilon\nu\alpha x\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi-\alpha x)-1 \quad \mu\varepsilon \quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

α. **i.** Να δείξετε ότι $f(x)=2\cdot\eta\mu\alpha x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να δείξετε ότι α=2.



β. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $\varepsilon: y=1$ για $x\in[0,\pi]$.

Μονάδες [(10+6)+9]=25

25

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Η συνάρτηση ημx είναι περιοδική συνάρτηση.

β. Οι λύσεις της εξίσωσης $εφx = α$, όπου $α \in R$, είναι $x = κπ + α$, με $κ \in Z$.

γ. Ισχύει η ισοδυναμία: $\ln θ = x \Leftrightarrow 10^x = θ$.

δ. Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

ε. Η λογαριθμική συνάρτηση

$$g(x) = \log_α x \text{ με } α>0,\ α\neq 1,\ x>0$$

έχει σύνολο τιμών το σύνολο R των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 5x2=10

Α2. Για κάθε γωνία ω, να αποδείξετε ότι ισχύει: $ημ^2ω + συν^2ω = 1$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 5.2 20710

Δίνονται οι αριθμοί

$$α = \log 20 \text{ και } β = \log 50.$$

Να αποδείξετε ότι

α. $β + α = 3$.

β. $\ln(β + α) > 1$.

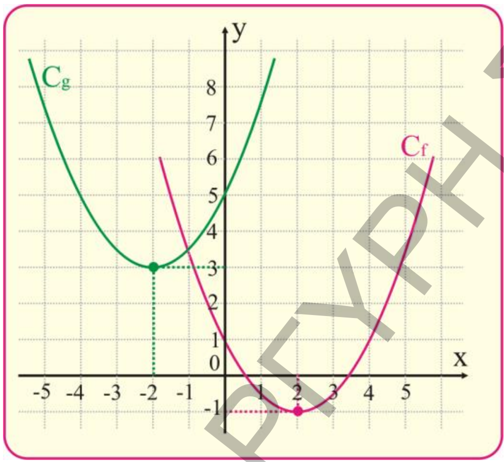
γ. $10^β - 10^α = 10\cdot(β + α)$.

Δίνεται ότι $e \simeq 2,71$.

Μονάδες (7+6+12)=25

ΘΕΜΑ Γ

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι παραβολές C_f και C_g που είναι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση.



Παρατηρώντας το σχήμα:

α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του.

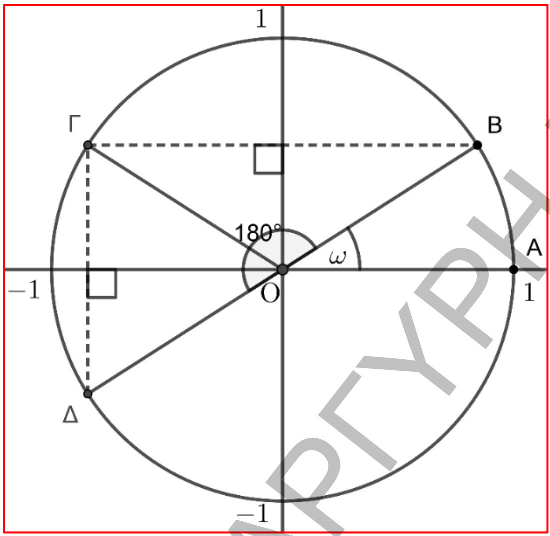
β. Να βρείτε μέσω ποιων μετατοπίσεων της C_f προκύπτει η C_g .

Μονάδες (10+15)=25

ΘΕΜΑ Δ **4.4** **15187**

Για τη γωνία ω του παρακάτω σχήματος ισχύει

$$5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0.$$



α. Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.

β. Να βρείτε:

i. την τιμή του $\sigma\upsilon\nu\omega$,

ii. τις συντεταγμένες των σημείων B, Γ και Δ,

iii. το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Delta$.

Μονάδες [8+(6+6+5)]=25

26

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=2^{x-3}$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $f(x)=2^{x}$ κατά μία οριζόντια μετατόπιση 3 μονάδων προς τα αριστερά.

β. Αν α>0 και α≠1 τότε για κάθε $x\in R$ και για κάθε θ>0 ισχύει ότι:

i. $\log_{\alpha}\alpha^{x}=\alpha$ **ii.** $\alpha^{\log_{\alpha}\theta}=\theta$

γ. Αν α>1 τότε $\log_{\alpha}x<0$ για κάθε $x\in R$ με 0<x<1.

δ. Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο είναι 1ου βαθμού.

Μονάδες [2+(2+2)+2+2]=10

Α2. Για κάθε γωνία ω, να αποδείξετε ότι ισχύει: $\eta\mu^{2}\omega+\sigma\upsilon\nu^{2}\omega=1$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 4.3 15175

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^{3}-x^{2}+x-1.$$

α. Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου.

β. Να αποδείξετε ότι $P(x)=(x-1)\cdot(x^{2}+1)$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

Μονάδες (5+10+10)=25

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση f(x)=α+β·συν2x με β>0, έχει μέγιστη τιμή το 4 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{3},-5\right)$.

α. Να βρείτε τα α και β.

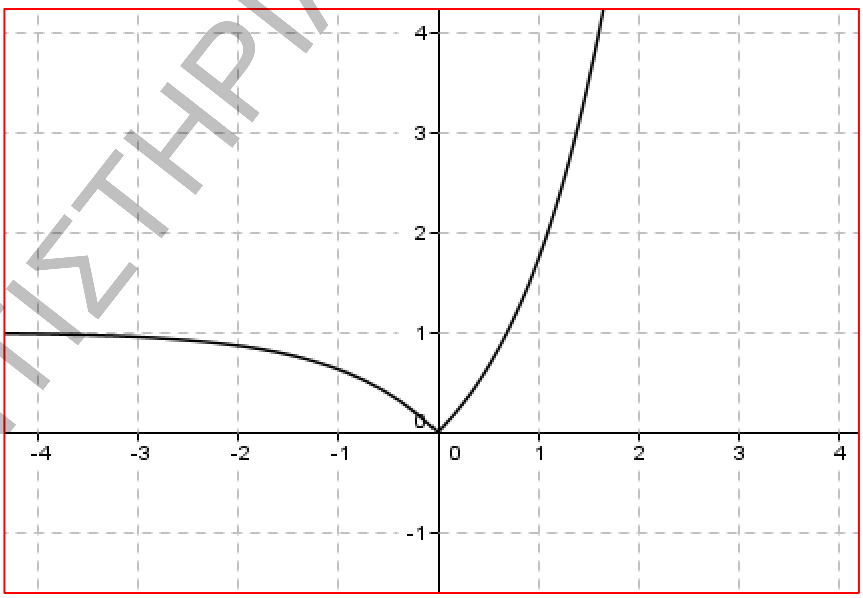
β. Για $\alpha=-2$ και β=6:

- **i.** Να βρείτε την περίοδο Τ της συνάρτησης f.
- **ii.** Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.
- **iii.** Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η συνάρτηση f παρουσιάζει την ελάχιστη τιμή της.
- **iv.** Να βρείτε τα κοινά σημεία της συνάρτησης f με την ευθεία y=1.

Μονάδες 5+(3+3+7+7)=25

ΘΕΜΑ Δ 5.2 18235

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=|e^x-1|$, $x\in\mathbb{R}$.



α. Να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να περιγράψετε πως αυτή μπορεί να προκύψει από τη γνωστή γραφική παράσταση της $g(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

β. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να συμπεράνετε τη μονοτονία και την ελάχιστη τιμή της f.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$.

δ. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α, το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής της παράστασης C_f με την ευθεία $y=\alpha$.

Μονάδες (7+6+5+7)=25

27

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. $e^x = \theta \Leftrightarrow \ln\theta = x, \ \ \theta>0$

β. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

γ. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \alpha^x$ $(0<\alpha\neq 1)$ και $g(x) = \log_\alpha x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x.

δ. Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.

ε. Αν θ είναι μια λύση της εξίσωσης εφx=α, αν δηλαδή ισχύει εφx=εφθ, τότε οι λύσεις της εξίσωσης αυτής δίνονται από τους τύπους: $x=2\kappa\pi+\theta$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - \theta$ με $\kappa \in Z$

Μονάδες 5x2=10

Α2. Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x-\rho$ $(\rho \in R)$ αν και μόνο αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του P(x).

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.1 15849

Σε μια συνεστίαση μεταξύ συγγενών παρευρίσκονται οι γονείς με τα παιδιά τους. Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς. Κάθε γονιός πλήρωσε 12€ και κάθε παιδί τα μισά. Ο συνολικός λογαριασμός ήταν 300€.

α. Αν x το πλήθος των γονιών και y το πλήθος των παιδιών, να διαλέξετε από τις παρακάτω επιλογές, ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που εκφράζει τα δεδομένα του παραπάνω προβλήματος.

Α. $\begin{cases} x+y+5=0 \\ 12x+6y=300 \end{cases}$ **Β.** $\begin{cases} x-y=5 \\ 6x+12y=300 \end{cases}$ **Γ.** $\begin{matrix} y=x+5 \\ 12x+6y=300 \end{matrix}$ **Δ.** $\begin{cases} y=x+5 \\ 6x+12y=300 \end{cases}$

β. Από τη λύση του συστήματος που επιλέξατε στο α) ερώτημα να βρείτε πόσοι γονείς και πόσα παιδιά υπήρχαν στο τραπέζι.

Μονάδες (10+15)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\ln x+\ln(x^2-4x+4)$$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να λυθεί η εξίσωση

$$f(x)=\ln x+4\ln 2$$

γ. Να λυθεί η ανίσωση

$$f(x)<1-\ln\frac{e}{16}$$

Μονάδες (7+9+9)=25

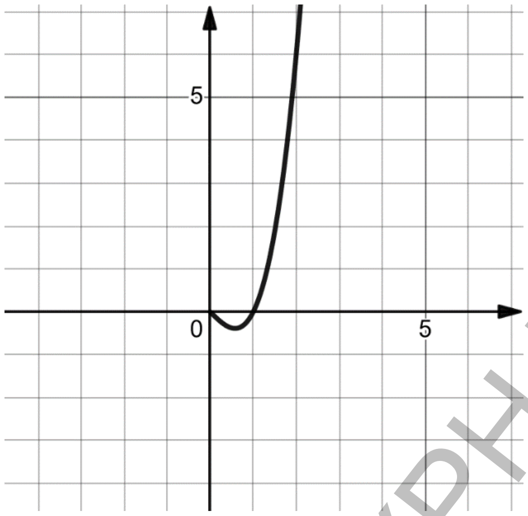
ΘΕΜΑ Δ 4.4 18111

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$g(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{όταν } x\geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & \text{όταν } x<0 \end{cases} \quad \text{και} \quad h(x)=x^3-x, x\in\mathbb{R}.$$

α. **i.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.

ii. Να συμπληρώσετε το παρακάτω σχήμα ώστε να παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h.



iii. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε το παραπάνω σχήμα, να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με τον άξονα $x'x$.

β. Αν $x \geq 0$ να αποδείξετε ότι: η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = x$ αν και μόνο αν η γραφική παράσταση της h βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες $[(3+4+8)+10]=25$

28

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Για κάθε x>0 ισχύει: $e^{\ln x} = x$

β. Για κάθε x>1 ισχύει: lnx<0.

γ. Αν ημθ=α, τότε οι λύσεις της εξίσωσης ημx=α δίνονται από τους τύπους:
$x=2\kappa\pi+\theta$ ή $x = 2\kappa\pi + (\pi - \theta)$ όπου $\kappa \in Z$

δ. Αν $0 < x_1 < x_2$ τότε $\log_{\left(\frac{1}{10}\right)} x_1 < \log_{\left(\frac{1}{10}\right)} x_2$

ε. Η περίοδος της συνάρτησης f(x)=συν2x, είναι Τ=π.

Μονάδες 5x2=10

Α2. Αν $0 < \alpha \neq 1$ και θ_1, θ_2 θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$$\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 3.5 15969

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) - 2\eta\mu(\frac{\pi}{2} - x)$.

α. Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$.

β. Να δείξετε ότι $f(x) = -4\sigma\upsilon\nu x$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.

Μονάδες (5+8+12)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3-(2\alpha+1)x+3\beta .$$

α. Να βρείτε τους αριθμούς α, β αν είναι γνωστό ότι έχει παράγοντα το $x-1$ και η γραφική του παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο B(0,6).

β. Αν α=3 και β=2, τότε:

i. Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0.

ii. Να βρείτε το διάστημα ή τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση του πολυωνύμου είναι πάνω από την ευθεία με εξίσωση $y=-3x+6$.

Μονάδες [10+(5+10)]=25

ΘΕΜΑ Δ 5.3 21447

Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο

$$P(t)=200\cdot e^{ct},$$

Όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος ($t=0$). Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328.

(Δίνεται ότι $\ln(1{,}64)\cong 0{,}5$ και $\ln 10\cong 2{,}3$)

α. Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.

β. Να αποδείξετε ότι $c=\frac{1}{2}$.

γ. Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

Μονάδες (7+9+9)=25

29

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Ο $\log_\alpha \theta$, α>0 με α≠1 και θ>0, είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε το θ.

β. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x-ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x=ρ είναι δηλαδή υ= P(ρ).

γ. Αν ημx=ημθ, τότε θα είναι κατ' ανάγκη x=θ.

δ. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ με α>1 είναι γνησίως αύξουσα στο R.

ε. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$ τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Α(0,1) για κάθε α>0.

Μονάδες 5x2=10

Α2. Αν $0<\alpha\neq 1$ και θ_1,θ_2 θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$$\log_\alpha(\theta_1\theta_2)=\log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_2$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 4.2 15012

Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-3$ έχει πηλίκο x^2+2 και υπόλοιπο 4.

α. Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.

β. Να δείξετε ότι $P(x)=x^3-3x^2+2x-2$.

γ. Είναι το $x=3$ ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (8+8++9)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\log x,\ x>0.$$

α. Να λύσετε την ανίσωση

$$f(e^{x-1}+7)>3f(2).$$

β. Να δείξετε ότι

$$100^{\log\sqrt{2}}=2$$

γ. Να λύσετε την εξίσωση

$$2^{\log x^2}-2^{\log x}-100^{\log\sqrt{2}}=0$$

Μονάδες (9+6+10)=25

ΘΕΜΑ Δ 3.4 15422

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\alpha\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}-2x)-2\eta\mu(\pi+2x)\ \ \mu\varepsilon\ \ \alpha>0.$$

α. Να δείξετε ότι $f(x)=(\alpha+2)\eta\mu 2x$.

β. **i.** Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 4, να δείξετε ότι α=2.

ii. Να βρείτε την περίοδο της f.

γ. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.

δ. Αν $g(x)=5-\sigma\upsilon\nu^2 2x$, να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την C_g, όπου C_f, C_g οι γραφικές παραστάσεις των f, g αντίστοιχα.

Μονάδες [5+(5+5)+5+5]=25

30

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Η συνάρτηση y=ημx είναι περιοδική με περίοδο 2π.

β. Η συνάρτηση y=συνx είναι γνησίως αύξουσα στο [0, π/2].

γ. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) δια του (x+ρ) είναι υ=P(ρ).

δ. Αν P(ρ)≠0 τότε το P(x) δεν έχει παράγοντα το $(x-\rho)$.

ε. Αν $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$ τότε $x_1 < x_2$ για κάθε α>0.

Μονάδες 5x2=10

A2. Αν α>0 με α≠1 τότε για οποιοδήποτε θ>0 και k∈ ℝ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\log_\alpha \theta^k = k \cdot \log_\alpha \theta$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 4.3 15176

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$.

α. Να αποδείξετε ότι το $x-1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

β. Αν $P(x) = (x-1)(x^2 - x + 2)$, να βρείτε για ποιες τιμές του x είναι $P(x) > 0$.

Μονάδες (12+13)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \sigma\upsilon\nu x(\varepsilon\varphi x + \sigma\upsilon\nu x) + \eta\mu^2 x \text{ και}$$

$$B = \varepsilon\varphi(\pi + x)\sigma\varphi(-x) - \sigma\upsilon\nu(\pi - x)\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ με } x \neq \frac{\kappa\pi}{2},\ \kappa \in Z.$$

α. Να αποδείξετε ότι $A=\eta\mu x+1$.

β. Να αποδείξετε ότι $B = -\eta\mu^2 x$

γ. Να λύσετε την εξίσωση $3A - 5 = 2B$.

Μονάδες (8+8+9)=25

ΘΕΜΑ Δ 5.3 15015

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - x^2 - 2x.$$

α. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

β. Να λύσετε την εξίσωση

$$\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x = 0.$$

γ. Να λύσετε την ανίσωση

$$\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x > 0.$$

Μονάδες (7+8+10)=25

31

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Έστω πολυώνυμο P(x) με ακέραιους συντελεστές, αν ένας αριθμός είναι διαιρέτης του σταθερού όρου του P(x) τότε είναι ρίζα του P(x).

β. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ με α>1 είναι γνησίως αύξουσα.

Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

Δίνεται η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\log_\alpha x$ με 0<α<1.

γ. Η συνάρτηση g έχει σύνολο τιμών ………………..

δ. Η συνάρτηση g είναι γνησίως …………….. που σημαίνει ότι: αν $x_1<x_2$ τότε

…………………

ε. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο ………… και έχει ασύμπτωτο ……………..

Μονάδες 5x2=10

Α2. Για κάθε γωνία ω, να αποδείξετε ότι ισχύει: $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 3.4 20807

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ημ(\pi+x)+ημ(-x)$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=-2ημx$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να βρείτε την περίοδο αυτής.

β. i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)=-2ημx$					

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης **f** για $0\le x\le 2\pi$.

Μονάδες [12+(6+7)]]=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(-3^{2x+1}+10\cdot 3^{x}-3)$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=1+x\log 3$

Μονάδες (12+13)=25

ΘΕΜΑ Δ 4.4 17941

Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}=α,\ α\in\mathbb{R}.$ (1)

α. Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η εξίσωση (1).

β. Να λύσετε την εξίσωση (1) για $α=0$.

γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}$ είναι άρτια.

δ. Να αποδείξετε ότι:

i. Για $α=2\sqrt{2}$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα.

ii. Για $α\ne 2\sqrt{2}$ αν η εξίσωση (1) έχει ως ρίζα τον αριθμό $ρ\in[-2,2]$, τότε θα έχει ως ρίζα και τον αριθμό $-ρ$.

Μονάδες [5+5+5+(5+5)]=25

32

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το $x-\rho$ είναι ίσο με το P(ρ).

β. Αν P(ρ)=0 τότε το x+ρ είναι παράγοντας του πολυωνύμου P(x).

γ. Η εξίσωση εφx=εφθ έχει λύσεις: x=2κπ+θ με $\kappa \in Z$.

δ. Αν το άθροισμα δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ένα μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο βαθμός του είναι ίσος ή μικρότερος από το μέγιστο των βαθμών των δύο πολυωνύμων.

ε. Για κάθε $x \in R$, α>0, α≠1 και θ>0 ισχύει: $\log_\alpha \alpha^x = x$ και $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$

Μονάδες 10

Α2. Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x–ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x=ρ. Είναι δηλαδή υ=P(ρ)

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 4.2 20640

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 7x - 1$.

α. Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1.

β. Έστω Q(x) πολυώνυμο το οποίο δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

i. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_1(x) = P(x) + Q(x)$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

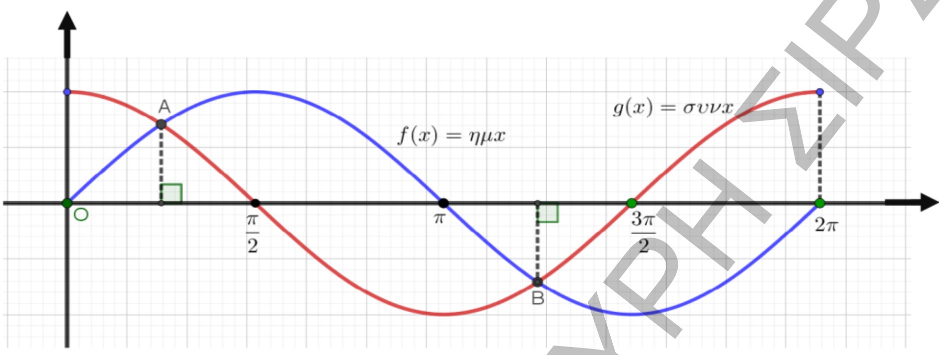
ii. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_2(x) = P(x) \cdot Q(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.

Μονάδες (9+8+8)=25

Ι.Ε.Π **ΘΕΜΑ Γ** **3.4** **15391**

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=\eta\mu x \text{ και } g(x)=\sigma\upsilon\nu x,\ x\in[0,2\pi].$$



α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

β. Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης $g(x)$ στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ και την μονοτονία της συνάρτησης $f(x)$ στο $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$.

γ. Με την βοήθεια του ερωτήματος β) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να συγκρίνετε, με δικαιολόγηση, τους αριθμούς:

i. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ και $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

ii. $\eta\mu\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ και $\eta\mu\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.

Μονάδες [10+4+(5+6)]=25

ΘΕΜΑ Δ **5.2** **15474**

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση

$$P(x) = e^{\ln e}x^3 + 4x^2\ln\sqrt{e} + 2.$$

α. Να δείξετε ότι

$$P(x) = ex^3 + 2x^2 + 2.$$

β. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία $\varepsilon\colon y = ex + 4$.

γ. Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία $\varepsilon\colon y = ex + 4$.

δ. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης:

$$P(e) - e^2 - 4.$$

Μονάδες (5+8+8+4)=25

33

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με P(x) με το x-ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x=ρ. Είναι δηλαδή υ=P(ρ).

β. Ισχύει lne=0.

γ. Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ έχει το πολύ μία ρίζα σε αυτό το διάστημα.

δ. Αν συνx=συνθ τότε x=2κπ+θ ή x=2κπ-θ , $\kappa \in \mathbb{Z}$.

ε. Ισχύει $\log\theta_1 + \log\theta_2 = \log(\theta_1 \cdot \theta_2)$ αν $\theta_1 \cdot \theta_2 > 0$.

Μονάδες 5x2=10

A2. Αν α>0 με α≠1 τότε για οποιοδήποτε θ>0 και k∈ ℝ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\log_\alpha \theta^k = k \cdot \log_\alpha \theta$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.1 15011

Ο Κώστας κατέθεσε σε μια τράπεζα 15 χαρτονομίσματα των 20€ και 50€. Η συνολική αξία των χρημάτων που κατέθεσε είναι 480€.

α. Αν x είναι το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 20€ και y το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 50€, να επιλέξετε ένα από τα παρακάτω συστήματα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους που εκφράζει τα δεδομένα του προβλήματος.

Α. $\begin{cases} y = 15 - x \\ 50y - 20x = 480 \end{cases}$ Β. $\begin{cases} y = 15 - x \\ 20x + 50y = 480 \end{cases}$

Γ. $\begin{cases} y-x=15 \\ 20x+50y=480 \end{cases}$ Δ. $\begin{cases} y-x=15 \\ 50y-20x=480 \end{cases}$

β. Από τη λύση του συστήματος που επιλέξατε στο α) ερώτημα, να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 20 € και πόσα των 50 € κατέθεσε ο Κώστας.

Μονάδες (10+15)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=2x^3+\alpha x^2-\beta x+6.$$

Αν το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου και η διαίρεση $P(x):(x-1)$ αφήνει υπόλοιπο -4

α. Να δείξετε ότι α=1 και β=13

β. Για α=1 και β=13 να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$

γ. Να λυθεί η εξίσωση $2\eta\mu^3x+\eta\mu^2x-13\eta\mu x+6=0$

Μονάδες (8+10+7)=25

ΘΕΜΑ Δ 5.2 20669

α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{x^2+1}-x>0, \text{ για κάθε } x\in(-\infty,0).$$

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

β. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(-x)+g(x)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O.

Μονάδες [(3+9)+(9+4)]=25

34

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

β. Αν α>0 με α≠1 και θ>0 τότε $\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha \theta$

γ. Η συνάρτηση f(x)=εφx έχει πεδίο ορισμού της το σύνολο $R_1 = \{x \mid \eta\mu x \neq 0\}$

δ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με f(x)=φ(x+c) όπου c>0, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα δεξιά.

ε. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ και g(x)=lnx είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$

Μονάδες 5x2=10

Α2. Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x - \rho$ $(\rho \in R)$ αν και μόνο αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του P(x).

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.1 21227

α. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 5x - y = 5 \\ -5x + y = 2 \end{cases}$.

β. Να σχεδιάσετε τις ευθείες (ε_1): $5x - y = 5$ και (ε_2): $-5x + y = 2$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος.

Μονάδες 12+13=25

ΘΕΜΑ Γ

α. Να λυθεί η εξίσωση:

$$(\eta\mu x-1)(2\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{3})=0$$

β. N' αποδείξετε τις ταυτότητες:

i. $\dfrac{(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)^2}{2}+\dfrac{(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)^2}{2}=1$

ii. $(1+\sigma\varphi x)^2+(1-\sigma\varphi x)^2=\dfrac{2}{(\eta\mu x)^2}$

Μονάδες [12+(6+7)]=25

ΘΕΜΑ Δ 5.3 15823

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2-1$ δίνει πηλίκο $3x-2$ και υπόλοιπο 1.

α. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=1$.

β. Να αποδείξετε ότι $P(\log 5)\neq 1$.

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

Μονάδες (10+10+5)=25

35

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Αν μια συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή και έχει ρίζα τον αριθμό ρ, τότε θα έχει ρίζα και τον αριθμό $-\rho$.

β. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(-3,4)$, τότε η f είναι γνησίως φθί νουσα.

γ. Ισχύει $e^{\ln 3}=3$.

δ. Η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$ είναι περιττή.

ε. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ με $0<\alpha<1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Μονάδες 5x2=10

Α2. Αν $0<\alpha\neq 1$ και θ_1,θ_2 θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$$\log_\alpha(\theta_1\theta_2)=\log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_2$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 2.2 14983

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{1}{3}x^2,\ x\in\mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ η οποία προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της $g(x)$ κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μετά κατά μία μονάδα προς τα πάνω.

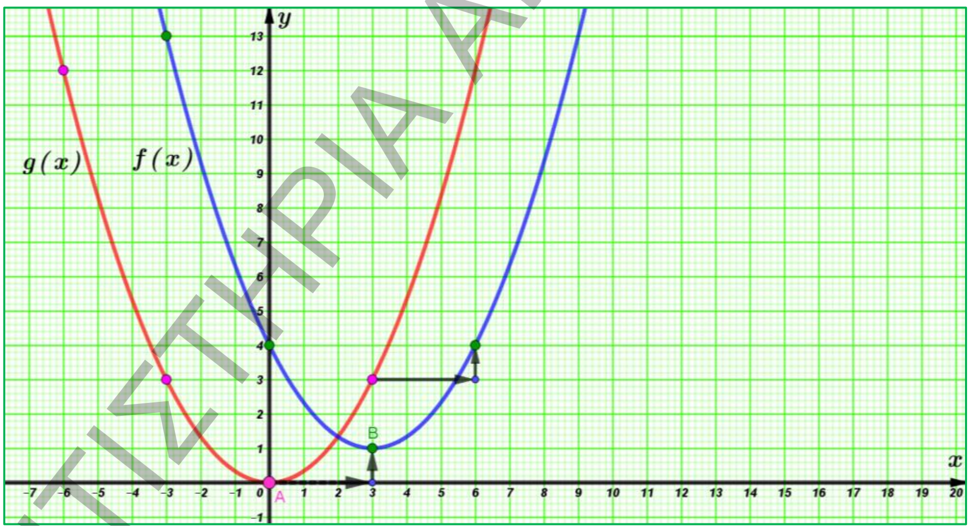
α. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση όσον αφορά τον τύπο της $f(x)$.

(I) $f(x)=g(x+3)+1$ **(II)** $f(x)=g(x+3)-1$.

(III) $f(x)=g(x-3)+1$ **(IV)** $f(x)=g(x-3)-1$.

β. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$ και την θέση ελαχίστου.

γ. Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.



Μονάδες (9+8+8)=25

ΘΕΜΑ Γ

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2ημx-εφy=1-\sqrt{3} \\ 4ημx+εφy=2+\sqrt{3} \end{cases}$

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ Δ **5.3** **20857**

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3-\alpha x^2+7x-\beta,\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x-3$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$ είναι $\upsilon=-16$, τότε:

α. Να υπολογισθούν οι τιμές των α,β.

Αν είναι $\alpha=5,\ \beta=3$,

β. να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

γ. να λυθεί η ανίσωση $P(x)<0$.

δ. Αν $P(\ln\kappa)<0$, τότε να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού κ.

Μονάδες (6+7+6+6)=25

36

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Οι εφαπτόμενες δυο συμπληρωματικών γωνιών είναι αντίστροφοι αριθμοί.

β. Κάθε σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

γ. Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή στο $\mathbb{R}$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x)+f(x)=0$.

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε η $-f$ είναι γνησίως αύξουσα.

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, τότε $f\left(\frac{2014}{2013}\right) > f\left(\frac{2013}{2014}\right)$.

Μονάδες 5x2=10

Α2. Για κάθε γωνία ω, να αποδείξετε ότι ισχύει: $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β   1.1   31570

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: 2x+y=6$ και $\varepsilon_2: x-2y=-2$.

α. Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο M.

β. Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon_3: 3x+y=8$ διέρχεται από το M.

Μονάδες (13+12)=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(e^{2x}-e^x)$ και $g(x)=\ln(e^{x+1}-e)$.

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>\ln 2$.

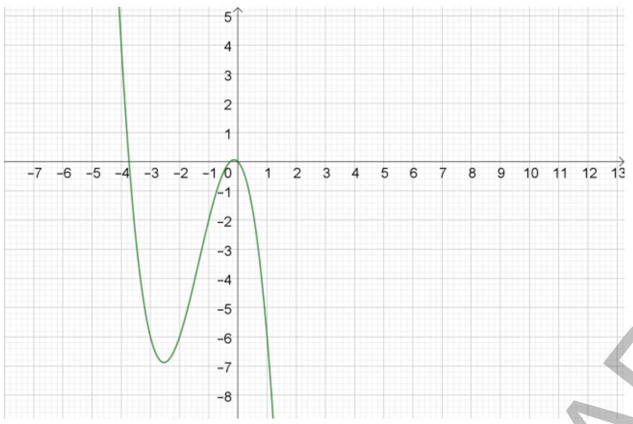
Μονάδες (6+10+9)=25

ΘΕΜΑ Δ **5.3** **15678**

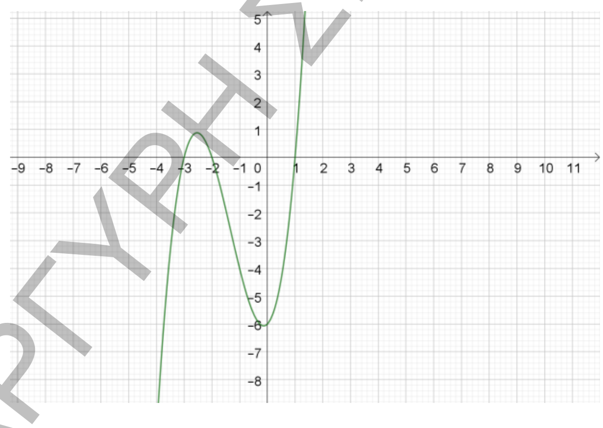
Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$.

α. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

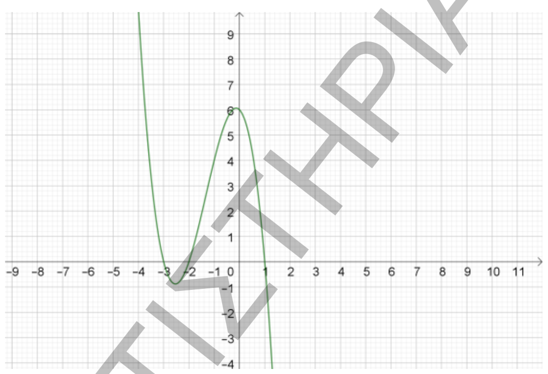
β. Από τα παρακάτω σχήματα, ένα μόνο μπορεί να αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. Να βρείτε ποιο αιτιολογώντας την απάντησή σας.



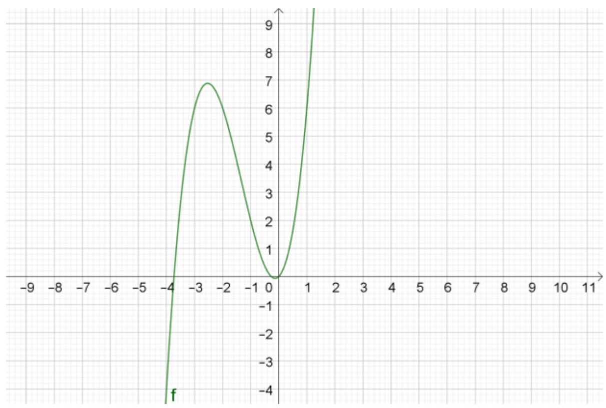
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

Μονάδες (10+7+8)=25

37

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Η συνάρτηση $f:[-1,2]\to R$ με $f(x)=3x^2$ είναι άρτια.

β. Αν ένα πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού, τότε είναι το μηδενικό πολυώνυμο

γ. Αν α>0, $\mu\in Z$, $\nu\in N^*$, τότε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$.

δ. $\log_\alpha(\theta_1\theta_2)=\log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_2$, $0<\alpha\neq1$, $\theta_1,\theta_2>0$.

ε. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^x$ και g(x)=lnx είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία x=y.

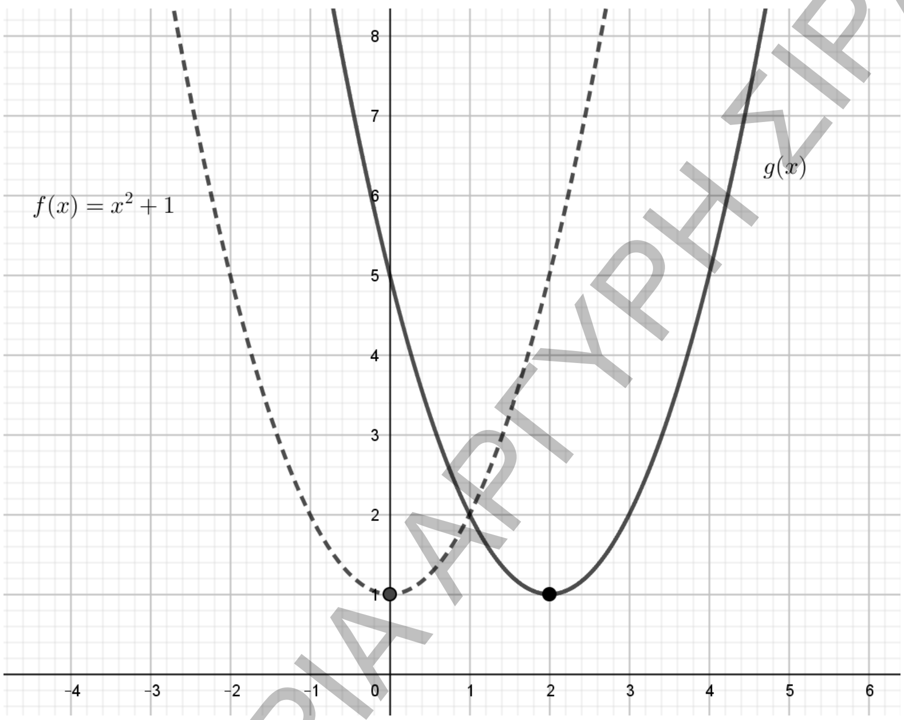
Μονάδες 5x2=10

Α2. Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x–ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x=ρ είναι δηλαδή υ=P(ρ)

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 2.2 20671

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+1$ και η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$ με $x\in\mathbb{R}$.



α. **i.** Είναι η f άρτια ή περιττή συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Έχει η f μέγιστη τιμή ή ελάχιστη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. **i.** Με ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f προέκυψε η γραφική παράσταση της g ;

ii.. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .

Μονάδες [(7+7)+(7+4)]=25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(2^x - 8).$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x)=3\ln 2.$$

γ. Να λύσετε την εξίσωση

$$2f(x) < 2\ln 2 + \ln 2^x.$$

Μονάδες (5+8+12)=25

ΘΕΜΑ Δ 5.3 37476

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2.$$

Να αποδείξετε ότι

α. το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$

β. $P(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty,-1) \cup (1,2)$.

γ. $1 < \log 20 < 2$.

δ. $P(\log 20) < 0$.

Μονάδες (6+7+6+6)=25

38

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Αν συνάρτηση f με τύπο f(x) και $x \in \mathbb{R}$ και $f(-x)=-f(x)$ τότε η f είναι περιττή

β. Η εξίσωση εφx=εφω έχει λύσεις τις $x=\kappa\pi+\omega$, $\kappa \in Z$ όπου ω γνωστή γωνία

γ. Η συνάρτηση $f(x)=\log_\alpha x$ έχει πεδίο ορισμού το A=R

δ. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ όπου $0<\alpha\neq1$ είναι γνησίως αύξουσα αν $0<\alpha<1$

ε. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\eta\mu(x-\pi)=-\eta\mu x$

Μονάδες 10

Α2. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0=0$ με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος ρ≠0 είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 2.1 14971

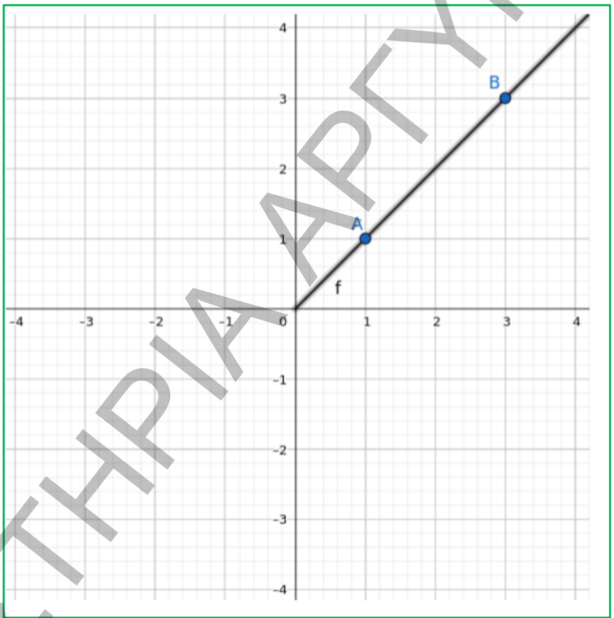
Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1)$, $B(3,3)$.

α. Να αιτιολογήσετε ποιες από τις επόμενες ιδιότητες θα μπορούσε και ποιες δε θα μπορούσε να έχει μία συνάρτηση f , που ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα Α και Β.

i. είναι σταθερή συνάρτηση

ii. είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

β. Να συμπληρώσετε την παρακάτω γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f, η οποία διέρχεται από τα Α,Β και είναι περιττή.



Μονάδες (12+13)=25

ΘΕΜΑ Γ

α. Να λύσετε την εξίσωση

$$2\eta\mu^2\omega + 3\eta\mu\omega - 2 = 0.$$

β. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = \left(2\eta\mu^2\omega + 3\eta\mu\omega - 2\right)x^3 + \left(\omega - \frac{5\pi}{6}\right)x^2 + x + 2013 \text{ με } \omega \in (0,\pi).$$

Αν το πολυώνυμο P(x) είναι δευτέρου βαθμού να βρείτε τη γωνία ω.

γ. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$K = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2} + \omega\right)\cdot\sigma\varphi(6\pi - \omega)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{11\pi}{2} - \omega\right)\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi + \omega)}$$

και αν $\omega = \frac{\pi}{6}$, να υπολογίσετε την παράσταση K.

Μονάδες (10+5+10)=25

ΘΕΜΑ Δ 5.2 15251

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 2x^3 - 9x^2 + (\alpha - 2)x - 6$$

το οποίο έχει παράγοντα το $x - 1$.

α. Να βρείτε τον αριθμό α.

β. Για $\alpha = 15$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x):\left(x^2 - 3x + 2\right)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

ii. αν $P(x) = \left(x^2 - 3x + 2\right)(2x - 3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2) < 0$.

Μονάδες [6+(6+7+6)]=25

39

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Αν $0 < x < \pi$ τότε $\eta\mu x > 0$.

β. Για κάθε x>0 ισχύει $e^{\ln x} = x$

γ. Κάθε σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

δ. Αν $0 < x < e$, τότε $\ln x < \log 10$.

ε. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \alpha^x$ $(0<\alpha\neq 1)$ και $g(x) = \log_\alpha x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x.

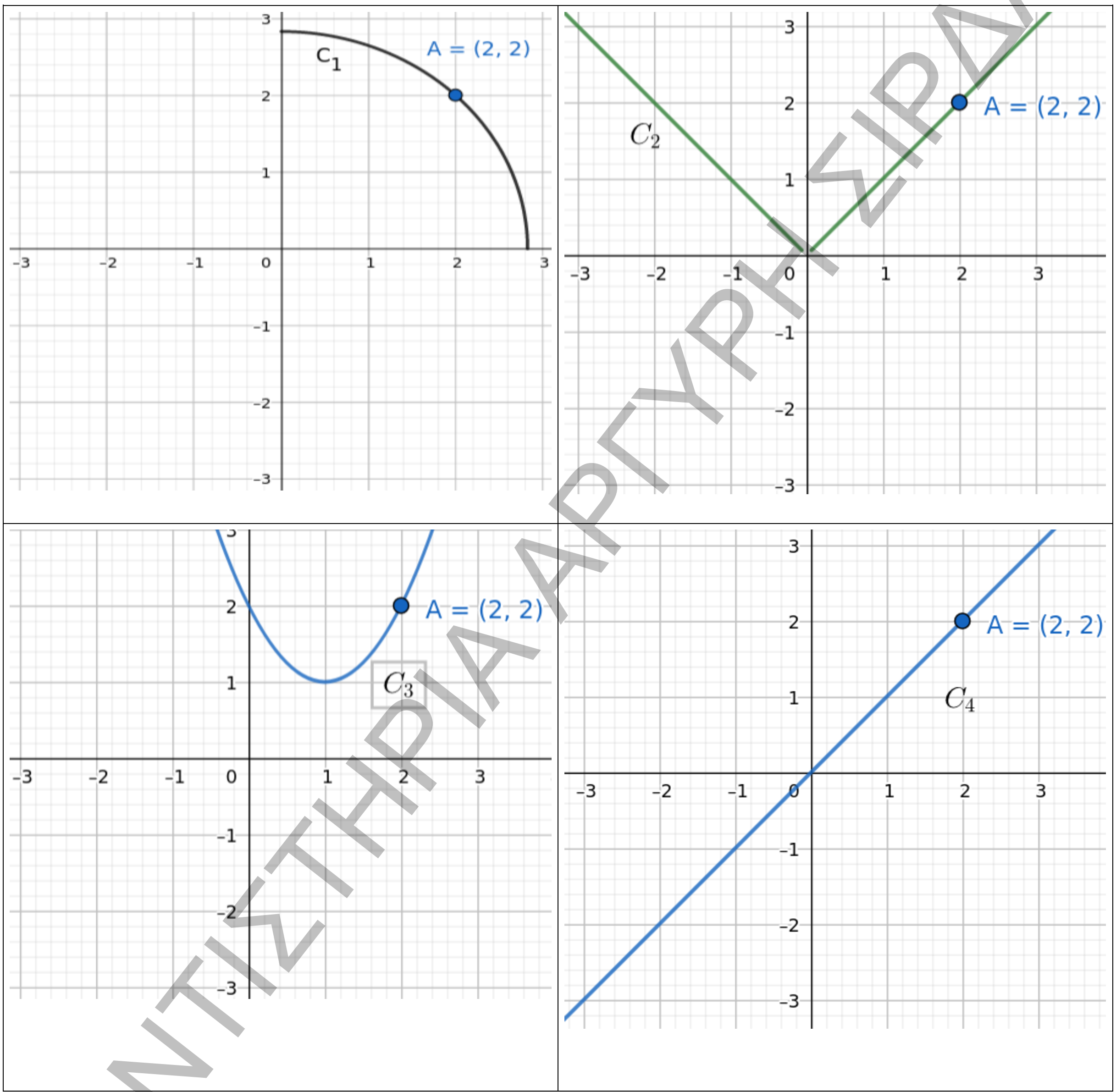
Μονάδες 5x2=10

Α2. Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x – ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x=ρ. Είναι δηλαδή υ = P(ρ)

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β **2.1** **14976**

Δίνονται τα παρακάτω σχήματα:



α. Να αιτιολογήσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3, C_4 αναπαριστούν άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, ποιες όχι και γιατί. Δίνεται ότι τουλάχιστον μία είναι άρτια και τουλάχιστον μία είναι περιττή.

β. Για τις συναρτήσεις C_2, C_4 να βρείτε την τεταγμένη του σημείου τους $B(-2,k)$ αιτιολογώντας την τιμή που βρήκατε από την ιδιότητα συμμετρίας καθεμίας συνάρτησης.

Μονάδες $(12+13)=25$

ΘΕΜΑ Γ

Έστω το πολυώνυμο $P(x)=(1-e^{2\sigma\upsilon\nu\theta+1})x^4+\ln^2\kappa\cdot x^3+\ln\kappa\cdot x^2+x-1$, το οποίο είναι τρίτου βαθμού και έχει παράγοντα το $x-1$.

α. Να βρείτε τα κ και θ.

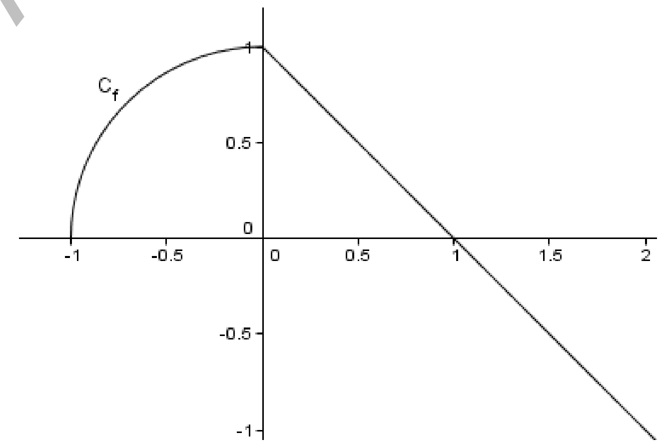
β. Να δείξετε ότι στη διαίρεση $P(x):x^2$ ισχύει $\upsilon(x)=\pi(x)$, όπου $\upsilon(x),\pi(x)$ το υπόλοιπο και το πηλίκο αντίστοιχα της διαίρεσης.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\le 0$.

Μονάδες $(9+8+8)=25$

ΘΕΜΑ Δ   3.3   18231

Έστω $f:[-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση C_f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α. Να βρείτε τη μονοτονία και τη μέγιστη τιμή της.

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$f\left(-\frac{3}{5}\right),\ f\left(-\frac{5}{9}\right)$$

γ. Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 0\\ 1-x, & x>0\end{cases}$,

να βρείτε τους αριθμούς $f(\sigma\upsilon\nu 120^\circ)$, $f(\eta\mu 120^\circ)$

δ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x-2)$, $x\ge 1$.

Μονάδες $(5+7+8+5)=25$

40

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ είναι πάντα γνησίως αύξουσα.

β. $\log_\alpha \theta^k = \alpha \log_k \theta$

Α2. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τις παρακάτω προτάσεις σωστά συμπληρωμένες:

γ. Κάθε …………….. και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0.

δ. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το $x-\rho$ είναι ίσο με …………

ε. Αν α>0 με α≠1, τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1,\theta_2>0$ ισχύει $\log_\alpha(\theta_1\cdot\theta_2)=$...........

Μονάδες 5x2=10

Α3. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+....+\alpha_1 x+\alpha_0=0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho\neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β 1.1 15016

Δίνεται το γραμμικό σύστημα $\begin{cases}3x+2y=8\\ 2x-y=3\end{cases}$.

α. Να αιτιολογήσετε γιατί το ζεύγος $(0,4)$ δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος.

β. Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

γ. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών

$$(\varepsilon_1):3x+2y=8 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2):2x-y=3.$$

Μονάδες (8+10+7)=25

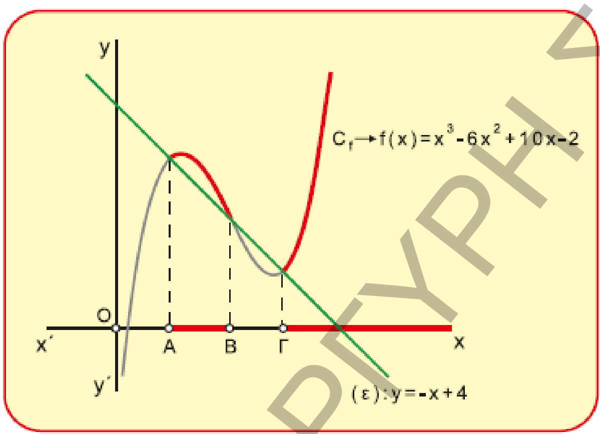
ΘΕΜΑ Γ

α. Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση $x^3-6x^2+11x-6=0$

β. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=x^3-6x^2+10x-2 \text{ και της ευθείας } (\varepsilon):\ y=-x+4$$

σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων xOy.



i. Να βρείτε τις τετμημένες x_1, x_2, x_3 των σημείων τομής τους.

ii. Αν $A(x_1,0)$, $B(x_2,0)$, $\Gamma(x_3,0)$ είναι οι ορθές προβολές των σημείων τομής τους στον άξονα x΄x να δικαιολογήσετε (αποδείξετε) ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική παράσταση της ευθείας (ε) για τα $x\in(x_1,x_2)\cup(x_3,+\infty)$

Μονάδες [10+(5+10)]=25

ΘΕΜΑ Δ 5.3 21674

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\sqrt{10^x-2}$.

α. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=(\log 2,+\infty)$.

β. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\log\sqrt{\dfrac{10^x}{3}}, x\in\mathbb{R}$.

i. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{\dfrac{10^x}{3}}=\sqrt{10^x-2}$ με $x\in(\log 2,+\infty)$.

ii. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων, των συναρτήσεων f και g.

Μονάδες [7+(9+9)]=25

ΘΕΜΑΤΑ Γ

77

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2024

72

ΘΕΜΑΤΑ Γ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2\eta\mu\left(\frac{x}{3}\right)$.

α. Να βρείτε το μέγιστο, το ελάχιστο και την περίοδο της f.

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = -1$ στο διάστημα $[0,2\pi]$.

Μονάδες (9+16)=25

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(1-e^x) - \ln(x+2)$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g, με $g(x) = 1 - \ln(x+2)$, δεν έχουν κοινό σημείο.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > x + \ln\frac{1}{x+2}$

Μονάδες (7+9+9)=25

3. Δίνεται η συνάρτηση f με

$f(x) = \ln\frac{x-1}{x+1}$ και το πολυώνυμο Q με $Q(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12x - 5$.

α. Να κάνετε τη διαίρεση $Q(x):(2x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

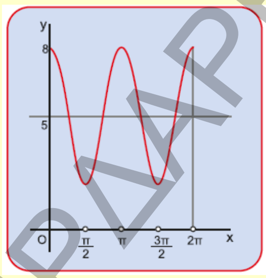
γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x^2) + f(x) = \ln(2ex) - \ln 5 - 1$.

δ. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από την ευθεία με εξίσωση y=1.

Μονάδες (6+6+6+7)=25

4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η καμπύλη της συνάρτησης

$$f(x)=5+3\sigma\upsilon\nu(2x)$$



α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, Δ και τα ακρότατά της.

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει:

$$f(x)=10\eta\mu\frac{\pi}{6}+2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-\sigma\upsilon\nu(\pi-2x)$$

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της καμπύλης με την ευθεία y = 5.

Μονάδες (9+8+8)=25

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(e^{2x}+5e^{x}-14)$ και $g(x)=x+\ln(1-2e^{-x})$

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g, A_f και A_g αντίστοιχα.

β. Να δείξετε ότι

$$g(x)=\ln(e^{x}-2) \text{ και } f(x)-g(x)=\ln(e^{x}+7) \text{ για κάθε } x>\ln 2$$

γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = g(x)+2\ln 3$

δ. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από την γραφική παράσταση της g για κάθε $x\in A_f\cap A_g$.

Μονάδες (6+6+7+6)=25

6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=2\sigma\upsilon\nu 3x-1,\ x\in\mathbb{R}$

α. Να βρείτε την περίοδο, το μέγιστο και το ελάχιστο της f .

β. Να δείξετε ότι $f(\frac{\pi}{12})+f(\frac{\pi}{9})-f(\frac{\pi}{6})=\sqrt{2}$

γ. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)+\rho=0$ για $x\in[0,\frac{2\pi}{3})$

όπου ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης $4^{x}+16=2^{x+3}$

Μονάδες (6+5+14)=25

7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\ln(\frac{\ln^2 x-1}{3})$

α. Να δείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο

$$A_f=(0,\frac{1}{e})\cup(e,+\infty)$$

β. Να δείξετε ότι : $f(\frac{1}{e^3}) = 3\ln 2 - \ln 3$

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \le f(\frac{1}{e^3})$

Μονάδες (8+8+9)=25

8. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 + \alpha x - 3$ $\alpha \in \mathbb{R}$ το οποίο έχει ρίζα την $\rho = -1$

α. Να βρεθεί η τιμή του α

β. Για $\alpha = -3$

i. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$

ii. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \ge 0$

Μονάδες (5+10+10)=25

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 5^{\log x}$, $g(x) = x^{\log 5}$, $x \in (0, +\infty)$

α. Να αποδείξετε ότι:

i. . $f(x)=g(x)$ **ii.** $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$

iii. $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}$ **iv.** $f(x^\nu) = [f(x)]^\nu$ $\nu \in N^*$

β. Να λύσετε την εξίσωση: $f^2(x) = 5 + 4g(x)$

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $f(3x) > f(x^2 - 4)$

Μονάδες [(2+2+2+2)+8+9]=25

10. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\alpha^2 - 1)x^4 + \frac{1}{2}(\alpha + 1)x^3 - 2x^2 - 5x + 2\alpha + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Αν το P(x) είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού και ο αριθμός 1 είναι ρίζα του P(x), να υπολογίσετε τα α και β.

β. Αν α=1 και β=4 τότε:

i. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης P(x):(x+1).

ii. Να λύσετε την εξίσωση: P(x)=0.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{x-1} \le 0$.

Μονάδες [5+(5+7+8)]=25)

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(e^{2x}-2e^{x}+3)$ και $g(x)=\ln 3+\ln(e^{x}-1)$

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f(x) και g(x).

β. Να λύσετε την εξίσωση f(x)=g(x)

γ. Να λύσετε την ανίσωση f(x)>2g(x).

Μονάδες (6+10+9)=25

12. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2\alpha x+\beta^2-1$, το οποίο έχει παράγοντα τον x και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$ είναι 3.

α. Να δειχθεί ότι $\alpha=2$ και $\beta=\pm1$

β. Να βρεθεί το πηλίκο της διαίρεσης του P(x) με το x+1 και να γραφεί το P(x) με την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

γ. Να λυθεί η εξίσωση P(x)=0

Μονάδες (10+10+5)=25

13. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+4$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έχει παράγοντες τους $x+1,\ x-2$.

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha=-3$ και β=0.

β. Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0.

γ. Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x). Να βρείτε:

i. τις συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η C τέμνει τον άξονα y΄y.

ii. Τις τιμές του x για τις οποίες η C είναι κάτω από τον άξονα x΄x.

Μονάδες [8+8+(3+6)]=25

14. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln 2x+\frac{1}{2}\ln x^2-\ln 2$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

β. Να λύσετε την εξίσωση f(x)=0

γ. Να αποδείξετε ότι $f(x)=2f(\sqrt{x})$ όπου x>0

Μονάδες (5+10+10)=25

15. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2-4x+k^2$

α. Να βρείτε τις τιμές του κ αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός ρ=1 είναι ρίζα του P(x).

β. Αν k=2

i. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το x+1.

ii. Να λύσετε την εξίσωση P(συνθ)=0.

Μονάδες (8+8+9)=25

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(\frac{1}{3})^x-\frac{3}{4}$ $x\in R$ και η συνάρτηση $g(x)=3^{-2x}$ $x\in R$

α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Να λύσετε την εξίσωση 4f(x)=g(x).

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>-\frac{5}{12}$

Μονάδες (7+10+8)=25

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(x-1)-\log(x-3)-1$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(5,-\log 5)$

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<-\log 5$

Μονάδες (5+6+7+7)=25

18. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^5+x^4+\kappa x+\lambda$ με $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$

α. Αν το P(x) έχει ρίζες το x=1 και το x=−1, να βρείτε τα κ και λ.

β. Για κ=−1 και λ=−1 να παραγοντοποιήσετε το παραπάνω πολυώνυμο σε όσο πιο πολλούς παράγοντες είναι δυνατό.

γ. Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{P(x)(3-2x)}{x^2-1}\geq 0$

Μονάδες (12+7+8)=25

19. **α.** Να λύσετε την εξίσωση: $2014^{3x-6}=1$

β. Αν ρ η ρίζα της παραπάνω εξίσωσης, θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x)=4\sigma\upsilon\nu(3x-\frac{\pi}{4})+\rho$$

i. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.

ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η f μηδενίζεται

γ. Δίνεται η ανίσωση: $2^{\sqrt{x^2+3}}\geq 4^{\sqrt{x}}$

i. Να λύσετε την παραπάνω ανίσωση.

ii. Να εξετάσετε αν η λύση ρ της εξίσωσης του **Γ1** ερωτήματος είναι και λύση της ανίσωσης.

iii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $2^{\sqrt{2014^2+3}}$ και $4^{\sqrt{2014}}$

Μονάδες [5+(4+4)+(6+3+3)]=25

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(x-2)$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=3\log 2-2\log 3$

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $f^2(x)+f(x)\geq 2$

δ. Να λύσετε την ανίσωση: $\log(f(x))\leq 0$

Μονάδες (5+5+8+7)=25

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^{2x}+\alpha e^{x}-2)$ με $f(1)=\ln(e^2+e-2)$

α. Να αποδείξετε ότι α=1.

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

γ. Να αποδείξετε ότι $f(\ln 2)=\ln 4$ και $f(\ln 3)=\ln 10$

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)-f(\ln 2)=f(\ln 3)$

Μονάδες (5+7+6+7)=25

22. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)=x^3-3x^2+\alpha x+2,\ \alpha\in R$.

α. Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x):(x-2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

β. Αν το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x), τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$

ii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)>x^2-4$

Μονάδες (9+7+9)=25

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x^2-2x+3\right)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να δείξετε ότι η ανίσωση $f\left(e^x\right)>\ln\left(e^x+1\right)$ μετατρέπεται ισοδύναμα στην ανίσωση $e^{2x}-3e^x+2>0$ την οποία και να λύσετε.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(\eta\mu x)=\ln\left(\sigma\upsilon\nu^2 x+\frac{7}{2}\right)$.

Μονάδες [7+(3+6)+9]=25

24. Για τη γωνία α ισχύει ότι: $5\sigma\upsilon\nu 2\alpha-14\sigma\upsilon\nu\alpha-7=0$

α. Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\alpha=-\frac{3}{5}$.

β. Αν επιπλέον ισχύει $\pi\le\alpha\le\frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημ2α, συν2α και εφ2α.

Μονάδες (10+15)=25

25. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\log(2^{x-1}+1)$ και $g(x)=\log(4^x+\alpha)-1$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A\left(2,\log\frac{6}{5}\right)$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-4$.

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g.

γ. Να αποδείξετε ότι $f(0)-f(-1)=g(2)$

δ. Να λύσετε την εξίσωση $g(x)=f(x)$

Μονάδες (6+5+6+8)=25

26. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^4-5x^2+\alpha x+\beta \text{ όπου } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

α. Να βρείτε το πηλίκο π(x) και το υπόλοιπο υ(x) της διαίρεσης του P(x) με το πολυώνυμο x^2-1.

β. Αν το υπόλοιπο της παραπάνω διαίρεσης είναι το $2x-5$ να δείξετε ότι α=2 και $\beta=-1$

γ. Για α=2 και $\beta=-1$ να λύσετε την εξίσωση $P(x)=-2x^2-1$.

Μονάδες (10+5+10)=25

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^{2x}-\frac{1}{2}e^x\right)$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της παραπάνω συνάρτησης.

β. Να δείξετε ότι $f(x)=x+\ln\left(e^x-\frac{1}{2}\right)$

γ. Να βρείτε τις τιμές f(1), f(2) και να δείξετε ότι f(1)<f(2).

δ. Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x)<x^3-2x^2+\ln\left(e^x-\frac{1}{2}\right)$$

(Υπόδειξη: $\sqrt{2}<1+\ln 2$)

Μονάδες (5+7+7+6)=25

28. Το πολυώνυμο

$$P(x)=\left(4^{\lambda+\frac{3}{2}}-12\cdot 2^{\lambda-1}+1\right)x^4-(\lambda+1)x^3+(1+\log\alpha)x^2-(2+\log\alpha)x-6,\ \alpha>0$$

είναι τρίτου βαθμού και έχει παράγοντα το $x-\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\lambda=-2$

ii. α=10

β. Να λύσετε την ανίσωση $\ln x^2+\ln|x|<P(2)$.

Μονάδες [(10+8)+7]=25

29. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\eta\mu(\pi-x)+\kappa$

διέρχεται από το σημείο Α(0,1). Να δείξετε ότι:

α. $f(x)=2\eta\mu x+1$

β. $-1\leq f(x)\leq 3$

γ. $f(x)+f(-x)=2$

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1+2\sigma\upsilon\nu x$

Μονάδες [(5+5+5)+10)=25

30. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=(4-\alpha)^x.$$

α. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in R$ για τις οποίες ορίζεται σε όλο το R η συνάρτηση αυτή.

β. Για ποιες από τις παραπάνω τιμές η συνάρτηση είναι:

i. γνησίως φθίνουσα **ii.** γνησίως αύξουσα

γ. Αν το σημείο Α(1,2) ανήκει στη γραφική παράσταση της f(x), να βρείτε το α.

δ. Για α=2

i. Να αποδείξετε ότι: $f(\log_2 3)+f(\log_2 5)=8$

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $f(2x)-3f(x)+2=0$

Μονάδες [7+(4+3)+4+(2+5)]=25

31. Έστω P(x) πολυώνυμο 3ου βαθμού, το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο x^2+1, έχει ρίζα το 0 και του οποίου το άθροισμα των συντελεστών είναι ίσο με 2.

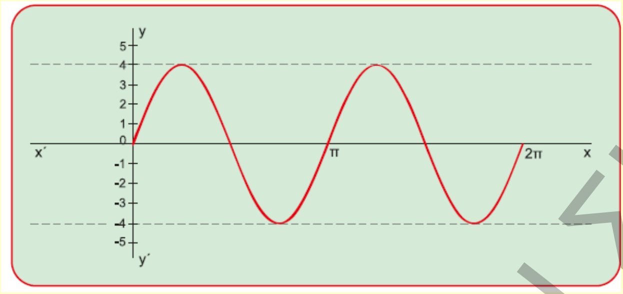
α. Να αποδείξετε ότι $P(x)=x^3+x$

β. Να λύσετε την ανίσωση:

$$(P(x)-2)^3+(P(x)-2)^2+P(x)>2$$

Μονάδες (14+11)=25

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)$, με ρ>0, ω>0 και πεδίο ορισμού Α=[0,2π], που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α. Με βάση το σχήμα να βρείτε τα ακρότατα της f(x) και τις τιμές του x για τις οποίες παρουσιάζει την ελάχιστη τιμή της.

β. Να υπολογίσετε την περίοδο Τ της συνάρτησης f(x) καθώς και τα ρ, ω.

γ. Αν f(x)=4ημ(2x) να λυθεί η εξίσωση f(x)=2 στο διάστημα [0,π].

δ. Να συγκρίνετε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{9}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{7}\right)$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες (8+6+6+5)=25

33. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x-2$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-2$

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-3$

β. Να κάνετε τη διαίρεση του P(x) με το x^2+2x+1 και να γράψετε την ταυτότητά της.

γ. Να λύσετε την ανίσωση P(x)<0.

Μονάδες (8+8+9)=25

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{\log\alpha-\log 3}{\log\beta-\log\alpha}\right)^x$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και 3<α<β. $(\log\theta=\log_{10}\theta)$

α. Αποδείξτε ότι $\log\frac{\alpha}{3}>0$ και $\log\frac{\beta}{\alpha}>0$

β. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\left(\frac{3\beta}{\alpha^2}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα.

Αν α=30 και β=3000

γ. Αποδείξτε ότι $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(3-x)=4\sqrt{4^{1-x}}$

Μονάδες (4+8+6+7)=25

35. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-13x+12$

α. Να αποδείξετε ότι το $x-2$ δεν είναι παράγοντας του πολυωνύμου P(x)

β. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το $x-3$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0.

δ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

Μονάδες (5+6+6+8)=25

36. Έστω οι συναρτήσεις f, g με

$$f(x)=\ln\left(\frac{e^{2x}-e^x}{e^x+2}\right) \text{ και } g(x)=\ln(x^3-4x^2+5x-2)$$

α. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των f και g

β. Να λυθεί η εξίσωση f(x)=ln2

γ. Να δειχθεί ότι $g(x)=2\ln(x-1)+\ln(x-2)$

Μονάδες (12+8+5)=25

37. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^3-6$ και $g(x)=6x^2-11x$

α. Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων τομής τους.

β. Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται «κάτω» από τη γραφική παράσταση της g.

Μονάδες (15+10)=25

38. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\frac{e^{2x}-4e^x+3}{e^x-1}$

α. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού τους.

β. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της g βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(g(x))=0$

Μονάδες (5+10+10)=25

39. α. Για ποιες τιμές του $x \in R$ ορίζεται η παράσταση: $A=\dfrac{\sqrt{5}}{\eta\mu\frac{\pi}{3}-1}+\dfrac{1}{2\sigma\upsilon\nu x-1}$

β. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους αληθεύει η ισότητα

$$\eta\mu x(\eta\mu x+1)+\frac{1}{\sqrt{2}}=\eta\mu\frac{\pi}{4}$$

Μονάδες (10+15)=25

40. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x)=4\alpha^2x^3+\frac{8}{3}(1-\alpha^2)x^2-x-2$, όπου $\alpha \in R$ με α>0,

για το οποίο ισχύει P(1)=0.

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha=\frac{1}{2}$.

β. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο $x-1$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση: P(x)=0.

Μονάδες (10+8+7)=25

41. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+(\alpha+\beta)x^2+(2\alpha+5\beta)x+3$ με $\alpha,\beta \in R$.

α. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta \in R$ έτσι ώστε το x+1 να είναι παράγοντας του P(x) και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$ να ισούται με -9.

β. Για $\alpha=-7$ και β=2:

i. Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0.

ii. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

iii. Αν υ(x) το υπόλοιπο της προηγούμενης διαίρεσης να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{\upsilon(x)}{P(x)}\geq 0.$$

Μονάδες [8+(5+6+6)]=25

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(\ln\theta+2)^x$, $x\in R$

α. Να βρείτε τις τιμές του θ για τις οποίες ορίζεται η συνάρτηση.

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu\in R$ και θ>e ισχύει: $e^{\ln f(\mu+1)-\ln f(\mu)}>3$

γ. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το A(2,16) να βρείτε το θ

δ. Για $\theta=e^2$ να λύσετε την ανίσωση: $6f(x)-8>16^x$

Μονάδες (5+7+5+8)=25

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, με $x\in\mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι η $f(x)\le 1$

β. Είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

Μονάδες (8+8+9)=25

44. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x-2$.

α. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει ως παράγοντες τους $x-2$ και x+1:

Να αποδείξετε ότι: α=0 και $\beta=-3$

β. Αν α=0 και $\beta=-3$ να λύσετε την εξίσωση P(x)=0.

γ. Αν α=0 και $\beta=-3$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)\ge 0$

Μονάδες (8+9+8)=25

45. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x)=x^3-(2^\lambda+3)x^2+2^\lambda x+2\cdot 4^\lambda$, $\lambda\in R$.

α. Να υπολογίσετε το λ ώστε το $x-2$ να είναι παράγοντας του P(x).

β. Αν λ=1, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με f(x)=ln(P(x))

γ. Αν λ=1 και Q(x) το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x-4)$, να λυθεί η εξίσωση

$$Q(\eta\mu\theta)=\sigma\upsilon\nu^2\theta-2$$

Μονάδες (9+8+8)=25

46. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-(\ln\alpha+5)x^2+(5\ln\alpha+6)x-6\ln\alpha$ με α>0

α. Να βρείτε την τιμή του α έτσι, ώστε P(1)=0.

β. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x-2$

γ. Να αποδείξετε ότι το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$ είναι

$$\pi(x)=x^2-4x+3$$

δ. Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0

Μονάδες (5+6+7+7)=25

47. **α.** Να αιτιολογήσετε, γιατί, για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x, ισχύει $2^x+1>0$ και να λύσετε την ανίσωση $2^x-4>0$.

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(4^x-3\cdot2^x-4)$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)-\ln4=\ln(2^x+1)$

Μονάδες [8+(7+10)]=25

48. Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x)=3x^2+x-8\sigma\upsilon\nu\alpha \text{ και } Q(x)=x^3+7x^2+\ln(e\beta)\cdot x-10,$$

όπου α, β πραγματικοί αριθμοί με β>0.

α. Βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η x=1 είναι ρίζα του P(x).

β. Αν το Q(x) διαιρούμενο με το x+1 αφήνει υπόλοιπο -6, να δείξετε ότι β=e.

γ. Αν $P(x)=3x^2+x-4$ και $Q(x)=x^3+7x^2+2x-10$, να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση του Q(x) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση του P(x).

Μονάδες (7+6+12)=25

49. Έστω $P(x)=\alpha x^3+x^2+8\alpha^2-4$ με $\alpha\in R$ ένα πολυώνυμο. Δίνεται ότι το πολυώνυμο P(x) είναι 3ου βαθμού και έχει ρίζα τον αριθμό -2.

α. Να αποδείξετε ότι α=1.

β. Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0.

γ. Να λύσετε την ανίσωση P(x)>(x+2)(x+5).

Μονάδες (8+8+9)=25

50. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(e^x-1)$ και $g(x)=2\ln x^2-\ln 12$.

Θεωρούμε την παράσταση $A=f(\ln 3)-g(\sqrt{6})$.

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>\ln(e-1)$.

γ. Να αποδείξετε ότι $A=\ln\frac{2}{3}$ και ότι A<0.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(2x)=\ln(e^x+1)$.

Μονάδες (6+5+7+7)=25

51. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(x^2-4)-\log(6x)+\frac{1}{2}\log 4$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f(x).

β. Να λύσετε την ανίσωση f(x)<0.

Μονάδες (10+15)=25

52. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=(4^\kappa-2^{\kappa+2})x^3+\sigma\upsilon\nu\theta(2\sigma\upsilon\nu\theta-3)x^2-x-1 \text{ με } \theta\in(0,2\pi).$$

Αν το P(x) είναι 2ου βαθμού και ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου, να βρεθούν οι αριθμοί κ και θ.

Μονάδες 25

53. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+11x+\beta$ $\alpha,\beta\in R$

α. Να βρεθούν τα α, β αν $P(0)=-6$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x) με το x+1 είναι ίσο με -24

β. Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0

γ. Να λύσετε την ανίσωση P(x)>0

Μονάδες (9+8+8)=25

54. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log 2+\log(4^x+9)-1-\log(2^x+1)$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$

Μονάδες (10+15)=25

55. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2\alpha x+\beta^2-1$ το οποίο έχει παράγοντα το x και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1 είναι 3.

α. Να βρείτε τα α, β

β. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του P(x) με το x+1

γ. Να λυθεί η ανίσωση P(x)≥0 για τις τιμές των α,β που βρέθηκαν στο **Γ1** ερώτημα

Μονάδες (9+8+8)=25

56. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2\log x+1}{2\log x-1}$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f(x)

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{10}{3}$

Μονάδες (12+15)=25

57. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+4$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, το οποίο έχει παράγοντες τους $x+1$ και $x-2$.

α. Να βρείτε τα α και β.

β. Αν $\alpha=-3$ και β=0, να λύσετε την εξίσωση P(x)=0.

γ. Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x).

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής της C με τον άξονα y΄y.

ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η C είναι κάτω από τον άξονα x΄x

Μονάδες [10+5+(3+7)]=25

58. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{4-x}{4+x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A=f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$$

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)+f(-x)<-2\ln 3$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $e^{2f(x)}+3=4e^{f(x)}$.

Μονάδες (5+5+7+8)=25

59. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2\eta\mu(\pi - x) + 4\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) = 1 + 2\sqrt{2} \\ 4\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) - 2\sigma\upsilon\nu(\pi + y) = \sqrt{2} - 2 \end{cases}$

Μονάδες 25

60. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - (\alpha+3)x^2 + (\beta+4)x - 3,$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x-1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $x+1$ είναι ίσο με -16, να βρείτε τα α και β.

β. Αν $\alpha = 2$ και $\beta = 3$,

i. να λύσετε την εξίσωση P(x)

ii. να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η C είναι κάτω από τον άξονα x΄x, όπου C η γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x)

Μονάδες [10+(7+8)]=25

61. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + x + 6,$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $x-1$ είναι ίσο με 4, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α.

β. Αν $\alpha = -4$, να λύσετε:

i. την εξίσωση $P(x) = 0$.

ii. την ανίσωση $P(x) \le 0$.

Μονάδες [10+(9+6)]=25

62. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha(\log x)^4 + 8(\log x)^2 \cdot \log(100x),\ x > 0$ όπου $\alpha \in R$

α. Αν f(10)=25, να δείξετε ότι α=1.

β. Για την τιμή α=1 να δείξετε ότι η f(x) γράφεται στη μορφή:

$$f(x) = (\log^2 x + 4\log x)^2$$

γ. Να λύσετε την εξίσωση: f(x)=0.

Μονάδες (5+10+10)=25

63. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + 2\alpha x^2 + \beta x + 6,\ \text{όπου}\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

α. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x+1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$ είναι ίσο με 4, να βρείτε τα α και β.

β. Αν $\alpha = -2$ και $\beta = 1$, να λύσετε:

i. την εξίσωση $P(x) = 0$.

ii. την ανίσωση $P(x) \le 0$.

Μονάδες [10+(9+6)]=25

64. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^6 - 5x^4 - 10x^2 + \kappa,\ \kappa \in R$, το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$

α. Να βρείτε την τιμή του κ.

β. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Μονάδες (12+13)=25

65. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

α. Να γράψετε (χωρίς απόδειξη) το πεδίο ορισμού της A_f και την περίοδό της Τ.

β. Να βρείτε το ελάχιστο της f καθώς και τις τιμές του x για τις οποίες παρουσιάζεται το ελάχιστο αυτό.

γ. Να λυθεί στο διάστημα $(0,2\pi)$ η ανισότητα $f(x) \ge 3$

Μονάδες (5+10+10)=25

66. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2\ \text{και}\ g(x) = 6x - 5$$

α. Να λυθεί η εξίσωση $g(e^x) = f(e^x)$

β. Έστω η συνάρτηση

$$h(x) = \ln(g(e^x) - f(e^x)).$$

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h

ii. Να λυθεί η ανίσωση $h(x) \geq \ln(\ln e^4)$

Μονάδες [5+(10+10)]=25

(*) Θεωρούνται γνωστοί οι αριθμοί: ln3 και ln5

67. Θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\alpha^2 - 1)x^4 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (\alpha + 1)x^3 + (\alpha - 1)x^2 - 3\alpha x + \beta, \quad \alpha, \beta \in R$$

α. Αν το P(x) είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$ είναι -4 να υπολογίσετε τα α και β.

β. Αν α=1 και $\beta = -2$, τότε:

i. Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x^2+1)$

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

iii. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) < -4$

Μονάδες [8+(5+6+6)]=25

68. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

α. Αποδείξτε ότι το πεδίο ορισμού της f(x) είναι όλο το R.

β. Αποδείξτε ότι η f είναι περιττή.

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = [e^{f(x)} - x]^2 - 4x.$$

Αποδείξτε ότι $g(x) = (x-2)^2 - 3$ και να βρείτε την ελάχιστη τιμή της g(x) καθώς και για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η ελάχιστη αυτή τιμή.

δ. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση g(x).

Μονάδες (6+7+7+5)=25

69. **α.** Να λυθεί η ανίσωση

$$\left(\frac{2014}{2015}\right)^{x-3} > \left(\frac{2014}{2015}\right)^{9-2x}$$

β. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 7^x + x, \quad x \in R$$

i. Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

ii. Επιλύστε την ανίσωση

$$7^{x^2-17x} + x^2 - 17x < 7^{90-16x} + 90 - 16x$$

Μονάδες [10+(6+9)]=25

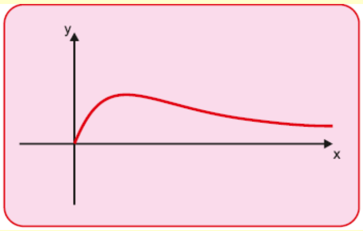
70. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2kx}{x^2 + k^2}, \quad k \neq 0$$

α. Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.

β. Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή της είναι 1 και να βρείτε την τιμή του x για την οποία αυτή επιτυγχάνεται.

γ. Στο διπλανό σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση της f για k=1, αλλά μόνο για $x \geq 0$. Να μεταφέρετε το σχήμα στο γραπτό σας συμπληρώνοντας όλη τη γραφική παράσταση.



δ. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$g(x) = k(x^2 + k^2)f(x) - 2013$$

Μονάδες (7+7+4+7)=25

71. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + \lambda x^2 - 2x - 6, \ \lambda \in R^*$$

α. Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x^2-2)$

β. Να βρεθεί η τιμή του m για την οποία η προηγούμενη διαίρεση είναι τέλεια.

γ. Για την προηγούμενη τιμή του m, να λυθεί η ανίσωση $P(x) \leq 0$

δ. Προσδιορίστε όλα τα πολυώνυμα F(x) 2ου βαθμού ώστε F(0)=0 και

$$F(x)-F(x-2)=4x\text{, για κάθε } x\in R$$

Μονάδες (8+2+6+9)=25

72. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\ln(e^x-1),\quad g(x)=\ln(e^x+2)$$

α. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των f, g.

β. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\ln 2)$, $g(-1)$

γ. Να λυθεί η εξίσωση

$$x+f(x)=\ln 2+g(x)$$

δ. Να λυθεί η εξίσωση

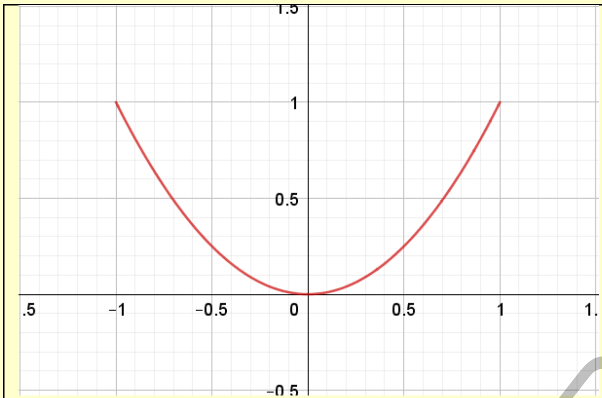
$$x^{\frac{5+\log x}{3}}=100^{5+\log x}$$

Μονάδες (4+4+7+10)=25

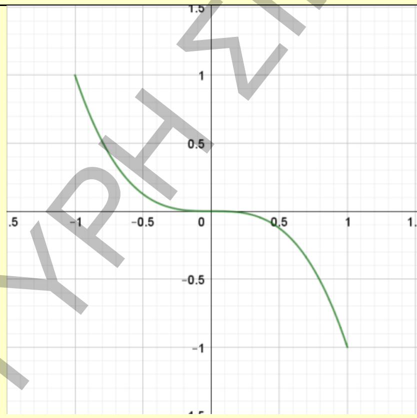
1. **ΘΕΜΑ Γ** **5.1** **15023**

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-1,1]$, η οποία είναι περιττή και γνησίως φθίνουσα.

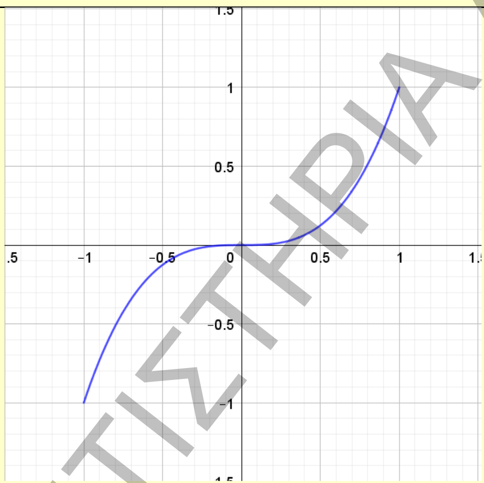
α. Από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις μόνο μία μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της f. Να βρείτε ποια είναι αιτιολογώντας την απάντησή σας.



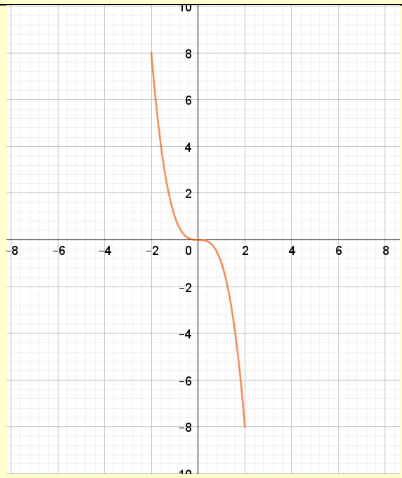
Σχήμα α



Σχήμα β



Σχήμα γ



Σχήμα δ

β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x)+2$

γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=f(x-1)$

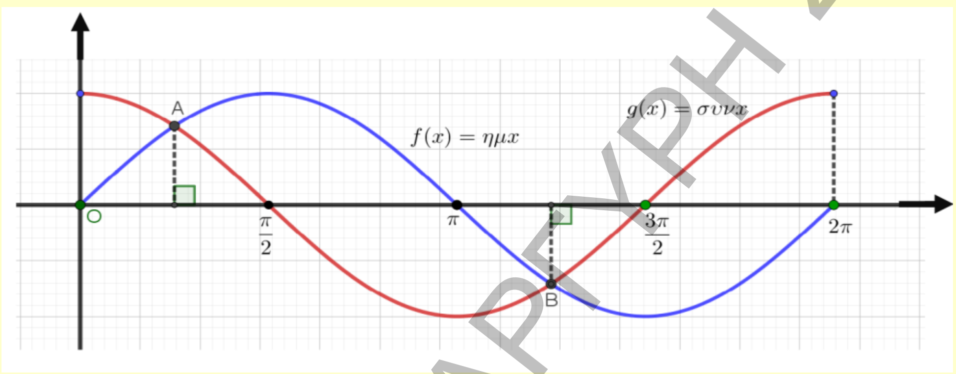
δ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $s(x)=e^x-1$ και να αποδείξετε (αλγεβρικά ή γραφικά) ότι η εξίσωση $s(x)=f(x)$ έχει μοναδική λύση τη $x=0$.

Μονάδες (8+5+5+7)=25

2. **ΘΕΜΑ Γ** **3.4** **15391**

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=\etaμx \text{ και } g(x)=\text{συν}x,\ x\in[0,2\pi].$$



α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

β. Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης $g(x)$ στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ και την μονοτονία της συνάρτησης $f(x)$ στο $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$.

γ. Με την βοήθεια του ερωτήματος β) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να συγκρίνετε, με δικαιολόγηση, τους αριθμούς:

i. $\text{συν}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ και $\text{συν}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

ii. $\etaμ\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ και $\etaμ\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.

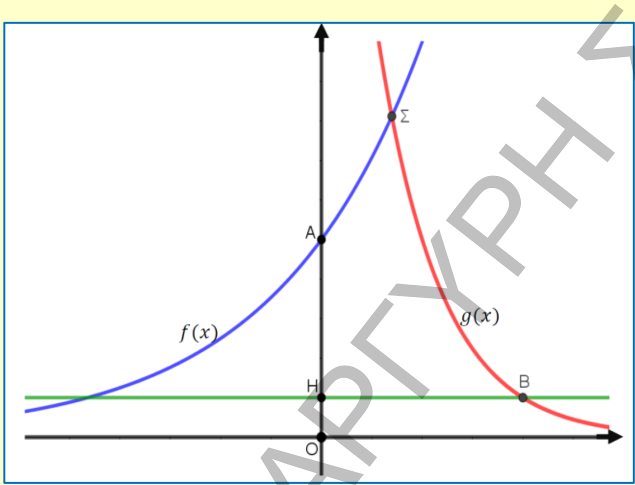
Μονάδες [10+4+(5+6)]=25

3. **ΘΕΜΑ Γ** **5.2** **15392**

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = 2^x \text{ και } g(x) = 5^{1-x},\ x \in R.$$

Μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $H\left(0, \frac{1}{5}\right)$.



α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

β. Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Σ.

γ. Αν είναι x_B, x_Σ οι τετμημένες των σημείων B, Σ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

$$x_B - x_\Sigma = \log 20.$$

Μονάδες (8+10+7)=25

4. **ΘΕΜΑ Γ** **5.3** **15676**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(e^x - 1).$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

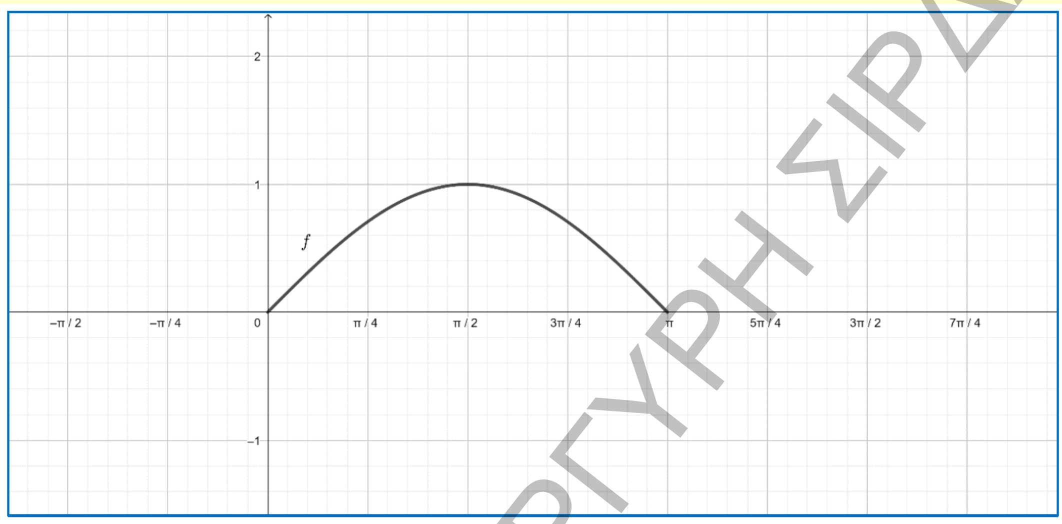
β. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx'.β

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον xx'.

Μονάδες (7+8+10)=25

5. **ΘΕΜΑ Γ** **3.4** **15789**

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ημx$ με $x \in [0, π]$.



α. **i.** Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και μετατοπίζοντας κατάλληλα την f να σχεδιάσετε την συνάρτηση $g(x) = f\left(x - \dfrac{π}{2}\right)$.

ii. Ποιος είναι ο τύπος της g και σε ποιο διάστημα ορίζεται;

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

Μονάδες (8+8+9)=25