

Γεωμετρία Α' Τάξης Ημερησίου και Εσπερινού Γενικού Λυκείου

Η εξέταση στην Γεωμετρία γίνεται ως εξής:

- I.** Στους μαθητές/τριες δίνονται τέσσερα (4) θέματα από την εξεταστέα ύλη, με τα οποία ελέγχεται η γνώση εννοιών και ορολογίας, η δυνατότητα αναπαραγωγής γνωστικών στοιχείων, η ικανότητα εκτέλεσης γνωστών αλγορίθμων, η ικανότητα του μαθητή να αναλύει, να συνθέτει και να επεξεργάζεται δημιουργικά ένα δεδομένο υλικό, καθώς και η ικανότητα επιλογής και εφαρμογής κατάλληλης μεθόδου.

- II.** Τα τέσσερα θέματα που δίνονται στους μαθητές διακρίνονται ως εξής:

- α.** Το πρώτο θέμα αποτελείται από δύο μέρη.

Το πρώτο μέρος περιέχει **πέντε (05) ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου** (πολλαπλής επιλογής, Σωστού-Λάθους, αντιστοίχισης) με τις οποίες ελέγχεται η γνώση και η κατανόηση των βασικών εννοιών και των σπουδαιότερων συμπερασμάτων της θεωρίας σε όσο το δυνατόν ευρύτερη έκταση της εξεταστέας ύλης.

Στο δεύτερο μέρος ζητείται η **απόδειξη μίας απλής πρότασης** (ιδιότητας, λήμματος, θεωρήματος ή πορίσματος), που είναι **αποδεδειγμένη** στο σχολικό εγχειρίδιο.

- β.** Το δεύτερο θέμα αποτελείται από μία άσκηση που είναι εφαρμογή ορισμών, αλγορίθμων ή προτάσεων (ιδιοτήτων, θεωρημάτων, πορισμάτων).

- γ.** Το τρίτο θέμα αποτελείται από μία άσκηση που απαιτεί από τον μαθητή/τρια ικανότητα συνδυασμού και σύνθεσης εννοιών και αποδεικτικών ή υπολογιστικών διαδικασιών.

- δ.** Το τέταρτο θέμα αποτελείται από μία άσκηση ή ένα πρόβλημα που η λύση του απαιτεί από τον μαθητή/τρια ικανότητες συνδυασμού και σύνθεσης γνώσεων, αλλά και την ανάληψη πρωτοβουλιών για την ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσής του.

Το δεύτερο, τρίτο και τέταρτο θέμα μπορούν να αναλύονται σε επιμέρους ερωτήματα που διευκολύνουν τον μαθητή/τρια στη λύση.

- III.** Η βαθμολογία κατανέμεται ανά **εικοσιπέντε (25) μονάδες** στο καθένα από τα τέσσερα (4) θέματα. Ειδικότερα, στο πρώτο θέμα το **πρώτο μέρος βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες**, ενώ το **δεύτερο μέρος βαθμολογείται με δεκαπέντε (15) μονάδες**.

Στο δεύτερο, τρίτο και τέταρτο θέμα η κατανομή της βαθμολογίας στα επιμέρους ερωτήματα μπορεί να διαφοροποιείται ανάλογα με το βαθμό δυσκολίας τους και καθορίζεται στη διατύπωση των θεμάτων.

Στο μάθημα της Γεωμετρίας της Α' τάξης Ημερησίου και Εσπερινού Γενικού Λυκείου, το **δεύτερο και το τέταρτο θέμα λαμβάνονται με κλήρωση από την Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας**, ενώ το **πρώτο και το τρίτο θέμα επιλέγονται από τους/ τις διδάσκοντες/ουσες το μάθημα**.

Κεφάλαιο

3ο

ΤΡΙΓΩΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

B-Δ 74

- 3.1** Στοιχεία και είδη τριγώνων
- 3.2** 1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
- 3.3** 2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
- 3.4** 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
- 3.5** Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
- 3.6** Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων. (εκτός της απόδειξης των θεωρημάτων I και II).
- 3.7** Κύκλος - Μεσοκάθετος – Διχοτόμος
- 3.8** Κεντρική συμμετρία
- 3.9** Αξονική συμμετρία
- 3.10** Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
- 3.11** Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
- 3.12** Τριγωνική ανισότητα (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
- 3.13** Κάθετες και πλάγιες (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος II)
- 3.14** Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος I)
- 3.15** Εφαπτόμενα τμήματα
- 3.16** Σχετικές θέσεις δύο κύκλων
- 3.17** Απλές γεωμετρικές κατασκευές
- 3.18** Βασικές κατασκευές τριγώνων

B 60

ΘΕΜΑΤΑ B

3.2	3.3	3.4	3.6	3.7	3.11	3.12	3.13	3.14	3.15	3.16
9	3	7	18	2	6	1	3	1	5	5

B 14

ΘΕΜΑΤΑ Δ

3.2	3.3	3.4	3.6	3.7	3.11	3.12	3.13	3.14	3.15	3.16
0	0	1	5		2	2			2	2

Κεφάλαιο

3ο

ΤΡΙΓΩΝΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ Β-Δ ΑΝΑ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟ

3.2 1ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ (9)

3ο ΤΡΙΓΩΝΑ

1.

Θ Ε Μ Α Β

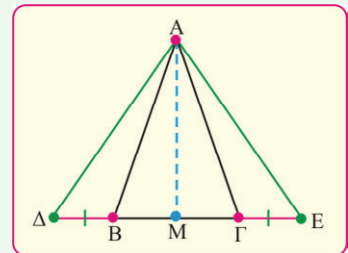
3.2

1592

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) . Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και προς τα δυο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

Να αποδείξετε ότι:

- $\hat{B}_{εξ} = \hat{\Gamma}_{εξ}$
- Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG E$ είναι ίσα.
- Η διάμεσος AM του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι και διάμεσος του τριγώνου $AD E$.



Μονάδες $(6+12+7)=25$

2.

Θ Ε Μ Α Β

3.2

1621

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και στις ίσες πλευρές AB, AG παίρνουμε αντίστοιχα

τμήματα $A\Delta = \frac{1}{3} AB$ και $AE = \frac{1}{3} AG$.

Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.
- τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα.
- το τρίγωνο ΔEM είναι ισοσκελές.

Μονάδες $(5+10+10)=25$

3.

Θ Ε Μ Α Β

3.2

1622

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο KAB ($KA=KB$) και $K\Gamma$ διχοτόμος της γωνίας $\hat{K}$. Στην προέκταση της BA (προς το A) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της AB (προς το B) παίρνουμε σημείο M , έτσι ώστε $\Lambda\Lambda=BM$.

Να αποδείξετε ότι:

- α. το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισοσκελές
- β. η $K\Gamma$ είναι διάμεσος του τριγώνου $K\Lambda M$

Μονάδες $(12+13)=25$

4.

Θ Ε Μ Α Β

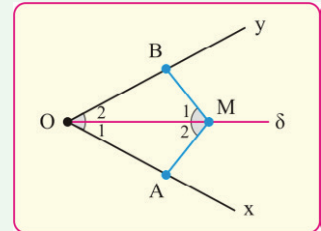
3.2

1627

Δίνεται γωνία xOy και η διχοτόμος της $O\delta$. Θεωρούμε σημείο M της $O\delta$ και σημεία A και B στις ημιευθείες Ox και Oy αντίστοιχα, τέτοια ώστε $OA=OB$.

Να αποδείξετε ότι:

- α. $MA=MB$.
- β. Η $O\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{AMB}$.



Μονάδες $(15+10)=25$

5.

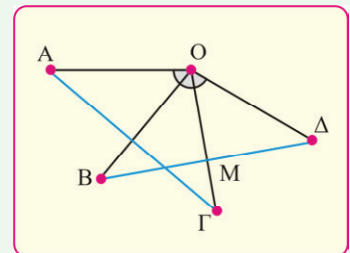
Θ Ε Μ Α Β

3.2

1632

Αν $\hat{AOB}=\hat{BO\Gamma}=\hat{\Gamma O\Delta}$ και $OA=OB=O\Gamma=O\Delta$, να αποδείξετε ότι:

- α. $A\Gamma=B\Delta$.
- β. Το M είναι μέσον της $B\Delta$, όπου M το σημείο τομής των τμημάτων $O\Gamma$ και $B\Delta$.



Μονάδες $(10+15)=25$

6.

Θ Ε Μ Α Β

3.2

1648

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) θεωρούμε τα σημεία E και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε $A\Delta = AE$.

Να αποδείξετε ότι:

- α. $BE = \Gamma\Delta$
- β. $B\Delta = \Gamma E$
- γ. $\hat{B}\Gamma = \hat{E}\Gamma B$

Μονάδες $(6+10+9)=25$

7.

Θ Ε Μ Α Β

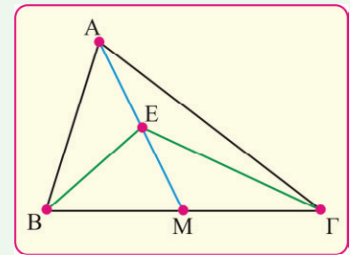
3.2

1660

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου του AM .

Αν $B\Gamma = 2 BE$ να αποδείξετε ότι:

- α. $\hat{AEB} = \hat{EM}\Gamma$
- β. $AB = E\Gamma$.



Μονάδες $(12+13)=25$

8.

Θ Ε Μ Α Β

3.2

12635

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=A\Gamma$ και M είναι το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB , $A\Gamma$ προς τα B , Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE ώστε $B\Delta=\Gamma E$.

- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα.
- β. Να αποδείξετε ότι η γωνία $M\Delta E$ είναι ίση με τη γωνία $ME\Delta$.

Μονάδες $(15+10)=25$

9.

Θ Ε Μ Α Β

3.2

12705

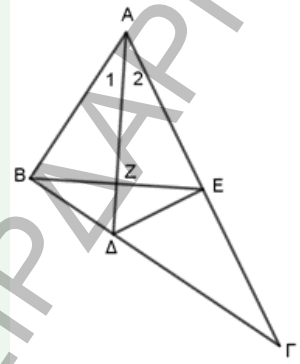
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma = 2AB$. Η διχοτόμος του $A\Delta$ τέμνει την διάμεσο BE στο σημείο Z .

Να αποδείξετε ότι:

α. $AB = AE = \frac{A\Gamma}{2}$

β. $\Delta B = \Delta E$.

γ. $AZ \perp BE$.



Μονάδες $(7+8+10)=25$

3.3 2ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ (3)

1.

Θ Ε Μ Α Β

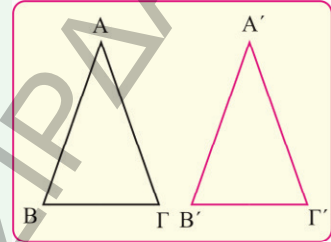
3.3

1565

Έστω δυο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και $A'B'\Gamma'$ ($A'B'=A'\Gamma'$)

α. Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

β. Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $AG = A'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.



Μονάδες $(13+12)=25$

2.

Θ Ε Μ Α Β

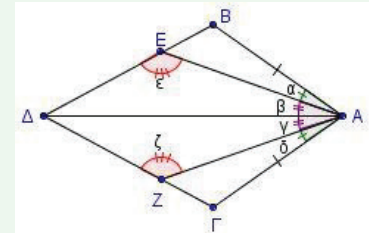
3.3

1582

Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$, $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ και $AB=AG$, να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β. Οι γωνίες ϵ και ζ είναι ίσες.



Μονάδες $(12+13)=25$

3.

Θ Ε Μ Α Β

3.3

1598

Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και GA τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $AD=AB$ και $AE=AG$.

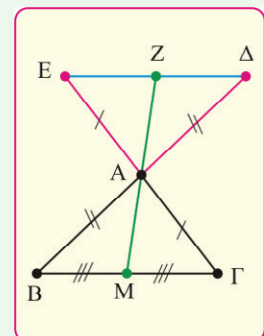
Να αποδείξετε ότι

α. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ADE είναι ίσα.

β. Αν AM είναι η διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και η προέκταση της AM τέμνει την ED στο Z , να δείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και ABM είναι ίσα.

ii. $Z\Delta = \frac{ED}{2}$



Μονάδες $[12+(7+6)]=25$

3.4 3ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ (7)

1.

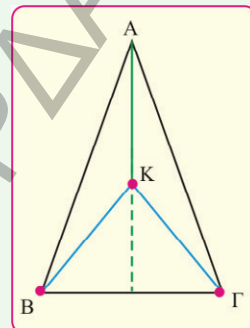
Θ Ε Μ Α Β

3.4

1591

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και K εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε $KB=K\Gamma$.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BAK και KAG είναι ίσα.
- Να αποδείξετε ότι η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BAG}$.
- Η προέκταση της AK τέμνει την $B\Gamma$ στο E . Να δείξετε ότι η KE είναι διάμεσος του τριγώνου $BK\Gamma$.



Μονάδες $(12+6+7)=25$

2.

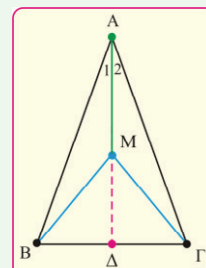
Θ Ε Μ Α Β

3.4

1601

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και σημείο M εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε $MB=MG$. Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα AMB και $AM\Gamma$ είναι ίσα.
- Η ευθεία AM διχοτομεί τη γωνία $\widehat{BM\Gamma}$.



Μονάδες $(12+13)=25$

3.

Θ Ε Μ Α Β

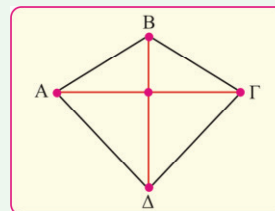
3.4

1624

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA=BG$ και $\Delta A=\Delta\Gamma$. Οι διαγώνιοι AG , $B\Delta$ του τετραπλεύρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.

Να αποδείξετε ότι:

- Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Delta}$ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.
- Η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AG .



Μονάδες $(12+13)=25$

4.

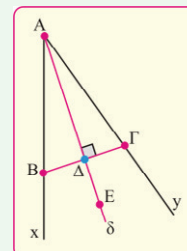
Θ Ε Μ Α Β

3.4

1670

Δίνεται γωνία χAy και η διχοτόμος της $A\delta$. Από τυχαίο σημείο B της Ax φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την $A\delta$ στο Δ και την Ay στο Γ . Να αποδείξετε ότι :

- Τα τμήματα AB και $A\Gamma$ είναι ίσα.
- Το τυχαίο σημείο E της $A\delta$ ισαπέχει από τα B και Γ .



Μονάδες $(12+13)=25$

5.

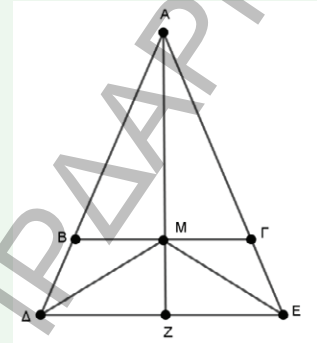
Θ Ε Μ Α Β

3.4

12636

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ και M είναι το μέσο της βάσης $B\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB , AG παίρνουμε τα τμήματα BD , GE αντίστοιχα ώστε $BD=GE$.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα.
- Να αποδείξετε ότι η γωνία $M\Delta E$ είναι ίση με τη γωνία $ME\Delta$.
- Αν η AM τέμνει την DE στο σημείο Z να αποδείξετε ότι η AZ είναι κάθετη στην DE .



Μονάδες $(12+6+7)=25$

6.

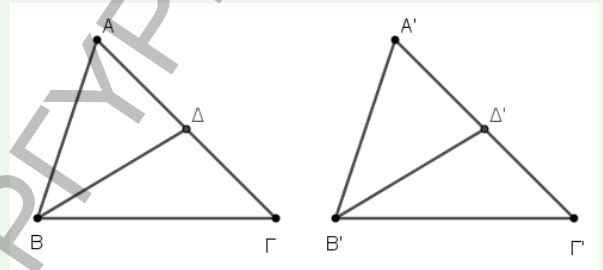
Θ Ε Μ Α Β

3.4

13518

Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του σχήματος με $AG = A'\Gamma'$ και $AB = A'B'$. Αν οι διάμεσοι $B\Delta$ και $B'\Delta'$ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:

- $\hat{A} = \hat{A}'$
- Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.



Μονάδες $(15+10)=25$

7.

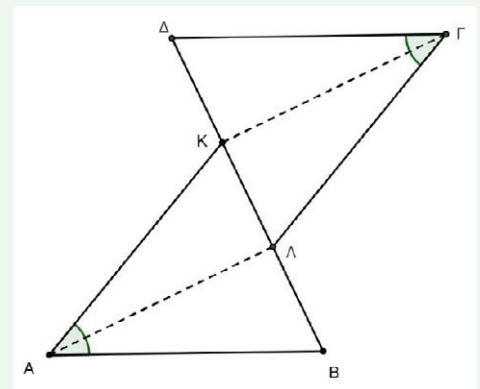
Θ Ε Μ Α Β

3.4

13826

Τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ του σχήματος έχουν $AB = \Gamma\Delta = AK = \Gamma\Lambda$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ είναι ίσα και ότι έχουν $BK = \Delta\Lambda$.
- Έστω ότι Λ και K είναι τα μέσα των BK και $\Delta\Lambda$ αντίστοιχα:
 - Να εξετάσετε αν τα τμήματα $B\Lambda$, ΛK και $K\Delta$ είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 - Να αποδείξετε ότι οι $A\Lambda$ και ΓK είναι κάθετες στην ευθεία $K\Lambda$.



Μονάδες $[12+(5+8)]=25$

3.4 3ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ (1)

8.

Θ Ε Μ Α Δ

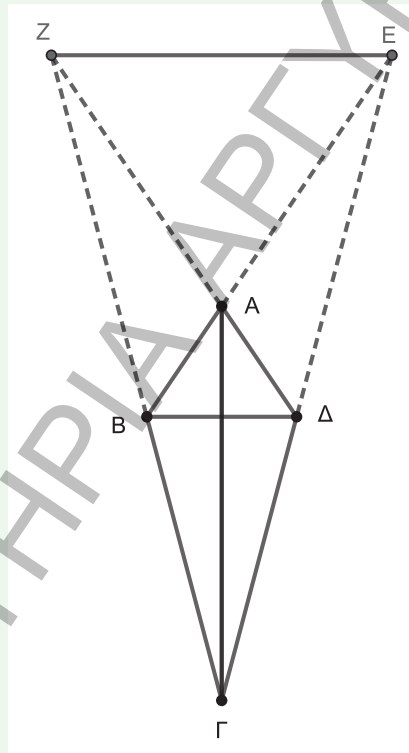
3.4

14880

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$. Αν E είναι το σημείο τομής των προεκτάσεων των BA και $\Gamma\Delta$ και Z το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔA και ΓB να αποδείξετε ότι:

- α. Η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $B\Gamma\Delta$.
- β. $\Gamma Z = \Gamma E$
- γ. $EZ \parallel B\Delta$

Μονάδες $(7+9+9)=25$



3.6 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ (18)

30 ΤΡΙΓΩΝΑ

1.

Θ Ε Μ Α Β

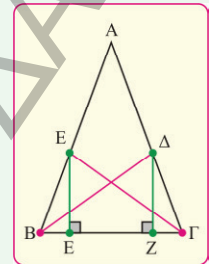
3.6

1532

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και οι διχοτόμοι του $B\Delta$ και ΓE .

Αν $EH \perp B\Gamma$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $\Gamma B E$ είναι ίσα.
- β. $EH = \Delta Z$.



Μονάδες $(13+12)=25$

2.

Θ Ε Μ Α Β

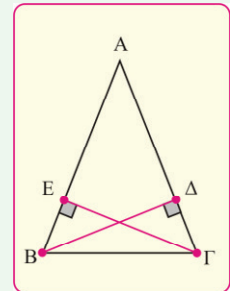
3.6

1545

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE .

Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma E B$ είναι ίσα.
- β. $A\Delta=AE$



Μονάδες $(15+10)=25$

3.

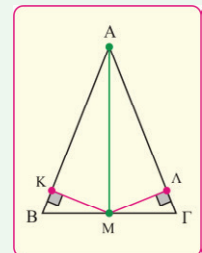
Θ Ε Μ Α Β

3.6

1546

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και το μέσο M της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε τις αποστάσεις MK και ML του σημείου M από τις ίσες πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α. $MK=ML$.
- β. Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας KML .



Μονάδες $(13+12)=25$

4.

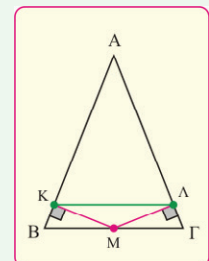
Θ Ε Μ Α Β

3.6

1547

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

- α. $M\Delta=ME$
- β. το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές



Μονάδες $(12+13)=25$

5.

Θ Ε Μ Α Β

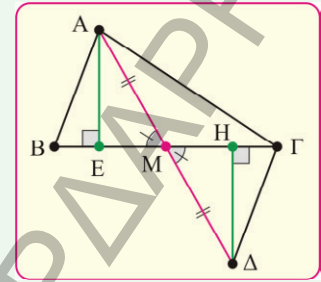
3.6

1569

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά ίσο τμήμα $M\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα.
- β. Τα σημεία A και Δ ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$.



Μονάδες $(12+13)=25$

6.

Θ Ε Μ Α Β

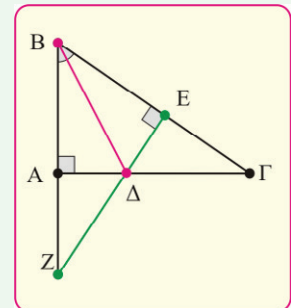
3.6

1571

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και BD η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Από το Δ φέρουμε $DE \perp B\Gamma$, και έστω Z το σημείο στο οποίο η ευθεία ED τέμνει την προέκταση της BA (προς το A).

Να αποδείξετε ότι:

- α. $AB=BE$
- β. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEB είναι ίσα.



Μονάδες $(13+12)=25$

7.

Θ Ε Μ Α Β

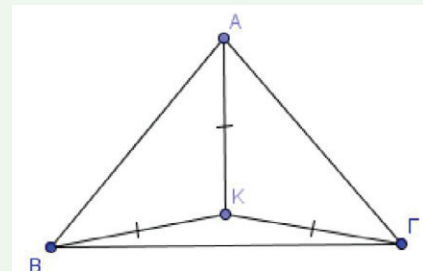
3.6

1593

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=A\Gamma$ και $\hat{A} = 80^\circ$.

Έστω K σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τέτοιο ώστε $KB=KA=K\Gamma$.

- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BKA και ΓKA είναι ίσα.
- β. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{ABK}$ και $\hat{A\Gamma K}$.
- γ. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{BK\Gamma}$.



Μονάδες $(10+8+7)=25$

8.

Θ Ε Μ Α Β

3.6

1599

Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, αν M και N είναι τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α. $M\Delta = M\Gamma$.
- β. Η ευθεία MN είναι μεσοκάθετος του τμήματος $\Gamma\Delta$.

Μονάδες $(12+13)=25$

9.

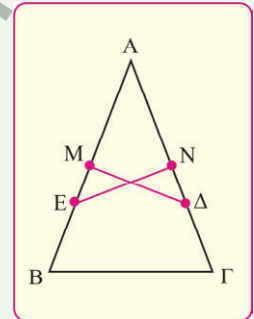
Θ Ε Μ Α Β

3.6

1656

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και $M\Delta$, NE οι μεσοκάθετοι των πλευρών του AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. Αν $M\Delta = NE$ τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- β. Αν $AB = A\Gamma$ τότε $M\Delta = NE$



Μονάδες $(12+13)=25$

10.

Θ Ε Μ Α Β

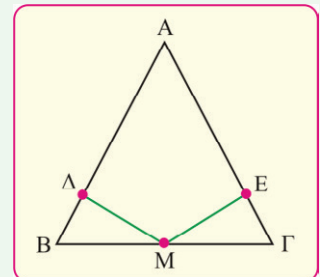
3.6

1657

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και από σημείο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α. Αν $M\Delta = ME$, τότε τα τρίγωνα $AM\Delta$ και AME είναι ίσα.
- β. Αν $AB = A\Gamma$ και M μέσο του $B\Gamma$, τότε $M\Delta = ME$.



Μονάδες $(13+12)=25$

11.

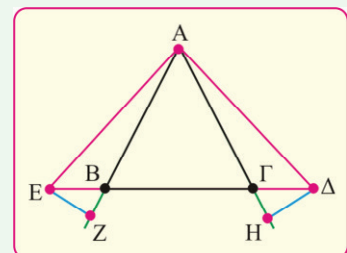
Θ Ε Μ Α Β

3.6

1659

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $\Gamma\Delta = BE$. Από το Δ φέρουμε ΔH κάθετη στην ευθεία $A\Gamma$ και από το E φέρουμε EZ κάθετη στην ευθεία AB . Να αποδείξετε ότι:

- α. $A\Delta = AE$
- β. $EZ = \Delta H$



Μονάδες $(12+13)=25$

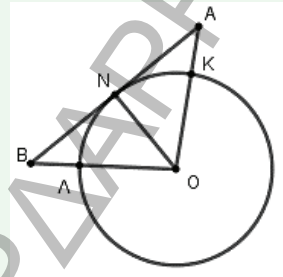
12.

Θ Ε Μ Α Β

3.6

1676

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο N του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του N θεωρούμε σημεία A και B , τέτοια ώστε $NA=NB$. Οι OA και OB τέμνουν τον κύκλο στα K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές.
- β. Το σημείο N είναι μέσο του τόξου $K\Lambda$.

Μονάδες $(13+12)=25$

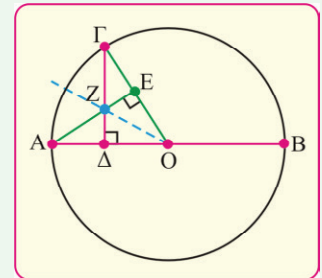
13.

Θ Ε Μ Α Β

3.6

1677

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε διάμετρο AB και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν AE κάθετο στην OG και $\Gamma\Delta$ κάθετο στην AO να αποδείξετε ότι:



- α. Το τρίγωνο ΔOE είναι ισοσκελές.
- β. Η OZ διχοτομεί τη γωνία $AO\Gamma$ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου $A\Gamma$.

Μονάδες $(13+12)=25$

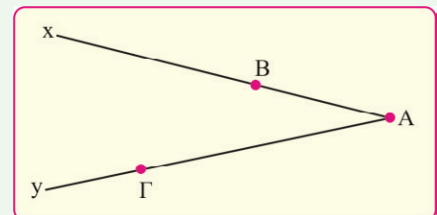
14.

Θ Ε Μ Α Β

3.6

1688

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το χάρτη μίας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Ax και Ay παριστάνουν δυο ποτάμια και στα σημεία B και Γ βρίσκονται δυο πλατάνια. Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:



- α. ισαπέχει από τα δυο πλατάνια.
- β. ισαπέχει από τα δυο ποτάμια.
- γ. ισαπέχει και από τα δυο πλατάνια και από τα δυο ποτάμια.

Μονάδες $(9+9+7)=25$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

15.

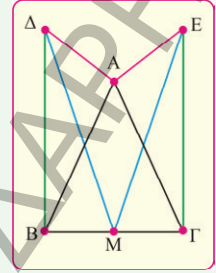
Θ Ε Μ Α Β

3.6

1698

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Στα σημεία B και Γ της $B\Gamma$ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της $B\Gamma$, τα τμήματα $BD \perp B\Gamma$ και $GE \perp B\Gamma$ τέτοια ώστε $BD=GE$. Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι :

- τα τρίγωνα BDM και GEM είναι ίσα,
- $AD=AE$.



Μονάδες (12+13)=25

16.

Θ Ε Μ Α Β

3.6

12149

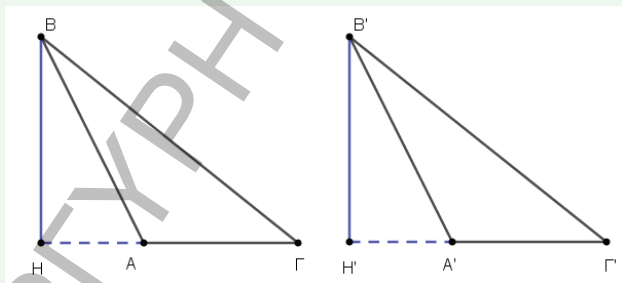
Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$

($\hat{A} > 90^\circ$) και $A'B'\Gamma'$ ($\hat{A}' > 90^\circ$)

με $\gamma=\gamma'$ και $\beta=\beta'$.

Αν τα ύψη BH και $B'H'$ των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

- $\hat{BAH} = \hat{B'AH'}$
- Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.



Μονάδες (13+12)=25

17.

Θ Ε Μ Α Β

3.6

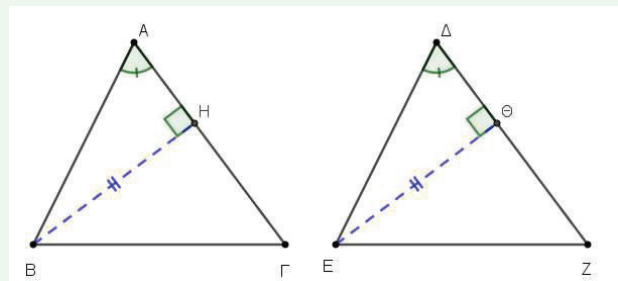
13517

Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ με

$$\hat{A} = \hat{\Delta}, \hat{AB\Gamma} = \hat{\Delta EZ}$$

Αν τα ύψη τους BH και $E\Theta$ είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:

- $AB = \Delta E$.
- Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα .



Μονάδες (13+12)=25

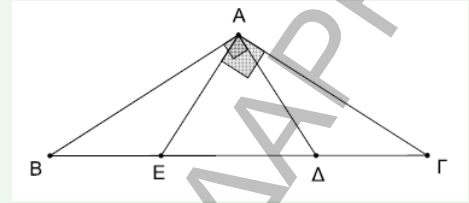
18.

Θ Ε Μ Α Β

3.6

13533

Δίνεται ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$. Η κάθετη στην AB στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ και η κάθετη στην AG στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E .



Να αποδείξετε ότι:

- α. τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\epsilon$ είναι ίσα.
- β. το τρίγωνο $A\Delta\epsilon$ είναι ισοσκελές.
- γ. $BE = \Gamma\Delta$.

Μονάδες $(10+7+8)=25$

3.6 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ (5)

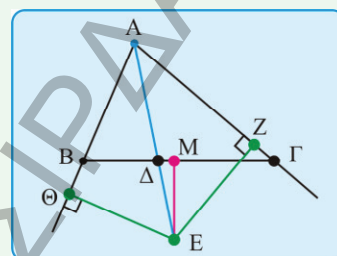
19.

Θ Ε Μ Α Δ

3.6

1707

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, η κάθετη από το μέσο M της $B\Gamma$ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου AD στο σημείο E . Αν Θ, Z είναι οι προβολές του E στις $AB, A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:



- α. Το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- β. Τα τρίγωνα ΘBE και $Z\Gamma E$ είναι ίσα.
- γ. $\hat{A\Gamma E} + \hat{A\beta E} = 180^\circ$

Μονάδες $(5+8+12)=25$

20.

Θ Ε Μ Α Δ

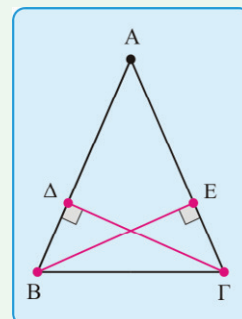
3.6

1724

Έστω $AB\Gamma$ τρίγωνο και τα ύψη του BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$, τότε τα ύψη BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.



- α. Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π αιτιολογήστε την απάντησή σας
- β. Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να αποδείξετε ότι ισχύει.
- γ. Να διατυπώσετε την πρόταση Π και την αντίστροφή της ως ενιαία πρόταση.

Μονάδες $(10+10+5)=25$

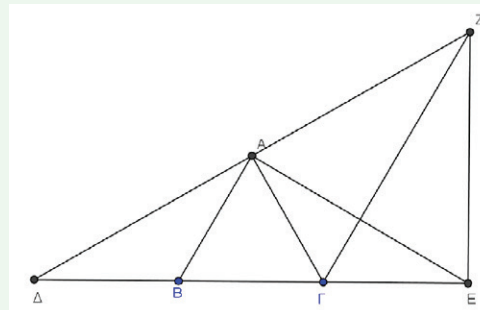
21.

Θ Ε Μ Α Δ

3.6

1819

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta=B\Gamma$, ενώ στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Gamma E=B\Gamma$. Φέρουμε την κάθετη στην $E\Delta$ στο σημείο E , η οποία τέμνει την προέκταση της ΔA στο Z .



- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $\Gamma A E$ και $B\Delta A$.
- β. Να αποδείξετε ότι η ΓZ είναι μεσοκάθετος του $A E$.
- γ. Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma Z$.

Μονάδες $(8+15+5)=25$

22.

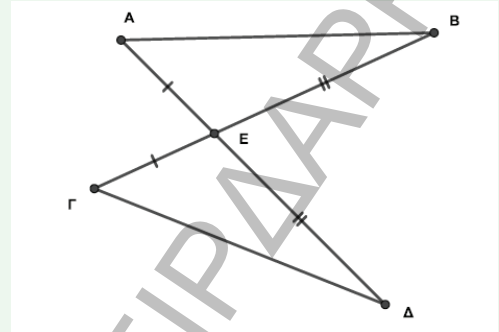
Θ Ε Μ Α Δ

3.6

13839

Τα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΔ$ και $ΒΓ$ τέμνονται στο σημείο $Ε$ έτσι ώστε $ΑΕ=ΓΕ$ και $ΒΕ=ΕΔ$.

- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΕ$ και $ΓΔΕ$ είναι ίσα.
- β. Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις $ΕΗ$ και $ΕΘ$ του σημείου $Ε$ από τις πλευρές $ΑΒ$ και $ΓΔ$, αντίστοιχα, είναι ίσες.
- γ. Αν οι προεκτάσεις των $ΑΒ$ και $ΓΔ$ προς τα $Α$ και $Γ$ αντίστοιχα τέμνονται στο $Ζ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΒΔΖ$ είναι ισοσκελές.



Μονάδες $(8+5+12)=25$

23.

Θ Ε Μ Α Δ

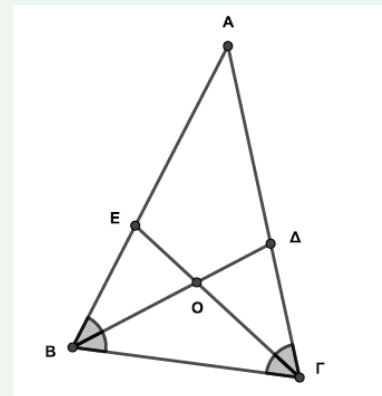
3.6

13854

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ=ΑΓ$). Οι διχοτόμοι $ΒΔ$

και $ΓΕ$ των γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο $Ο$.

- α. Να αποδείξετε ότι $ΒΔ=ΓΕ$.
- β. Από τα σημεία $Ε$ και $Δ$ φέρνουμε κάθετες $ΕΛ$ και $ΔΚ$ στις πλευρές $ΑΓ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι: $ΔΚ=ΕΛ$.
- γ. Να εντοπίσετε και να σχεδιάσετε σημείο $Ζ$ της πλευράς $ΒΓ$ που η απόστασή του από το σημείο $Ε$ να ισούται με την απόσταση των σημείων $Δ$ και $Κ$ αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.



Μονάδες $(9+9+7)=25$

3.7 ΚΥΚΛΟΣ-ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΣ-ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ (2)

1.

Θ Ε Μ Α Β

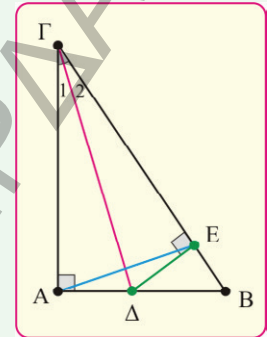
3.7

1574

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας του $\hat{B}$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο Δ . Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα.
- Η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AE .



Μονάδες $(13+12)=25$

2.

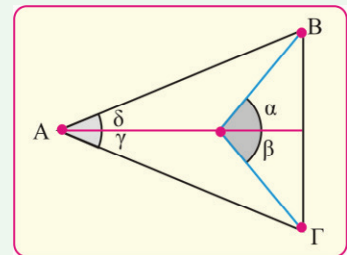
Θ Ε Μ Α Β

3.7

1587

Αν για το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}=\hat{\delta}$ να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

- Τα τρίγωνα AEB και AEG είναι ίσα.
- Το τρίγωνο $ΓEB$ είναι ισοσκελές.
- Η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.



Μονάδες $(8+8+9)=25$

3.11 ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΠΛΕΥΡΩΝ ΚΑΙ ΓΩΝΙΩΝ (6)

1.

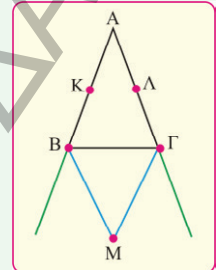
Θ Ε Μ Α Β

3.11

1553

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών B και Γ τέμνονται στο σημείο M και K, Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών AB και AG .

- Να δείξετε ότι το τρίγωνο $B\Lambda\Gamma$ είναι ισοσκελές με $MB=MG$.
- Να δείξετε ότι $MK=ML$.



Μονάδες $(12+13)=25$

2.

Θ Ε Μ Α Β

3.11

1558

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο $B\Lambda\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- Οι γωνίες $\hat{A\Lambda\Gamma}$ και $\hat{A\Lambda B}$ είναι ίσες.
- Η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.

Μονάδες $(8+10+7)=25$

3.

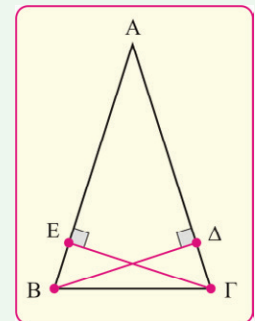
Θ Ε Μ Α Β

3.11

1568

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE που αντιστοιχούν στις πλευρές του AG και AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

- Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=AG$, τότε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.
- Αν τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AG=AB$.



Μονάδες $(12+13)=25$

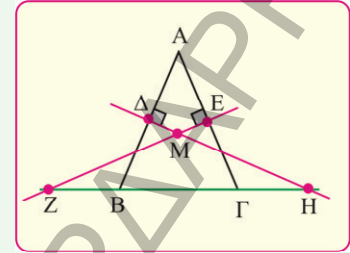
4.

Θ Ε Μ Α Β

3.11

1578

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Οι μεσοκάθετες ευθείες των ίσων πλευρών του τέμνονται στο M και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση $B\Gamma$ στα Z και H .



- α. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔBH και $EZ\Gamma$.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές.

Μονάδες $(15+10)=25$

5.

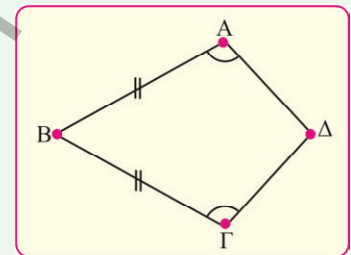
Θ Ε Μ Α Β Β

3.11

1585

Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA=BG$ και $\hat{A}=\hat{\Gamma}$

Να αποδείξετε ότι:



- α. $\hat{B\hat{A}\Gamma} = \hat{B\hat{\Gamma}A}$
- β. Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- γ. Η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.

Μονάδες $(8+10+7)=25$

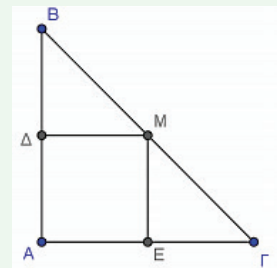
6.

Θ Ε Μ Α Β

3.11

1658

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α. Αν $M\Delta = ME$ τότε:
 - i. τα τρίγωνα $B\Delta M$ και ΓEM είναι ίσα.
 - ii. το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- β. Αν $AB = A\Gamma$ τότε $M\Delta = ME$.

Μονάδες $[(8+9)+8]=25$

3.11 ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΠΛΕΥΡΩΝ ΚΑΙ ΓΩΝΙΩΝ (2)

7.

Θ Ε Μ Α Δ

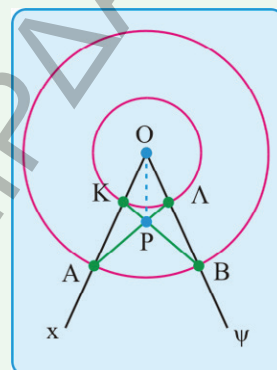
3.11

1725

Δίνεται οξεία γωνία $\hat{xOy}$ και δυο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Ox στα σημεία K, A και την Oy στα Λ, B αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α. $AL = BK$.
- β. Το τρίγωνο APB είναι ισοσκελές, όπου P το σημείο τομής των AL και BK .
- γ. Η OP διχοτομεί την $\hat{xOy}$



Μονάδες $(8+8+9)=25$

8.

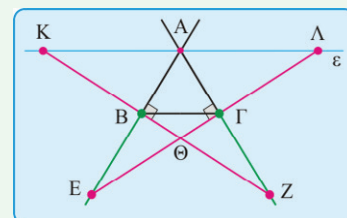
Θ Ε Μ Α Δ

3.11

1875

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$), και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας A . Η κάθετη στην πλευρά AB στο B τέμνει την ε στο K και την ευθεία $A\Gamma$ στο Z . Η κάθετη στην πλευρά $A\Gamma$ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία AB στο E .

- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. $AZ=AE$
 - ii. $AK=A\Lambda$
- β. Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η $A\Theta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Θ το σημείο τομής των KZ και $E\Lambda$. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.



Μονάδες $[(8+9)+8]=25$

3.12 ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ (1)

3ο ΤΡΙΓΩΝΑ

1.

Θ Ε Μ Α Β

3.12

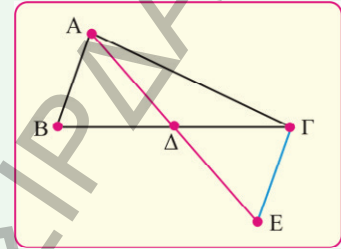
1573

Στο διπλανό σχήμα, η $ΑΔ$ είναι διάμεσος του τριγώνου $ΑΒΓ$ και το $Ε$ είναι σημείο στην προέκταση της $ΑΔ$, ώστε $ΔΕ=ΑΔ$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $ΑΒ=ΓΕ$

β. $ΑΕ < ΑΒ + ΑΓ$



Μονάδες $(12+13)=25$

3.12 ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ (2)

2.

Θ Ε Μ Α Δ

3.12

1749

Θεωρούμε δυο σημεία A και B τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία (ε) , τέτοια ώστε η ευθεία AB δεν είναι κάθετη στην (ε) . Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία (ε) .

α. Αν η $A'B$ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο O , να αποδείξετε ότι:

- i. Η ευθεία (ε) διχοτομεί τη γωνία $\widehat{AOA'}$.
- ii. Οι ημιευθείες OA και OB σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία (ε)

β. Αν K είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία (ε) , να αποδείξετε ότι:

- i. $KA = KA'$.
- ii. $KA + KB > AO + OB$

Μονάδες $[(6+6)+(6+7)]=25$

3.

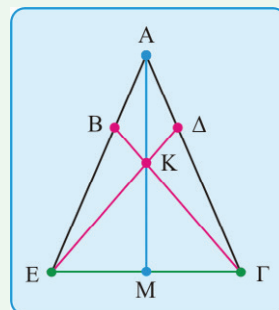
Θ Ε Μ Α Δ

3.12

1846

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Στην προέκταση της AB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $AE = A\Gamma$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta = AB$. Αν τα τμήματα ΔE και $B\Gamma$ τέμνονται στο K και η προέκταση της AK τέμνει την $E\Gamma$ στο M , να αποδείξετε ότι:

- α.** $B\Gamma = \Delta E$
- β.** $BK = K\Delta$
- γ.** Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας A .
- δ.** Η AM είναι μεσοκάθετος της $E\Gamma$.



Μονάδες $(6+7+6+6)=25$

3.13 ΚΑΘΕΤΕΣ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΕΣ (3)

3ο ΤΡΙΓΩΝΑ

1.

Θ Ε Μ Α Β

3.13

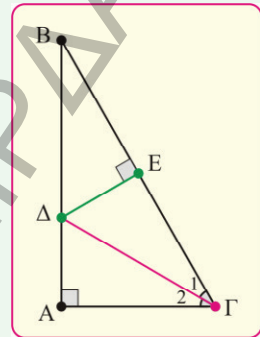
1540

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), η διχοτόμος τη γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ . Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ την κάθετο ΔE , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

α. $AD = DE$

β. $AD < DB$



Μονάδες $(13+12)=25$

2.

Θ Ε Μ Α Β

3.13

1646

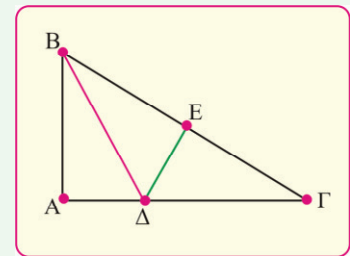
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία A . Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B , η ΔE είναι κάθετη στην $B\Gamma$ και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας B .

Να αποδείξετε ότι:

α. $AD = DE$

β. $AD < \Delta\Gamma$

γ. $A\Gamma > AB$



Μονάδες $(8+9+8)=25$

3.

Θ Ε Μ Α Β

3.13

13844

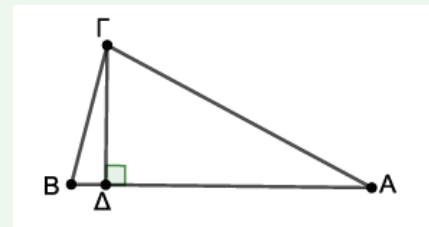
Στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι

$B\Delta < A\Delta$, $AB = A\Gamma$ και $\hat{A\Delta\Gamma} = 90^\circ$

α. Να αποδείξετε ότι $A\Gamma > B\Gamma$.

β. Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Μονάδες $(10+15)=25$

3.14 ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ (1)

1.

Θ Ε Μ Α Β

3.14

13759

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 6$. Έστω d η απόσταση του κέντρου O του κύκλου από μια ευθεία (ε) . Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ε) στις εξής περιπτώσεις:

- α. $d = 3$.
- β. $d = 6$.
- γ. $d = 9$.

Μονάδες $(9+8+8)=25$

3.15 ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΤΜΗΜΑΤΑ (5)

1.

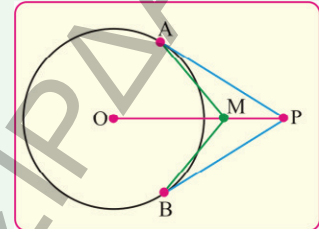
Θ Ε Μ Α Β

3.15

1617

Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP , να αποδείξετε ότι:

- α. τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα.
- β. οι γωνίες $\hat{MAO}$ και $\hat{MBO}$ είναι ίσες.



Μονάδες $(12+13)=25$

2.

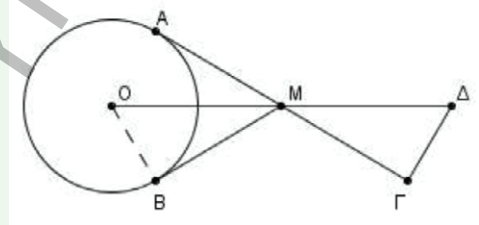
Θ Ε Μ Α Β

3.15

1620

Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) και τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB . Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $MG=MA$ και την OM κατά τμήμα $MD=OM$.

- α. Να αποδείξετε ότι $MB = MG$.
- β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OMB και MGD είναι ίσα.



Μονάδες $(10+15)=25$

3.

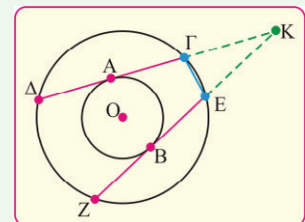
Θ Ε Μ Α Β

3.15

1667

Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και ZE του κύκλου (O, R) εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

- α. Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$.
- β. Αν οι $\Delta\Gamma$ και ZE προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $KE\Gamma$ είναι ισοσκελές.



Μονάδες $(12+13)=25$

4.

Θ Ε Μ Α Β

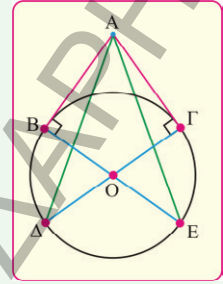
3.15

1684

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Από σημείο A εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και AG . Τα σημεία E και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα ABE και $AG\Delta$ είναι ίσα.
- β. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και AGE είναι ίσα.



Μονάδες $(13+12)=25$

5.

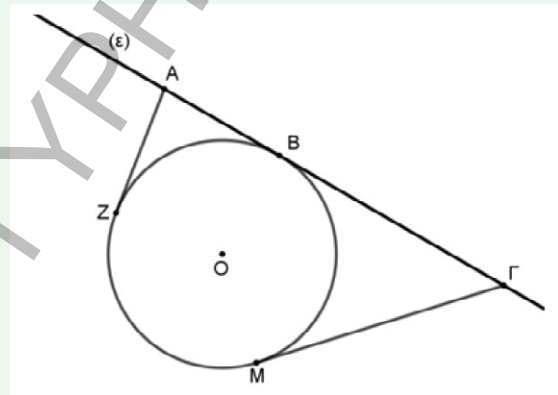
Θ Ε Μ Α Β

3.15

13817

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο B του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε) . Θεωρούμε στην ευθεία (ε) δύο σημεία A και Γ εκατέρωθεν του B έτσι ώστε $BA < B\Gamma$ και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AZ και ΓM στον κύκλο.

- α. Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- β. Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = AZ + M\Gamma$.



Μονάδες $(15+10)=25$

3.15 ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΤΜΗΜΑΤΑ (2)

6.

Θ Ε Μ Α Δ

3.15

1751

Έστω ότι ο κύκλος (O, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου PGE στα σημεία A, Δ και B .

α. Να αποδείξετε ότι:

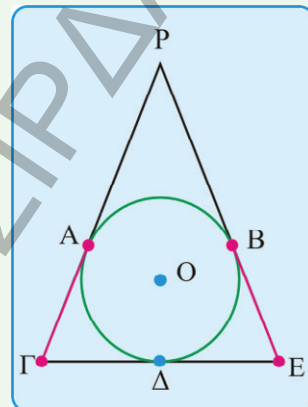
i. $PG = \Gamma\Delta + AP$

ii. $PG - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$

β. Αν $AG = BE$, να αποδείξετε ότι

i. Το τρίγωνο PGE είναι ισοσκελές.

ii. Τα σημεία P, O και $D\Delta$ είναι συνευθειακά.



Μονάδες $[(6+8)+(6+5)] = 25$

7.

Θ Ε Μ Α Δ

3.15

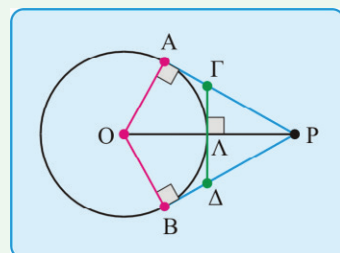
1752

Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και εξωτερικό σημείο του P . Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα PA και PB . Η διακεντρική ευθεία PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ . Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα PA και PB στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. το τρίγωνο $P\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές

β. $\Gamma A = \Delta B$.

γ. η περίμετρος του τριγώνου $P\Gamma\Delta$ είναι ίση με $PA + PB$.



Μονάδες $(10+8+7) = 15$

3.16 ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ (5)

1.

Θ Ε Μ Α Β

3.16

12417

Έστω δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, r) , με $R=3$, $r=2$ και $K\Lambda=4$. Να αποδείξετε ότι:

- α. Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω A και B .
- β. $\hat{K}\Lambda\Lambda > \hat{A}\Lambda K$

Μονάδες $(15+10)=25$

2.

Θ Ε Μ Α Β

3.16

13757

Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 2)$ και $(\Lambda, 5)$.

- α. Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.
- β. Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.
- γ. Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν ο κύκλος $(K, 2)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda, 5)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- δ. Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(6+6+6+7)=25$

3.

Θ Ε Μ Α Β

3.16

13758

Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 3)$ και $(\Lambda, 8)$. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:

- α. $K\Lambda = 13$.
- β. $K\Lambda = 2$.
- γ. $K\Lambda = 5$.
- δ. $K\Lambda = 11$.
- ε. $K\Lambda = 9$.

Μονάδες $(5+5+5+5+5)=25$

4.

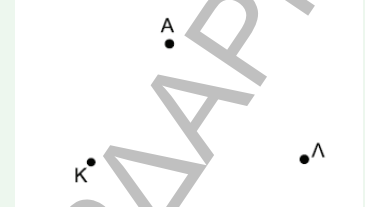
Θ Ε Μ Α Β

3.16

13835

Τα σημεία A , K και Λ δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο A απέχει 4 από το K και 5 από το Λ .

- α. Να αποδείξετε ότι $1 < K\Lambda < 9$.
- β. Να βρείτε ένα σημείο B του επιπέδου διαφορετικό από το A , που να απέχει 4 από το K και 5 από το Λ .



Μονάδες $(12+13)=25$

5.

Θ Ε Μ Α Β

3.16

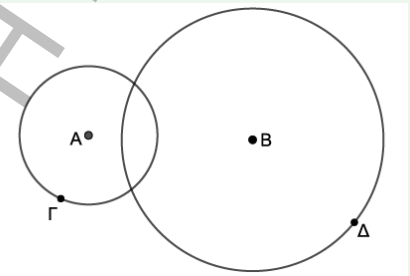
13836

- α. Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$.

Να αποδείξετε ότι

$$B\Delta - A\Gamma < AB < A\Gamma + B\Delta.$$

- β. Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B , τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 5 από το B του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός;



Μονάδες $(10+15)=25$

3.16 ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ (2)

6.

Θ Ε Μ Α Δ

3.16

13823

α. Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$ και $AB=6$.

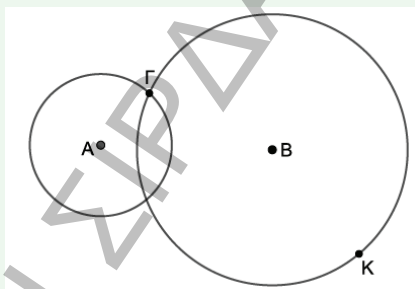
- Να αποδείξετε ότι $BK - AG < AB < BK + AG$
- Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2.

Ποιο σημείο από τα K και Γ έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;

Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει R από το B .»

Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει ρ από το A .»

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



β. Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B , τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 2 από το B του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς το θησαυρό;

Μονάδες $(16+9)=25$

7.

Θ Ε Μ Α Δ

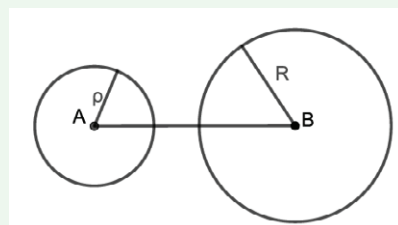
3.16

13846

Δίνεται το παρακάτω σχήμα με τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) με $R > \rho$. Επίσης $AB=9$.

α. Να αποδείξετε ότι

$$R + \rho < 9.$$



- Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο $K\Lambda M$ με $K\Lambda$ να είναι ίση με ρ και η πλευρά ΛM να είναι ίση με R . Να περιγράψετε τον τρόπο που το σχεδιάσατε και να αποδείξετε ότι η τρίτη πλευρά του είναι μικρότερη από 9.
- Έστω το τρίγωνο $K\Lambda M$ που σχεδιάσατε στο β) ερώτημα. Πόσα σημεία του επιπέδου έχουν και τις δύο ιδιότητες **I1** και **I2** που περιγράφονται παρακάτω;

I1: «Η απόσταση των σημείων από το K είναι ίση με ρ .»

I2: «Η απόσταση των σημείων από το M είναι ίση με R .»

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(7+10+8)=25$

Κεφάλαιο

4ο

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Β-Δ 67

- 4.1 Εισαγωγή
- 4.2 Τέμνουσα δύο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα (εκτός της απόδειξης του Πορίσματος II και των προτάσεων I, II, III και IV)
- 4.3 Κατασκευή παράλληλης ευθείας
- 4.4 Γωνίες με πλευρές παράλληλες
- 4.5 Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος που αναφέρεται στον εγγεγραμμένο κύκλο τριγώνου).
- 4.6 Άθροισμα γωνιών τριγώνου.
- 4.7 Γωνίες με πλευρές κάθετες (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος και του πορίσματος)
- 4.8 Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου (Εκτός της απόδειξης του Πορίσματος)

ΘΕΜΑΤΑ Β 48

4.2	4.4	4.6	4.8
7	0	37	4

B 48

ΘΕΜΑΤΑ Δ 19

4.2	4.4	4.6	4.8
5	1	13	0

B 19

Κεφάλαιο

4ο

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

4.2 ΤΕΜΝΟΥΣΑ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ-ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟ ΑΙΤΗΜΑ (7)

1.

Θ Ε Μ Α Β

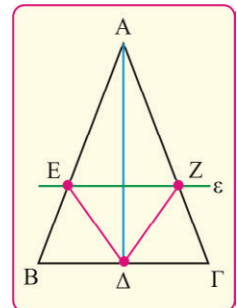
4.2

1544

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) φέρουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ και μια ευθεία (ϵ) παράλληλη προς την $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και AG στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.
- β. Τα τρίγωνα AED και AZD είναι ίσα.



Μονάδες $(10+15)=25$

2.

Θ Ε Μ Α Β

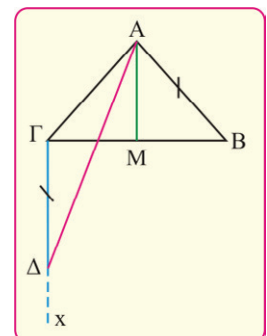
4.2

1595

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και η διάμεσός του AM . Φέρουμε ημιευθεία $\Gamma x \perp B\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta=AB$.

Να αποδείξετε ότι:

- α. Η γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία $\Gamma\hat{A}A$.
- β. Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}\Gamma$.



Μονάδες $(12+13)=25$

3.

Θ Ε Μ Α Β

4.2

1597

Στις προεκτάσεις των πλευρών BA (προς το A) και GA (προς το A) τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $AD=AB$ και $AE=AG$.

Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ADE είναι ίσα.
- β. $ED \parallel B\Gamma$

Μονάδες $(12+13)=25$

4.

Θ Ε Μ Α Β

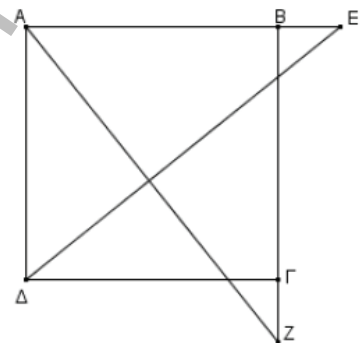
4.2

1643

Θεωρούμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία E και Z στις προεκτάσεις των AB (προς το B) και $B\Gamma$ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $BE=\Gamma Z$.

Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα ABZ και AED είναι ίσα.
- β. Οι γωνίες $E\Delta\Gamma$ και AZB είναι ίσες.



Μονάδες $(12+13)=25$

5.

Θ Ε Μ Α Β

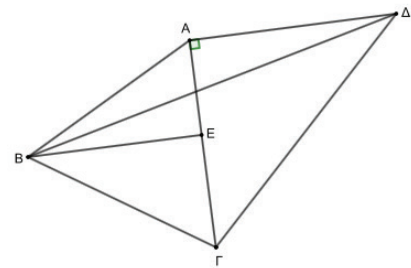
4.2

12710

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του BE . Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ με υποτείνουσα τη $\Gamma\Delta$ έτσι, ώστε τα σημεία B και Δ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας AG .

Να αποδείξετε ότι:

- α. $BE \parallel A\Delta$.
- β. οι γωνίες $EB\Delta$ και $A\Delta B$ είναι ίσες.
- γ. το τρίγωνο $BA\Delta$ είναι ισοσκελές.



Μονάδες $(10+7+8)=25$

6.

Θ Ε Μ Α Β

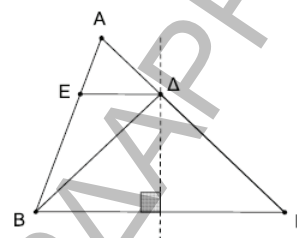
4.2

13534

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ και η παράλληλη από το Δ προς τη $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

- α. το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.
- β. η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\Delta B$.



Μονάδες $(12+13)=25$

7.

Θ Ε Μ Α Β

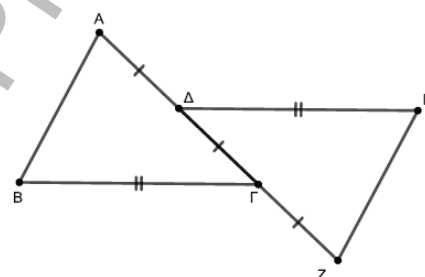
4.2

13748

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε το μέσο Δ της πλευράς $A\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Προεκτείνουμε την $A\Gamma$ προς το μέρος του Γ και παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $\Gamma Z = \Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $ZE\Delta$ είναι ίσα.
- β. $AB \parallel EZ$.



Μονάδες $(10+15)=25$

4.2 Τέμνουσα δύο ευθειών-Ευκλείδειο αίτημα (5)

8.

Θ Ε Μ Α Δ

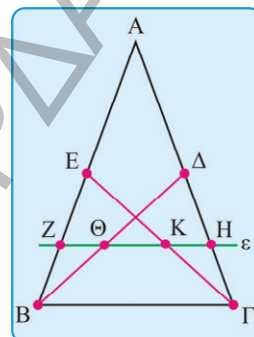
4.2

1744

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) φέρουμε τις διαμέσους $B\Delta$ και $ΓΕ$. Μία ευθεία ϵ παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ τέμνει τις πλευρές AB και AG στα Z και H αντίστοιχα και τις διαμέσους $B\Delta$ και $ΓΕ$ στα σημεία Θ και K αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- $BZ=ΓH$.
- τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $HK\Gamma$ είναι ίσα.
- $ZK=H\Theta$.



Μονάδες $(8+9+8)=25$

9.

Θ Ε Μ Α Δ

4.2

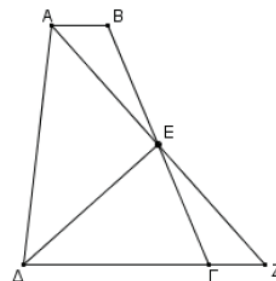
1783

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) ισχύει

$$AB+\Gamma\Delta=A\Delta.$$

Αν η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει την $B\Gamma$ στο E και την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο ΔAZ είναι ισοσκελές.
- Το E είναι το μέσο της $B\Gamma$.
- Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραpezίου.



Μονάδες $(7+10+8)=25$

10.

Θ Ε Μ Α Δ

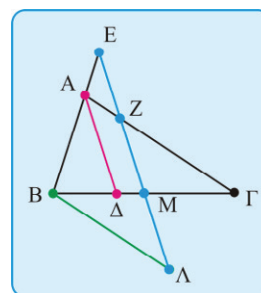
4.2

1818

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$, η διχοτόμος του $A\Delta$ και ευθεία (ϵ) παράλληλη από το B προς την AG . Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην $A\Delta$ η οποία τέμνει την AG στο σημείο Z , την ευθεία (ϵ) στο σημείο Λ και την προέκταση της BA στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα AEZ και $B\Lambda E$ είναι ισοσκελή.
- $BA = \Gamma Z$
- $AE = AG - BA$



Θέμα Δ - Τ.Θ.Δ.Δ - Μονάδες $(8+9+8)=25$

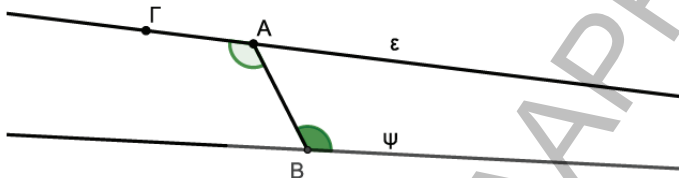
11.

Θ Ε Μ Α Δ

4.2

13822

Δίνονται οι ευθείες (ϵ) και (ψ).



α. Αν η γωνία $\hat{B\hat{A}\Gamma}$ είναι

μεγαλύτερη από την $\hat{A\hat{B}\psi}$

i. Να αποδείξετε ότι $\hat{B\hat{A}\epsilon} + \hat{A\hat{B}\psi} < 180^\circ$

ii, Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ϵ και ψ τέμνονται. Σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η AB βρίσκεται το σημείο τομής των ϵ και ψ και γιατί;

β. Να διατυπώσετε την πρόταση που αποδείχθηκε στο **α)** για τις εντός και εναλλάξ γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη και το σημείο τομής των ευθειών αυτών.

γ. Αν ισχύει $\hat{B\hat{A}\Gamma} < \hat{A\hat{B}\psi}$, τότε σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η AB βρίσκεται το σημείο τομής των ϵ και ψ και γιατί;

Μονάδες $[(6+6)+7+6]=25$

12.

Θ Ε Μ Α Β

4.2

13843

Έστω ότι οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ εφάπτονται στον κύκλο (O, R) στα άκρα μιας διαμέτρου του AB. Να αποδείξετε ότι:

α. οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ είναι παράλληλες.

β. οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B\hat{A}x}$ και $\hat{A\hat{B}y}$ τέμνονται σε σημείο M.

γ. το σημείο M είναι το μέσο του ημικυκλίου AB.

δ. αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B\hat{A}x}$ τέμνει την $y'y$ στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A\hat{B}y}$ τέμνει την $x'x$ στο σημείο Δ, τότε $M\Gamma = M\Delta$.

Μονάδες $(4+6+10+5)=25$

4.4 ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΠΛΕΥΡΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ (1)

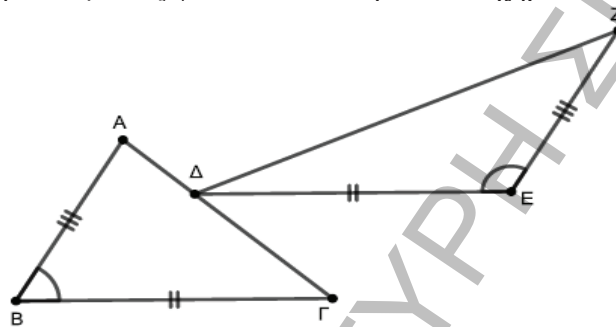
1.

Θ Ε Μ Α Δ

4.4

13752

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} < 90^\circ$ θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AG . Φέρουμε τμήμα ΔE ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ και από το σημείο E φέρουμε τμήμα $E\Delta$ ίσο και παράλληλο με την πλευρά AB , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α. Ένας μαθητής κάνει τους παρακάτω διαδοχικούς συλλογισμούς.

Να χαρακτηρίσετε Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) κάθε έναν από αυτούς.

- Οι γωνίες $\hat{\Delta E Z}$ και $\hat{A B \Gamma}$ είναι γωνίες με πλευρές παράλληλες.
- Οπότε $\hat{\Delta E Z} = \hat{A B \Gamma}$
- Τα τρίγωνα $\Delta E Z$ και $A B \Gamma$ είναι ίσα.
- Το τμήμα ΔZ είναι ίσο με το τμήμα $A \Gamma$.

β. Να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς σας (Σ ή Λ) που αφορούν τους ισχυρισμούς 2. και 3.

γ. Αν στα δεδομένα παραλείψουμε τη συνθήκη $\hat{B} < 90^\circ$, να συγκρίνετε τα τμήματα $A \Gamma$ και ΔZ για τα διάφορα είδη της γωνίας $\hat{B}$ και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Μονάδες $(8+10+7)=25$

4.6 ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ (37)

1.

Θ Ε Μ Α Β

4.6

1541

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την πλευρά AG στο σημείο Δ . Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην πλευρά $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $BE=AB$.

β. Αν επιπλέον $\hat{B\Delta A} = 55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Gamma\Delta E$.

Μονάδες $(12+13)=25$

2.

Θ Ε Μ Α Β

4.6

1552

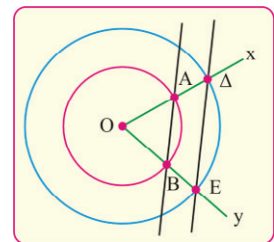
Ένας μαθητής της A' λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες.

Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία $x\hat{O}y$.

Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή O της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες.

Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές Ox και Oy της γωνίας στα σημεία A, B αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ, Δ .

Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;



Μονάδες 25

3.

Θ Ε Μ Α Β

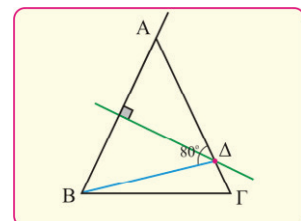
4.2

1554

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο $\hat{A_{εξ}} = 2\hat{AB\Gamma}$. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της πλευράς AB , η οποία τέμνει την πλευρά AG στο Δ και σχηματίζεται γωνία $A\Delta B$ ίση με 80° .

α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=AG$.

β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



Μονάδες $(10+15)=25$

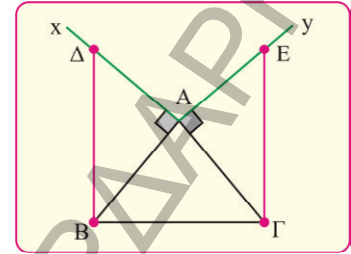
4.

Θ Ε Μ Α Β

4.2

1556

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$. Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp AG$. Οι κάθετες στην πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία B και Γ τέμνουν τις Ax και Ay στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.



α. Να αποδείξετε ότι $BD=GE$.

β. Αν η γωνία BAG είναι ίση με 80° , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔAE .

Μονάδες $(12+13)=25$

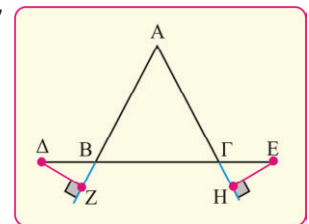
5.

Θ Ε Μ Α Β

4.6

1572

Θωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και σημεία Δ και E στην ευθεία $B\Gamma$ τέτοια, ώστε $BD=GE$. Έστω ότι $\Delta Z \perp AB$ και $EH \perp AG$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $BZ=GH$.

ii. Το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές.

β. Αν $\hat{A} = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AZH .

Μονάδες $[(10+7)+8]=25$

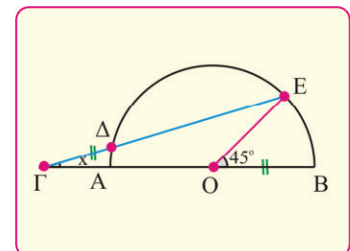
6.

Θ Ε Μ Α Β

4.6

1576

Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB προεκτείνουμε την AB προς το μέρος του A και παίρνουμε ένα σημείο Γ . Θεωρούμε E ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος GE με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα $\Gamma\Delta$ ισούται με το OB και η γωνία



$\hat{BGE}$ είναι 15° τότε

α. να αποδείξετε ότι $\hat{O\Delta E} = 30^\circ$

β. να υπολογίσετε ότι $\hat{EOB} = x$

Μονάδες $(12+13)=25$

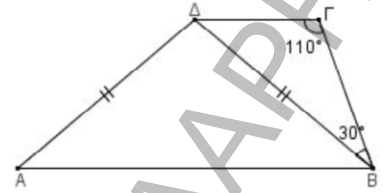
7.

Θ Ε Μ Α Β

4.6

1577

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ στο οποίο η διαγώνιος $B\Delta$ είναι ίση με την πλευρά $A\Delta$. Αν η γωνία $\hat{\Gamma} = 110^\circ$ και η γωνία $\hat{\Delta B\Gamma} = 30^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A\Delta B}$.



Μονάδες 25

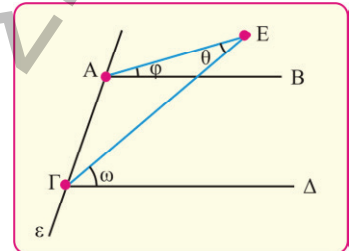
8.

Θ Ε Μ Α Β

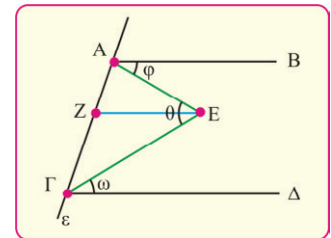
4.2

1590

Δίνεται ευθεία ε του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ καθώς και ένα τυχαίο σημείο E βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε .
Να αποδείξετε ότι:



- α. Αν το E είναι εκτός των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ τότε: $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$
β. Αν το E είναι ανάμεσα στα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ και $EZ \parallel AB$, τότε να αποδείξετε ότι $\hat{\theta} = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$



Μονάδες (10+15)=25

9.

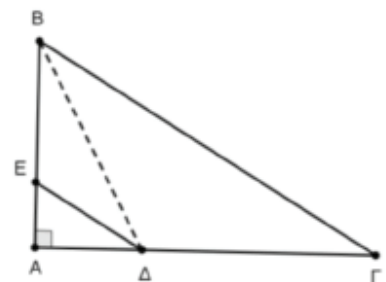
Θ Ε Μ Α Β

4.6

1594

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς $A\Gamma$ τέτοιο ώστε, η διχοτόμος DE της γωνίας $\hat{A\Delta B}$ να είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$.

- α. Να αποδείξετε ότι:
i. $\hat{E\Delta B} = \hat{\Delta B\Gamma}$ και $\hat{E\Delta A} = \hat{\Gamma}$
ii. Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές
β. Αν $\hat{A\Delta B} = 60^\circ$ να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.



Μονάδες [(4+4)+8+9]=25

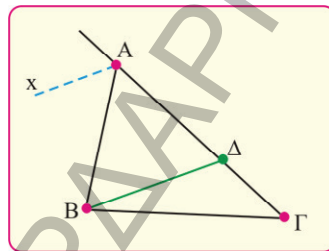
10.

Θ Ε Μ Α Β

4.6

1596

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Έστω Ax η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας $\hat{A}_{εξ} = 120^\circ$. Από την κορυφή B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Ax , η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ .



α. Να αποδείξετε ότι:

- i. $\hat{AB}\Delta = 60^\circ$
- ii. το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.
- iii. $A\Gamma - AB = \Delta\Gamma$ $\Delta\Gamma = A\Gamma - AB$

β. Αν η γωνία $\hat{B}\Delta A$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta\Gamma$.

Μονάδες $[(5+5+5)+10]=25$

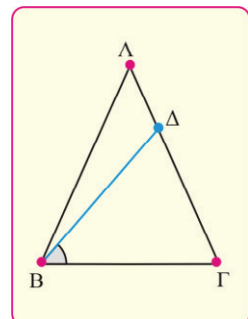
11.

Θ Ε Μ Α Β

4.6

1602

Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) με γωνία $\hat{A} = 50^\circ$. Έστω Δ είναι σημείο της πλευράς $A\Gamma$, τέτοιο ώστε $B\Delta=B\Gamma$.



- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{\Delta B\Gamma}$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}$.

Μονάδες $(12+13)=25$

12.

Θ Ε Μ Α Β

4.6

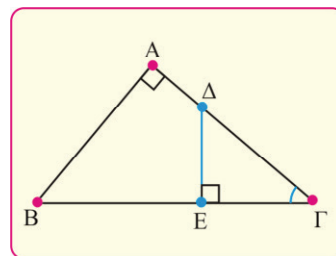
1603

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 40^\circ$.

Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς $A\Gamma$ και $DE \perp B\Gamma$.

Να υπολογίσετε:

- α. τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.
- β. τις γωνίες του τετραπλεύρου $A\Delta E B$.



Μονάδες $(10+15)=25$

13.

Θ Ε Μ Α Β

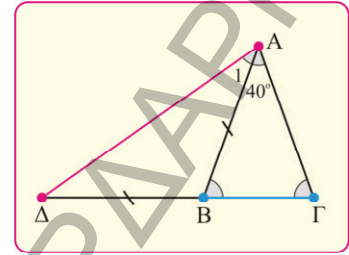
4.6

1604

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) με γωνία κορυφής $\hat{A} = 40^\circ$. Στην προέκταση της ΓB (προς το B) παίρνουμε τμήμα $B\Delta$ τέτοιο ώστε $B\Delta=AB$.

Να υπολογίσετε

- τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
- τη γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$.



Μονάδες $(10+15)=25$

14.

Θ Ε Μ Α Β

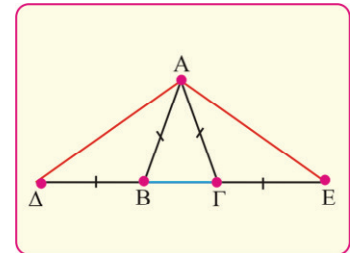
4.6

1607

Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν $\Delta B=BA=AG=GE$ και $B\hat{A}\Gamma = 40^\circ$.

Να αποδείξετε ότι

- $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E = 110^\circ$.
- τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\Gamma$ είναι ίσα.
- το τρίγωνο ΔAE είναι ισοσκελές.



Μονάδες $(10+10+5)=25$

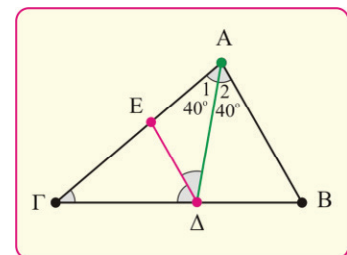
15.

Θ Ε Μ Α Β

1623

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 80^\circ$ και $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$, και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

- Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.
- Φέρουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην AB , που τέμνει την AG στο E . Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{\Delta}E$, $E\hat{\Delta}\Gamma$.



Μονάδες $(12+13)=25$

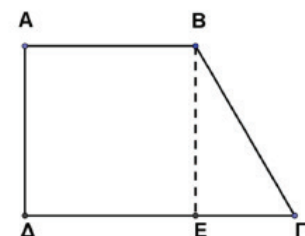
16.

Θ Ε Μ Α Β

4.6

1635

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), με $AB=BG=4$, $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνεται επίσης το ύψος BE από τη κορυφή B .



- α. Να υπολογίσετε τις άλλες δυο γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ.
β. Να αποδείξετε $2ΕΓ=ΒΓ$
γ. Αν Μ,Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΜΝ.

Μονάδες $(8+9+8)=25$

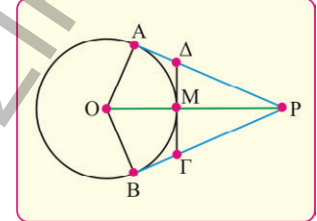
17.

Θ Ε Μ Α Β

4.6

1636

Δίνεται κύκλος κέντρου Ο, και από ένα σημείο Ρ εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Το τμήμα ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ και η εφαπτομένη του κύκλου στο Μ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.



- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές.
β. Αν η γωνία ΑΡΒ είναι 40° να υπολογίσετε τη γωνία ΑΟΒ.

Μονάδες $(13+12)=25$

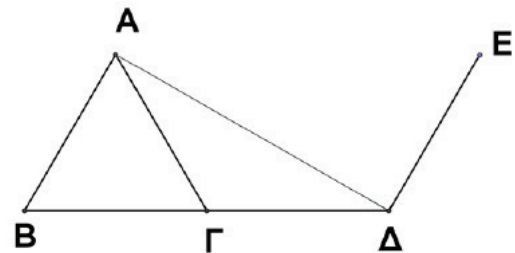
18.

Θ Ε Μ Α Β

4.6

1637

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το μέρος του Γ) θεωρούμε τμήμα $ΓΔ=ΒΓ$. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην ΑΔ στο σημείο της Δ, τέτοιο ώστε $ΔΕ=ΒΓ$. (Α και Ε στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ΒΔ).



- α. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ.
β. Να αποδείξετε ότι ΑΒΔΕ παραλληλόγραμμο.

Μονάδες $(12+13)=25$

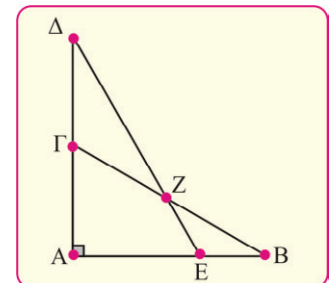
19.

Θ Ε Μ Α Β

4.6

1639

Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ (γωνία Α ορθή) του παρακάτω σχήματος ισχύει $\hat{B} = \hat{A} = 30^\circ$.



- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΕΖΓ.
β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΖΔ και ΕΒΖ είναι ισοσκελή.

Μονάδες $(13+12)=25$

20.

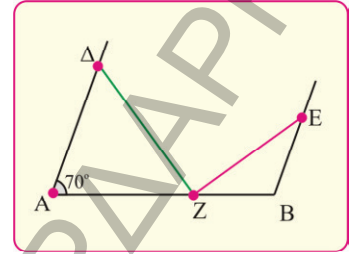
Θ Ε Μ Α Β

4.6

1640

Στο παρακάτω σχήμα, οι ΑΔ και ΒΕ είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν $ΑΔ=ΑΖ$, $ΒΕ=ΒΖ$ και $\hat{A} = 70^\circ$.

- Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΔΖ και ΒΖΕ.
- Να αποδείξετε ότι $\angle Z = 90^\circ$.



Μονάδες $(16+9)=25$

21.

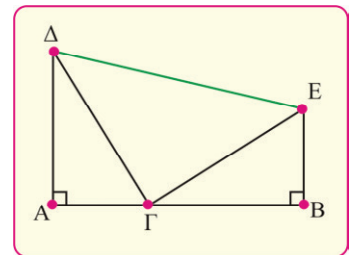
Θ Ε Μ Α Β

4.6

1641

Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ είναι ορθές και επιπλέον $ΑΔ=ΒΓ$ και $ΑΓ=ΒΕ$. Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα.
- Αν η γωνία $\angle EGB = 40^\circ$ τότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



Μονάδες $(13+12)=25$

22.

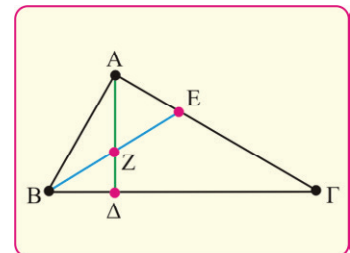
Θ Ε Μ Α Β

4.6

1645

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

- Να αποδείξετε ότι η γωνία Β είναι 60° .
- Αν το ύψος του ΑΔ και η διχοτόμος του ΒΕ τέμνονται στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο.



Μονάδες $(10+15)=25$

23.

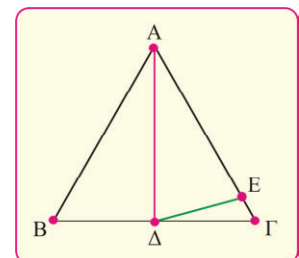
Θ Ε Μ Α Β

4.6

1661

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και η διάμεσός του ΑΔ τέτοια ώστε $\angle BAD = 30^\circ$. Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο ώστε $ΑΔ=ΑΕ$.

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.
- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.
- Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ.



Μονάδες $(8+9+8)=25$

24.

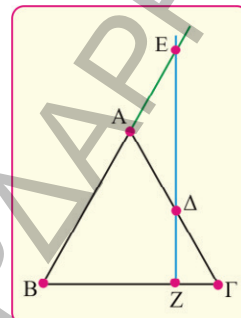
Θ Ε Μ Α Β

4.6

1689

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεωρούμε σημείο E στην προέκταση της BA (προς το A) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς $A\Gamma$, ώστε $AE=AD$.

- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ADE .
- Αν Z είναι το σημείο τομής της προέκτασης της ED (προς το Δ) με την $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι η EZ είναι κάθετη στην $B\Gamma$.



Μονάδες $(10+15)=25$

25.

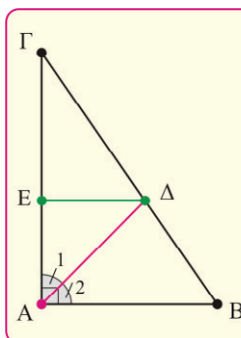
Θ Ε Μ Α Β

4.6

1693

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) και AD η διχοτόμος της γωνίας A . Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο E .

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
- Να υπολογίσετε τη γωνία ADE .
- Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20° μοίρες μεγαλύτερη της γωνίας $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $E\Delta\Gamma$.



Μονάδες $(9+9+7)=25$

26.

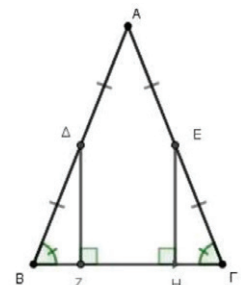
Θ Ε Μ Α Β

4.6

1699

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$).

- Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και E των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση $B\Gamma$.
- Αν $\hat{A}=75^\circ + \hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



Μονάδες $(13+12)=25$

27.

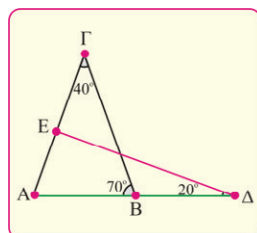
Θ Ε Μ Α Β

4.6

1700

Στο διπλανό σχήμα, να αποδείξετε ότι:

- το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- η γωνία AED είναι ορθή.



Μονάδες $(12+13)=25$

28.

Θ Ε Μ Α Β

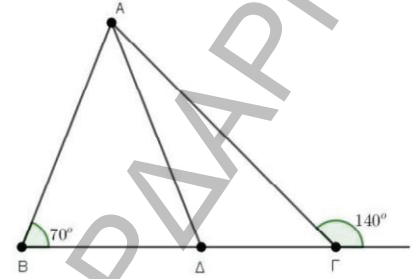
4.6

12704

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma}_{\text{εξωτ}} = 140^\circ$.

Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ , ώστε $A\Delta = AB$. Να αποδείξετε ότι:

- $\hat{B}\Delta\Delta = 40^\circ$
- $\hat{A}\Delta\Gamma = 110^\circ$
- Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.



Μονάδες $(9+7+9)=25$

29.

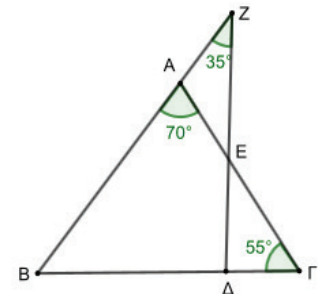
Θ Ε Μ Α Β

4.6

12707

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 55^\circ$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το σημείο A και παίρνουμε στην προέκταση σημείο Z ώστε $\hat{B}\hat{Z}\Delta = 35^\circ$, όπου Δ εσωτερικό σημείο της $B\Gamma$. Η $Z\Delta$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- $\hat{Z}\Delta B = 90^\circ$
- το τρίγωνο AZE είναι ισοσκελές.



Μονάδες $(7+8+10)=25$

30.

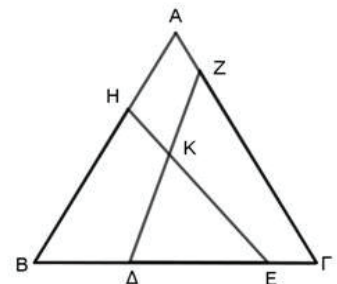
Θ Ε Μ Α Β

4.6

12708

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις πλευρές $B\Gamma$ και ΓA θεωρούμε σημεία E και Z αντίστοιχα ώστε $BE = \Gamma Z$. Στις πλευρές AB και ΓB θεωρούμε σημεία H και Δ αντίστοιχα ώστε $BH = \Gamma\Delta$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔZ και EH τέμνονται στο σημείο K το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- $EH = \Delta Z$ και $\hat{BEH} = \hat{\Gamma\Delta Z}$
- τα τρίγωνα BEH και $KE\Delta$ έχουν ίσες γωνίες μία προς μία.



Μονάδες $(12+13)=25$

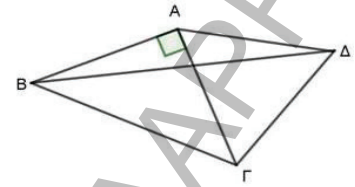
31.

Θ Ε Μ Α Β

4.6

12709

Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ και $\hat{A}=90^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο $AG\Delta$.



- α. Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών B, Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.
- γ. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $AB\Delta$.

Μονάδες $(5+8+12)=25$

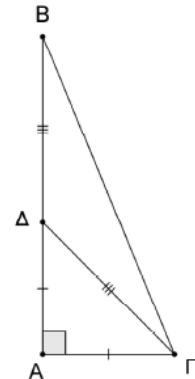
32.

Θ Ε Μ Α Β

4.6

13442

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=90^\circ$. Στην πλευρά του AB θεωρούμε σημείο Δ ώστε $B\Delta = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = AG$.



- α. Να αποδείξετε ότι $\hat{A\Delta\Gamma} = 45^\circ$.
- β. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$.

Μονάδες $(12+13)=25$

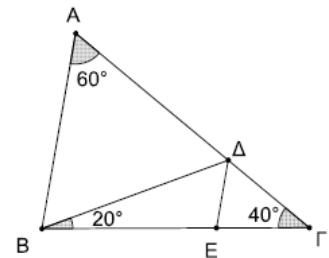
33.

Θ Ε Μ Α Β

4.6

13443

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=60^\circ$ και $\hat{\Gamma}=40^\circ$. Στην πλευρά AG θεωρούμε σημείο Δ , ώστε $\hat{\Gamma B\Delta}=20^\circ$.



- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.
- β. Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:
 - i. $\hat{B\Delta E}=60^\circ$.
 - ii. Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B\Delta\Gamma}$

Μονάδες $[10+(8+7)]=25$

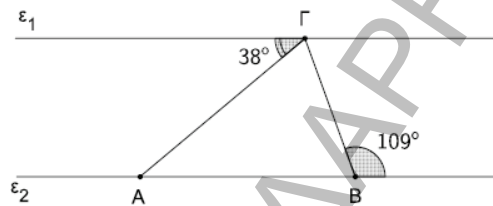
34.

Θ Ε Μ Α Β

4.6

13535

Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε_1 διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου $AB\Gamma$ και είναι παράλληλη στην ευθεία ε_2 που ορίζεται από τις κορυφές του A και B .



Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

- να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
- να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

Μονάδες $(15+10)=25$

35.

Θ Ε Μ Α Β

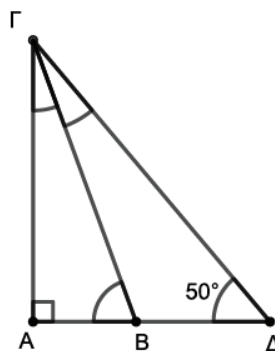
4.6

13654

Στο ακόλουθο σχήμα είναι

$$\hat{A} = 90^\circ, \hat{AB\Gamma} - \hat{A\Gamma B} = 50^\circ \text{ και } \hat{A\Delta\Gamma} = 50^\circ.$$

- Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες $\hat{AB\Gamma}$ και $\hat{A\Gamma B}$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$.
- Να αποδείξετε ότι η ΓB είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A\Gamma\Delta}$.



Μονάδες $(10+15)=25$

36.

Θ Ε Μ Α Β

4.6

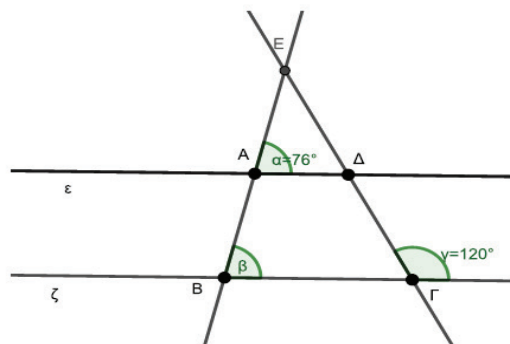
13741

Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες.

$$\text{Αν είναι } \hat{\alpha} = 76^\circ \text{ και } \hat{\gamma} = 120^\circ,$$

να υπολογίσετε:

- Τη γωνία $\hat{\beta}$.
- Τις γωνίες του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$.
- Τη γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου EAD .



Μονάδες $(5+12+8)=25$

37.

Θ Ε Μ Α Β

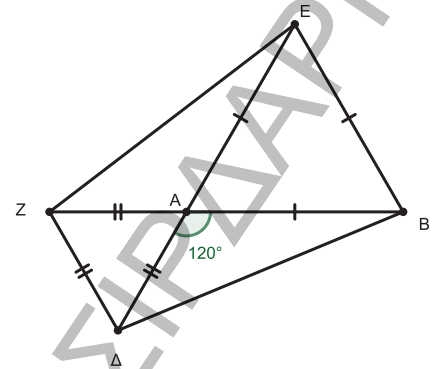
4.6

14884

Έστω τρίγωνο $AB\Delta$ με $\widehat{A} = 120^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα AEB και $AZ\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα AEB και $AZ\Delta$ είναι ίσα.
- β. Το τμήμα ΔZ είναι παράλληλο στο BE .



Μονάδες $(13+12)=25$

40 ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

4.6 Άθροισμα γωνιών τριγώνου (13)

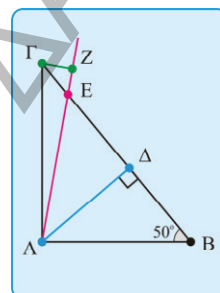
38.

Θ Ε Μ Α Δ

4.6

1708

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 50^\circ$, το ύψος του $A\Delta$ και σημείο E στην $\Delta\Gamma$ ώστε $\Delta E = B\Delta$. Το σημείο Z είναι η προβολή του Γ στην AE .



- α. Να αποδείξετε ότι:
- Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.
 - $\hat{\Gamma A E} = 10^\circ$
- β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $Z\Gamma E$.

Μονάδες $(6+10+9)=25$

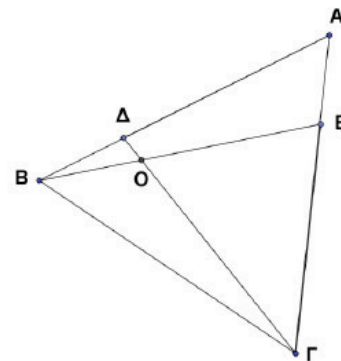
39.

Θ Ε Μ Α Δ

4.6

1779

Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ και E των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ώστε να είναι $A\Delta = \Gamma E$. Έστω O το σημείο τομής των $\Gamma\Delta$ και BE .



- α. Να αποδείξετε ότι:
- $\hat{B\Gamma E} = \hat{\Gamma\Delta A}$
 - $\hat{B\Gamma O} = 120^\circ$
- β. Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο $AEO\Delta$ είναι εγγράψιμο.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $[(10+10)+5]=25$

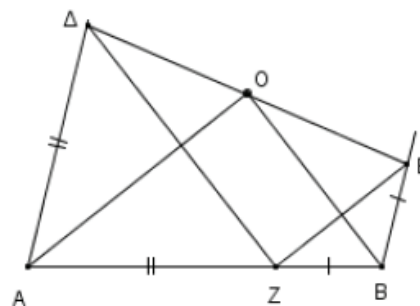
40.

Θ Ε Μ Α Δ

4.6

1784

Δίνεται τραπέζιο $A\Delta EB$, με $A\Delta \parallel BE$, στο οποίο ισχύει ότι $AB = A\Delta + BE$, και O το μέσον της ΔE . Θεωρούμε σημείο Z στην AB τέτοιο ώστε $AZ = A\Delta$ και $BZ = BE$.



- Αν γωνία $\hat{\Delta A Z} = \varphi$
- να εκφράσετε τη γωνία $AZ\Delta$ σε συνάρτηση με τη φ .
 - να εκφράσετε τη γωνία EZB σε συνάρτηση με τη φ .
 - να αποδείξετε ότι οι OA και OB είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔZ και ZE αντίστοιχα.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

41.

Θ Ε Μ Α Δ

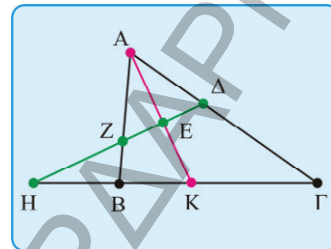
4.6

1792

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο του AK και σε τυχαίο σημείο της E φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο AK , η οποία τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Z και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓB στο σημείο H .

Να αποδείξετε ότι:

- α. $\angle Z\Delta\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$
- β. $ZK = K\Delta$.
- γ. $\angle H\Gamma = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$



42.

Θ Ε Μ Α Δ

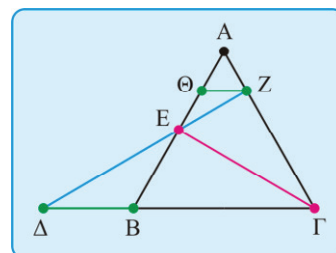
4.6

1828

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του ΓE . Στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε

$B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$ Αν η ευθεία ΔE τέμνει την $A\Gamma$ στο Z και $Z\Theta \parallel B\Gamma$:

- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο $A\Theta Z$ είναι ισόπλευρο.
- β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΘEZ .
- γ. Να αποδείξετε ότι $AE = 2\Theta Z$.
- δ. Να αποδείξετε ότι $3AB = 4\Theta B$.



Μονάδες $(7+8+10)=25$

43.

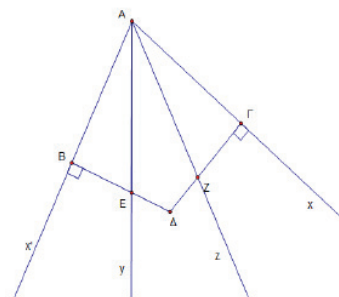
Θ Ε Μ Α Δ

4.6

1849

Στις πλευρές Ax' και Ax γωνίας $\hat{x}'\hat{A}\hat{x}$ θεωρούμε σημεία B και Γ ώστε $AB=A\Gamma$. Οι κάθετες στις Ax' και Ax στα σημεία B και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ . Αν οι ημιευθείες Ay και Az χωρίζουν τη γωνία $\hat{x}'\hat{A}\hat{x}$ σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο EAZ είναι ισοσκελές.
- β. Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{x}'\hat{A}\hat{x}$
- γ. Οι γωνίες $\Gamma B\Delta$ και $\Gamma A\Delta$ είναι ίσες.



Μονάδες $(8+8+9)=25$

44.

Θ Ε Μ Α Δ

4.6

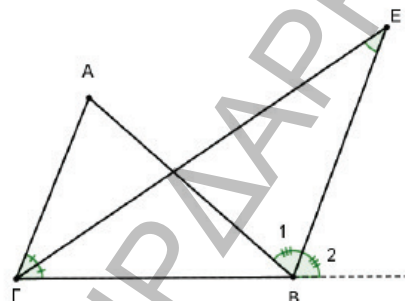
1851

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η προέκταση της διχοτόμου της $\hat{\Gamma}$ και της εξωτερικής γωνίας του $\hat{B}$, τέμνονται στο E .

Δίνεται ότι $\hat{ABE} = 70^\circ = 2\hat{\Gamma EB}$

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓBE είναι ισοσκελές

β. α υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Delta AB\Gamma$.



Μονάδες (12+13)25

45.

Θ Ε Μ Α Δ

4.6

1888

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και M το μέσο της $B\Gamma$.

Φέρουμε $\Gamma\Delta B\Gamma$ με $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$ (A, Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$).

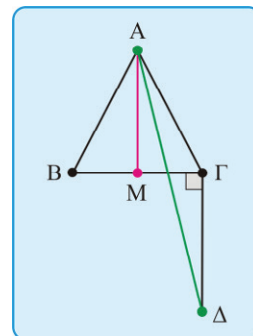
Να αποδείξετε ότι:

α. $AM \parallel \Gamma\Delta$

β. η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{MAG}$.

γ. $\hat{\Delta AG} = 45^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$

δ. $A\Delta < 2 AB$



Μονάδες (6+7+7+5)=25

46.

Θ Ε Μ Α Δ

4.6

1894

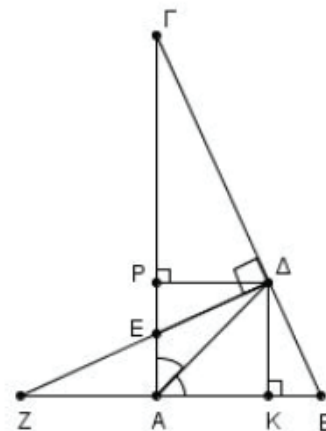
Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρουμε τη διχοτόμο του Δ . Έστω ΔK και ΔP οι προβολές του Δ στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Η κάθετη της $B\Gamma$ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο E και την προέκταση της πλευράς AB (προς το B) στο σημείο Z .

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B} = \hat{\Delta EG}$

ii. $\Delta E = \Delta B$

β. Να υπολογίσετε τη γωνία ΔGZ



Μονάδες [(8+8)+9]=25

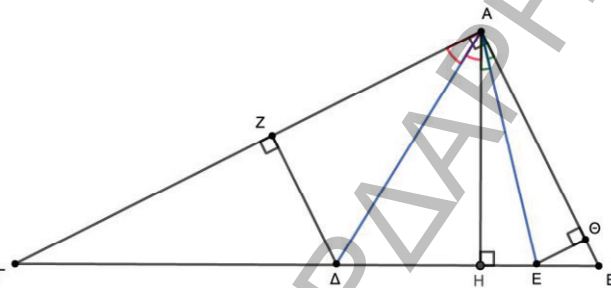
47.

Θ Ε Μ Α Δ

4.6

13499

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB < A\Gamma$ και AH το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία Δ και E τέτοια ώστε $\Delta B = AB$ και $\Gamma E = \Gamma A$. Αν ΔZ και $E\Theta$ είναι οι αποστάσεις των Δ και E από τις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α. $\hat{\Gamma}\Delta\Delta = \hat{\Delta}\Delta H$ και $\hat{E}\Delta B = \hat{H}\Delta E$

β. $\Delta E = \Delta Z + E\Theta$.

Μονάδες (14+11)=25

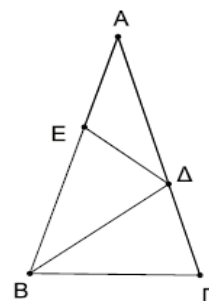
48.

Θ Ε Μ Α Δ

4.6

13537

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, σημείο Δ της πλευράς $A\Gamma$, ώστε $A\Delta = B\Delta = B\Gamma$ και σημείο E της πλευράς AB , ώστε $AE = \Gamma\Delta$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{\Gamma} = 2\hat{A}$

ii. $\hat{A} = 36^\circ$

iii. Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

β. Στην προέκταση της ΔE προς το E θεωρούμε σημείο Z , ώστε $\Delta Z = A\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες [(6+6+6)+7]=25

49.

Θ Ε Μ Α Δ

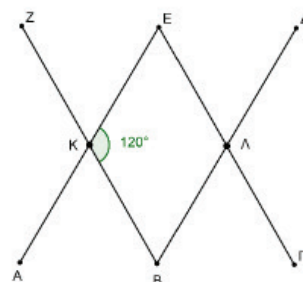
4.6

13697

Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα AE , BZ , $B\Delta$ και ΓE αναπαριστούν τέσσερις ίσους ράβδους μήκους 40cm οι οποίες αποτελούν μέρη μιας κρεμάστρας τοίχου.



Οι ράβδοι συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε ανά δύο απέναντι να είναι παράλληλες, δηλαδή $AE \parallel B\Delta$ και $BZ \parallel \Gamma E$, και ανά δύο να έχουν κοινό μέσο, δηλαδή K κοινό



μέσο των ΑΕ, ΒΖ και Λ κοινό μέσο των ΒΔ, ΓΕ. Έστω ότι η μία από τις γωνίες που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ράβδοι ΑΕ και ΒΖ με κορυφή το κοινό τους μέσο Κ, η γωνία ΒΚΕ, είναι ίση με 120° .

- α. Να αποδείξετε ότι $\hat{AKB} = \hat{KBL} = \hat{BLG} = 60^\circ$.
- β. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΒΛΓ είναι ίσα και ισόπλευρα. Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Μονάδες $(9+10+6)=25$

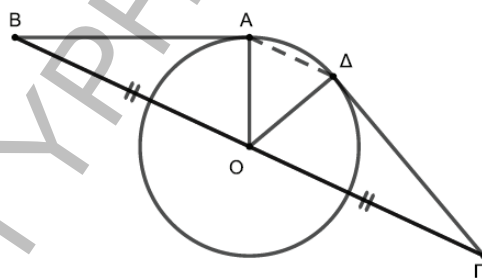
50.

Θ Ε Μ Α Δ

4.6

13750

Από σημείο Β εξωτερικό ενός κύκλου (Ο, R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΒΑ. Ενώνουμε το σημείο Β με το κέντρο Ο του κύκλου και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΟΓ=ΒΟ. Από το σημείο Γ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΔ, όπως στο διπλανό σχήμα.



- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. $AB = \Delta\Gamma$
 - ii. $A\Delta \parallel B\Gamma$
- β. Αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΒΑ είναι ίσο με την ακτίνα R, τι είδους τρίγωνο είναι το τρίγωνο ΑΟΔ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $[(8+10)+7]=25$

4.8 Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου (4)

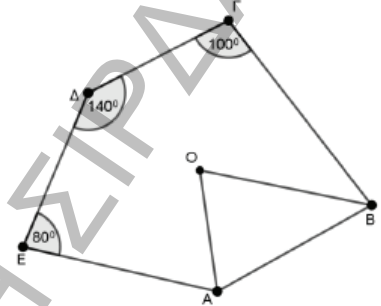
1.

Θ Ε Μ Α Β

4.8

12640

Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία του Γ ισούται με 100° , η γωνία του Δ ισούται με 140° και η γωνία του Ε ισούται με 80° τότε, να υπολογίσετε:



- α. το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$.
- β. το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.

Μονάδες $(12+13)=25$

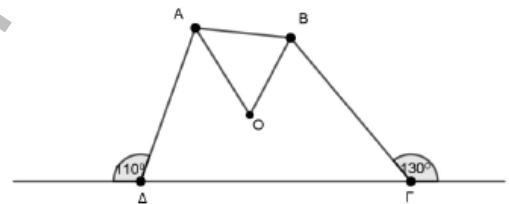
2.

Θ Ε Μ Α Β

4.8

12644

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η εξωτερική γωνία της Γ, ισούται με 130° και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με 110° . Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο τότε, να υπολογίσετε:



- α. τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου.
- β. το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$.
- γ. το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.

Μονάδες $(9+9+7)=25$

3.

Θ Ε Μ Α Β

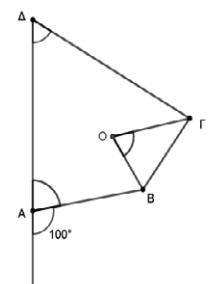
4.8

13619

Θεωρούμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος με

$$\hat{A}_{εξ} = 100^\circ \text{ και } \hat{B} + \hat{\Gamma} = 220^\circ.$$

Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο Ο, τότε:



- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.
- β. Να αποδείξετε ότι $\hat{BOG} = 70^\circ$.

Μονάδες $(10+15)=25$

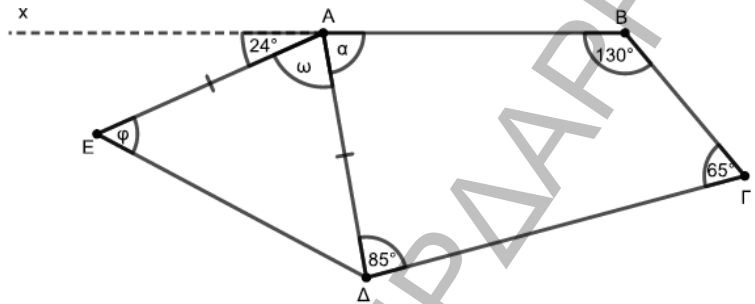
4.

Θ Ε Μ Α Β

4.8

13749

Στο παρακάτω σχήμα το $ΑΒΓΔΕ$ είναι ένα πεντάγωνο στο οποίο η διαγώνιος $ΑΔ$ είναι ίση με την πλευρά $ΑΕ$ και η ημιευθεία $Αx$ είναι προέκταση της $ΒΑ$ προς το $Α$. Να υπολογίσετε δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:



α. Τη γωνία $\hat{\alpha}$.

β. Τη γωνία $\hat{\omega}$.

γ. Τη γωνία $\hat{\varphi}$.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

Κεφάλαιο

5.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ - ΤΡΑΠΕΖΙΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Β-Δ 270

- 5.2 Παραλληλόγραμμα
- 5.3 Ορθογώνιο
- 5.4 Ρόμβος
- 5.5 Τετράγωνο
- 5.6 Εφαρμογές στα τρίγωνα
- 5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος)
- 5.8 Το ορθόκεντρο τριγώνου (χωρίς το Λήμμα, χωρίς την απόδειξη του θεωρήματος και χωρίς το πόρισμα)
- 5.9 Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου)
- 5.10 Τραπεζίο (χωρίς την απόδειξη του θεωρήματος Ι και του πορίσματος)
- 5.11 Ισοσκελές τραπέζιο

ΘΕΜΑΤΑ Β

Β 102

5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	5.10	5.11
26	3	10	4	15			30	3	11

ΘΕΜΑΤΑ Δ

Β 168

5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	5.10	5.11
14	12	6	10	30	5	9	44	15	23

Κεφάλαιο

5ο

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ - ΤΡΑΠΕΖΙΑ

5.2 Παραλληλόγραμμα (26)

1.

Θ Ε Μ Α Β

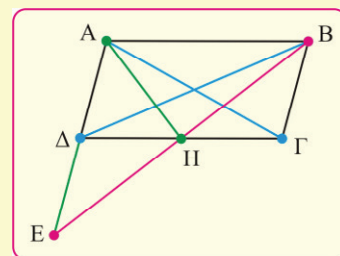
5.2

1531

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=2B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Delta$ (προς το μέρος του Δ) κατά τμήμα $\Delta E=A\Delta$ και φέρουμε την BE που τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο σημείο H .

Να αποδείξετε ότι:

- το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές.
- το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο.
- η AH είναι διάμεσος του BAE τριγώνου.



Μονάδες $(7+9+9)=25$

2.

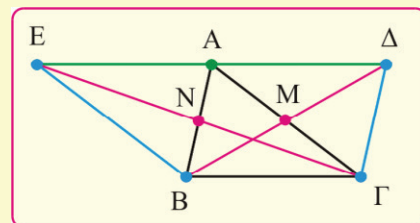
Θ Ε Μ Α Β

5.2

1533

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του BM και ΓN . Προεκτείνουμε την BM (προς το M) κατά τμήμα $M\Delta=BM$ και την ΓN (προς το N) κατά τμήμα $NE=\Gamma N$.

- Να αποδείξετε ότι
 $A\Delta//B\Gamma$ και $AE//B\Gamma$.
- Είναι τα σημεία E , A και Δ συνευθειακά;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Μονάδες $(13+12)=25$

3.

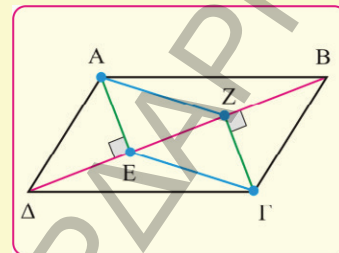
Θ Ε Μ Α Β

5.2

1534

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και η διαγώνιός του $B\Delta$. Από τις κορυφές A και Γ φέρουμε τις κάθετες AE και ΓZ στη $B\Delta$, που την τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $\Gamma B Z$ είναι ίσα.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Gamma E Z$ είναι παραλληλόγραμμο.



Μονάδες $(10+15)=25$

4.

Θ Ε Μ Α Β

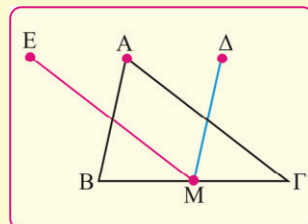
5.2

1535

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΓA .

Να αποδείξετε ότι:

- $\Delta A = AE$
- Τα σημεία Δ , A και E βρίσκονται στην ίδια ευθεία.
- $\Delta E = B\Gamma$



Μονάδες $(8+9+8)=25$

5.

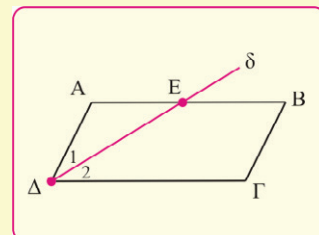
Θ Ε Μ Α Β

5.2

1538

Δίνεται $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο με $AB=2A\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E .

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.
- Είναι το σημείο E μέσο της πλευράς AB ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Μονάδες $(12+13)=25$

6.

Θ Ε Μ Α Β

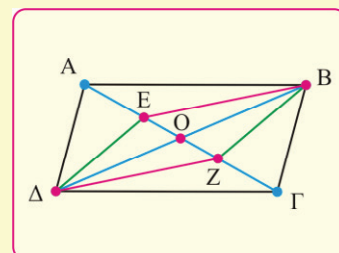
5.2

1539

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο E του τμήματος AO και σημείο Z του τμήματος OG , ώστε $OE=OZ$.

Να αποδείξετε ότι:

- $\Delta E = BZ$
- το $\Delta E B Z$ είναι παραλληλόγραμμο.



Μονάδες $(12+13)=25$

7.

Θ Ε Μ Α Β

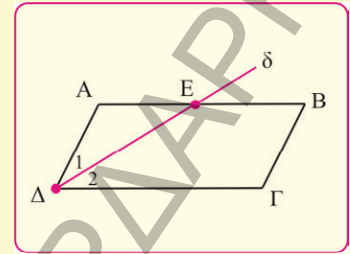
5.2

1557

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=2B\Gamma$ και E το μέσο της πλευράς του AB .

Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο $EA\Delta$ είναι ισοσκελές.
- β. Η DE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$



Μονάδες $(10+15)=25$

8.

Θ Ε Μ Α Β

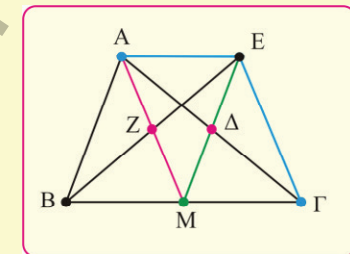
5.2

1559

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$ θεωρούμε σημείο E ώστε $M\Delta=DE$.

Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Η BE διέρχεται από το μέσο της διαμέσου AM .



Μονάδες $(12+13)=25$

9.

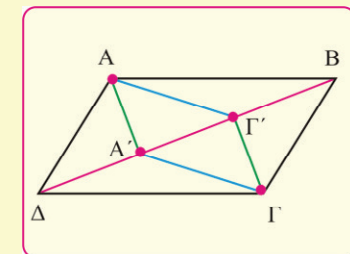
Θ Ε Μ Α Β

5.2

1600

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και A', Γ' οι προβολές των κορυφών A και Γ στη διαγώνιο $B\Delta$. Αν τα σημεία A' και Γ' δεν ταυτίζονται να αποδείξετε ότι:

- α. $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$
- β. $AA' = \Gamma\Gamma'$
- γ. Το τετράπλευρο $A\Gamma'\Gamma A'$ είναι παραλληλόγραμμο.



Μονάδες $(8+10+7)=25$

10.

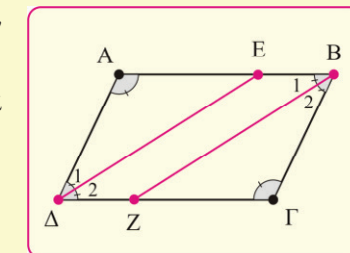
Θ Ε Μ Α Β

5.2

1609

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{\Delta}$ και $\hat{B}$ τέμνουν τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα AED και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.
- β. Το τετράπλευρο $DEBZ$ είναι παραλληλόγραμμο.



Μονάδες $(12+13)=25$

11.

Θ Ε Μ Α Β

5.2

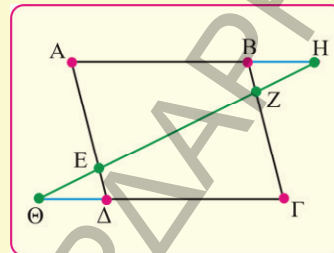
1610

Στις πλευρές AD και BG παραλληλογράμμου $ABGD$ θεωρούμε σημεία E και Z , τέτοια ώστε $AE=ΓΖ$. Αν η ευθεία ZE τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $ΓΔ$ στα σημεία H και $Θ$, να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{HBZ} = \hat{E\Delta\Theta}$

β. $\hat{BZH} = \hat{\Delta E\Theta}$

γ. $BH=\Theta\Delta$



Μονάδες $(8+8+9)=25$

12.

Θ Ε Μ Α Β

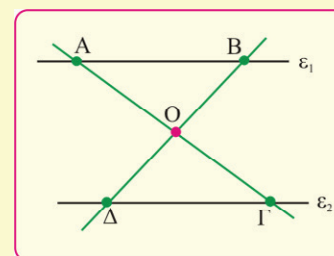
5.2

1618

Στο παρακάτω σχήμα είναι $\epsilon_1 // \epsilon_2$ και το σημείο O είναι το μέσο της BD . Να αποδείξετε ότι:

α. τα τρίγωνα AOB και $ΓΟΔ$ είναι ίσα και να γράψετε τα ίσα στοιχεία τους.

β. το $ABGD$ είναι παραλληλόγραμμο.



Μονάδες $(12+13)=25$

13.

Θ Ε Μ Α Β

5.2

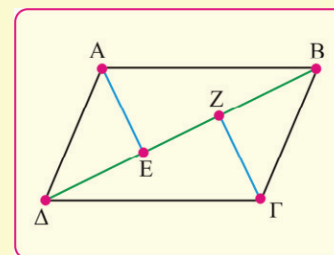
1628

Σε παραλληλόγραμμο $ABGD$ ($AB//ΓΔ$) με $AB > BΓ$ φέρουμε από τις κορυφές A και $Γ$ κάθετους στη διαγώνιο BD , οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α. $AE=ΓΖ$.

β. Το τετράπλευρο $AEGZ$ είναι παραλληλόγραμμο.



Μονάδες $(15+10)=25$

14.

Θ Ε Μ Α Β

5.2

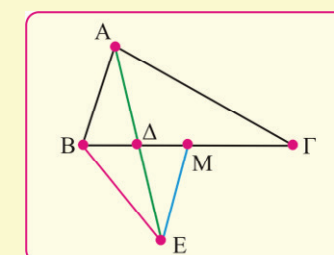
1642

Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ στο οποίο ισχύει $BΓ=2AB$ και έστω M το μέσο της $BΓ$. Αν η AD είναι διάμεσος του τριγώνου ABM και E σημείο στην προέκτασή της ώστε $AD=\Delta E$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. $ME=ΜΓ$



Μονάδες $(12+13)=25$

15.

Θ Ε Μ Α Β

5.2

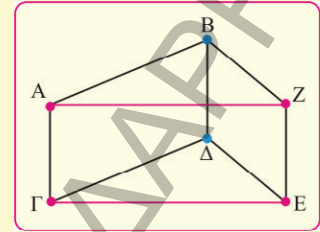
1654

Δίνονται τα παραλληλόγραμμα $AB\Delta\Gamma$ και $B\Delta EZ$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $A\Gamma EZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. $\hat{A}BZ = \hat{\Gamma}\Delta E$



Μονάδες $(13+12)=25$

16.

Θ Ε Μ Α Β

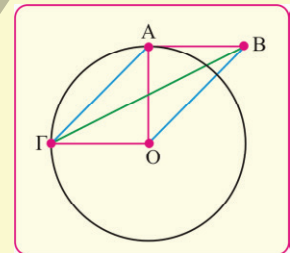
5.2

1678

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε κάθετες ακτίνες OA , OG και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα AB με $AB = OG$.

α. Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AO και $B\Gamma$ διχοτομούνται.

β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $ABO\Gamma$.



Μονάδες $(10+15)=25$

17.

Θ Ε Μ Α Β

5.2

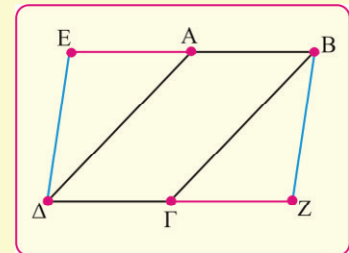
1687

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA (προς το A) και την πλευρά $\Delta\Gamma$ (προς το Γ) κατά τμήματα $AE=AB$ και $\Gamma Z = \Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $BZ = E\Delta$

β. Το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.



Μονάδες $(13+12)=25$

18.

Θ Ε Μ Α Β

5.2

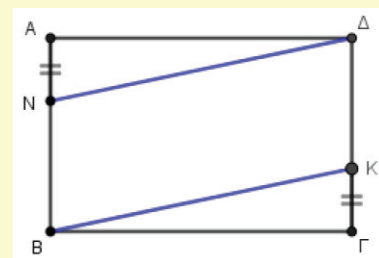
1692

Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία N και K των AB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε

$AN = K\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α. τα τρίγωνα $AN\Delta$ και $B\Gamma K$ είναι ίσα,

β. το τετράπλευρο $NBK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.



Μονάδες $(12+13)=25$

19.

Θ Ε Μ Α Β

5.2

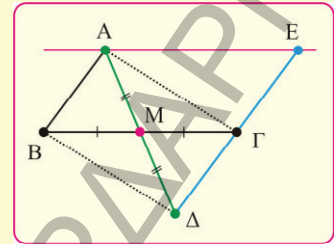
1701

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $MD=MA$. Από το A φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

α. το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο,

β. $BM = \frac{AE}{2}$



Μονάδες $(12+13)=25$

20.

Θ Ε Μ Α Β

5.2

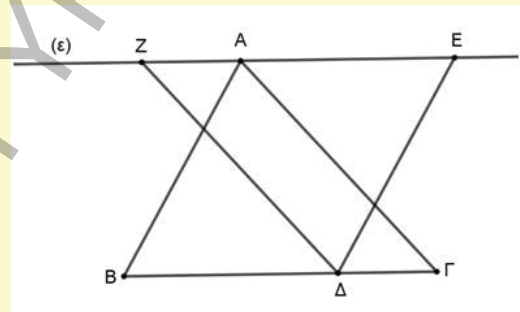
13755

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από την κορυφή A φέρουμε ευθεία (ϵ) παράλληλη προς τη $B\Gamma$. Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τις παράλληλες προς την AB και $A\Gamma$, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ϵ) στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

α. τα τετράπλευρα $ZA\Gamma\Delta$ και $AB\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμα.

β. τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.



Μονάδες $(10+15)=25$

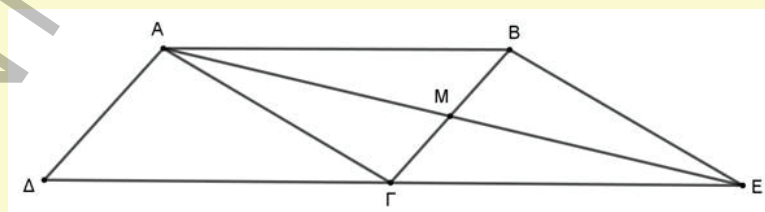
21.

Θ Ε Μ Α Β

5.2

13816

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε $A\Delta < AB$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε την AM προς το M κατά τμήμα $ME = AM$.



Να αποδείξετε ότι :

α. το τετράπλευρο $ABΕΓ$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. τα σημεία Δ , Γ και E είναι συνευθειακά.

Μονάδες $(10+15)=25$

22.

Θ Ε Μ Α Β

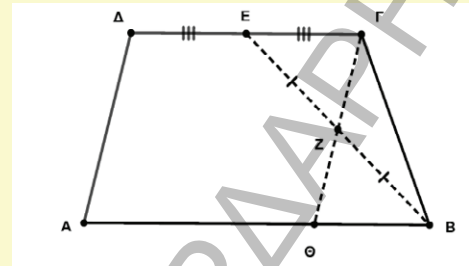
5.2

13824

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$.

Αν E και Z τα μέσα των $\Gamma\Delta$ και BE αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής της AB και της προέκτασης της ΓZ , να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα ΓEZ , ΘBZ είναι ίσα.
- $E\Gamma = \Theta B$.
- Το τετράπλευρο $EB\Theta\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.



Μονάδες $(13+5+7)=25$

23.

Θ Ε Μ Α Β

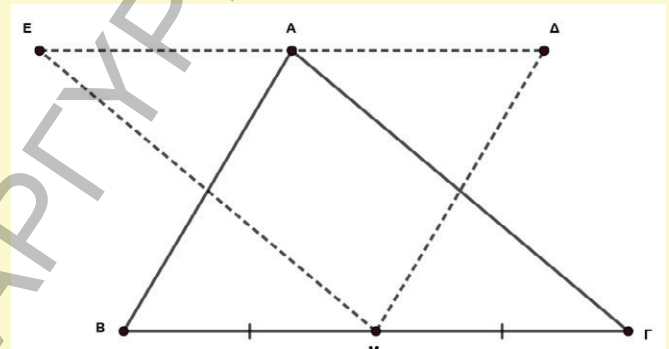
5.2

13825

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την BA και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την ΓA (τα σημεία Δ και E βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη $B\Gamma$ και το σημείο A).

Να αποδείξετε ότι:

- Τα τετράπλευρα $A\Delta M B$ και $A\Gamma M E$ είναι παραλληλόγραμμα.
- $\Delta A = A E$.



Μονάδες $(12+13)=25$

24.

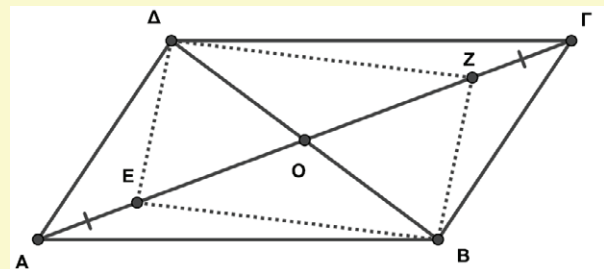
Θ Ε Μ Α Β

5.2

13829

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία E και Z των τμημάτων AO και ΓO αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AE = \Gamma Z$.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A E \Delta$ και $\Gamma Z B$ είναι ίσα.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E B Z$ είναι παραλληλόγραμμο.



Μονάδες $(12+13)=25$

25.

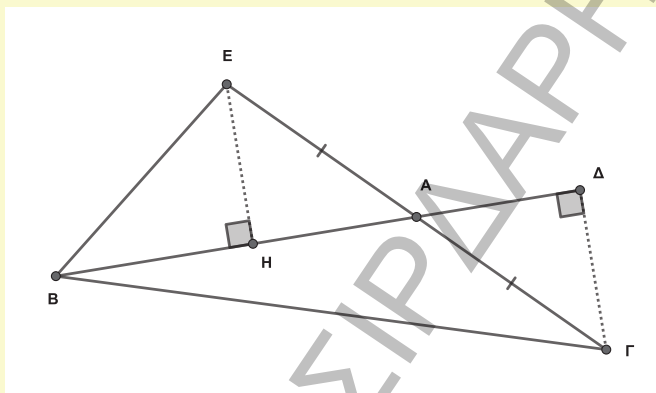
Θ Ε Μ Α Β

5.2

13833

Στο παρακάτω σχήμα το $\Gamma\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, το EH είναι ύψος του τριγώνου ABE και η BA είναι διάμεσος του τριγώνου BEG .

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $AΕΗ$ είναι ίσα.
- Να αποδείξετε ότι $AH=AD$.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Gamma\Delta E H$ είναι παραλληλόγραμμο.



Μονάδες $(10+5+10)=25$

26.

Θ Ε Μ Α Β

5.2

13834

Σε τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τη διάμεσό του AM . Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ προς το μέρος του B κατά τμήμα $BZ=B\Gamma$ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma H=B\Gamma$, επίσης προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $ME=AM$.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AMZ και EMH είναι ίσα.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AHEZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες $9+12+13)=25$

5.2 Παραλληλόγραμμα (14)

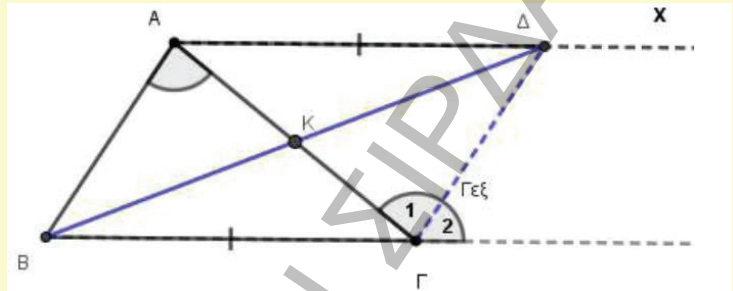
27.

Θ Ε Μ Α Δ

5.2

1709

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο η εξωτερική του γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας $\hat{A}$. Από την κορυφή A διέρχεται ημιευθεία $Ax \parallel B\Gamma$ στο ημιεπίπεδο (AB, Γ) . Στην ημιευθεία Ax θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



α. Η $B\Delta$ διέρχεται από το μέσο του τμήματος $A\Gamma$.

β. Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma}_{εξ}$.

γ. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες $(7+9+9)=25$

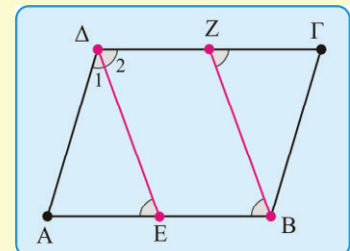
28.

Θ Ε Μ Α Δ

5.2

1730

Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ επιπλέον ισχύει $AB > A\Delta$, να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:



Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$.

Ισχυρισμός 3: Οι ΔE και BZ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{\Delta}$ και $\hat{B}$.

α. Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.

β. Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(16+9)=25$

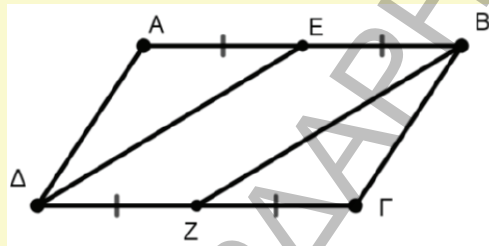
29.

Θ Ε Μ Α Δ

5.2

1731

Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και ΓΔ παραλληλογράμμου ABΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ABΓΔ επιπλέον ισχύουν $AB > \Gamma\Delta$ και η γωνία A είναι αμβλεία, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:



Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.

Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ισοσκελή.

- Στη περίπτωση που θεωρείται ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.
- Στη περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (16+9)=25

30.

Θ Ε Μ Α Δ

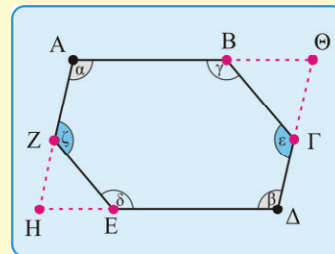
5.2

1746

Στο κυρτό εξάγωνο ABΓΔΕΖ ισχύουν τα εξής:

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta}, \hat{\gamma} = \hat{\delta} \text{ και } \hat{\epsilon} = \hat{\zeta}.$$

- Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon}$.
- Αν οι πλευρές ΑΖ και ΔΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Η και οι πλευρές ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ, να αποδείξετε ότι:
 - Οι γωνίες Α και Η είναι παραπληρωματικές
 - Το τετράπλευρο ΑΘΔΗ είναι παραλληλόγραμμο.



Μονάδες [8+(10+7)]=25

31.

Θ Ε Μ Α Δ

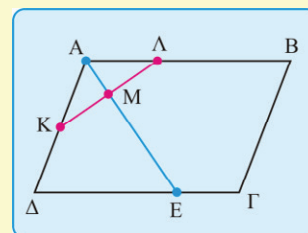
5.2

1785

Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ, με $AB > A\Delta$. Θεωρούμε σημεία K, Λ, των ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα ώστε $AK = A\Lambda$. Έστω Μ το μέσο του ΚΛ και η προέκταση του ΑΜ (προς το Μ) τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

- $A\Delta = \Delta E$.
- $B\Gamma + \Gamma E = AB$.
- $\hat{B} = 2\hat{A\Lambda K}$



Μονάδες (8+10+7)=25

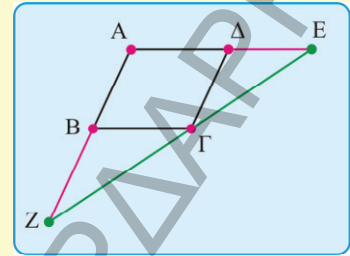
32.

Θ Ε Μ Α Δ

5.2

1805

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και στην προέκταση της $A\Delta$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Delta E = \Delta\Gamma$ ενώ στην προέκταση της AB θεωρούμε σημείο H τέτοιο ώστε $BH = B\Gamma$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B}\hat{\Gamma}Z = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E$

ii. τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά.

β. Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό.

«Έχουμε: $\hat{B}\hat{\Gamma}Z = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E$

(ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη ZE) και $\hat{B}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}E$

(ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $\Delta\Gamma$).

Όμως $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}E + \hat{\Gamma}\hat{\Delta}E + \hat{\Delta}\hat{E}\hat{\Gamma} = 180^\circ$

(ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\Delta E\Gamma$).

Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα:

$$\hat{\Delta}\hat{\Gamma}E + \hat{B}\hat{\Gamma}\Delta + \hat{B}\hat{\Gamma}Z = 180^\circ.$$

Οπότε τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά.»

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό.

Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό.

Μονάδες $[(10+10)+5]=25$

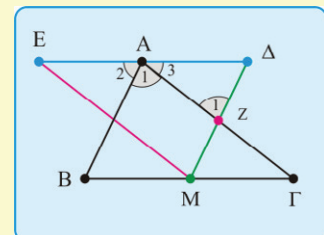
33.

Θ Ε Μ Α Δ

5.2

1810

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M του $B\Gamma$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο με το BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο με το ΓA (τα σημεία Δ και E είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τό $B\Gamma$ και το σημείο A).



Να αποδείξετε ότι:

α. Τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά.

β. Η περίμετρος του τριγώνου $M\Delta E$ είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

γ. Όταν ένας καθηγητής έθεσε στους μαθητές του το ερώτημα αν τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής:

$\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$ (εντός εναλλάξ των $AB//MD$ που τέμνονται από AZ)

$\hat{A}\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των $AB//MD$ που τέμνονται από ΔE)

Όμως $\hat{Z}_1 + \hat{A}_3 + \hat{A}\hat{\Delta}Z = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Delta Z$).

Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$

Οπότε Δ, E, A συνευθειακά.

Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή;

Μονάδες $(10+9+6)=25$

34.

Θ Ε Μ Α Δ

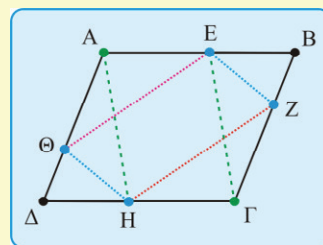
5.2

1839

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία E, Z, H, Θ στις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα, με $AE=H\Gamma$ και $BZ=\Delta\Theta$.

Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $AE\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Τα τμήματα $A\Gamma, B\Delta, EH$ και $Z\Theta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.



Μονάδες $(6+10+9)=25$

35.

Θ Ε Μ Α Δ

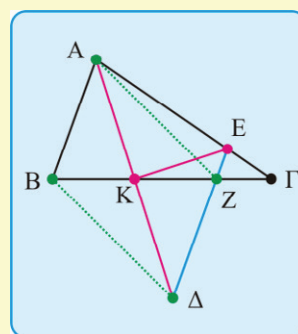
5.2

1857

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με AK διχοτόμο της γωνίας A . Στην προέκταση της AK θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK=K\Delta$. Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει τις $A\Gamma$ και $B\Gamma$ στα E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.
- Η EK είναι μεσοκάθετος της $A\Delta$.
- Τα τρίγωνα AKB και $K\Delta Z$ είναι ίσα.
- Το τετράπλευρο $AZ\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.



Μονάδες $(6+6+7+6)=25$

36.

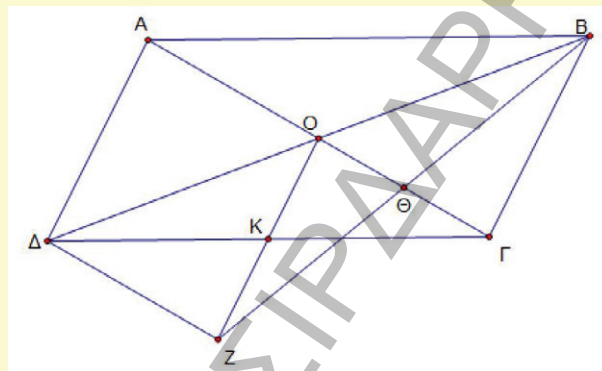
Θ Ε Μ Α Δ

5.2

1877

Έστω παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ με O το σημείο τομής των διαγωνίων του και K το μέσο του $ΓΔ$. Προεκτείνουμε το τμήμα OK κατά τμήμα $KO=KZ$. Θέτουμε BH τέμνει τη διαγώνιο $ΑΓ$ στο $Θ$. Να αποδείξετε ότι:

- Τα τμήματα $ΟΓ$ και BH διχοτομούνται.
- $ΔΖ=ΑΟ$.
- Τα τρίγωνα $ΑΟΒ$ και $ΔΖΓ$ είναι ίσα.



Μονάδες $(8+9+8)=25$

37.

Θ Ε Μ Α Δ

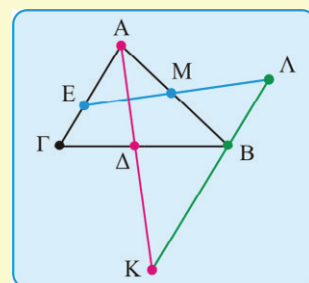
5.2

1882

Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$, $ΑΔ$ η διχοτόμος της γωνίας A και M το μέσον της AB . Η κάθετη από το M στην $ΑΔ$ τέμνει το $ΑΓ$ στο E . Η παράλληλη από το B στο $ΑΓ$ τέμνει την προέκταση της $ΑΔ$ στο K και την προέκταση της $ΕΜ$ στο $Λ$.

Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα $ΑΕΜ$, $ΜΒΛ$ και $ΑΒΚ$ είναι ισοσκελή.
- Το τετράπλευρο $ΑΛΒΕ$ είναι παραλληλόγραμμο.



Μονάδες $(15+10)=25$

38.

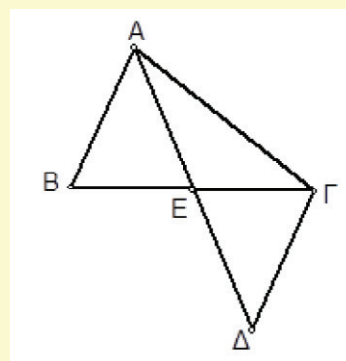
Θ Ε Μ Α Δ

5.2

1890

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών $A, B, Γ, Δ$ και E και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό E ισαπέχει από τα χωριά $B, Γ$ και επίσης από τα χωριά A και $Δ$.

- Να αποδείξετε ότι:
 - η απόσταση των χωριών A και B είναι ίση με την απόσταση των χωριών $Γ$ και $Δ$.
 - αν οι δρόμοι AB και $ΓΔ$ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν.
 - τα χωριά B και $Γ$ ισαπέχουν από τον δρόμο $ΑΔ$.
- Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου $ΑΓ$ που ισαπέχει από τα χωριά A και $Δ$.



Μονάδες $[(5+5+8)+7]=25$

39.

Θ Ε Μ Α Δ

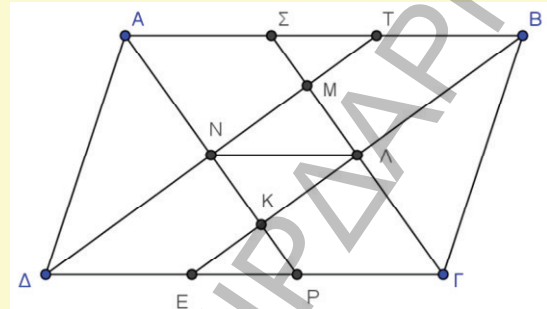
5.2

1891

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > AD$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του AP , BE , $\Gamma\Sigma$ και ΔT (όπου P , E στην $\Delta\Gamma$ και Σ , T στην AB) τέμνονται στα σημεία K , Λ , M και N όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Να αποδείξετε ότι:

- το τετράπλευρο ΔEBT είναι παραλληλόγραμμο.
- το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο.
- $\Lambda N \parallel AB$
- $\Lambda N = AB - AD$



Μονάδες $(7+8+5+5)=25$

40.

Θ Ε Μ Α Β

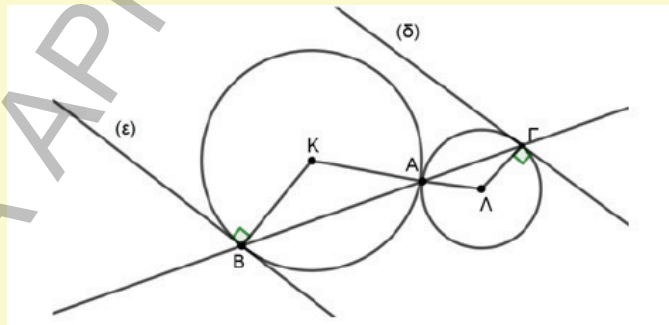
5.2

13845

Οι κύκλοι (K, R) , (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Φέρουμε τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το A και δεν περνάει από τα κέντρα των κύκλων, τέμνει τους κύκλους αντίστοιχα στα σημεία B και Γ . Φέρουμε τις εφαπτόμενες (ϵ) και (δ) στα σημεία B και Γ .

Να αποδείξετε ότι:

- $\hat{KBA} = \hat{\Lambda\Gamma A}$
- $(\epsilon) \parallel (\delta)$.
- Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση το τετράπλευρο $K\Gamma\Lambda B$ θα είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Μονάδες $(8+10+7)=25$

Είδη παραλληλογράμων

5.3 ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ (3)

1.

Θ Ε Μ Α Β

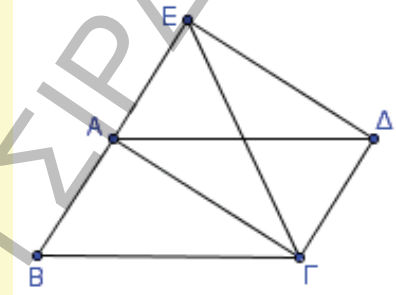
5.3

1653

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και το $A\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

- Το σημείο A είναι μέσο του BE .
- Το τρίγωνο BEG είναι ισοσκελές.
- $\hat{B\Gamma A} = \hat{A\Delta E}$



Μονάδες $(8+9+8)=25$

2.

Θ Ε Μ Α Β

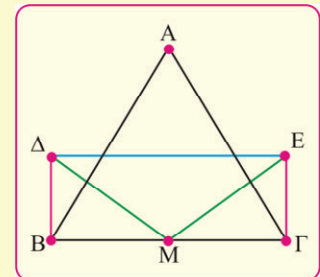
5.3

1668

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Στα σημεία B και Γ φέρουμε κάθετες στη $B\Gamma$ προς το ίδιο μέρος, και θεωρούμε σε αυτές σημεία Δ και E αντίστοιχα, τέτοια ώστε $M\Delta = ME$.

Να αποδείξετε ότι:

- Τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.
- Το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



Μονάδες $(13+12)=25$

3.

Θ Ε Μ Α Β

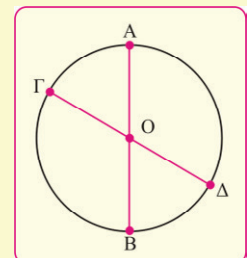
5.3

1683

Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε δυο διαμέτρους του AB και $\Gamma\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

- Οι χορδές $A\Gamma$ και $B\Delta$ του κύκλου είναι ίσες.
- Το τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ είναι ορθογώνιο.



Μονάδες $(13+12)=25$

Είδη παραλληλογράμων

5.3 ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ (12)

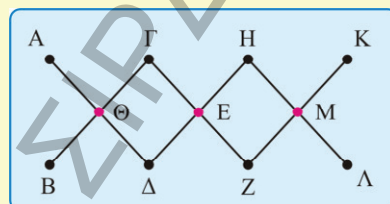
4.

Θ Ε Μ Α Δ

5.3

1714

Στην διπλανή εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου (ΑΔ, ΒΓ, ΓΖ, ΔΗ, ΖΚ, ΗΛ) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (Α, Β, Γ, Δ, Θ, Ε, Μ, Η, Κ, Λ, Ζ). Αν το σημείο Θ, είναι μέσο των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ ενώ το σημείο Ε είναι μέσο των τμημάτων ΓΖ και ΔΗ,



Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο.
- Τα σημεία Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά.
- Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες (10+9+6)=25

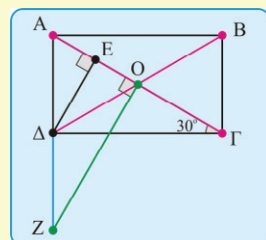
5.

Θ Ε Μ Α Δ

5.3

1729

Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{\Delta\Gamma A} = 30^\circ$ και Ο το κέντρο του. Φέρουμε $\Delta E \perp A\Gamma$



- Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A\Delta\Gamma}$ χωρίζεται από τη ΔΕ και τη διαγώνιο ΔΒ σε τρεις ίσες γωνίες.
- Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Ο η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ζ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ είναι ίσα.

Μονάδες (13+12)=25

6.

Θ Ε Μ Α Δ

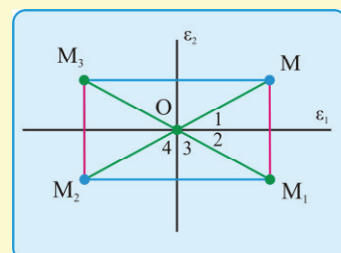
5.3

1733

Έστω ϵ_1, ϵ_2 δυο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο Ο και τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

- Αν M_1 είναι το συμμετρικό του Μ ως προς την ϵ_1 και M_2 το συμμετρικό του ως προς την ϵ_2 , να αποδείξετε ότι:

i. $OM = OM_1$



ii. Τα σημεία M , O και M_2 είναι συνευθειακά.

iii. Το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο.

β. Αν M_3 είναι το συμμετρικό σημείο του M_2 ως προς την ε_1 , τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $[(6+8+6)+5]=25$

7.

Θ Ε Μ Α Δ

5.3

1800

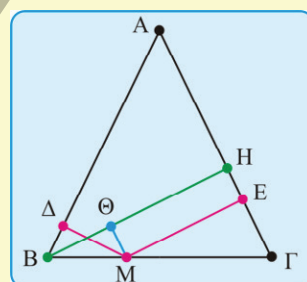
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, τυχαίο σημείο M της βάσης του $B\Gamma$ και το ύψος του BH . Από το M φέρουμε κάθετες $M\Delta$, ME και $M\Theta$ στις AB , $A\Gamma$ και BH αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $MEH\Theta$ είναι ορθογώνιο.

β. $B\Theta = \Delta M$

γ. Το άθροισμα $M\Delta + ME = BH$.



Μονάδες $(9+9+7)=25$

8.

Θ Ε Μ Α Δ

5.3

1816

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και σημείο Δ στην προέκταση της $B\Gamma$. Από το Δ φέρουμε ΔK κάθετη στην AB και ΔE κάθετη στην προέκταση της $A\Gamma$. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓH κάθετη στην AB και ΓZ κάθετη στην $K\Delta$.

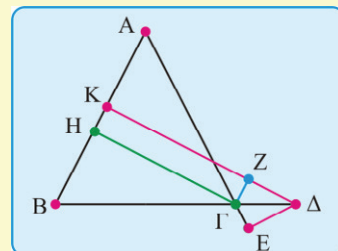
Να αποδείξετε ότι:

α. Η γωνία $Z\Gamma\Delta$ είναι ίση με τη γωνία B .

β. Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Z\Gamma E$.

γ. Το τρίγωνο ΔZE είναι ισοσκελές.

δ. $\Delta K - \Delta E = H\Gamma$



Μονάδες $(4+4+9+8)=25$

9.

Θ Ε Μ Α Δ

5.3

1833

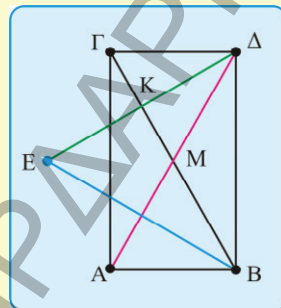
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Φέρουμε τη διάμεσο του AM την οποία προεκτείνουμε (προς το μέρος του M) κατά τμήμα $MD=AM$. Θεωρούμε ευθεία ΔK κάθετη στη $B\Gamma$, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας B στο E .

Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο

β. $\hat{K}\hat{E}B = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$

γ. $\Delta E = B\Delta$



Μονάδες $(8+8+9)=25$

10.

Θ Ε Μ Α Δ

5.3

1844

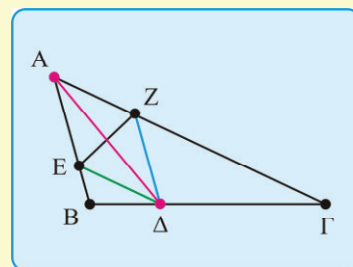
Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A , για την οποία ισχύει $A\Delta=D\Gamma$. Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Delta B$ και η ΔZ παράλληλη στην AB .

Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τμήματα $E\Delta$ και $A\Gamma$ είναι παράλληλα.

β. Το τρίγωνο $E\Delta\Delta$ είναι ισοσκελές.

γ. Τα τμήματα $A\Delta$ και EZ διχοτομούνται.



Μονάδες $(9+8+8)=25$

11.

Θ Ε Μ Α Δ

5.3

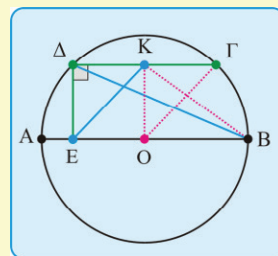
1879

Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο AB . Φέρνουμε χορδή $\Gamma\Delta//AB$ με K το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔE κάθετο στη $\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $K\Gamma O E$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. $\hat{\Delta}\hat{E}K = \frac{\hat{\Delta O}\hat{\Gamma}}{2}$

γ. $KE < KB$



Μονάδες $(8+12+5)=25$

12.

Θ Ε Μ Α Δ

5.3

13523

Ο χαρταετός του σχήματος είναι ένα εξάγωνο με ίσες πλευρές και ίσες γωνίες.

α. Να αποδείξετε ότι $AE = BD$.

β. Να αποδείξετε ότι $AE \perp ED$.

γ. i. Αν οι AD και BE τέμνονται στο O , τότε να αποδείξετε ότι $2BO = AD$.

ii. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι υπάρχει κύκλος με διάμετρο την AD που διέρχεται από το B . Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Μονάδες $[7+8+(5+5)]=25$

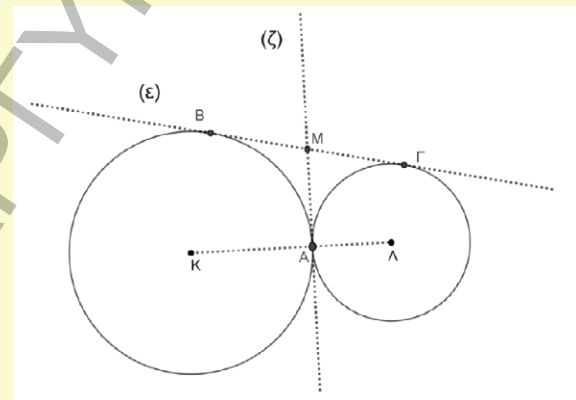
13.

Θ Ε Μ Α Δ

5.3

13699

Δίνονται δυο κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο A . Έστω ότι μια ευθεία (ϵ) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους B και Γ αντίστοιχα και ότι η εσωτερική εφαπτομένη (ζ) των κύκλων στο σημείο επαφής τους A τέμνει την ευθεία (ϵ) σε σημείο M .



α. Να αποδείξετε ότι:

i. οι ευθείες KB και AM τέμνονται σε σημείο, έστω Δ .

ii. το τρίγωνο $\Delta K \Lambda$ είναι ισοσκελές.

β. Με ποια σχέση πρέπει να συνδέονται οι ακτίνες ρ_1 και ρ_2 των δύο κύκλων ώστε το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta K \Lambda$ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $[(10+10)+5]=25$

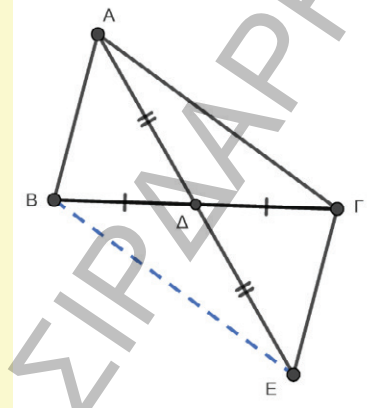
14.

Θ Ε Μ Α Δ

5.3

13746

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AD . Στην προέκταση της διαμέσου AD προς το Δ παίρνουμε σημείο E , έτσι ώστε $AD = DE$.



- α.** Να αποδείξετε ότι :
- Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $E\Gamma\Delta$ είναι ίσα.
 - Η διάμεσος AD είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών AB και AG που την περιέχουν.
- β.** Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το διπλάσιο της διαμέσου AD ισούται με την πλευρά $B\Gamma$, να χαρακτηρίσετε το είδος του τετράπλευρου $ABE\Gamma$ και το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Μονάδες $[(7+8)+10]=25$

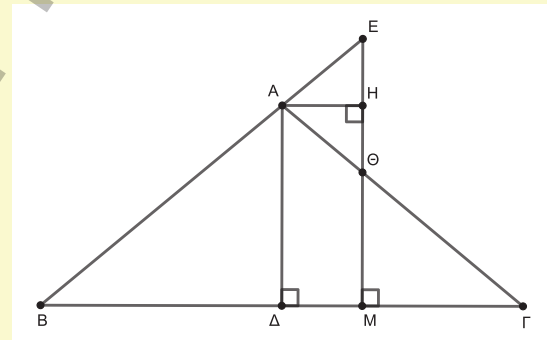
15.

Θ Ε Μ Α Δ

5.3

14887

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$), και τυχαίο σημείο M της πλευράς $B\Gamma$. Από το σημείο M φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά $B\Gamma$ που τέμνει τις ευθείες AB και AG στα σημεία E και Θ αντίστοιχα. Αν AD και AH τα ύψη των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Theta E$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



- α.** $\widehat{\Delta H} = 90^\circ$.
- β.** Το τρίγωνο $A\Theta E$ είναι ισοσκελές.
- γ.** $M\Theta + ME = 2AD$.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

Είδη παραλληλογράμων

5.4 ΡΟΜΒΟΣ (10)

1.

Θ Ε Μ Α Β

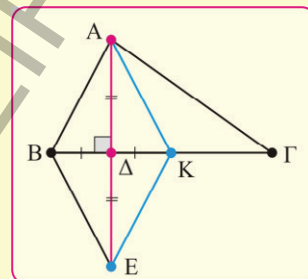
5.4

1570

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του AD . Προεκτείνουμε το AD (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = AD$. Έστω K το συμμετρικό του B ως προς το Δ .

Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές.
- β. Το τετράπλευρο $ABEK$ είναι ρόμβος.



Μονάδες (12+13)=25

2.

Θ Ε Μ Α Β

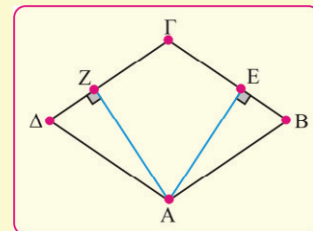
5.4

1575

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι $AE \perp B\Gamma$ και $AZ \perp \Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α. Αν το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε $AZ = AE$.
- β. Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει $AZ = AE$, τότε αυτό είναι ρόμβος.



Μονάδες (12+13)=25

3.

Θ Ε Μ Α Β

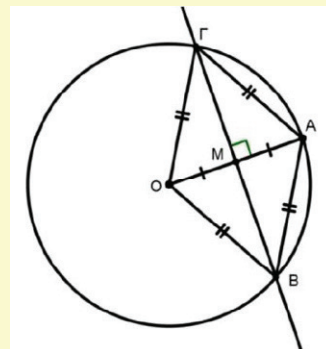
5.4

1584

Σε κύκλο κέντρου O , έστω OA μία ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της OA που τέμνει τον κύκλο στα σημεία B και Γ .

Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο OBA είναι ισόπλευρο.
- β. Το τετράπλευρο $OBA\Gamma$ είναι ρόμβος.



Μονάδες (13+12)=25

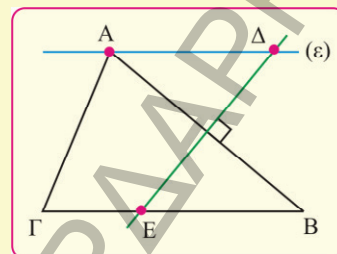
4.

Θ Ε Μ Α Β

5.4

1630

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΓΒ. Φέρουμε από τη κορυφή Α ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την (ε) στο Δ και την ΒΓ στο Ε.



- α. Να αποδείξετε ότι $\Delta A = \Delta B$ και $EA = EB$.
- β. Αν Μ το μέσο του ΑΒ, να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ.
- γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος.

Μονάδες $(6+10+9)=25$

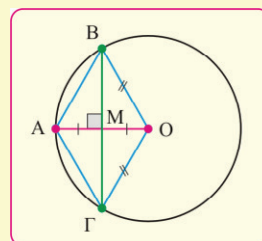
5.

Θ Ε Μ Α Β

5.4

1679

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε την ακτίνα ΟΑ και τη χορδή ΒΓ κάθετη στην ΟΑ στο μέσο της Μ.



- α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΟΒ είναι ρόμβος.
- β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΟΒ.

Μονάδες $(10+15)=25$

6.

Θ Ε Μ Α Β

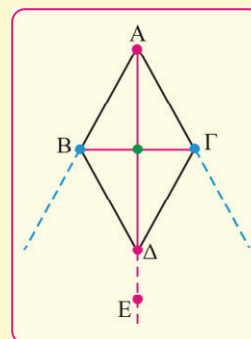
5.4

1681

Δίνεται ρόμβος ΑΒΔΓ. Στην προέκταση της διαγωνίου ΑΔ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

- α. Το σημείο Ε ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ (προς το μέρος των Β και Γ αντίστοιχα).
- β. Το σημείο Ε ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ.



Μονάδες $(10+15)=25$

7.

Θ Ε Μ Α Β

5.4

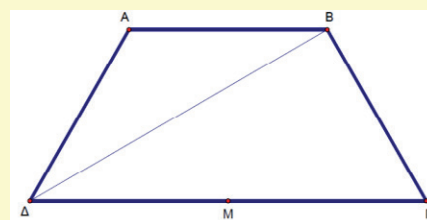
1697

Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος έχουμε

$$AB = AD = \frac{\Gamma\Delta}{2}, \hat{\Delta} = 60^\circ \text{ και } M \text{ το μέσο της πλευράς } \Gamma\Delta.$$

Να αποδείξετε ότι:

- α. η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$.
- β. η ΒΜ χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβος και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.



Μονάδες $(9+16)=25$

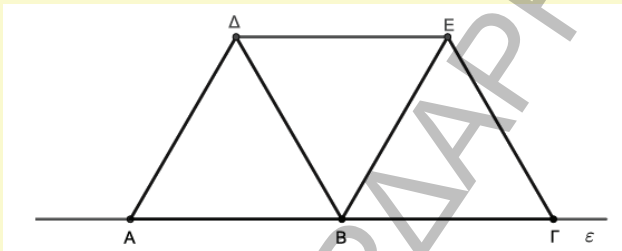
8.

Θ Ε Μ Α Β

5.4

13767

Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία A , B και Γ έτσι ώστε $AB=B\Gamma$. Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



- α. Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Delta B E}$.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισόπλευρο.
- γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta E B$ είναι ρόμβος.

Μονάδες $(7+10+8)=25$

9.

Θ Ε Μ Α Β

5.4

13832

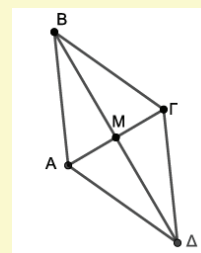
Στο σχήμα το M είναι μέσο των τμημάτων $A\Gamma$ και $B\Delta$.

Επίσης $\widehat{A M \Gamma} = \widehat{M B \Delta}$

- α. Να αποδείξετε ότι:

- i. Οι $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι κάθετες.
- ii. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

- β. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι η κάτοψη ενός κήπου. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 30 μέτρα φράχτη. Αν αφήσουμε την πλευρά AB του κήπου χωρίς φράχτη πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαστούμε για τις υπόλοιπες πλευρές;



Μονάδες $[(10+8)+7]=25$

10.

Θ Ε Μ Α Β

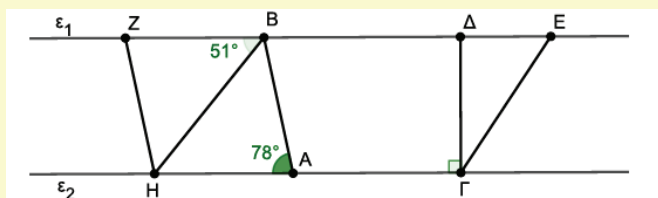
5.4

13842

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $ABZH$ είναι ρόμβος.

Επίσης δίνονται οι γωνίες $\widehat{BAH} = 78^\circ$,

$\widehat{ZBH} = 51^\circ$ και η $A\Gamma\Delta$ είναι ορθή.



- α. Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{ABH}$.

- β. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

- γ. Αν η γωνία $\widehat{E}$ του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ είναι ίση με 56° , να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου $\Gamma\Delta E$.

Μονάδες $(7+8+10)=25$

Είδη παραλληλογράμων

5.4 ΡΟΜΒΟΣ (6)

11.

Θ Ε Μ Α Δ

5.4

1740

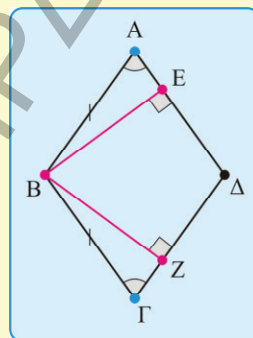
Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

Π2: Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

α. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π1 και Π2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

β. Στην περίπτωση που και οι δυο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση.



Μονάδες (20+5)=25

12.

Θ Ε Μ Α Δ

5.4

1767

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με

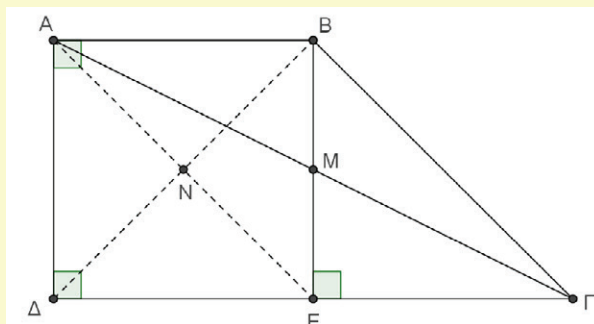
$$\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ, \Delta\Gamma = 2AB \text{ και } \hat{B} = 3\hat{\Gamma}.$$

Φέρνουμε $BE \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο M . Φέρνουμε την AE που τέμνει τη διαγώνιο $B\Delta$ στο N . Να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{\Gamma} = 45^\circ$

β. Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. $AE \perp B\Delta$



Μονάδες (7+9+9)=25

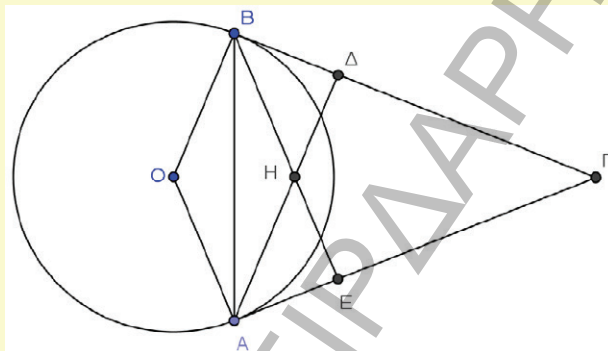
13.

Θ Ε Μ Α Δ

5.4

1823

Δίνεται κύκλος κέντρου O και δυο μη αντιδιαμετρικά σημεία του A και B . Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ . Φέρουμε επίσης και τα ύψη AD και BE του τριγώνου $AB\Gamma$ τα οποία τέμνονται στο σημείο H . Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τρίγωνο BHA είναι ισοσκελές.
- β. Το τετράπλευρο $OBHA$ είναι ρόμβος.
- γ. Τα σημεία O, H, Γ είναι συνευθειακά.

Μονάδες $(8+9+8)=25$

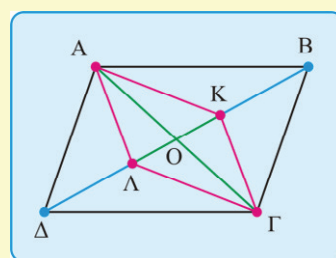
14.

Θ Ε Μ Α Δ

5.4

1840

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία K, Λ της διαγωνίου του $B\Delta$, τέτοια ώστε να ισχύει $BK=K\Lambda=\Lambda\Delta$.



- α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AK\Gamma\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε και το $AK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος.
- γ. Ποιά πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, ώστε το $AK\Gamma\Lambda$ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(10+8+7)=25$

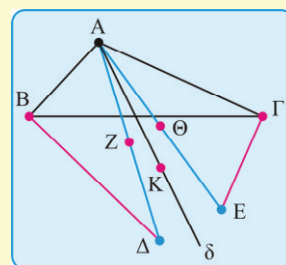
15.

Θ Ε Μ Α Δ

5.4

1869

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και $\hat{A} > 90^\circ$. Φέρνουμε τμήμα $B\Delta$ κάθετο στην AB και με $B\Delta=A\Gamma$ και τμήμα ΓE κάθετο στην $A\Gamma$ με $\Gamma E=AB$. Θεωρούμε τα μέσα Z και Θ των $A\Delta$ και $A E$ καθώς και τη διχοτόμο $A\delta$ της γωνία $\Delta \hat{A} E$.



- α. Να αποδείξετε ότι $A\Delta=A E$.
- β. Αν K τυχαίο σημείο της διχοτόμου $A\delta$, να αποδείξετε ότι το K ισαπέχει από τα μέσα Z και Θ .
- γ. Αν το K είναι σημείο της διχοτόμου $A\delta$ τέτοιο ώστε $KZ=A Z$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A Z K \Theta$ είναι ρόμβος.

Μονάδες $(9+9+7)=25$

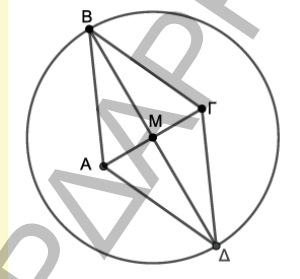
16.

Θ Ε Μ Α Β

5.4

13857

- α. Στο σχήμα η $ΒΔ$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $ΑΓ$ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο $Μ$. Να αποδείξετε ότι το $ΑΒΓΔ$ είναι ρόμβος.
- β. Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή.

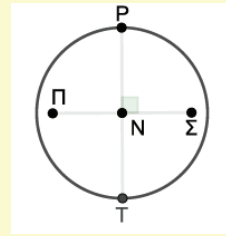


Πρόταση 1: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης διαγωνίου και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

Πρόταση 2: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι κάθετη στην άλλη διαγώνιο και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

- γ. Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα PT και $ΠΣ$ τέμνονται κάθετα στο N και $ΠN = NΣ$. Επίσης η PT είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο το N .



Να αποδείξετε ότι $ΠP = PΣ = ΣT = TΠ$.

Μονάδες $(8+10+7)=25$

Είδη παραλληλογράμων

5.5 ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ (4)

1.

Θ Ε Μ Α Β

5.5

1651

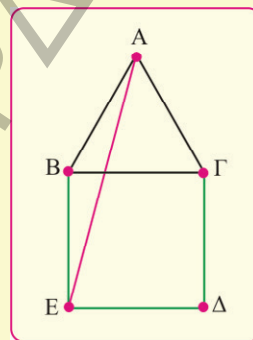
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$.

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες

i. $\hat{A}BE$

ii. $\hat{B}EA$

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.



Μονάδες $[(8+9)+8]=25$

2.

Θ Ε Μ Α Β

5.5

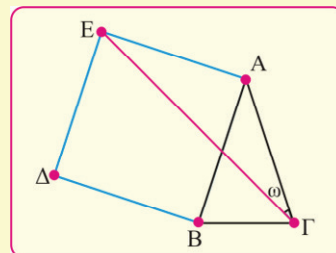
1652

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο $AB\Delta E$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

β. $2\hat{E}\Gamma A = 90^\circ - \hat{B}A\Gamma$



Μονάδες $(10+15)=25$

3.

Θ Ε Μ Α Β

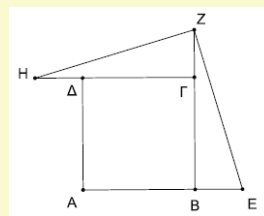
5.5

13536

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB προς το B , $B\Gamma$ προς το Γ και $\Gamma\Delta$ προς το Δ θεωρούμε σημεία E , Z και H αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z = \Delta H$.

α. Να αποδείξετε ότι $ZE = ZH$.

β. Να αποδείξετε ότι $\hat{E}ZH = 90^\circ$.



Μονάδες $(15+10)=25$

4.

Θ Ε Μ Α Β

5.5

14883

Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε τις διαμέτρους του $A\Gamma$ και $B\Delta$.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

β. Τί είδους γωνία σχηματίζουν οι διάμετροι $A\Gamma$ και $B\Delta$ αν το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(13+12)=25$

Είδη παραλληλογράμων

5.5 ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ (10)

5.

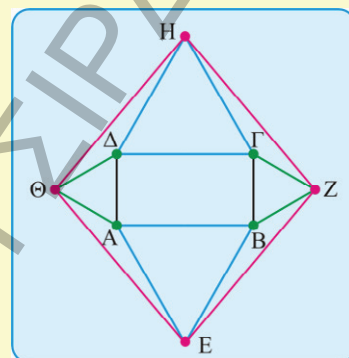
Θ Ε Μ Α Δ

5.5

1734

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ABE , $B\Gamma Z$, $\Gamma\Delta H$, $\Delta\Theta$.

- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι ρόμβος.
- Αν το αρχικό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, τότε το $EZH\Theta$ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε τη απάντησή σας.



Μονάδες $(15+10)=25$

6.

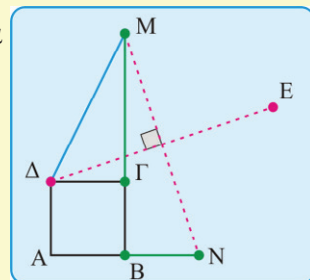
Θ Ε Μ Α Δ

5.5

1750

Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε την πλευρά AB κατά τμήμα $BN=AB$ και την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma M=AN$.

- Να αποδείξετε ότι:
 - $\Delta N=\Delta M$
 - $\Delta N \perp \Delta M$
- Αν E το συμμετρικό σημείο του Δ ως προς την ευθεία MN , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔMEN είναι τετράγωνο.



Μονάδες $[(7+10)+8]=25$

7.

Θ Ε Μ Α Δ

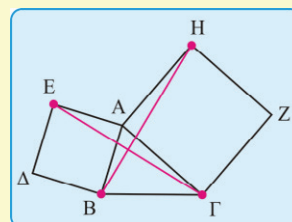
5.5

1788

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$.

Να αποδείξετε ότι:

- $\hat{E}\hat{A}\hat{H}=\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}+\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B}$
- $E\Gamma=BH$
- Η $E\Gamma$ είναι κάθετη στη BH .



Μονάδες $(8+9+8)=25$

8.

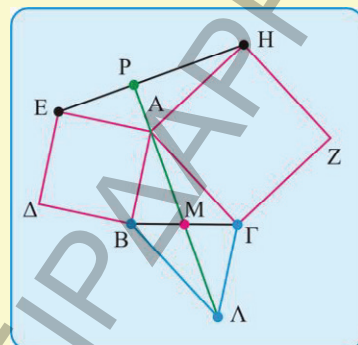
Θ Ε Μ Α Δ

5.5

1795

Εκτός τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$. Αν M το μέσο του $B\Gamma$ και Λ σημείο στην προέκταση της AM τέτοιο ώστε $AM = M\Lambda$,
να αποδείξετε ότι:

- α. $\Gamma\Lambda = AE$.
- β. Οι γωνίες $A\Gamma\Lambda$ και EAH είναι ίσες.
- γ. Η προέκταση της MA (προς το A) τέμνει κάθετα την EH .



Μονάδες $(10+10+5)=25$

9.

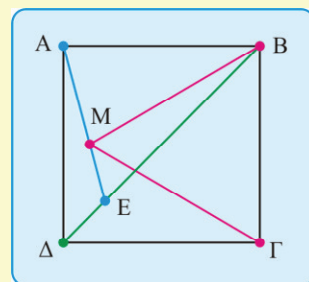
Θ Ε Μ Α Δ

5.5

1814

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο $MB\Gamma$.
Αν η προέκταση της AM τέμνει την $B\Delta$ στο σημείο E ,
να αποδείξετε ότι:

- α. $\hat{\Delta A E} = 15^\circ$
- β. Τα τρίγωνα $\Delta A E$ και $\Delta E \Gamma$ είναι ίσα.
- γ. Η ΓE είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta \Gamma M$.



Μονάδες $(8+8+9)=25$

10.

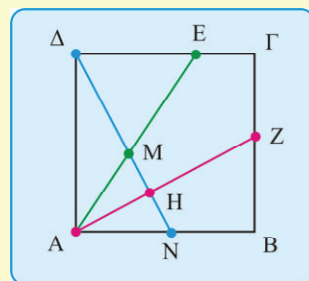
Θ Ε Μ Α Δ

5.5

1825

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και τυχαίο σημείο E στην πλευρά $\Delta\Gamma$.
Φέρουμε τη διχοτόμο AZ της γωνίας EAB και τη ΔH κάθετη από το Δ προς την AZ , η οποία τέμνει την AE στο M και την AB στο N .
Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα $\Delta A N$ και $A B Z$ είναι ίσα.
- β. $AM = AN$ και $\Delta E = EM$.
- γ. $AE = \Delta E + BZ$.



Μονάδες $(8+10+7)=25$

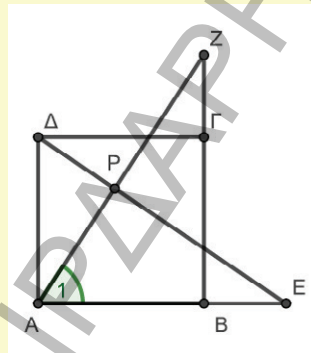
11.

Θ Ε Μ Α Δ

5.5

13744

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στις προεκτάσεις των πλευρών του AB και $B\Gamma$ προς το B και προς το Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα σημεία E και Z τέτοια ώστε $BE = \Gamma Z$. Αν P είναι το σημείο τομής των AZ και ΔE , τότε:



α. Να αποδείξετε ότι:

- i. Οι γωνίες $\angle A\epsilon\Delta$ και $\angle BZA$ είναι ίσες.
- ii. Τα τμήματα AZ και ΔE είναι κάθετα.

β. Αν γνωρίζετε ότι το σημείο τομής P των AZ και ΔE είναι τέτοιο ώστε $PB=AB$, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου E στην προέκταση του τμήματος AB .

Μονάδες $[(9+9)+7]=25$

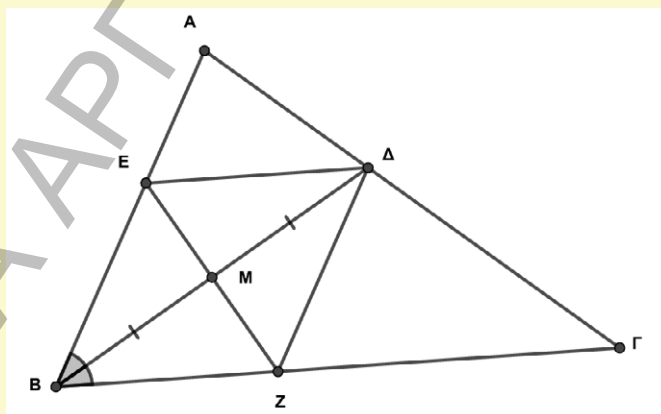
12.

Θ Ε Μ Α Δ

5.5

13841

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας B και M το μέσο της. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Αν η EM τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο Z τότε:



α. Να αποδείξετε ότι $BE=ED$.

β. Να αποδείξετε ότι $BE \parallel Z\Delta$.

γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEBZ είναι ρόμβος.

δ. Ποιο θα έπρεπε να είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ώστε το τετράπλευρο ΔEBZ να είναι τετράγωνο; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες $(7+8+5+5)=25$

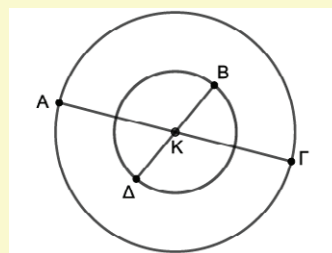
13.

Θ Ε Μ Α Δ

5.5

13848

Στο παρακάτω σχήμα οι κύκλοι έχουν κέντρο K και οι $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι διάμετροί τους.



α. Αν ισχύει $A\Gamma > B\Delta$:

- i. να σχεδιάσετε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και να αποδείξετε ότι είναι παραλληλόγραμμο.

- ii. να διατυπώσετε μια επιπλέον υπόθεση για τις $A\Gamma$ και $B\Delta$, ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι

ρόμβος.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- β. Αν οι δύο κύκλοι ταυτίζονται, τότε να εξετάσετε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής:
«Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $[(8+9)+8]=25$

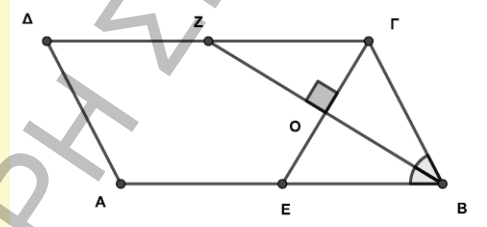
14.

Θ Ε Μ Α Δ

5.5

13850

Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος και η ΒΖ διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Φέρουμε ΓΟ κάθετη στη ΒΖ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε.



- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές.
β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ είναι ίσα.
γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι ρόμβος
δ. Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας $\hat{B}$ ώστε το τετράπλευρο ΕΒΓΖ να είναι τετράγωνο;

Μονάδες $(8+7+6+4)=25$

5.6 Εφαρμογές στα τρίγωνα (15)

1.

Θ Ε Μ Α Β

5.6

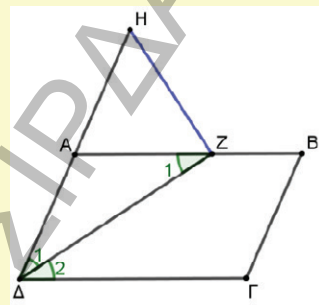
1537

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, προεκτείνουμε την πλευρά ΔΑ (προς το Α) κατά τμήμα ΑΗ=ΔΑ. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, η οποία τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ.

Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές.

β. Το τρίγωνο ΔΖΗ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{Z}$.



Μονάδες (12+13)=25

2.

Θ Ε Μ Α Β

5.6

1542

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α.

Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο.

β. $ΔΕ = \frac{ΑΓ}{2}$

Μονάδες (13+12)=25

3.

Θ Ε Μ Α Β

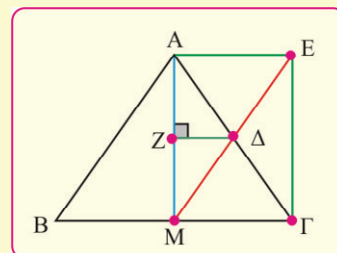
5.6

1560

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($ΑΒ=ΑΓ$) και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ θεωρούμε σημείο Ε ώστε $ΜΔ=ΔΕ$. Αν το σημείο Ζ είναι η προβολή του Δ στην ΑΜ, να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι ορθογώνιο.

β. $ΔΖ = \frac{ΒΓ}{4}$



Μονάδες (12+13)=25

4.

Θ Ε Μ Α Β

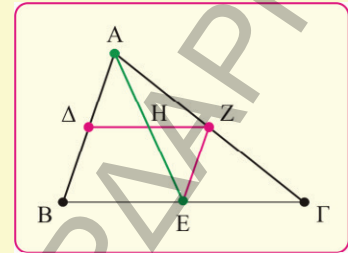
5.6

1566

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο ΔBEZ είναι παραλληλόγραμμο.
- Η ευθεία ΔZ διχοτομεί το τμήμα AE .



Μονάδες $(13+12)=25$

5.

Θ Ε Μ Α Β

5.6

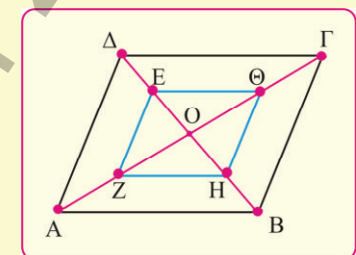
1583

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O είναι το κέντρο του.

Έστω E , Z , H , Θ τα μέσα των OD , OA , OB και OG αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

- Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι 40, να βρείτε την περίμετρο του $EZH\Theta$.



Μονάδες $(10+15)=25$

6.

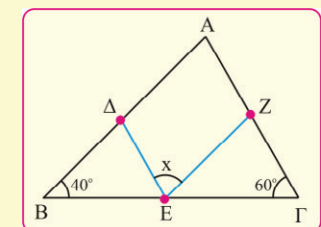
Θ Ε Μ Α Β

5.6

1589

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 40^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επιπλέον, τα σημεία Δ , E και Z είναι τα μέσα των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα.

- Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Να αποδείξετε ότι $\hat{B\Delta E} = \hat{E\Gamma Z} = 80^\circ$.
- Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Delta EZ}$.



Μονάδες $(8+9+8)=25$

7.

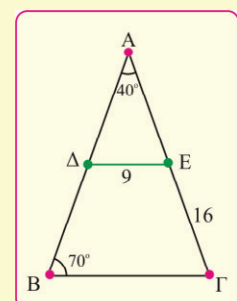
Θ Ε Μ Α Β

5.6

1608

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 40^\circ$ και $\hat{B} = 70^\circ$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$ με $\Delta E = 9$ και $E\Gamma = 16$.

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.
- Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 18$.
- Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.



Μονάδες $(8+8+9)=25$

8.

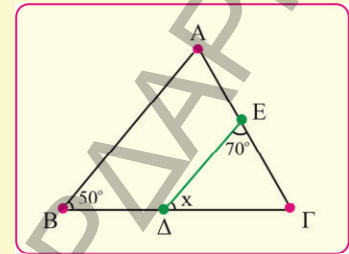
Θ Ε Μ Α Β

5.6

1611

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 50^\circ$. Έστω ότι τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\Delta\hat{E}\Gamma = 70^\circ$.

- α. Να δικαιολογήσετε γιατί $\Delta E \parallel AB$.
- β. Να υπολογίσετε
 - i. τη γωνία $\hat{x}$.
 - ii. τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.



Μονάδες $[8 + (8 + 9)] = 25$

9.

Θ Ε Μ Α Β

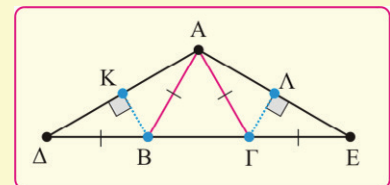
5.6

1616

Στο διπλανό σχήμα ισχύουν

$$AB = BD = A\Gamma = \Gamma E = 5, BK \perp A\Delta \text{ και } \Gamma\Lambda \perp AE.$$

- α. Να προσδιορίσετε, ως προς τις πλευρές, το είδος των τριγώνων $AB\Delta$ και $A\Gamma E$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων $A\Delta$ και AE αντίστοιχα.
- γ. Αν η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα $K\Lambda$.



Μονάδες $(6 + 10 + 9) = 25$

10.

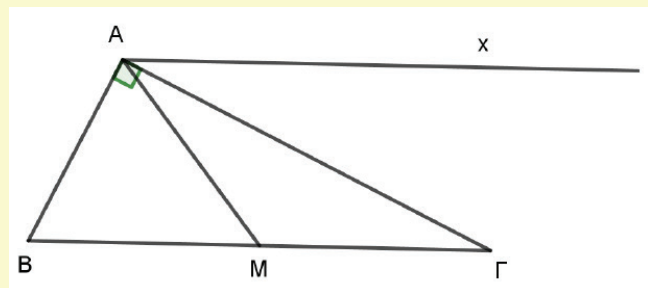
Θ Ε Μ Α Β

5.6

1655

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε ημιευθεία Ax παράλληλη στη $B\Gamma$ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η AM με το σημείο Γ). Να αποδείξετε ότι:

- α. $\hat{MAG} = \hat{MGA}$
- β. η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας MAx .



Μονάδες $(12 + 13) = 25$

11.

Θ Ε Μ Α Β

5.6

1671

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$.

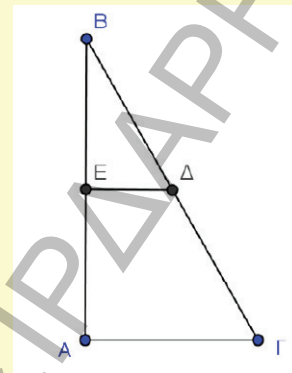
Αν τα σημεία E και Δ είναι τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα με $ED=1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:

α. AG

β. $B\Gamma$

γ. $A\Delta$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



Μονάδες $(8+9+8)=25$

12.

Θ Ε Μ Α Β

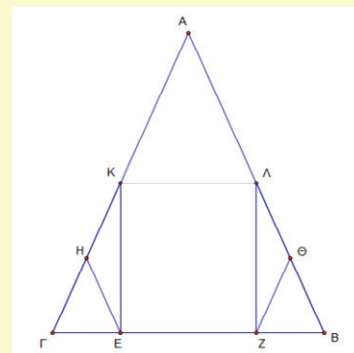
5.6

1675

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$. Από τα μέσα K και Λ των πλευρών AG και AB αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα KE και ΛZ στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα $\hat{K}E\Gamma = \hat{\Lambda}ZB$ είναι ίσα.

β. $EH=Z\Theta$, όπου H , Θ τα μέσα των τμημάτων $K\Gamma$, ΛB αντίστοιχα.



Μονάδες $(15+10)=25$

13.

Θ Ε Μ Α Β

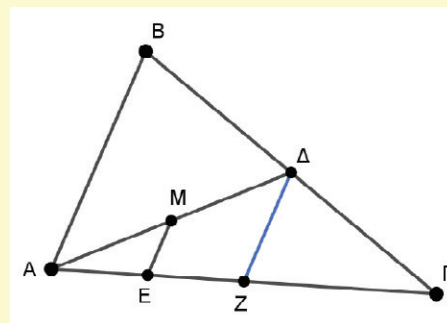
5.6

12639

Από το μέσο M της διαμέσου AD τριγώνου $AB\Gamma$, φέρουμε παράλληλη στην AB που τέμνει την AG στο σημείο E . Αν η παράλληλη από το Δ στην AB τέμνει την AG στο Z , να αποδείξετε ότι:

α. το Z είναι μέσο της AG .

β. το AE ισούται με το $\frac{1}{4}$ του AG .



Μονάδες $(10+15)=25$

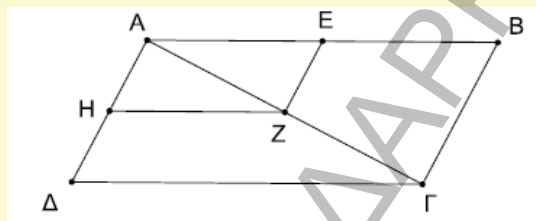
14.

Θ Ε Μ Α Β

5.6

13532

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα μέσα E , Z και H των AB , $A\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α. $ZH = \frac{AB}{2}$

β. Το τετράπλευρο $AEZH$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες $(15+10)=25$

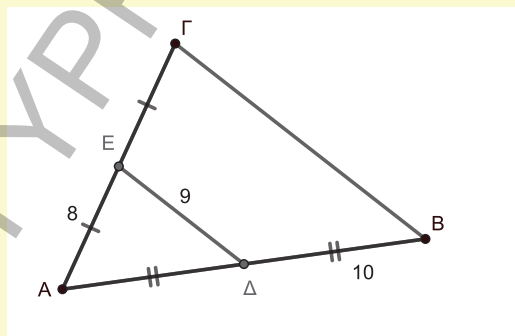
15.

Θ Ε Μ Α Β

5.6

14877

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $AE=8$, $E\Delta=9$ και $\Delta B=10$.



α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο.

β. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

γ. Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου $AB\Gamma$ και του τετραπλεύρου $\Delta E\Gamma B$.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

5.6 Εφαρμογές στα τρίγωνα (30)

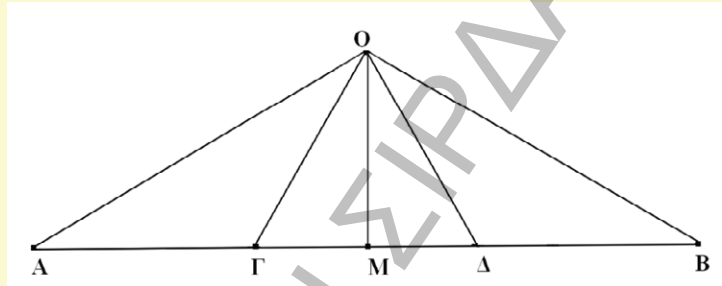
16.

Θ Ε Μ Α Δ

5.6

1710

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ, Δ ώστε να ισχύει $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B$. Επίσης θεωρούμε σημείο O εκτός του ευθυγράμμου τμήματος AB έτσι ώστε να ισχύουν $O\Gamma = A\Gamma$ και $O\Delta = \Delta B$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. η γωνία $\hat{\Gamma O \Delta}$ είναι 60°

ii. οι γωνίες $\hat{O A \Gamma}, \hat{O B \Delta}$ είναι ίσες και κάθε μια ίση με 30°

β. Αν M το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος AB , να αποδείξετε ότι $2OM = OA$.

Μονάδες $(9+9+7)=25$

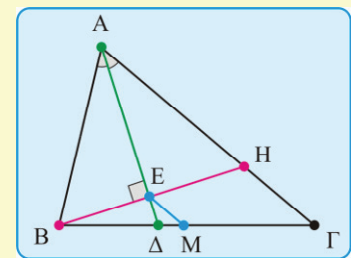
17.

Θ Ε Μ Α Δ

5.6

1723

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) και η διχοτόμος του $A\Delta$. Φέρουμε από το B κάθετη στην $A\Delta$ που τέμνει την $A\Delta$ στο E και την πλευρά $A\Gamma$ στο H . Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:



α. Το τρίγωνο ABH είναι ισοσκελές.

β. $EM \parallel H\Gamma$

γ. $EM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$

Μονάδες $(9+8+8)=25$

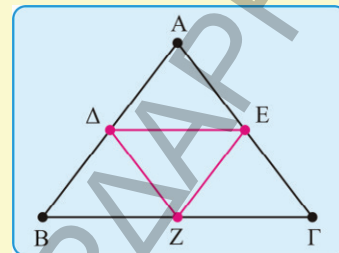
18.

Θ Ε Μ Α Δ

5.6

1726

- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές.
- β. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για
- ισόπλευρο τρίγωνο.
 - ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.



Μονάδες $[8+(8+9)]=25$

19.

Θ Ε Μ Α Δ

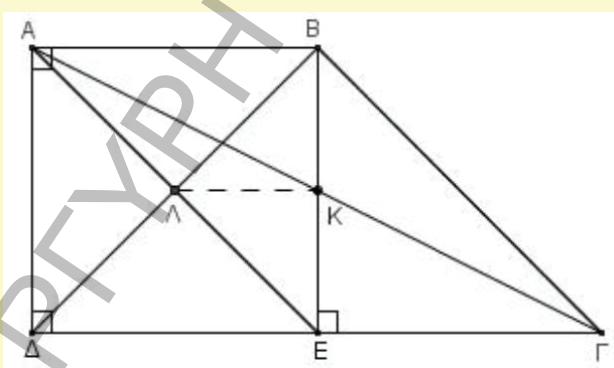
5.6

1727

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με

$$\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ, \Delta\Gamma = 2AB \text{ και } \hat{B} = 3\hat{\Gamma}.$$

Από το Β φέρνουμε κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΓΔ στο Ε. Επίσης φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι:



- α. $\hat{\Gamma} = 45^\circ$
- β. $B\Delta = AE$
- γ. $KL = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$

Μονάδες $(8+9+8)=25$

20.

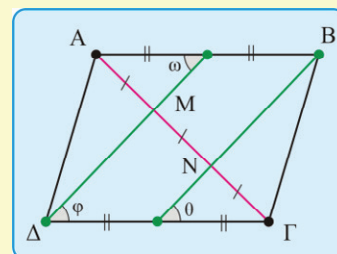
Θ Ε Μ Α Δ

5.6

1728

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν τα σημεία Ε και Η είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

- α. Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.
- β. $\hat{A\hat{E}\Delta} = \hat{B\hat{Z}\Gamma}$
- γ. Οι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.



Μονάδες $(8+8+9)=25$

21.

Θ Ε Μ Α Δ

5.6

1741

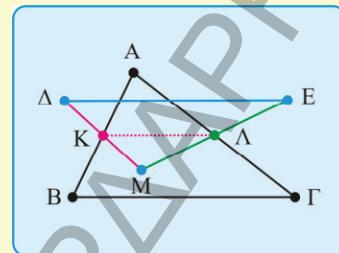
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω K, Λ τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

- α.** Θεωρούμε τυχαίο σημείο M στο εσωτερικό του τριγώνου και Δ, E τα συμμετρικά του M ως προς K και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι $DE \parallel B\Gamma$.

- β.** Στην περίπτωση που το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, και Δ, E τα συμμετρικά του M ως προς K και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, A και E είναι συνευθειακά.



Μονάδες $(15+10)=25$

22.

Θ Ε Μ Α Δ

5.6

1743

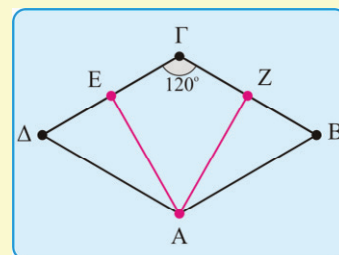
Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{\Gamma} = 120^\circ$. Έστω ότι AE και AH είναι οι αποστάσεις του σημείου A στις πλευρές $\Gamma\Delta$ και ΓB αντίστοιχα.

- α.** Να αποδείξετε ότι:

i. Τα σημεία E και H είναι τα μέσα των πλευρών $\Gamma\Delta$ και ΓB αντίστοιχα.

ii. $A\Gamma \perp EZ$

- β.** Αν M και N τα μέσα των πλευρών $A\Delta$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EMNZ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



Μονάδες $[(8+8)+9]=25$

23.

Θ Ε Μ Α Δ

5.6

1745

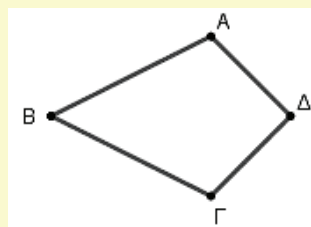
Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA=B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$

Να αποδείξετε ότι:

- α.** Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

- β.** Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται κάθετα.

- γ.** Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.



Μονάδες $(9+6+10)=25$

24.

Θ Ε Μ Α Δ

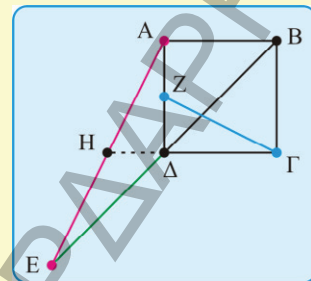
5.6

1766

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Έστω Ε το συμμετρικό σημείο του Β ως προς το Δ και Η είναι το μέσο της ΑΔ. Η προέκταση της ΓΔ τέμνει την ΑΕ στο Η.

Να αποδείξετε ότι:

- α. $\Delta H = \frac{AB}{2}$
- β. Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ είναι ίσα.
- γ. Η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ.



Μονάδες (8+9+8)=25

25.

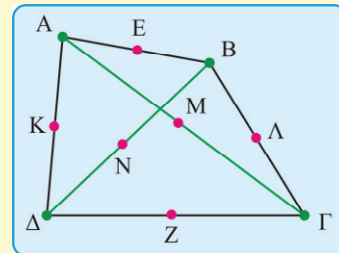
Θ Ε Μ Α Δ

5.6

1773

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΔ=ΒΓ. Αν Ε,Λ,Ζ,Κ,Ν,Μ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΔΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο ΕΜΖΝ ρόμβος.
- β. Η ΕΖ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΜΝ.
- γ. ΚΕ=ΖΛ
- δ. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΛ, ΜΝ, ΕΖ διέρχονται από ίδιο σημείο.



Μονάδες (8+7+5+5)=25

26.

Θ Ε Μ Α Δ

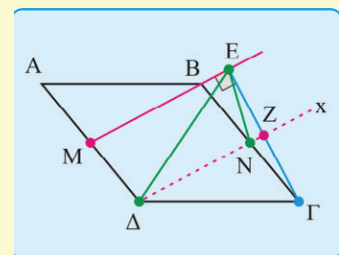
5.6

1775

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θεωρούμε το μέσο Μ της πλευράς ΑΔ και ΓΕ κάθετος από τη κορυφή Γ στην ευθεία ΜΒ (ΓΕ ⊥ ΜΒ). Η παράλληλη από την κορυφή Δ στην ευθεία ΜΒ (Δχ // ΜΒ) τέμνει τις ΒΓ και ΓΕ στα σημεία Ν, Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο ΜΒΝΔ είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Το σημείο Ζ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΓΕ.
- γ. ΔΕ=ΔΓ.



Μονάδες (7+9+9)=25

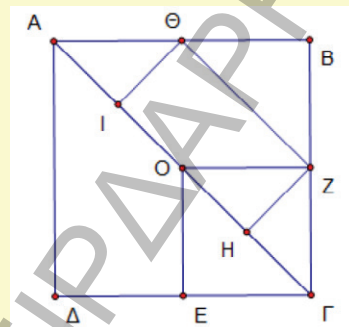
27.

Θ Ε Μ Α Δ

5.6

1781

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στη διαγώνιο ΑΓ θεωρούμε σημεία Ι, Ο, Η ώστε ΗΓ=ΟΗ=ΙΟ=ΑΙ. Αν Ε, Θ και Ζ τα μέσα των πλευρών ΔΓ, ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:



α. Το τετράπλευρο ΟΖΓΕ είναι τετράγωνο.

β. $ZH = \frac{AG}{4}$.

γ. Το τετράπλευρο ΙΘΖΗ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με $\Theta Z = 2\Theta I$.

Μονάδες (7+8+10)=25

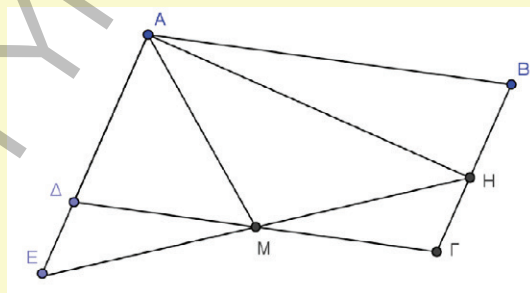
28.

Θ Ε Μ Α Δ

5.6

1787

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB=2BG$, τη γωνία Α αμβλεία και Μ το μέσο της ΓΔ. Φέρουμε κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Α, η οποία τέμνει την ΒΓ στο Η. Αν η προέκταση της ΗΜ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ε, να αποδείξετε ότι:



α. Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΑΒ.

β. Τα τμήματα ΕΗ, ΔΓ διχοτομούνται.

γ. $\hat{E} = \hat{\Delta M A}$.

Μονάδες (9+8+8)=25

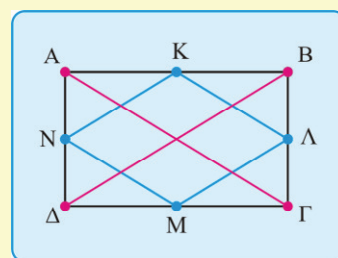
29.

Θ Ε Μ Α Δ

5.6

1794

- α. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.
- β. Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ, πρέπει να είναι απαραίτητα ορθογώνιο; Να τεκμηριώσετε τη θετική ή αρνητική σας απάντηση.



Μονάδες (15+10)=25

30.

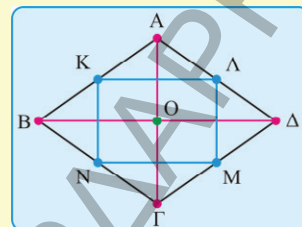
Θ Ε Μ Α Δ

5.6

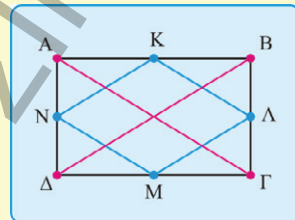
1798

- α. Σε ρόμβο $ABΓΔ$ θεωρούμε $K, Λ, M, N$ τα μέσα των πλευρών του $AB, BΓ, ΓΔ, ΔΑ$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $KΛΜΝ$ είναι ορθογώνιο.



- β. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.



Μονάδες $(13+12)=25$

31.

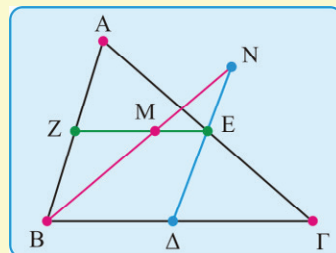
Θ Ε Μ Α Δ

5.6

1801

Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ με $ΑΓ > AB$ και $Δ, E, Z$ τα μέσα των πλευρών του $BΓ, ΑΓ, AB$ αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την ZE στο σημείο M και την προέκταση της $ΔE$ στο σημείο N , να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο $ZEΔB$ είναι παραλληλόγραμμο.
β. Τα τρίγωνα BZM και MEN είναι ισοσκελή.
γ. $BZ + NE = ΔΓ$



Μονάδες $(7+10+8)=25$

32.

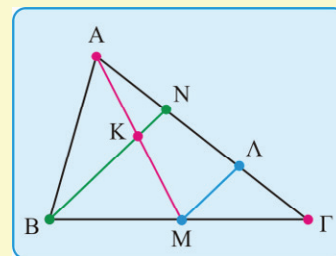
Θ Ε Μ Α Δ

5.6

1802

Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$, AM διάμεσός του και K το μέσο του AM . Αν η προέκταση της BK τέμνει την $ΑΓ$ στο σημείο N , και $Λ$ είναι το μέσο του $ΓN$, να αποδείξετε ότι:

- α. Το σημείο N είναι μέσο του $ΑΛ$.
β. $\hat{K}MΓ = \hat{M}BK + \hat{A}K N$
γ. $BK = 3KN$



Μονάδες $(9+9+7)=25$

33.

Θ Ε Μ Α Δ

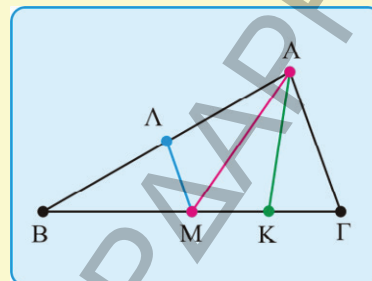
5.6

1803

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2A\Gamma$. Έστω AM διάμεσος του $AB\Gamma$ και K , Λ τα μέσα των $M\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α. $\hat{M}\Lambda\Gamma = \hat{A}\hat{M}\Gamma$
- β. $M\Lambda = MK$.
- γ. Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Lambda}\hat{A}K$.



Μονάδες $(7+9+9)=25$

34.

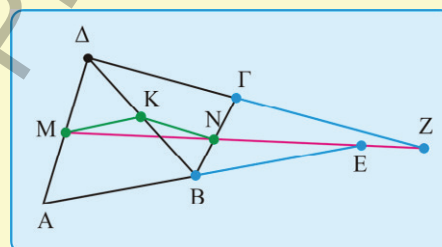
Θ Ε Μ Α Δ

5.6

1804

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = \Gamma\Delta$ και M , N , K τα μέσα των $A\Delta$, $B\Gamma$, $B\Delta$ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των AB και $\Delta\Gamma$ τέμνουν την προέκταση της MN στα σημεία E και Z αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

- α. $MK = KN$.
- β. $\hat{M}\hat{E}A = \hat{M}\hat{Z}\Delta$



Μονάδες $(13+12)=25$

35.

Θ Ε Μ Α Δ

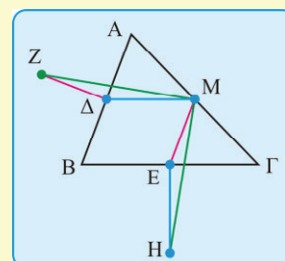
5.6

1832

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνίες B και Γ οξείες και Δ , M και E τα μέσα των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των AB και $B\Gamma$ και εκτός του τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε σημεία Z και H αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\Delta Z = \frac{AB}{2}$ και $EH = \frac{B\Gamma}{2}$.

- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. Το τετράπλευρο $B\Delta ME$ είναι παραλληλόγραμμο.
 - ii. Τα τρίγωνα $Z\Delta M$ και EMH είναι ίσα.

- β. Αν τα σημεία Z , Δ , E είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A} = 90^\circ$



Μονάδες $[(5+10)+10]=25$

36.

Θ Ε Μ Α Δ

5.6

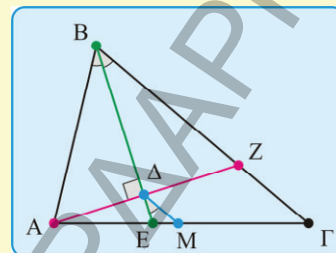
1837

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < B\Gamma$ και η διχοτόμος BE της γωνίας $\hat{B}$. Αν $AZ \perp BE$, όπου Z σημείο της $B\Gamma$ και M το μέσον της AG , να αποδείξετε ότι :

α. Το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές.

β. $AM \parallel B\Gamma$ και $\Delta M = \frac{B\Gamma - AB}{2}$

γ. $\hat{E\Delta M} = \frac{\hat{B}}{2}$, όπου $\hat{B}$ η γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$.



Μονάδες (7+10+8)=25

37.

Θ Ε Μ Α Δ

5.6

1868

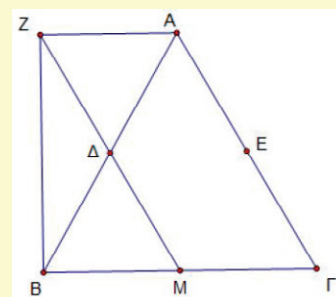
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $\hat{A}B\hat{\Gamma}$ και τα μέσα Δ , E και M των AB , AG και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Στην προέκταση του $M\Delta$ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα $\Delta Z = \Delta M$. Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα $A\hat{Z}\Delta$ και $B\hat{M}\Delta$ είναι ίσα.

β. Το τετράπλευρο $ZA\Gamma M$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Τα τμήματα ZE και AD τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.

δ. Η BZ είναι κάθετη στη ZA .



Μονάδες (6+6+7+6)=25

38.

Θ Ε Μ Α Δ

5.6

1873

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με διάμεσο AM τέτοια ώστε $AM = AB$. Φέρουμε το ύψος του AK και το προεκτείνουμε (προς το K) κατά τμήμα $K\Delta = AK$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά τμήμα $ME = AM$.

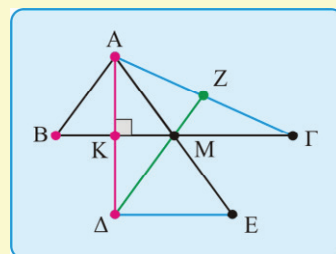
Να αποδείξετε ότι:

α. $\Delta E \perp A\Delta$ και $\Delta E = 2KM$

β. Το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Το τετράπλευρο $AB\Delta M$ είναι ρόμβος.

δ. Η προέκταση της ΔM τέμνει το AG στο μέσον του H .



Μονάδες (7+6+6+6)=25

39.

Θ Ε Μ Α Δ

5.6

1889

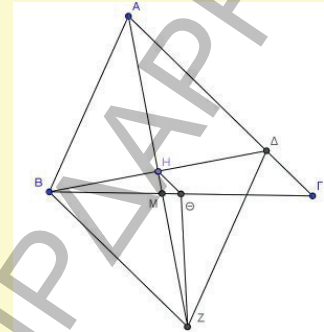
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Από το B φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο AM της γωνίας A , η οποία τέμνει την AM στο H και την $A\Gamma$ στο Δ . Στην προέκταση της AH θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $AH = HZ$ και έστω Θ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι

α. το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι ρόμβος.

β. $H\Theta // BZ$.

γ. $H\Theta = \frac{A\Gamma - AB}{2}$



Μονάδες (9+9+7=25)

40.

Θ Ε Μ Α Δ

5.6

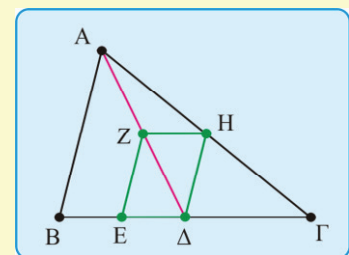
1898

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του $A\Delta$. Έστω E , H και Θ είναι τα μέσα των $B\Delta$, $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEZH είναι παραλληλόγραμμο.

β. Να βρείτε τη σχέση των πλευρών AB και $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, ώστε το παραλληλόγραμμο ΔEZH να είναι ρόμβος.

γ. Στην περίπτωση που το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο (η γωνία B ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔEZH .



Μονάδες (10+10+5)=25

41.

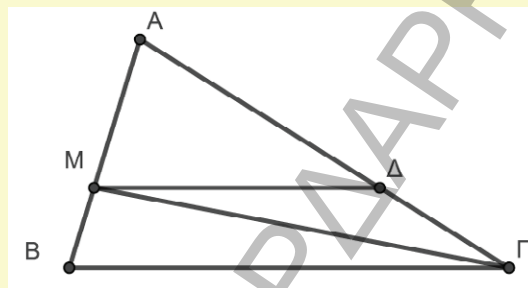
Θ Ε Μ Α Δ

5.6

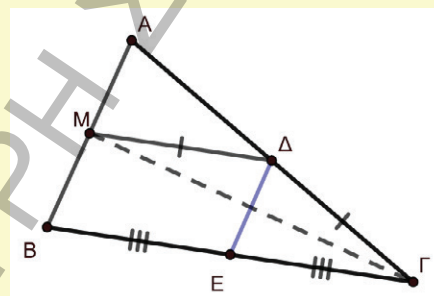
13743

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο M στην πλευρά AB . Από το M φέρουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Δ .

α. Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta M\Gamma} = \hat{B\Gamma M}$



β. Αν το τρίγωνο ΓAB είναι ισοσκελές με βάση AB , να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου M στην AB ώστε το τρίγωνο $\Delta M\Gamma$ να είναι ισοσκελές με $\Delta M = \Delta\Gamma$ και να δικαιολογήσετε τους ισχυρισμούς σας.



γ. Αν M είναι το μέσο του τμήματος AB και E το μέσο του τμήματος $B\Gamma$ να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $M\Delta EB$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες $(5+10+10)=25$

42.

Θ Ε Μ Α Δ

5.6

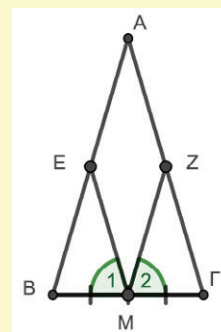
13745

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, το μέσο M της βάσης $B\Gamma$ και τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στη βάση του.

α. Αν από το μέσο M φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές AB και $A\Gamma$ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

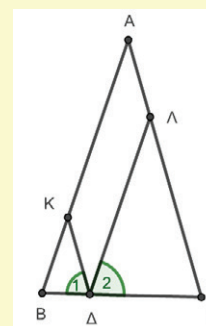
i. $ME = MZ$.

ii. Το $AEMZ$ είναι ρόμβος με περίμετρο ίση με $2AB$.



β. Αν πάρουμε τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στο ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$, διαφορετικό από το μέσο M , και φέρουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές AB και $A\Gamma$ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία K και Λ αντίστοιχα, τότε:

i. Ποιο είναι το είδος του τετράπλευρου $AK\Delta\Lambda$;



- ii. Να συγκρίνετε την περίμετρο του τετράπλευρου ΑΚΔΛ με την περίμετρο του ρόμβου ΑΕΜΖ του ερωτήματος α/ii) και να διατυπώστε λεκτικά το συμπέρασμα που προκύπτει.

Μονάδες $[(6+7)+(6+6)]=12$

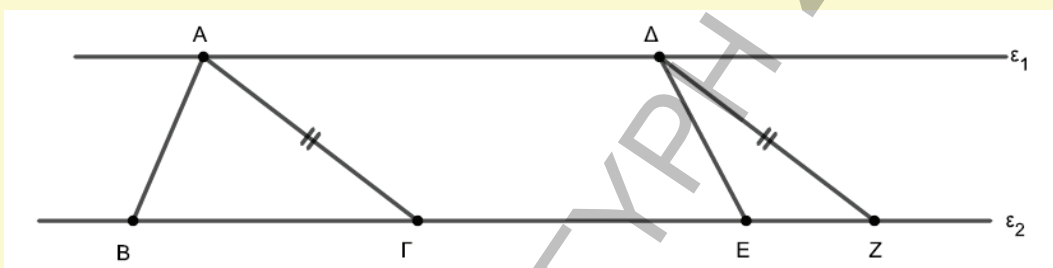
43.

Θ Ε Μ Α Δ

5.6

13751

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, ενώ το ΔΕΖ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{E} > 90^\circ$. Ισχύει επίσης ότι ΑΓ=ΔΖ.



- α. i. Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων από τις κορυφές Α και Δ ονομάζοντάς τα ΑΗ και ΔΘ αντίστοιχα.
ii. Να αποδείξετε ότι ΗΓ = ΘΖ.
β. Να δικαιολογήσετε γιατί ΕΖ < ΒΓ.

Μονάδες $(5+12+8)=25$

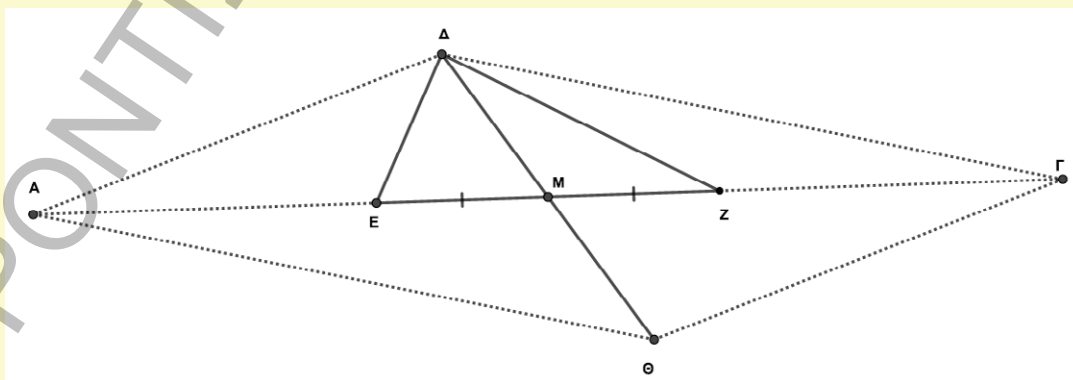
44.

Θ Ε Μ Α Δ

5.6

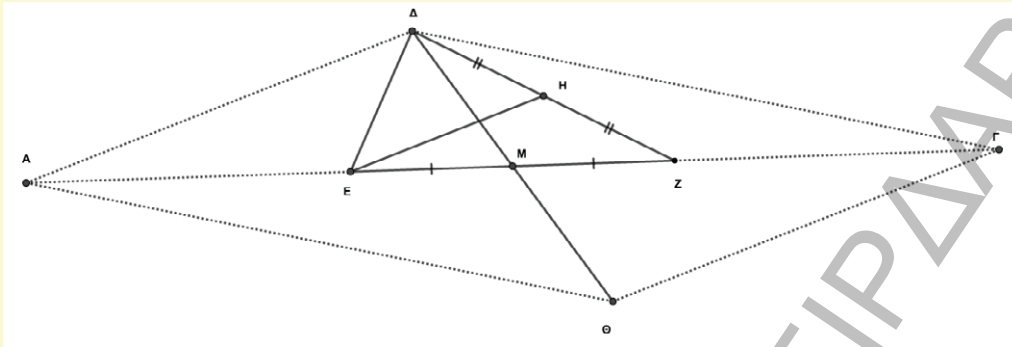
13856

Σε τρίγωνο ΔΕΖ, φέρουμε τη διάμεσο ΔΜ και στην προέκτασή της προς το μέρος του Μ παίρνουμε σημείο Θ έτσι ώστε ΑΜ=ΜΘ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΕΖ προς το Ε κατά τμήμα ΕΑ=ΕΖ και προς το Ζ κατά τμήμα ΖΓ=ΕΖ.



- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΑΜ και ΘΓΜ είναι ίσα.

- β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Theta A \Delta \Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.



- γ. Στο σχήμα της άσκησης που κατασκεύασε στο τετράδιό του ο Γιάννης είναι $AD=12$. Πόσο θα είναι το μήκος της διαμέσου EH του τριγώνου ΔEZ στο σχήμα του Γιάννη;

Μονάδες $(8+8+9)=25$

45.

Θ Ε Μ Α Δ

5.6

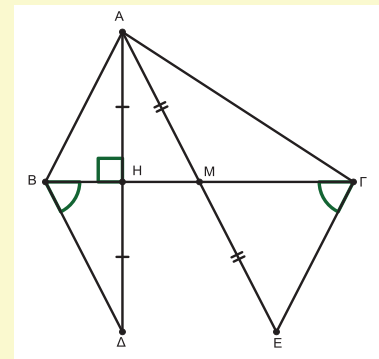
14885

Δίνεται το οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε το ύψος του AH κατά τμήμα $H\Delta=AH$ και τη διάμεσό του AM κατά τμήμα $ME=AM$. Να αποδείξετε ότι:

- α. i. $AB = \Gamma E$
ii. $AB = B\Delta$

- β. $\widehat{B\Delta} = \widehat{B\Gamma E}$.

- γ. i. Εξετάστε αν το τμήμα $B\Delta$ μπορεί να είναι παράλληλο στο τμήμα ΓE .
ii. Ποιο είναι το είδος του τετραπλεύρου $B\Gamma E\Delta$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Μονάδες $[(4+4)+8+(5+4)]=25$

5.7 ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ (5)

1.

Θ Ε Μ Α Δ

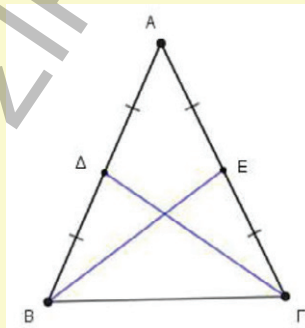
5.7

1706

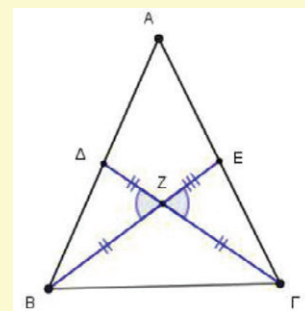
Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και μ_β, μ_γ οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$, τότε οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες.

α. Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π, αιτιολογώντας την απάντησή σας.



β. Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας.



γ. Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η Π και η αντίστροφη της ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση

Μονάδες (10+10+5)=25

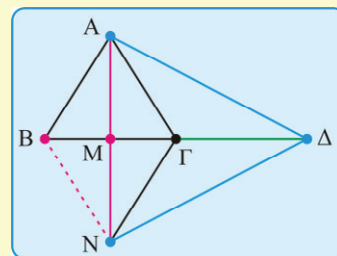
2.

Θ Ε Μ Α Δ

5.7

1760

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$) και AM το ύψος του στην πλευρά $B\Gamma$. Στην προέκταση του AM θεωρούμε τμήμα $MN = AM$. Στην προέκταση του $B\Gamma$ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



α. Το τετράπλευρο $ABN\Gamma$ ρόμβος.

β. Το τρίγωνο $A\Delta N$ είναι ισοσκελές.

γ. Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $A\Delta N$.

Μονάδες (8+8+9)=25

3.

Θ Ε Μ Α Δ

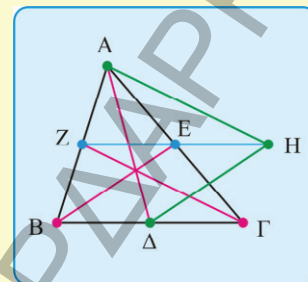
5.7

1820

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι διάμεσοί του AD , BE και $ΓΖ$. Προεκτείνουμε το τμήμα ZE (προς το E) κατά τμήμα $EH = ZE$.

Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $EH\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Η περίμετρος του τριγώνου $A\Delta H$ είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Οι ευθείες BE και ΔH τριχοτομούν το τμήμα $Z\Gamma$.



Μονάδες $(8+9+8)=25$

4.

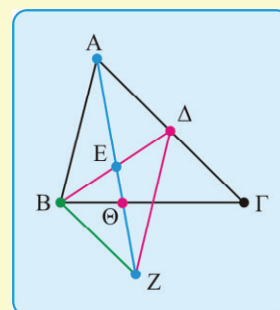
Θ Ε Μ Α Δ

5.7

1827

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου BD . Στην προέκταση της AE θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $EZ=AE$ και έστω Θ το σημείο τομής της AZ με την πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Το τετράπλευρο $B\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου $B\Delta Z$.



Μονάδες $(8+8+9)=25$

5.

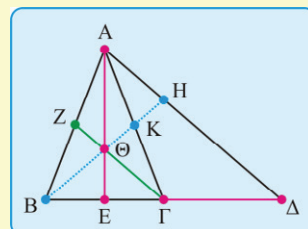
Θ Ε Μ Α Δ

5.7

1878

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$. Προεκτείνουμε το $B\Gamma$ (προς το Γ) κατά τμήμα $\Gamma\Delta=B\Gamma$. Φέρουμε τις διαμέσους AE και ΓZ του τριγώνου $AB\Gamma$ που τέμνονται στο Θ . Το $B\Theta$ προεκτεινόμενο, τέμνει το $A\Gamma$ στο K και το $A\Delta$ στο H . Να αποδείξετε ότι:

- Το $ZK\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.
- $AH=\Theta\Gamma$.
- $AH=2Z\Theta$.



Μονάδες $(9+9+7)=25$

5.8 ΤΟ ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ (9)

1.

Θ Ε Μ Α Δ

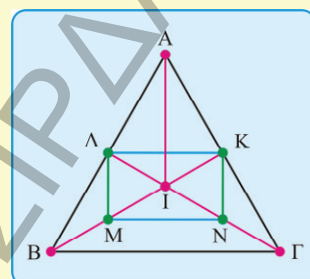
5.8

1719

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του BK και $\Gamma\Lambda$, τα οποία τέμνονται στο I .

Αν M και N είναι τα μέσα των IB και $I\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε:

- α. Το AI προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.
- β. Το τετράπλευρο $ΜΑΚΝ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο



Μονάδες $(10+15)=25$

2.

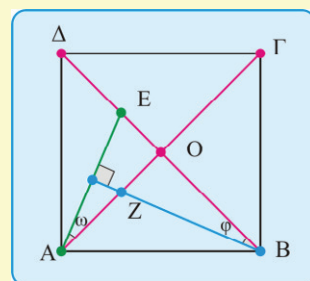
Θ Ε Μ Α Δ

5.8

1748

Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ ονομάζουμε O το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο E του τμήματος OD . Φέρνουμε την κάθετη από το B στην AE , που τέμνει το τμήμα AO στο Z . Να αποδείξετε ότι:

- α. Οι γωνίες ω και φ του διπλανού σχήματος είναι ίσες.
- β. $BZ=AE$ και $\Gamma Z=BE$
- γ. Το τμήμα EZ είναι κάθετο στο AB .



Μονάδες $(9+6+12+7)=25$

3.

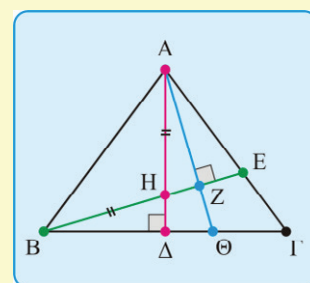
Θ Ε Μ Α Δ

5.8

1754

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Στο $A\Delta$ θεωρούμε σημείο H τέτοιο ώστε $HA=HB$. Έστω ότι E είναι το σημείο τομής της BH με την $A\Gamma$. Φέρνουμε την AZ κάθετη στην BE , η οποία τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Θ .

- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. Τα τρίγωνα $H\Delta B$ και HZA είναι ίσα.
 - ii. $\Delta\Theta=\Theta Z$.
 - iii. Η ευθεία ΘH είναι μεσοκάθετος του τμήματος AB .
- β. Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου AHB ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Μονάδες $[(6+6+6)+7]=25$

4.

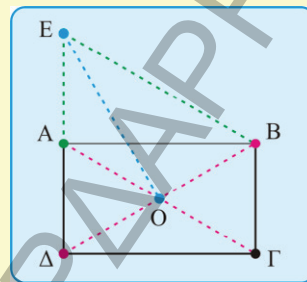
Θ Ε Μ Α Δ

5.8

1764

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O και $ΑΓ = 2ΒΓ$. Στην προέκταση της πλευράς ΔA , προς το A , παίρνουμε σημείο E ώστε $\Delta A = AE$. Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $AEB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Το τρίγωνο EBA είναι ισόπλευρο.
- Αν η EO τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι $\Delta Z \perp EB$.



Μονάδες $(8+9+8)=25$

5.

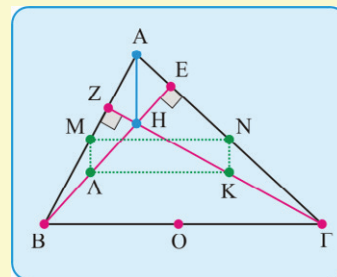
Θ Ε Μ Α Δ

5.8

1777

Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, BE , ΓZ τα ύψη από τις κορυφές B , Γ αντίστοιχα και H το ορθόκεντρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται τα M , N , K , Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων AB , $ΑΓ$, $\Gamma Η$, BH αντίστοιχα.

- Να αποδείξετε ότι:
 - $MN = \Lambda K$
 - $NK = M\Lambda = \frac{AH}{2}$
 - Το τετράπλευρο $MNKL$ είναι ορθογώνιο.
- Αν το O είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι το $\hat{MOK} = 90^\circ$.



Μονάδες $[(6+6+6+7)=25$

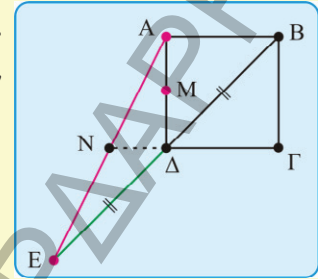
6.

Θ Ε Μ Α Δ

5.8

1780

Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε τη διαγώνιο $B\Delta$ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = \Delta B$. Έστω M το μέσο της $A\Delta$ και N το σημείο τομής των ευθειών AE και $\Gamma\Delta$.



- α. Να αποδείξετε ότι $\Delta N = \Delta M$.
- β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $NM\Delta$.
- γ. Να αποδείξετε ότι:
 - i. $MN \perp A\Gamma$
 - ii. $\Gamma M \perp AN$

Μονάδες $[6+5+(7+7)]=25$

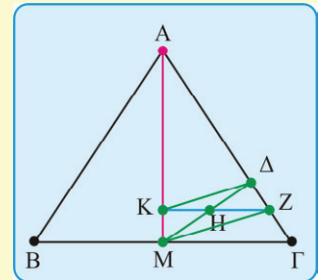
7.

Θ Ε Μ Α Δ

5.8

1843

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και το ύψος του AM . Φέρουμε $M\Delta$ κάθετη στην $A\Gamma$ και θεωρούμε H το μέσο του τμήματος $M\Delta$. Από το H φέρουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει τις AM και $A\Gamma$ στα σημεία K και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α. $HZ = \frac{B\Gamma}{4}$
- β. $MZ \parallel B\Delta$
- γ. Η ευθεία AH είναι κάθετη στη $B\Delta$.

Μονάδες $(9+8+8)=25$

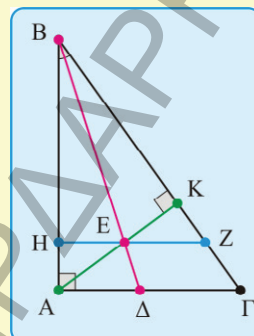
8.

Θ Ε Μ Α Δ

5.8

1865

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Delta$ διχοτόμο και AK ύψος, που τέμνονται στο E . Η κάθετη από το E στην AB τέμνει τις AB και $B\Gamma$ στα H και Z αντίστοιχα.



α. Να αποδείξετε ότι:

- i. Τα τρίγωνα EHA και EKZ είναι ίσα.
- ii. Το τρίγωνο BKH είναι ισοσκελές.
- iii. Η $B\Delta$ είναι κάθετη στην AZ .

β. Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η GE είναι διχοτόμος της γωνίας Γ .

Μονάδες $[(6+6+7)+6]=25$

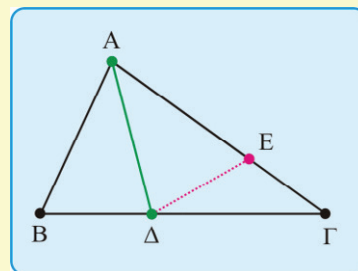
9.

Θ Ε Μ Α Δ

5.8

1887

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE = AB$. Να αποδείξετε ότι :



α. τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.

β. η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος BE .

γ. αν το ύψος από την κορυφή B του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει την $A\Delta$ στο H τότε η ευθεία EH είναι κάθετη στην AB .

Μονάδες $(7+9+9)=25$

5.9 ΜΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ (30)

1.

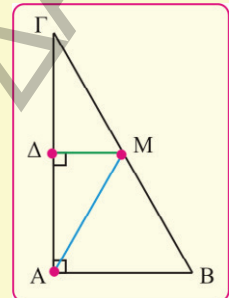
Θ Ε Μ Α Β

5.9

1548

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) με $B\Gamma = 8$. Έστω AM η διάμεσος του τριγώνου και $M\Delta \perp A\Gamma$. Αν η γωνία $AM\Gamma$ είναι ίση με 120° τότε:

- α. Να δείξετε ότι $AB = 4$.
- β. Να βρείτε το μήκος της $M\Delta$.



Μονάδες $(12+13)=25$

2.

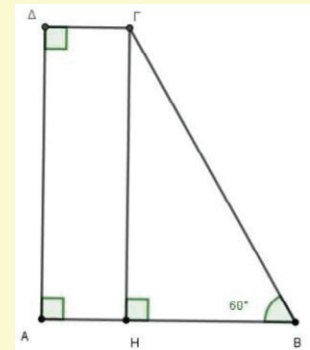
Θ Ε Μ Α Β

5.9

1549

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $A = \Delta = 90^\circ$, $AB > \Gamma\Delta$, $B\Gamma = 4\Gamma\Delta$ και $B = 60^\circ$. Φέρουμε την $\Gamma H \perp AB$.
Να δείξετε ότι:

- α. $HB = 2\Delta\Gamma$
- β. Το τετράπλευρο $AH\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $AH = \frac{1}{2}HB$.



Μονάδες $(12+13)=25$

3.

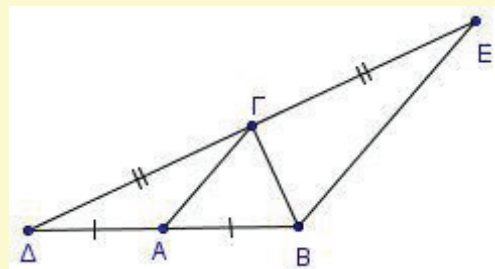
Θ Ε Μ Α Β

5.9

1551

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στην προέκταση της BA (προς το μέρος της κορυφής A) παίρνουμε σημείο Δ ώστε $AB = A\Delta$ και στη προέκταση της $\Delta\Gamma$ (προς το μέρος της κορυφής Γ) παίρνουμε σημείο E ώστε $\Gamma E = \Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

- α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο.
- β. Να δείξετε ότι $A\Gamma \parallel BE$ και $A\Gamma = \frac{BE}{2}$



Μονάδες $(12+13)=25$

4.

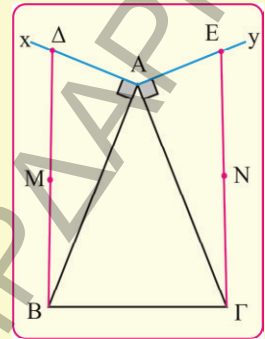
Θ Ε Μ Α Β

5.9

1555

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Φέρουμε εκτός του τριγώνου τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$, όπως στο διπλανό σχήμα. Στις Ax και Ay θεωρούμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = AE$.

- α. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.
- β. Αν M και N τα μέσα των τμημάτων $B\Delta$ και ΓE αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AMN είναι ισοσκελές.



Μονάδες (12+13)=25

5.

Θ Ε Μ Α Β

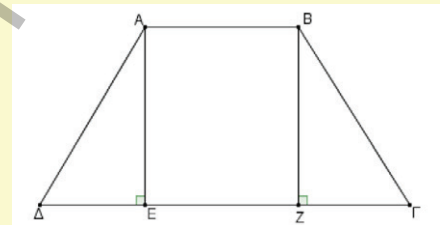
5.9

1562

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

Να αποδείξετε ότι:

- α. $\Delta E = \Gamma Z$
- β. το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ορθογώνιο



Μονάδες (12+13)=25

6.

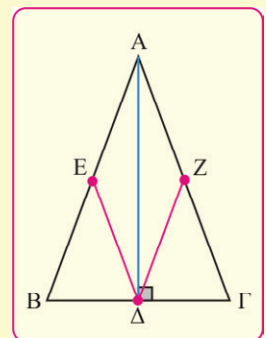
Θ Ε Μ Α Β

5.9

1564

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), το ύψος του $A\Delta$ και τα μέσα E και Z των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα $B\Delta E$ και $\Gamma\Delta Z$ είναι ίσα.
- β. Το τετράπλευρο $AZ\Delta E$ είναι ρόμβος.



Μονάδες (15+10)=25

7.

Θ Ε Μ Α Β

5.9

1567

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Θεωρούμε το ύψος AD και το μέσο Z της πλευράς $A\Gamma$.

- Να αποδείξετε ότι $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$.
- Προεκτείνουμε το ύψος AD (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα DE . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισόπλευρο.

Μονάδες $(12+13)=25$

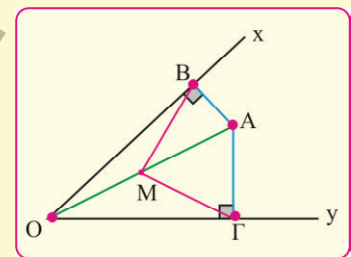
8.

Θ Ε Μ Α Β

5.9

1586

Δίνεται γωνία xOy και σημείο A στο εσωτερικό της. Από το A φέρνουμε τις κάθετες $AB, A\Gamma$ προς τις πλευρές Ox, Oy της γωνίας αντίστοιχα και ονομάζουμε M το μέσο του OA . Να αποδείξετε ότι:



- Το τρίγωνο BMA είναι ισοσκελές.
- Το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- $BMA = 2xOA$.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

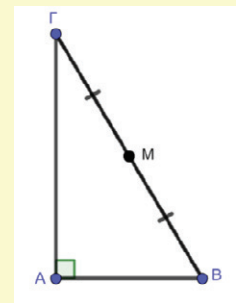
9.

Θ Ε Μ Α Β

5.9

1606

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) με $B = 2\hat{\Gamma}$ και σημείο M μέσο της $B\Gamma$.



- Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- Να βρείτε τη γωνία $\hat{AM\Gamma}$.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

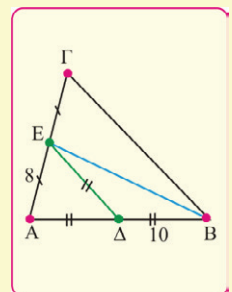
10.

Θ Ε Μ Α Β

5.9

1614

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = E\Delta = \Delta B$ με $AE = 8$ και $\Delta B = 10$.



- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο.
- Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 20$.
- Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

11.

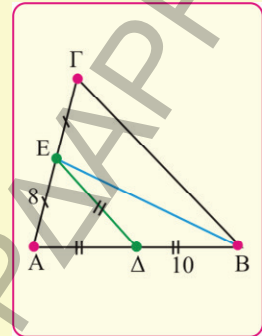
Θ Ε Μ Α Β

5.9

1615

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = E\Delta = \Delta B$ με $AE = 8$ και $\Delta B = 10$.

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο.
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.



Μονάδες $(6+10+9)=25$

12.

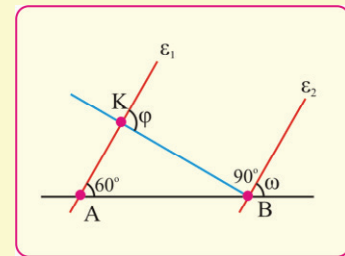
Θ Ε Μ Α Β

5.9

1619

Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $AB = 6$.

- Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω .
- Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ABK ως προς τις γωνίες του.
- Να υπολογίσετε το μήκος της AK , αιτιολογώντας την απάντησή σας.



Μονάδες $(10+7+8)=25$

13.

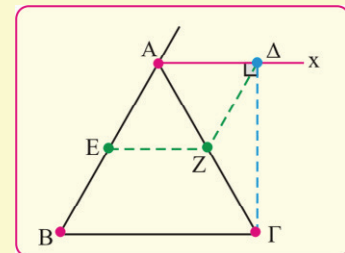
Θ Ε Μ Α Β

5.9

1625

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Ax της γωνίας A και από το σημείο Γ την κάθετο $\Gamma\Delta$ στην Ax . Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- $EZ = AE = AZ$
- Η γωνία $\angle \Gamma\Delta = 30^\circ$
- Το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ρόμβος.



Μονάδες $(9+10+6)=25$

14.

Θ Ε Μ Α Β

5.9

1631

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\angle A + \hat{\Gamma} = 120^\circ$ και $\angle A = 3\hat{\Gamma}$.

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.
- Αν η πλευρά $B\Gamma = 2\text{ cm}$, να βρείτε το μήκος της AB .

Μονάδες $(15+10)=25$

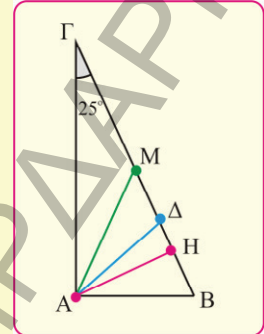
15.

Θ Ε Μ Α Β

5.9

1633

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 25^\circ$. Δίνονται επίσης η διάμεσος AM , το ύψος AH από την κορυφή A και η διχοτόμος AD της γωνίας A .



α. Να υπολογίσετε τις γωνίες AMB , HAB , $A\Delta B$.

β. Να αποδείξετε ότι $MA\Delta = \Delta AH = 20^\circ$.

Μονάδες $(15+10)=25$

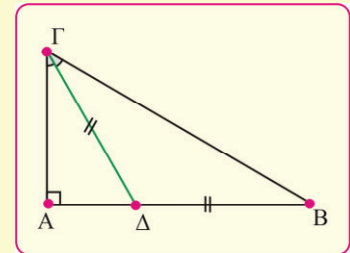
16.

Θ Ε Μ Α Β

5.9

1638

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $A = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ , τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = \Delta B = 2\text{ cm}$. Να αποδείξετε ότι:



α. $B = 30^\circ$.

β. $AB = 3\text{ cm}$

Μονάδες $(12+13)=25$

17.

Θ Ε Μ Α Β

5.9

1647

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$, $B = 35^\circ$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

α. Να υπολογίσετε τη γωνία Γ .

β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AMB .

Μονάδες $(10+15)=25$

18.

Θ Ε Μ Α Β

5.9

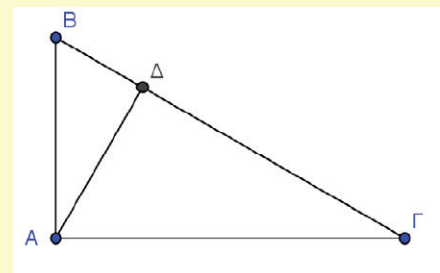
1649

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή, $2\hat{\Gamma} = B$ και $A\Delta$ το ύψος του.

α. Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

β. Να υπολογιστεί η γωνία $BA\Delta$.

γ. Να αποδείξετε ότι: $B\Delta = \frac{AB}{2}$.



Μονάδες $(9+7+9)=25$

19.

Θ Ε Μ Α Β

5.9

1680

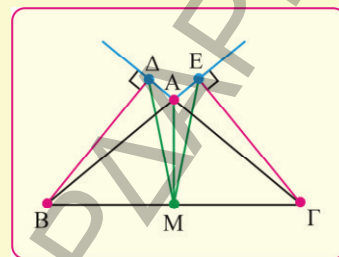
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} > 90^\circ$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ προς το A φέρνουμε τμήματα BD και GE κάθετα στις $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι $BD = GE$.

β. Αν M το μέσο της $B\Gamma$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $MD = ME$.

ii. Να αποδείξετε ότι η AM διχοτομεί τη γωνία $\angle DME$.



Μονάδες $[10 + (8 + 7)] = 25$

20.

Θ Ε Μ Α Β

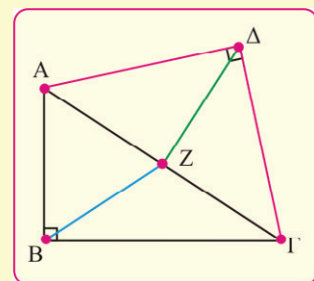
5.9

1685

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B = 90^\circ$ και Z το μέσο του $A\Gamma$. Με υποτείνουσα το $A\Gamma$ κατασκευάζουμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ με $\angle \Delta = 90^\circ$.

α. Να αποδείξετε ότι $BZ = \Delta Z$.

β. Αν $\hat{A\Gamma B} = 30^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\angle B\Delta\Delta$ και $\angle B\Gamma\Delta$.



Μονάδες $(13 + 12) = 25$

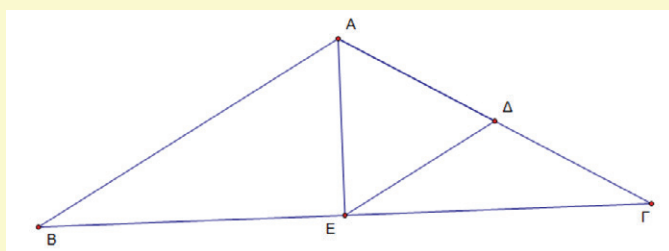
21.

Θ Ε Μ Α Β

5.9

1686

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Gamma = AB$, και γωνία B ίση με 30° . Θεωρούμε Δ και E τα μέσα των $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.



α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο.

Μονάδες $(16 + 9) = 25$

22.

Θ Ε Μ Α Β

5.9

1690

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και $B > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και την διάμεσό του AM στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α. οι γωνίες B και $\Gamma A\Delta$ είναι ίσες.

β. $AM\Delta = 2\hat{\Gamma}$.

Μονάδες $(12+13)=25$

23.

Θ Ε Μ Α Β

5.9

1691

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $B = 60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη AE και BZ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία $\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\Gamma Z = \frac{A\Delta}{2}$

β. το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ίσο με το τρίγωνο $B\Gamma Z$.

γ. το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες $(8+9+8)=25$

24.

Θ Ε Μ Α Β

5.9

1702

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma < AB$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $A\Delta = A\Gamma$ και στην προέκταση της BA (προς το A) θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\Delta\Gamma \perp E\Gamma$

β. η γωνία EAG είναι διπλάσια της γωνίας $A\Delta\Gamma$.

Μονάδες $(12+13)=25$

25.

Θ Ε Μ Α Β

5.9

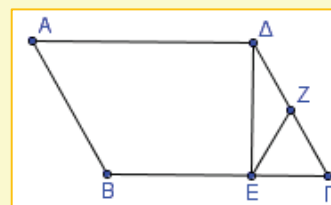
1704

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $B = 120^\circ$ και $\Delta E \perp B\Gamma$. Έστω EZ η διάμεσος του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες A και Γ του παραλληλογράμμου.

β. Αν K είναι το μέσο της AB , να αποδείξετε ότι $EZ = AK$.

γ. Να υπολογίσετε τη γωνία $EZ\Gamma$.



Μονάδες $(8+9+8)=25$

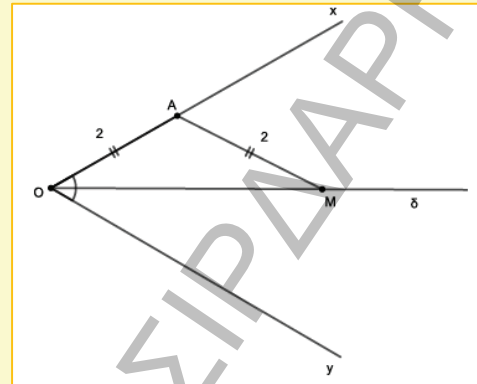
26.

Θ Ε Μ Α Β

5.9

13653

Σχεδιάζουμε γωνία $\widehat{xOy} = 60^\circ$ και παίρνουμε σημείο Α επί της πλευράς Οx, τέτοιο ώστε $AO = 2$. Φέρουμε τη διχοτόμο Οδ της γωνίας $\widehat{xOy}$ και θεωρούμε σημείο Μ στην Οδ, τέτοιο ώστε $AM = AO$. Να υπολογίσετε:



- Τη γωνία $\delta\widehat{Oy}$.
- Τις γωνίες του τριγώνου ΑΟΜ.
- Το μήκος του ύψους ΑΒ που αντιστοιχεί στη βάση ΟΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΜ.

Μονάδες $(6+9+10)=25$

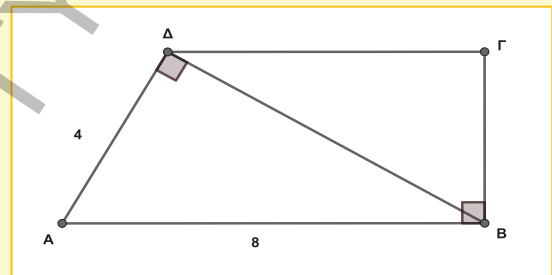
27.

Θ Ε Μ Α Β

5.9

13828

Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΒΔ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΔ και η πλευρά ΓΒ κάθετη στη βάση ΑΒ. Αν $AD=4$ και $AB=8$ τότε:



- Να υπολογιστεί η γωνία $\widehat{DAB}$.
- Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος ΒΔ του τραπέζιου ΑΒΓΔ είναι διπλάσια της πλευράς του ΒΓ.

Μονάδες $(12+13)=25$

28.

Θ Ε Μ Α Β

5.9

13831

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\widehat{A} = 90^\circ$.

- Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο τρίγωνο αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $AB > AG$. Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου και γιατί;
- Αν για το τρίγωνο που σας ζητήθηκε να σχεδιάσετε στο α) ερώτημα γνωρίζετε επιπλέον ότι η μια από τις οξείες γωνίες του είναι ίση με 30° , τότε να απαντήσετε στα παρακάτω:
 - Πόσες μοίρες θα είναι η γωνία $\widehat{B}$ και πόσες η γωνία $\widehat{G}$;
 - Ποια πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας;

Μονάδες $[10+(8+7)]=25$

29.

Θ Ε Μ Α Β

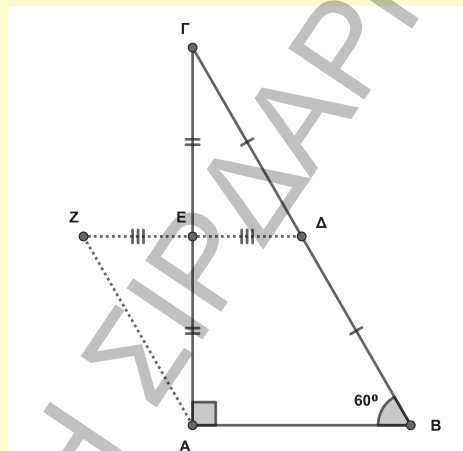
5.9

13837

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=90^\circ$ και $\hat{B}=60^\circ$. Θεωρούμε τα σημεία Δ και E που είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την DE κατά τμήμα $EZ=DE$.

α. Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta=AZ$.

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ZAB είναι ισοσκελές.



Μονάδες (12+13)=25

30.

Θ Ε Μ Α Β

5.9

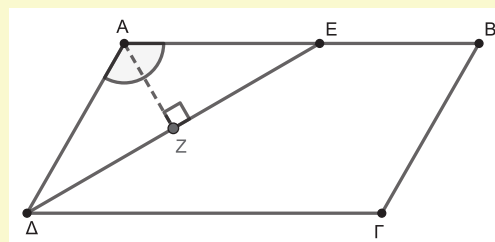
14876

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία $\hat{A} = 120^\circ$ και $AB=2A\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E , και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα AZ στη DE .

Να αποδείξετε ότι:

α. γωνία $\hat{A}\hat{\Delta}E = 30^\circ$

β. $AZ = \frac{AB}{4}$



Μονάδες (10+15)=25

5.9 ΜΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ (44)

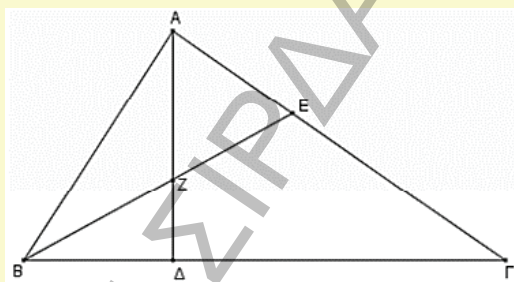
31.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1713

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $A + \hat{\Gamma} = 2B$ και έστω AD ύψος και BE διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο Z .



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $B = 60^\circ$ και $AZ = BZ$

ii. $AD = \frac{3}{2}BZ$

β. Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου.

Μονάδες $[(10+8)+7]=25$

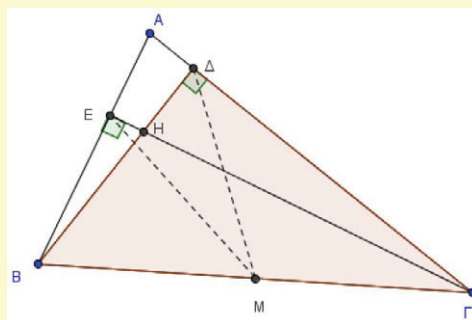
32.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1716

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, τα ύψη του BD και CE που τέμνονται στο σημείο H και το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$.



α. Να αποδείξετε ότι

i. $MD = ME$

ii. Η ευθεία AH τέμνει κάθετα τη $B\Gamma$ και ότι $\hat{AHD} = \hat{\Gamma}$, όπου $\hat{\Gamma}$ η γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$.

β. Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου ABH .

Μονάδες $[(10+5)+10]=25$

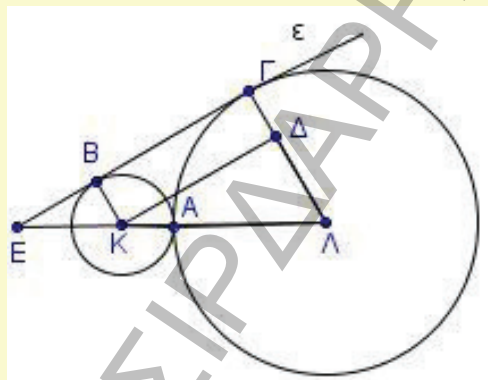
33.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1721

Οι κύκλοι (K, ρ) και $(\Lambda, 3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Μια ευθεία εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου ΚΛ στο σημείο Ε. Φέρουμε από το σημείο Κ παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα ΛΓ στο Δ.



- α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο.
- β. Να αποδείξετε ότι $\angle K\Lambda = 30^\circ$
- γ. Να αποδείξετε ότι $ΕΛ = 6\rho$.

Μονάδες $(9+8+8)=25$

34.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1737

Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓ ($\angle A = 90^\circ$) και το ύψος του ΑΗ. Έστω Δ και Ε τα συμμετρικά σημεία του Η ως προς τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και Μ, Ν οι προβολές των Δ, Ε στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. $AH = AD = AE$
- β. Η γωνία ΕΗΔ είναι ορθή.
- γ. Τα σημεία Ε, Α και Δ είναι συνευθειακά και $MN = DE/2$.

Μονάδες $(10+8+7)=25$

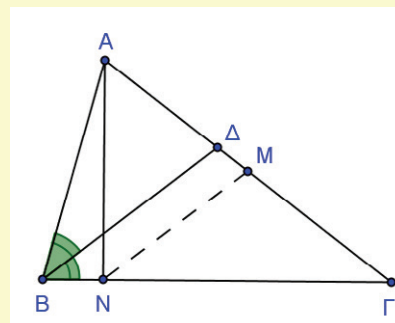
35.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1738

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\angle B = 2\hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος ΒΔ της γωνίας Β. Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο ΒΔ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ν. Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.
- β. Το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές.
- γ. $AN \perp BG$.

Μονάδες $(5+10+10)=25$

36.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1759

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία A αμβλεία, ισχύει ότι $AB=2AD$. Τα σημεία E και Z , είναι μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Από το Δ φέρουμε τη DH κάθετη στην προέκταση της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι ρόμβος.
- Το τρίγωνο EZH είναι ισοσκελές.
- Το τμήμα HE , είναι διχοτόμος της γωνίας ZHG .

Μονάδες $(8+9+8)=25$

37.

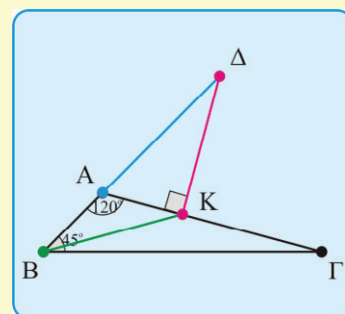
Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1761

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία A ίση με 120° και γωνία B ίση με 45° . Στην προέκταση της BA προς το A , παίρνουμε τμήμα $AD=2AB$. Από το Δ φέρνουμε την κάθετη στην $A\Gamma$ που την τέμνει στο σημείο K . Να αποδείξετε ότι:

- $\angle A\Delta K = 30^\circ$
- Το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές.
- Αν Z το μέσο της DA , τότε $\angle ZKB = 90^\circ$
- Το σημείο K ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος BD .



Μονάδες $(6+6+6+7)=25$

38.

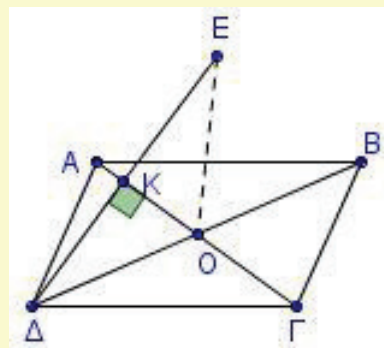
Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1770

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με O το κέντρο του. Από την κορυφή Δ φέρουμε το τμήμα ΔK κάθετο στην $A\Gamma$ και στην προέκταση του προς το K θεωρούμε σημείο E , ώστε $KE = \Delta K$. Να αποδείξετε ότι:

- $EO = \frac{B\Delta}{2}$
- $\angle E\Delta B = 90^\circ$
- Το τετράπλευρο $AEB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Μονάδες $(9+8+8+9)=25$

39.

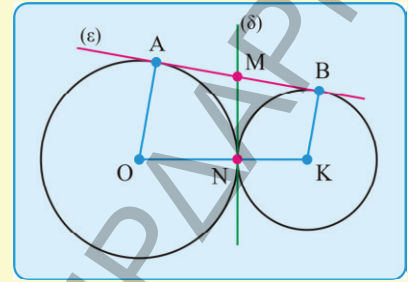
Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1771

Δύο κύκλοι (O, ρ_1) , (K, ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά στο Ν. Μια ευθεία ε εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο Ν τέμνει την ε στο Μ. Να αποδείξετε ότι:

- α. Το Μ είναι μέσο του ΑΒ.
- β. $\angle OMK = 90^\circ$
- γ. $\angle ANB = 90^\circ$



Μονάδες $(7+9+9)=25$

40.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1786

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2BG$ και τη γωνία Β αμβλεία. Από την κορυφή Α φέρουμε την ΑΕ κάθετη στην ευθεία ΒΓ και έστω Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΔΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο ΜΒΓΝ είναι ρόμβος.
- β. Το τετράπλευρο ΜΕΓΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- γ. Η ΕΝ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΕΓ.

Μονάδες $(8+9+8)=25$

41.

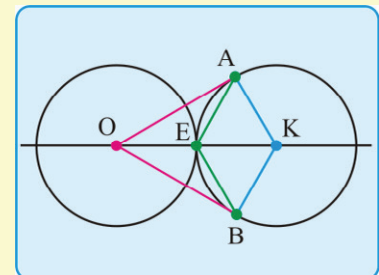
Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1796

Δύο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ε. Αν ΟΑ και ΟΒ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Ο στον κύκλο (K, ρ) , να αποδείξετε ότι:

- α. $AE = BE$
- β. $\angle AOK = 30^\circ$
- γ. Το τετράπλευρο ΑΚΒΕ είναι ρόμβος.



Μονάδες $(9+8+8)=25$

42.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1806

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή. Φέρουμε τη διάμεσο του AM και σε τυχαίο σημείο K αυτής φέρουμε κάθετη στην AM η οποία τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Αν H είναι το μέσο του ΔE να αποδείξετε ότι:

- α. $B = BAM$
- β. $A\Delta H = \Delta A H$.
- γ. Η ευθεία AH τέμνει κάθετα τη $B\Gamma$.

Μονάδες $(8+9+8)=25$

43.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1808

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και Δ, E τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Στην προέκταση της ΔE (προς το E) θεωρούμε σημείο Λ ώστε $E\Lambda = AE$ και στη προέκταση της $E\Delta$ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο K τέτοιο, ώστε $\Delta K = \Delta\Lambda$. Να αποδείξετε ότι:

- α. $K\Delta = \Lambda E$
- β. Τα τρίγωνα AKB και $\Lambda\Lambda\Gamma$ είναι ορθογώνια.
- γ. Τα τρίγωνα AKB και $\Lambda\Lambda\Gamma$ είναι ίσα.

Μονάδες $(6+9+10)=25$

44.

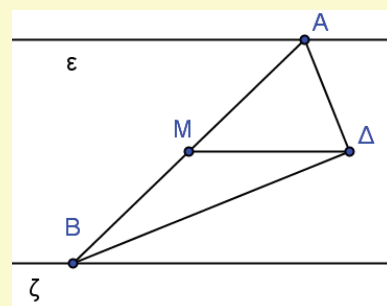
Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1811

Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες (ϵ) και (ζ) και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία A και B αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ . Αν M είναι το μέσον του AB , να αποδείξετε ότι:

- α. $B\Delta A = 90^\circ$
- β. $BM\Delta = 2M\Delta A$
- γ. $M\Delta \parallel \epsilon$



Μονάδες $(9+8+8)=25$

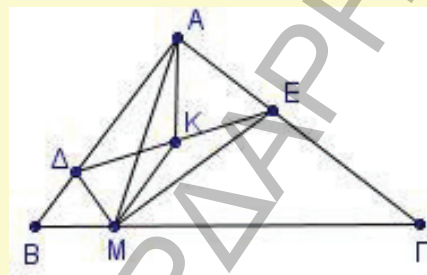
45.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1812

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και M τυχαίο σημείο της πλευράς $B\Gamma$. Φέρουμε τις διχοτόμους γωνιών BMA και $AM\Gamma$ οι οποίες τέμνουν τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.



- α. Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔME είναι ορθή.
β. Αν K το μέσο του ΔE , να αποδείξετε ότι $MK = KA$.

Μονάδες $(12+13)=25$

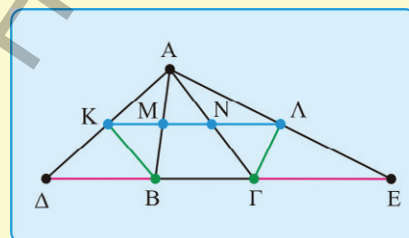
46.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1824

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της ΓB προς το B , θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $B\Delta = AB$ ενώ στη προέκταση της $B\Gamma$ προς το Γ , θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $\Gamma E = A\Gamma$. Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών B και Γ τέμνουν τις $A\Delta$ και AE στα σημεία K και Λ αντίστοιχα και η $K\Lambda$ τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία M και N αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



- α. Τα σημεία K και Λ είναι μέσα των $A\Delta$ και AE αντίστοιχα.
β. Τα τρίγωνα KMA και $AN\Lambda$ είναι ισοσκελή.

γ. $K\Lambda = \frac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2}$

Μονάδες $(8+9+8)=25$

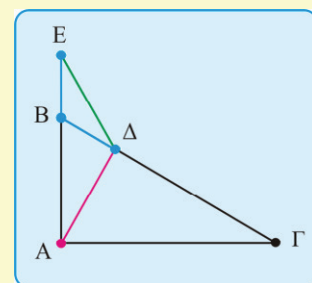
47.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1831

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και $B = 2\hat{\Gamma}$. Φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και σημείο E στην προέκταση της AB τέτοιο, ώστε $BE = B\Delta$.



- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta E$.
β. Να αποδείξετε ότι:

i. $BE = \frac{AB}{2}$

ii. $AE = \Gamma\Delta$

Μονάδες $[9+(8+8)]=25$

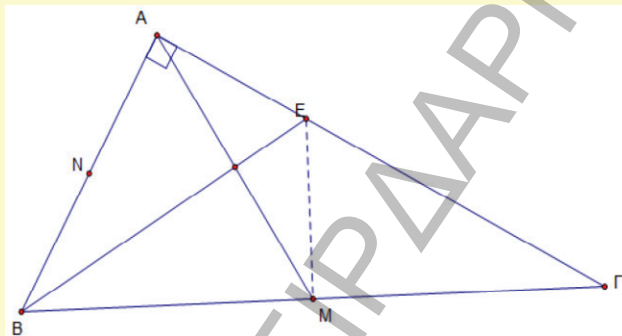
48.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1835

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$.. και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ με M και N τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την AG στο σημείο E .



α. Να αποδείξετε ότι:

- i. η BE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$
- ii. $AE = \frac{\Gamma E}{2}$.
- iii. η BE είναι μεσοκάθετος της διαμέσου AM .

β. Αν AD είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ που τέμνει την BE στο H , να αποδείξετε ότι τα σημεία M , H και N είναι συνευθειακά.

Μονάδες $[(6+6+7)+6]=25$

49.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1850

Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο $EZH\Theta$ παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Μια μπάλα του μπιλιάρδου ξεκινάει από σημείο A της μεσοκαθέτου του τμήματος EZ και χτυπώντας διαδοχικά στους τοίχους $E\Theta$, ΘH , HZ στα σημεία B , Γ και Δ αντίστοιχα, καταλήγει στο σημείο εκκίνησης A . Για τη διαδρομή $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow A$ που ακολουθεί η μπάλα ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ. η γωνία ABE) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ η γωνία $\Theta B\Gamma$) και η κάθε μια απ' αυτές είναι 45° .

α. Να αποδείξετε ότι:

- i. Τα τρίγωνα AEB και $AZ\Delta$ είναι ίσα.
- ii. Η διαδρομή $AB\Gamma\Delta A$ της μπάλας σχηματίζει τετράγωνο.

β. Αν η AZ είναι διπλάσια από την απόσταση του A από τον τοίχο EZ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AEZ .

Μονάδες $[(9+8)+8]=25$

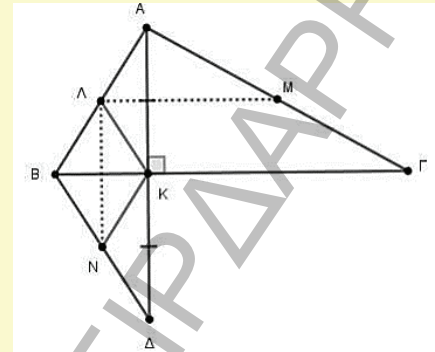
50.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1858

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση του ύψους του AK θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Έστω Λ , M και N τα μέσα των τμημάτων AB , $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.
- β. Το τετράπλευρο $B\Lambda K N$ είναι ρόμβος.
- γ. $AM \perp AN$

Μονάδες $(7+9+9)=25$

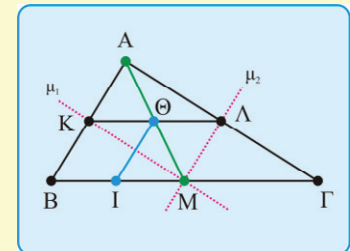
51.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1859

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω K, Λ τα μέσα των $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα. Φέρουμε τις μεσοκαθέτους μ_1, μ_2 των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται στο μέσο M της $B\Gamma$.



- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $A = 90^\circ$.
 - ii. Το τετράπλευρο $A\Lambda M K$ είναι ορθογώνιο.
 - iii. $\Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4}$, όπου Θ το σημείο τομής των AM και $K\Lambda$.
- β. Αν I σημείο της $B\Gamma$ τέτοιο, ώστε $BI = \frac{B\Gamma}{4}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Theta IB$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες $[(5+7+6)+7]=25$

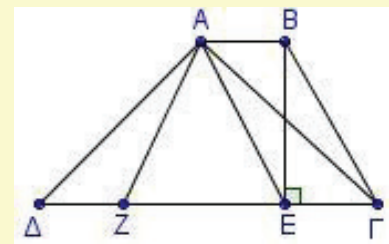
52.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1860

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma = 4AB$ και $B\Gamma = 2AB$. Θεωρούμε σημείο Z εσωτερικό της $\Gamma\Delta$, ώστε $\Delta Z = AB$. Αν η γωνία Γ είναι 60° και BE το ύψος του τραπέζιου, να αποδείξετε ότι:



- α. Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Το τρίγωνο ZAE είναι ισόπλευρο.
- γ. Τα τρίγωνα ΔAZ και ΓAE είναι ίσα.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

53.

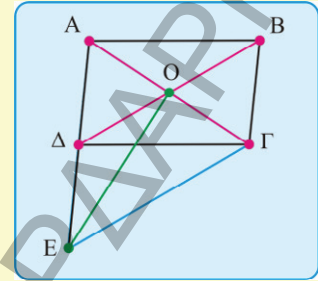
Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1862

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ τέτοιο, ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην $ΑΓ$ στο κέντρο του $Ο$, αυτή να τέμνει την προέκταση της $ΑΔ$ σε σημείο $Ε$ τέτοιο, ώστε $ΔΕ = ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο $ΑΕΓ$ είναι ισοσκελές.
- Το τετράπλευρο $ΒΓΕΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Το τρίγωνο $ΒΟΓ$ είναι ισοσκελές.



Μονάδες $(7+9+9)=25$

54.

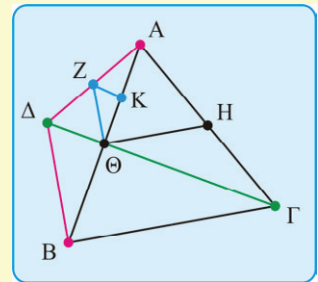
Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1866

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Με βάση την $ΑΒ$ κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο $ΑΔΒ$, εκτός του τριγώνου $ΑΒΓ$, με $Δ = 120^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα $Ζ$ και $Η$ των πλευρών $ΑΔ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα.

- Να αποδείξετε ότι η $ΔΓ$ είναι μεσοκάθετος του $ΑΒ$.
- Αν η $ΔΓ$ τέμνει την $ΑΒ$ στο $Θ$, να αποδείξετε ότι η γωνία $ΖΟΗ$ είναι ορθή.



- Αν η $ΖΚ$ είναι κάθετη στην $ΑΒ$ από το σημείο $Ζ$, να αποδείξετε ότι $ΖΚ = \frac{ΑΔ}{4}$.

Μονάδες $(8+9+8)=25$

55.

Θ Ε Μ Α Δ

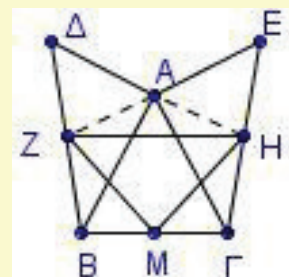
5.9

1870

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$. Φέρνουμε τμήμα $ΑΔ$ κάθετο στην $ΑΒ$ και τμήμα $ΑΕ$ κάθετο στην $ΑΓ$ με $ΑΔ = ΑΕ$.

Θεωρούμε τα μέσα $Ζ, Η$ και $Μ$ των $ΔΒ$, $ΕΓ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα.

- Να αποδείξετε ότι:
 - Τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΑΕΓ$ είναι ίσα.
 - Το τρίγωνο $ΖΑΗ$ είναι ισοσκελές.
 - Η $ΑΜ$ είναι μεσοκάθετος του $ΖΗ$.
- Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΑΕΓ$ έγραψε τα εξής:
 - $ΑΔ = ΑΕ$ από την υπόθεση
 - $ΑΒ = ΑΓ$ πλευρές ισοσκελούς τριγώνου



3. $\triangle AB = \triangle A\Gamma$ ως κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία ίσα».

Ο καθηγητής είπε ότι η λύση περιέχει λάθος, μπορείς να το εντοπίσεις;

Μονάδες $[(7+6+7)+5]=25$

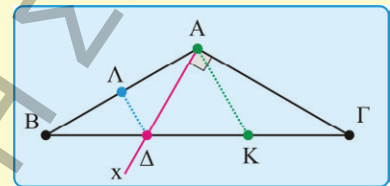
56.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1871

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A=120^\circ$. Φέρουμε ημιευθεία $A\chi$ κάθετη στην $A\Gamma$ στο A , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ . Έστω Λ το μέσο του AB και K το μέσο του $\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



α. Το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές.

β. $\Delta\Gamma = 2B\Delta$

γ. $\Lambda\Delta \parallel AK$

δ. $AK = 2\Lambda\Delta$

Μονάδες $(8+8+5+4)=25$

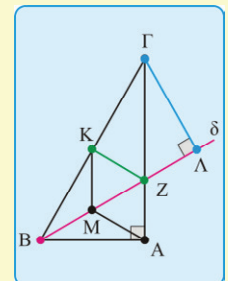
57.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1872

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A=90^\circ$ και $B=60^\circ$. Η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την $A\Gamma$ στο Z . Τα σημεία M και K είναι τα μέσα των BZ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Αν το τμήμα $\Gamma\Lambda$ είναι κάθετο στη διχοτόμο $B\delta$, να αποδείξετε ότι:



α. Το τρίγωνο $BZ\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β. Το τετράπλευρο $AMKZ$ είναι ρόμβος.

γ. $\Gamma Z = 2ZA$

δ. $B\Lambda = A\Gamma$

Μονάδες $(6+6+7+6)=25$

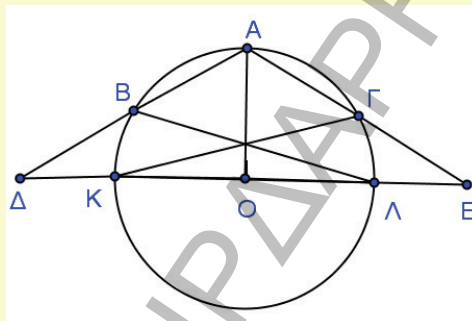
58.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1874

Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο $KL = 2\rho$. Έστω A σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα OA να είναι κάθετη στην KL . Φέρουμε τις χορδές $AB = AG = \rho$. Έστω Δ και E τα σημεία τομής των προεκτάσεων των AB και AG αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου KL . Να αποδείξετε ότι:



α. $\angle BAG = 120^\circ$

β. Τα σημεία B και Γ είναι μέσα των AD και AE αντίστοιχα.

γ. $K\Gamma = \Delta B$

Μονάδες $(7+9+9)=25$

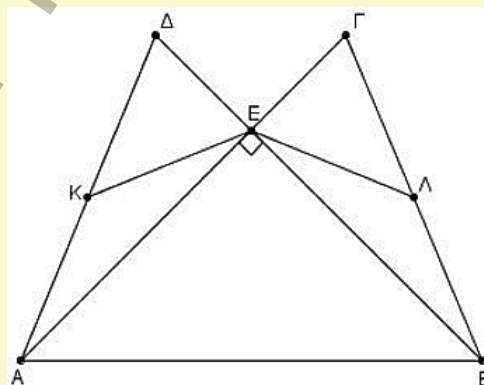
59.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1876

Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και $AB\Delta$ ($BA=BD$), τέτοια ώστε οι πλευρές τους AG και BD να τέμνονται κάθετα στο σημείο E , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων AD και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α. $ED=EG$.

β. $\Delta\Gamma \parallel AB$.

γ. Το τρίγωνο EKL είναι ισοσκελές και $K\Lambda \parallel AB$.

Μονάδες $(7+8+10)=25$

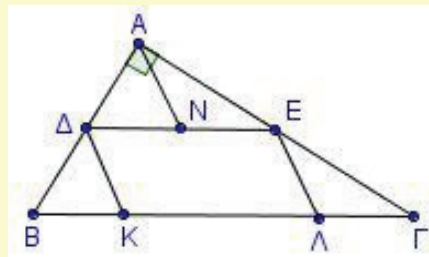
60.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1880

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\angle A = 90^\circ$ και Δ, E και N τα μέσα των AB, AG και DE αντίστοιχα. Στο τμήμα $B\Gamma$ θεωρούμε σημεία K και Λ ώστε $\Delta K = KB$ και $E\Lambda = \Lambda\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



α. $\angle K\Lambda = 2B$ και $\angle E\Lambda K = 2\hat{\Gamma}$.

β. Το τετράπλευρο $DE\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο με $DE = 2\Delta K$.

γ. $AN = \Delta K = \frac{B\Gamma}{4}$

Μονάδες $(10+8+7)=25$

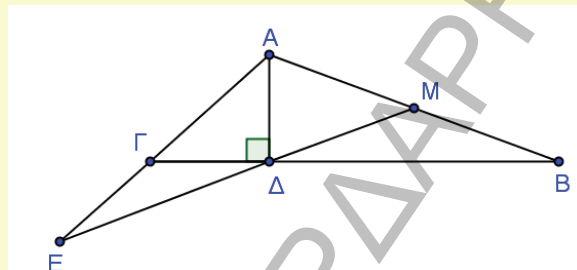
61.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1881

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB > A\Gamma$), AD το ύψος του και M το μέσο του AB . Η προέκταση της MD τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο E ώστε $\Gamma D = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:



α. $B = E$

β. $\hat{\Gamma} = 2B = A M \Delta$

γ. $\Gamma E < A\Gamma$

Μονάδες $(8+10+7)=25$

62.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

1895

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma B$ ($A\Gamma = \Gamma B$). Φέρουμε τα ύψη του AK και $\Gamma\Lambda$. Αν E είναι το μέσο της πλευράς $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο $KE\Lambda$ είναι ισοσκελές.

β. Η $K\Lambda$ είναι διχοτόμος της γωνίας BKE .

Μονάδες $(10+15)=25$

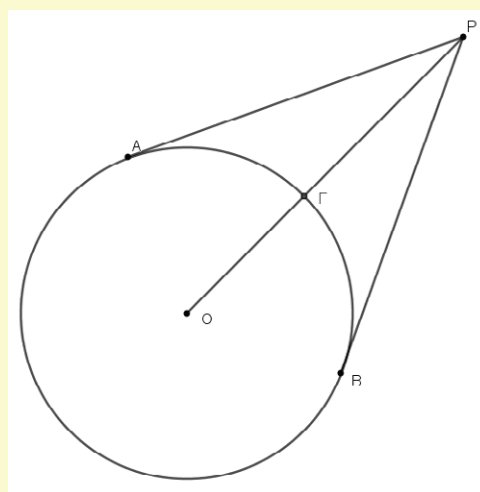
63.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

13520

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και σημείο P εκτός του κύκλου. Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Η PO τέμνει το μικρότερο του ημικυκλίου τόξο AB στο Γ και $\hat{A\Gamma B} = 60^\circ$. Να αποδείξετε ότι:



α. $OP = 2\rho$.

β. $\hat{A\Gamma B} = 120^\circ$.

γ. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τετράπλευρο

$OAGB$ είναι ρόμβος.

Συμφωνείτε μαζί του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(10+10+5)=25$

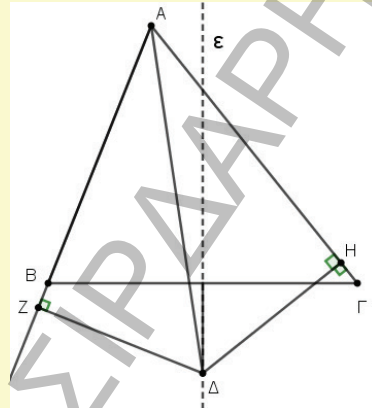
64.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

13522

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει την μεσοκάθετο (ϵ) της $B\Gamma$ στο Δ . Από το Δ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΔZ και ΔH προς τις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.



- α. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $AH\Delta$.
- β. Να αποδείξετε ότι $BZ = H\Gamma$.
- γ. Αν η γωνία $A = 60^\circ$ και M το μέσο ης $A\Delta$, να αποδείξετε ότι $HM = Z\Delta$.

Μονάδες $(8+9+8)=25$

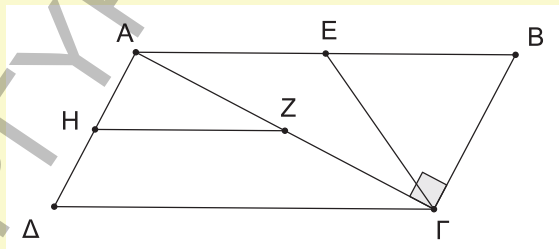
65.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

13540

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε η διαγώνιος του $A\Gamma$ να είναι κάθετη στη $B\Gamma$. Θεωρούμε τα μέσα E, Z και H των $AB, A\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα.



- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. $\Gamma E = ZH$.
 - ii. Η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{\Gamma}E$.
- β. Αν $\Delta H = \frac{AB}{4}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισόπλευρο.

Μονάδες $(9+9+7)=25$

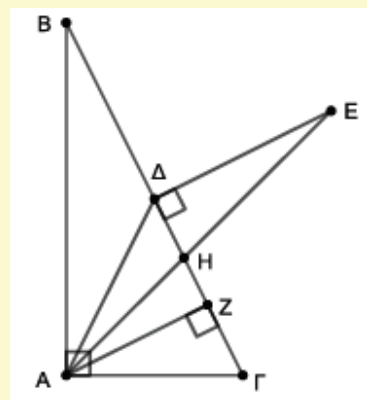
66.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

13672

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB > A\Gamma$. Από το μέσο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε κάθετη στη $B\Gamma$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία τέμνει τη διχοτόμο AH της γωνίας $\hat{A}$ στο σημείο E . Έστω AZ το ύψος στην υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι:



- α. $\Gamma\hat{A}Z = \Delta\hat{A}B$.
- β. $A\Delta = \Delta E$.
- γ. $Z\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma} - \hat{B}$.

Μονάδες $(8+9+8)=25$

67.

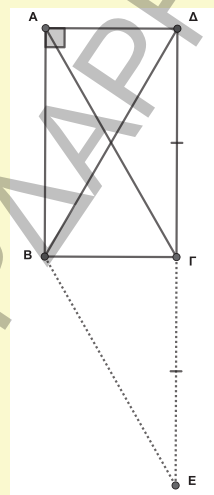
Θ Ε Μ Α Δ

5.9

13851

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά $\Delta\Gamma$ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma E = \Delta\Gamma$.

- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Gamma E B$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές.
- Αν $\widehat{B\Delta E} = 120^\circ$ να αποδείξετε ότι $B\Delta = 2A\Delta$.



Μονάδες (7+9+9)=25

68.

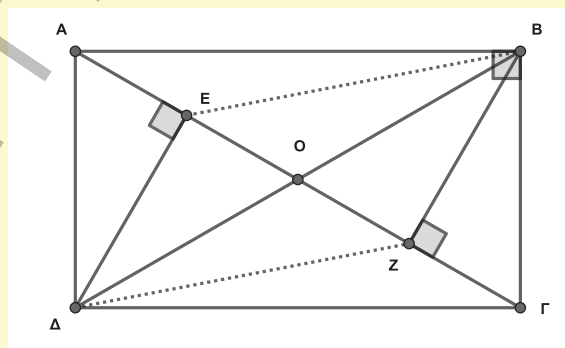
Θ Ε Μ Α Δ

5.9

13852

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > A\Delta$ και με κέντρο O . Αν BZ και ΔE είναι οι αποστάσεις των κορυφών B και Δ από τη διαγώνιο $A\Gamma$, τότε:

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔEO και BZO είναι ίσα.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Αν $\widehat{\Delta A E} = 60^\circ$ και $OE = 5$, να βρείτε το μήκος της πλευράς $A\Delta$.



Μονάδες (5+8+12)=25

69.

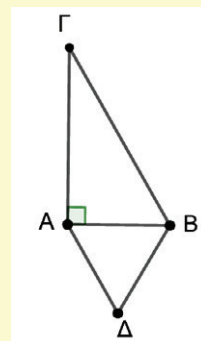
Θ Ε Μ Α Δ

5.9

13853

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\widehat{A} = 90^\circ$. Επίσης οι $A\Delta$ και $B\Gamma$ είναι παράλληλες και το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

- Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Αν η περίμετρος του $AB\Delta$ είναι 12 να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας του $AB\Gamma$.
- Αν το σημείο K είναι σημείο της υποτείνουσας τέτοιο ώστε το $A\Delta BK$ να είναι παραλληλόγραμμο, τότε να βρείτε τη θέση του σημείου K . Τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $A\Delta BK$; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



Μονάδες (8+7+10)=25

70.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

13855

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=90^\circ$. Από το μέσο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά AG που τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\hat{E\Delta\Gamma}=120^\circ$, τότε:

- Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\Delta\hat{\Gamma}A$.
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
- Προεκτείνουμε την πλευρά AG προς το Γ κατά τμήμα

$\Gamma Z=AG$ και την πλευρά $B\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma H=\frac{B\Gamma}{2}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A\hat{H}Z}=90^\circ$.

Μονάδες $(5+8+12)=25$

71.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

14879

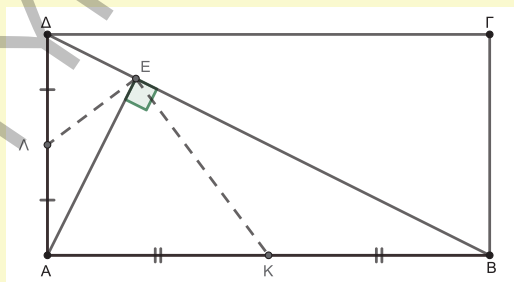
Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Από την κορυφή A φέρουμε AE κάθετη στη BD . Έστω K, Λ τα μέσα των AB και AD αντίστοιχα.

- Να αποδείξετε ότι :

i. $\hat{K\hat{E}\Lambda} = 90^\circ$.

ii. $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$.

- Αν $\hat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι $K\Lambda = B\Gamma$.



Μονάδες $[(8+8)+9]=25$

72.

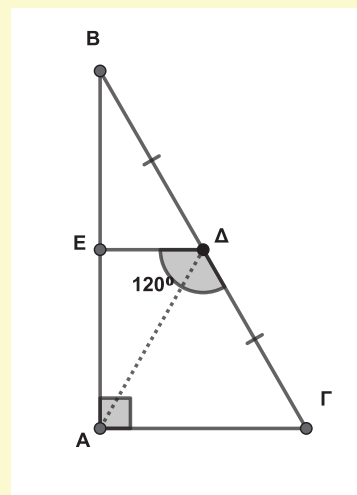
Θ Ε Μ Α Δ

5.9

14881

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και AM η διάμεσός του. Από το M φέρουμε MK κάθετη στην AB και $M\Lambda$ κάθετη στην AG . Αν N, P είναι τα μέσα των BM και ΓM αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- $\hat{N\hat{K}M} = \hat{N\hat{M}K}$
- Η MK είναι διχοτόμος της γωνίας NMA .
- $AM = KN + \Lambda P$.



Μονάδες $(7+9+9)=25$

73.

Θ Ε Μ Α Δ

5.9

14886

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), τα μέσα Δ , E , Z των πλευρών του και το ύψος του AK . Αν Θ είναι το σημείο τομής των AZ και DE , τότε:

α. Να αποδείξετε ότι:

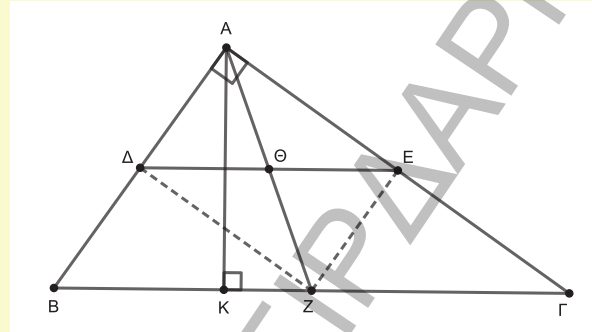
i. Το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ορθογώνιο.

ii. $A\Theta = \Theta E = \frac{B\Gamma}{4}$

β. Αν επιπλέον είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, τότε:

i. να βρείτε τη γωνία $A\hat{Z}B$.

ii. να αποδείξετε ότι $BK = \frac{B\Gamma}{4}$



Μονάδες $[(8+7)+(5+5)]=25$

74.

Θ Ε Μ Α Δ

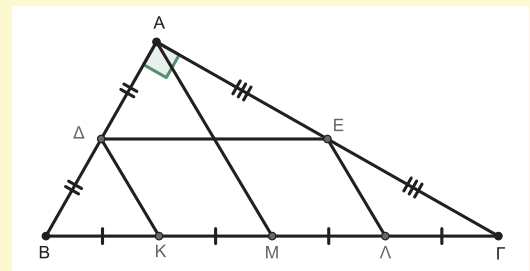
5.9

14888

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία K , M , Λ ώστε $BK=KM=M\Lambda=\Lambda\Gamma$. Αν τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $\Delta E \Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Το τετράπλευρο $K\Delta AM$ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του ισούται με $\frac{3}{4} B\Gamma$.



Μονάδες $(13+12)=25$

5.10 ΤΡΑΠΕΖΙΟ (3)

1.

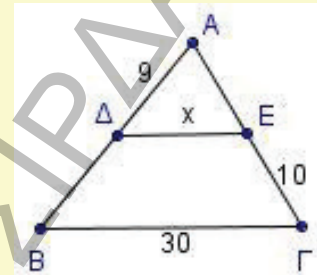
Θ Ε Μ Α Β

5.10

1612

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, $A\Delta = 9$, $E\Gamma = 10$ και $B\Gamma = 30$.

- Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο.
- Να υπολογίσετε το μήκος x του τμήματος ΔE .



Μονάδες $(9+8+8)=25$

2.

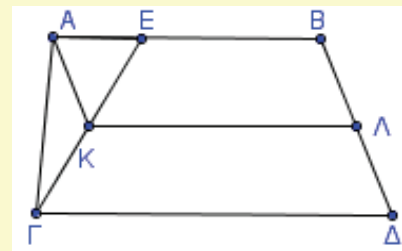
Θ Ε Μ Α Β

5.10

1644

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB=3$, $\Gamma\Delta=4$. Θεωρούμε σημείο E στην AB ώστε $AE=1$. Στο τραπέζιο $EB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα K και Λ , μέσα των $E\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

- Να υπολογίσετε τη διάμεσο $K\Lambda$ του τραπεζίου $EB\Gamma\Delta$.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.



Μονάδες $(13+12)=25$

3.

Θ Ε Μ Α Β

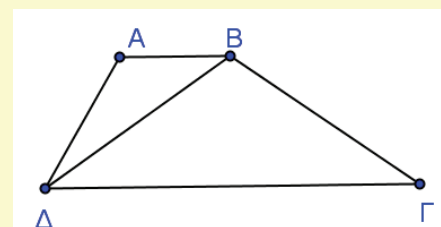
5.10

1650

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $B\Delta = B\Gamma$. Αν

$\Delta B\Gamma = 110^\circ$ και $A\Delta B = 25^\circ$, να υπολογίσετε:

- Τη γωνία Γ .
- Τη γωνία A .



Μονάδες $(11+14)=25$

5.10 ΤΡΑΠΕΖΙΟ (15)

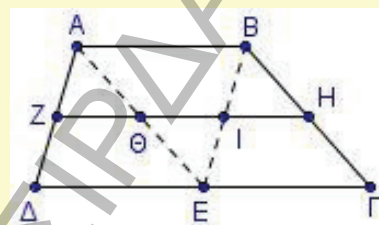
4.

Θ Ε Μ Α Δ

5.10

1711

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $\Gamma\Delta = 2AB$. Επίσης Z, H, E είναι τα μέσα των $A\Delta, B\Gamma$ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Ακόμη η ZH τέμνει τις AE, BE στα σημεία Θ, I αντίστοιχα.



- α. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Να δείξετε ότι τα σημεία Θ, I είναι μέσα των AE, BE αντίστοιχα.
- γ. Να δείξετε ότι $ZH = \frac{3}{2} AB$.

Μονάδες $(10+5+10)=25$

5.

Θ Ε Μ Α Δ

5.10

1715

Δίνεται ευθεία (ϵ) και δύο σημεία A, B εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην (ϵ) . Φέρουμε $A\Delta, B\Gamma$ κάθετες στην (ϵ) και M, N μέσα των $AB, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα.

- α. Αν τα A, B είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ϵ)
 - i. να εξετάσετε αν το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:
 - 1) $A\Delta < B\Gamma$
 - 2) $A\Delta = B\Gamma$.
 - ii. να εκφράσετε το τμήμα MN σε σχέση με τα τμήματα $A\Delta, B\Gamma$ στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.
- β. Αν η (ϵ) τέμνει το τμήμα AB στο μέσο του M , να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου $A\Gamma B\Delta$ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα M, N ταυτίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $\{[(4+4)+6]+(9+2)\}=25$

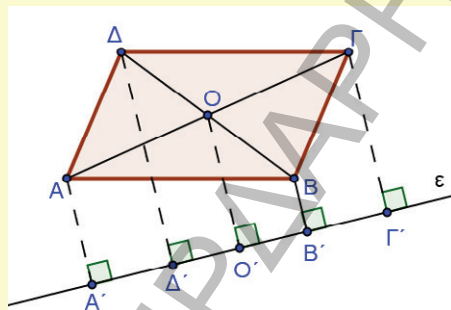
6.

Θ Ε Μ Α Δ

5.10

1718

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τις προβολές A', B', Γ', Δ' των κορυφών του A, B, Γ, Δ αντίστοιχα σε μια ευθεία ϵ .



- α.** Αν η ευθεία ϵ αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι $AA' = 3$, $BB' = 2$, $\Gamma\Gamma' = 5$, τότε:
- Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την ϵ είναι ίση με 4.
 - Να βρείτε την απόσταση $\Delta\Delta'$.
- β.** Αν η ευθεία ϵ διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$, $\Delta\Delta'$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $[(8+9)+8]=25$

7.

Θ Ε Μ Α Δ

5.10

1735

Θεωρούμε ευθεία (ϵ) και δύο σημεία A και B εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ϵ) έτσι ώστε, η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην (ϵ). Έστω A' και B' τα συμμετρικά σημεία των A και B αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ϵ).

- α.** Να αποδείξετε ότι $AA' \parallel BB'$.
- β.** Αν η μεσοκάθετος του AB τέμνει την ευθεία (ϵ) στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το K ανήκει και στη μεσοκάθετο του $A'B'$.
- γ.** Να βρείτε τη σχέση των ευθειών AB και (ϵ) ώστε το τετράπλευρο $ABB'A'$ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(6+10+9)=25$

8.

Θ Ε Μ Α Δ

5.10

1747

Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB . Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του E και τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα Δ και Γ αντίστοιχα.

- α.** Αν το σημείο E δεν είναι το μέσο του τόξου AB , να αποδείξετε ότι:
- Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.
 - $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$
- β.** Αν το σημείο E βρίσκεται στο μέσον του τόξου AB , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου $A\Delta\Gamma B$ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

Μονάδες $[(8+8)+9]=25$

9.

Θ Ε Μ Α Δ

5.10

1757

Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε $A = \Delta = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$ και $AB = \frac{1}{3}A\Delta$. Επιπλέον φέρουμε $BE \perp \Delta\Gamma$.

- α.** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο.
- β.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BEG είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
- γ.** Αν K, Λ είναι τα μέσα των BE και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η $A\Gamma$ διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος BK .

Μονάδες $(6+10+9)=25$

10.

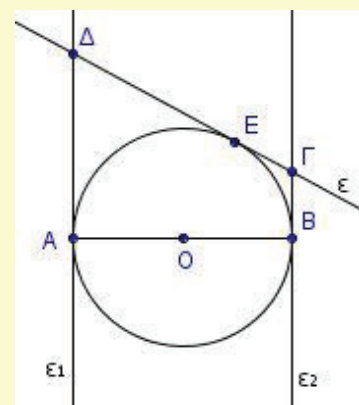
Θ Ε Μ Α Δ

5.10

1758

Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB . Θεωρούμε ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του E , η οποία τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

- α.** Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$
- β.** Το τρίγωνο $\Gamma O\Delta$ είναι ορθογώνιο.
- γ.** Να διερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ ανάλογα με τη θέση του σημείου E στο ημικύκλιο AB .



Μονάδες $(9+9+7)=25$

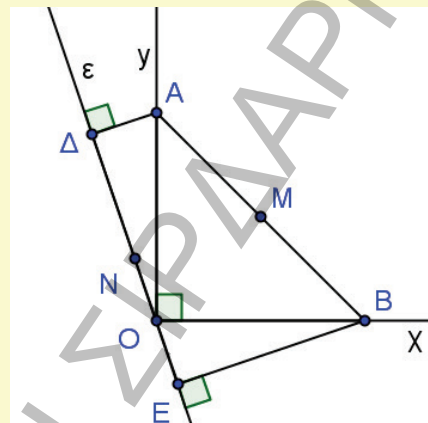
11.

Θ Ε Μ Α Δ

5.10

1778

Δίνεται ορθή γωνία $\chi O y = 90^\circ$ και A, B σημεία των ημιευθειών Oy, Ox με $OA = OB$. Η ευθεία (ε) διέρχεται από το O και αφήνει τις ημιευθείες Ox, Oy στο ίδιο ημιεπίπεδο. Η κάθετος από το σημείο A στην (ε) την τέμνει στο Δ και η κάθετος από το σημείο B στην (ε) την τέμνει στο E . Να αποδείξετε ότι:



α. Τα τρίγωνα $O\Delta\Delta$ και OEB είναι ίσα.

β. $AD + BE = DE$

γ. $MN = \frac{DE}{2}$, όπου MN το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των DE και AB .

δ. Το τρίγωνο ΔME είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Μονάδες $(7+7+7+4)=25$

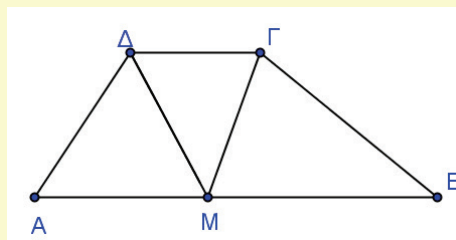
12.

Θ Ε Μ Α Δ

5.10

1815

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB = AD + B\Gamma$. Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την AB στο σημείο M , να αποδείξετε ότι:



α. Το τρίγωνο $A\Delta M$ είναι ισοσκελές.

β. Το τρίγωνο $M B \Gamma$ είναι ισοσκελές.

γ. Η ΓM είναι διχοτόμος της γωνίας Γ του τραπέζιου.

Μονάδες $(8+9+8)=25$

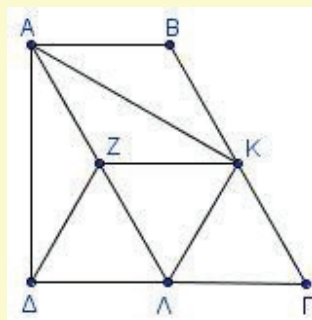
13.

Θ Ε Μ Α Δ

5.10

1821

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($A = \Delta = 90^\circ$) με $B\Gamma = \Gamma\Delta = 2AB$ και K, Λ τα μέσα των $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$. Η παράλληλη από το K προς την AB τέμνει την $A\Lambda$ στο Z . Να αποδείξετε ότι:



α. $B\Gamma = 2\Delta Z$.

β. Το τετράπλευρο $ZK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος.

γ. $\angle K\Lambda = 90^\circ$.

Μονάδες $(8+9+8)=25$

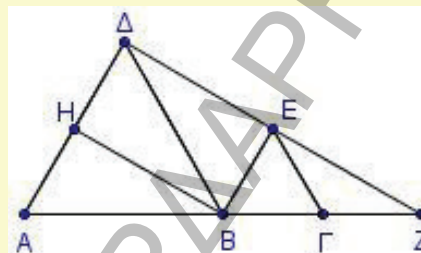
14.

Θ Ε Μ Α Δ

5.10

1829

Σε μια ευθεία (ε) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ έτσι ώστε $AB = 2B\Gamma$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$. Αν H είναι το μέσο του $A\Delta$ και η ευθεία ΔE τέμνει την (ε) στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι:



- α. Το τετράπλευρο $BH\Delta E$ είναι ορθογώνιο.
- β. Το τρίγωνο ΓZE είναι ισοσκελές.
- γ. Το τετράπλευρο $HE\Gamma A$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

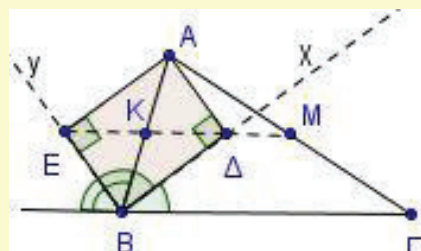
15.

Θ Ε Μ Α Δ

5.10

1838

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, η διχοτόμος του Bx της γωνίας B του τριγώνου $AB\Gamma$ και η διχοτόμος By της εξωτερικής γωνίας B . Αν Δ και E είναι οι προβολές της κορυφής A του τριγώνου $AB\Gamma$ στην Bx και By αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



- α. Το τετράπλευρο $A\Delta BE$ είναι ορθογώνιο.
- β. Η ευθεία $E\Delta$ είναι παράλληλη προς τη $B\Gamma$ και διέρχεται από το μέσο M της $A\Gamma$.
- γ. Το τετράπλευρο $KM\Gamma B$ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3a}{4}$, όπου $a = B\Gamma$.

Μονάδες $(7+10+8)=25$

16.

Θ Ε Μ Α Δ

5.10

1842

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Στην προέκταση της πλευράς AB παίρνουμε τμήμα $BE = AB$ και στην προέκταση της πλευράς $A\Delta$ τμήμα $\Delta Z = A\Delta$.

- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. Τα τετράπλευρα $B\Delta\Gamma E$ και $B\Delta Z\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμα.
 - ii. Τα σημεία E, Γ και Z είναι συνευθειακά.
- β. Αν K και Λ είναι τα μέσα των BE και ΔZ αντίστοιχα, τότε $K\Lambda \parallel \Delta B$ και $K\Lambda = \frac{3}{2} \Delta B$.

Μονάδες $[(7+9)+9]=25$

17.

Θ Ε Μ Α Δ

5.10

13519

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ με $AB > AD$. Στην AB θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $AE = AD$. Από το μέσο M της DE φέρουμε παράλληλη προς την $ΔΓ$ που τέμνει την $BΓ$ στο K .

- α. Να αποδείξετε $AM \perp DE$.
- β. Να αποδείξετε ότι $2MK = 2AB - AD$.
- γ. Φέρνουμε την EK που τέμνει την προέκταση της $ΔΓ$ στο Z .
Να αποδείξετε ότι $ΓZ = AB - AD$.

Μονάδες $(7+9+9)=25$

18.

Θ Ε Μ Α Δ

5.10

13742

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ με $AB=AG$ και M το μέσο της βάσης του $BΓ$. Φέρουμε $BK \perp BΓ$ έτσι ώστε $BK = AG$ (το σημείο K είναι στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A).

- α. Να αποδείξετε ότι $AM \parallel BK$ και $AB = BK$.
- β. Να δείξετε ότι η AK είναι διχοτόμος της γωνίας BAM .
- γ. Να αποδείξετε ότι $\widehat{BKA} = 45^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$.
- δ. Μπορεί το τετράπλευρο $ABKM$ να είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(8+5+6+6)=25$

5.11 ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟ (11)

1.

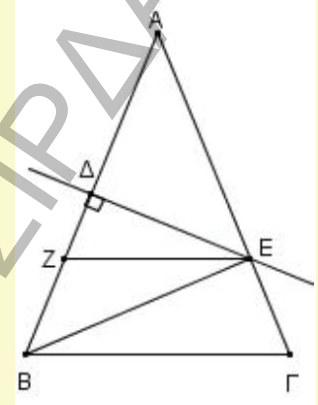
Θ Ε Μ Α Β

5.11

1529

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} < 90^\circ$. Στο μέσο Δ της πλευράς AB φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο E . Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Z .

- Να αποδείξετε ότι $AE = BE$.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma EZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Μονάδες $(15+10)=25$

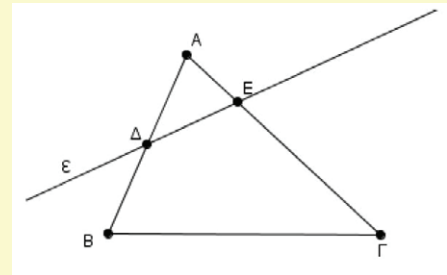
2.

Θ Ε Μ Α Β

5.11

1536

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ το μέσο της πλευράς AB . Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ϵ) που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ σε εσωτερικό της σημείο E . Η ευθεία (ϵ) χωρίζει το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε ένα τρίγωνο $A\Delta E$ κι σε ένα τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$.



- Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Ποιο πρέπει να είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(12+13)=25$

3.

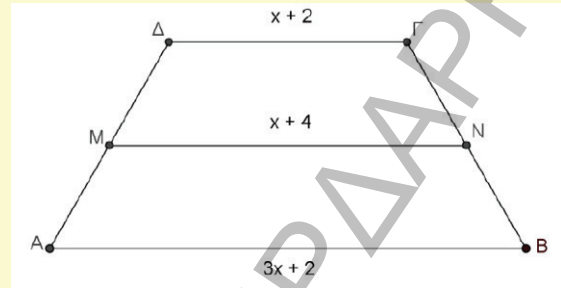
Θ Ε Μ Α Β

5.11

1550

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB > \Gamma\Delta$ και $AD = B\Gamma$.

- α. Αν τα μήκη των βάσεων είναι $AB = 3x + 2$, $\Gamma\Delta = x + 2$ και το μήκος της διαμέσου του τραπέζιου είναι $MN = x + 4$, τότε να δείξετε ότι $x = 2$.



- β. Αν η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.

Μονάδες $(12+13)=25$

4.

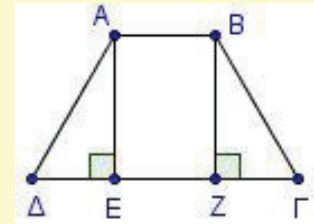
Θ Ε Μ Α Β

5.11

1563

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Φέρουμε τα ύψη του AE και BZ . Να αποδείξετε ότι:

- α. $AE = \Gamma Z$
β. $AZ = BE$



Μονάδες $(12+13)=25$

5.

Θ Ε Μ Α Β

5.11

1579

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$. Θεωρούμε τα σημεία E και Z πάνω στην AB έτσι ώστε $AE = EZ = ZB$ και έστω K το σημείο τομής των AZ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:

- α. $\Delta Z = \Gamma E$
β. Τα τρίγωνα EKZ και $\Delta K\Gamma$ είναι ισοσκελή.

Μονάδες $(13+12)=25$

6.

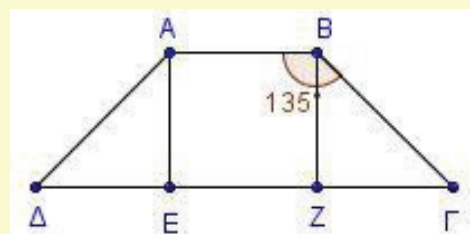
Θ Ε Μ Α Β

5.11

1629

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\Gamma\Delta > AB$ και $B = 135^\circ$. Από τις κορυφές A και B φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.
β. Να αποδείξετε ότι $AE = ED = BZ = \Gamma Z$.



Μονάδες $(10+15)=25$

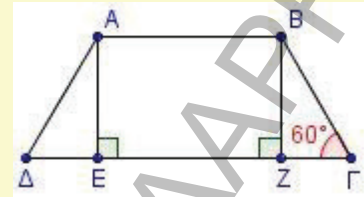
7.

Θ Ε Μ Α Β

5.11

1634

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB=6$, $B\Gamma=4$ και $\hat{\Gamma}=60^\circ$. Δίνονται επίσης τα ύψη AE και BZ από τις κορυφές A και B αντίστοιχα.



- α. Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$.
- β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $BZ\Gamma$ είναι ίσα.
- γ. Να υπολογίσετε τη περίμετρο του $AB\Gamma\Delta$.

Μονάδες $(6+10+9)=25$

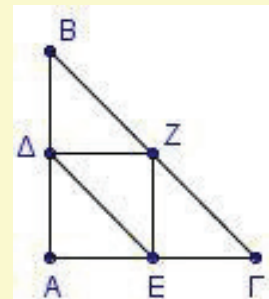
8.

Θ Ε Μ Α Β

5.11

1666

Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) θεωρούμε τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τετράπλευρο $AΕΖΔ$ είναι ορθογώνιο.
- β. Το τετράπλευρο $E\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες $(12+13)=25$

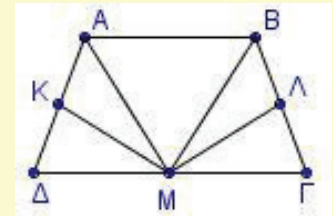
9.

Θ Ε Μ Α Β

5.11

1669

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $\Delta\Gamma$ και τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α. Τα τμήματα KM και ΛM είναι ίσα.
- β. Τα τμήματα AM και BM είναι ίσα.

Μονάδες $(12+13)=25$

10.

Θ Ε Μ Α Β

5.11

1694

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB=8$ και $\Delta\Gamma=12$. Αν AH και $B\Theta$ τα ύψη του τραπέζιου,

- α. να αποδείξετε ότι $\Delta H = \Theta\Gamma$.
- β. να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπέζιου.

Μονάδες $(12+13)=25$

11.

Θ Ε Μ Α Β

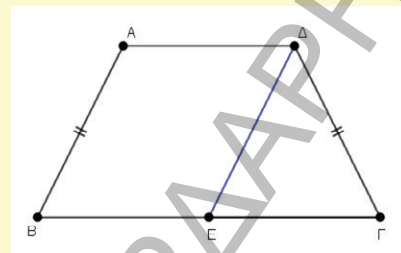
5.11

13497

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AD//BG$) με $B\Gamma > \Delta\Gamma$.

Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε σημείο E , τέτοιο ώστε $GE = \Gamma\Delta$.

- α.** Να αποδείξετε ότι η ΔE είναι διχοτόμος της $A\hat{\Delta}\Gamma$.
- β.** Αν $\hat{A}=120^\circ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισόπλευρο.



Μονάδες $(12+13)=25$

5.11 ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟ (23)

12.

Θ Ε Μ Α Δ

5.11

1722

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και ονομάζουμε Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της BA .

Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.
- β. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και BEZ είναι ίσα.
- γ. Η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων AE και $Z\Gamma$.
- δ. Το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες $(6+6+6+7)=25$

13.

Θ Ε Μ Α Δ

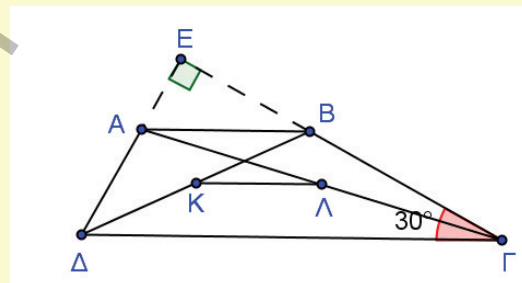
5.11

1736

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με τη γωνία Γ ίση με 30° και έστω K, Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔA και ΓB προεκτείνόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

- α. $AB = 2AE$
 - β. $K\Lambda = A\Delta$
 - γ. Σε ποια περίπτωση το $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο;
- Να αιτιολογήσετε τη απάντησή σας.



Μονάδες $(10+10+5)=25$

14.

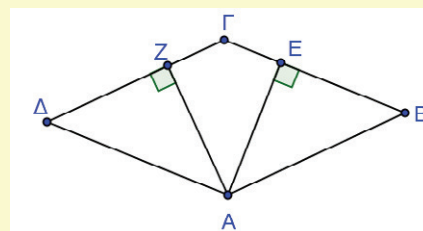
Θ Ε Μ Α Δ

5.11

1742

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος με $B \neq 60^\circ$. Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και $AE \perp \Gamma B$. Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο ZAE είναι ισοσκελές.
- β. Η ευθεία $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του ZE .
- γ. Αν M και N τα μέσα των πλευρών $A\Delta$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ZMNE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Μονάδες $(6+9+10)=25$

15.

Θ Ε Μ Α Δ

5.11

1755

Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $AB = A\Delta$.

- Να αποδείξετε ότι η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .
- Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $ABE\Delta$ να είναι ρόμβος.
- Αν επιπλέον είναι $B\hat{A}\Delta = 120^\circ$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο O , να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $EOB\Gamma$.

Μονάδες $(7+10+8)=25$

16.

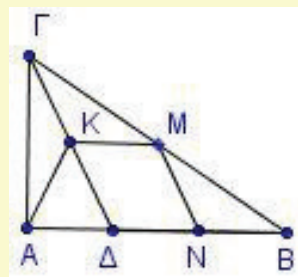
Θ Ε Μ Α Δ

5.11

1789

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB . Έστω K, M, N τα μέσα των $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$, $B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $KM\Delta N$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Το τετράπλευρο $AKMN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- Η διάμεσος του τραπέζιου $AKMN$ είναι ίση με $AB/2$.



Μονάδες $(8+9+8)=25$

17.

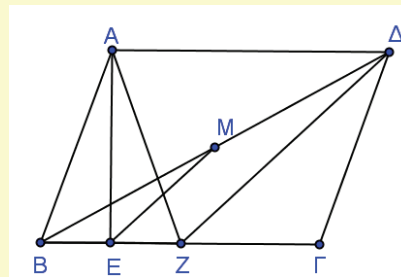
Θ Ε Μ Α Δ

5.11

1790

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με τη γωνία του B να είναι ίση με 70° και το ύψος του AE . Έστω Z σημείο της $B\Gamma$ ώστε $BE = EZ$.

- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZ\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου $AZ\Gamma\Delta$.
- Αν M το μέσο του $B\Delta$, να αποδείξετε ότι $EM = \frac{A\Gamma}{2}$.



Μονάδες $(8+9+8)=25$

18.

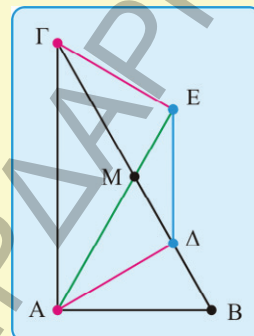
Θ Ε Μ Α Δ

5.11

1791

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και τη διάμεσό του AM . Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία AM , η οποία την τέμνει στο E . Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο.
- $ME = M\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$
- Το $A\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Μονάδες $(8+9+8)=25$

19.

Θ Ε Μ Α Δ

5.11

1797

- Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda M N$ είναι ρόμβος.
- Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα μέσα K, Λ, M, N των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το $AB\Gamma\Delta$ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

Μονάδες $(13+12)=25$

20.

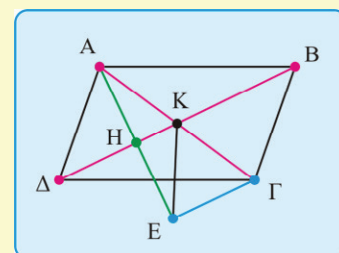
Θ Ε Μ Α Δ

5.11

1830

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και K το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε AH κάθετη στην $B\Delta$ και στην προέκταση της AH (προς το H) θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $AH = HE$. Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο AKE είναι ισοσκελές.
- Το τρίγωνο $A\epsilon\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
- Το τετράπλευρο $\Delta B\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Μονάδες $(7+9+9)=25$

21.

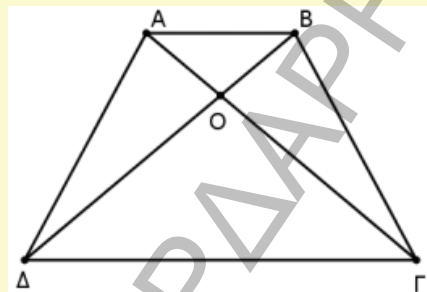
Θ Ε Μ Α Δ

5.11

1834

Στο διπλανό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύουν: $AD = B\Gamma$, $AG = B\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$.

- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AOB και ΔOG είναι ισοσκελή.
- β. Να αποδείξετε ότι $\Delta AB = AB\Gamma$.
- γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Μονάδες $(9+8+8)=25$

22.

Θ Ε Μ Α Δ

5.11

1841

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων AG και $B\Delta$. Φέρνουμε την AE κάθετη στη διαγώνιο $B\Delta$. Αν Z είναι το συμμετρικό του A ως προς τη διαγώνιο $B\Delta$, τότε να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές.
- β. $Z\Gamma = 2OE$
- γ. Το τετράπλευρο με κορυφές B, Δ, Z και Γ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες $(7+9+9)=25$

23.

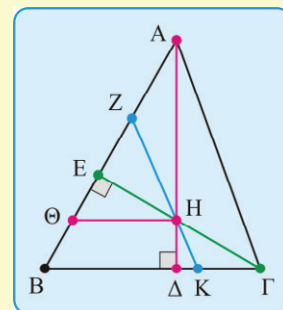
Θ Ε Μ Α Δ

5.11

1845

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B = 60^\circ$. Φέρνουμε τα ύψη AD και ΓE που τέμνονται στο H . Φέρνουμε KZ διχοτόμο της γωνίας EHA και ΘH κάθετο στο ύψος AD . Να αποδείξετε ότι:

- α. $ZH = 2ZE$
- β. Το τρίγωνο ΘZH είναι ισόπλευρο.
- γ. Το τετράπλευρο ΘHKB είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Μονάδες $(9+8+8)=25$

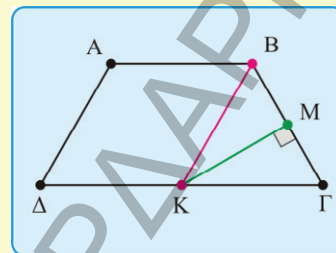
24.

Θ Ε Μ Α Δ

5.11

1853

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $B = 2\hat{\Gamma}$ και $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας B , η οποία τέμνει το $\Delta\Gamma$ στο K και η κάθετη από το K προς τη $B\Gamma$ το τέμνει στο M .



- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του $AB\Gamma\Delta$.
- β. Να αποδείξετε ότι:
 - i. Το τετράπλευρο $ABK\Delta$ είναι ρόμβος.
 - ii. Το σημείο M είναι το μέσο του $B\Gamma$.

Μονάδες $[10 + (8 + 7)] = 25$

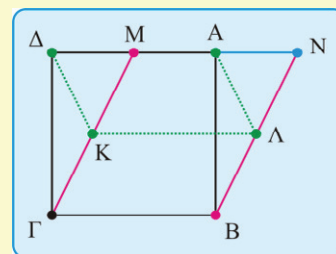
25.

Θ Ε Μ Α Δ

5.11

1854

Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και M το μέσο της πλευράς ΔA . Προεκτείνουμε το τμήμα ΔA (προς την πλευρά του A) κατά τμήμα $AN = \frac{A\Delta}{2}$. Φέρουμε τα τμήματα ΓM και BN και θεωρούμε τα μέσα τους K και Λ αντίστοιχα.



Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο $MNB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Το τετράπλευρο $A\Delta K\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.
- γ. Το τετράπλευρο $AMK\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες $(8 + 9 + 8) = 25$

26.

Θ Ε Μ Α Δ

5.11

1856

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > B\Gamma$ και $B < 90^\circ$ θεωρούμε σημείο Z στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) τέτοιο ώστε $\Gamma Z = B\Gamma$. Αν E είναι σημείο της AB , τέτοιο ώστε $E\Gamma = \Gamma B$, να αποδείξετε ότι:

- α. Η γωνία BEZ είναι ορθή.
- β. Το τετράπλευρο $AE\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- γ. Το τετράπλευρο $A\Gamma Z\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες $(8 + 8 + 9) = 25$

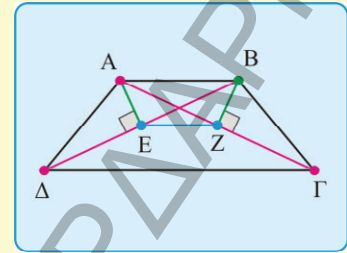
27.

Θ Ε Μ Α Δ

5.11

1861

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AD = B\Gamma = AB$. Φέρουμε τμήματα AE και BZ κάθετα στις διαγωνίες $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α. Τα σημεία Z και E είναι μέσα των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα.
- β. $AE = BZ$.
- γ. Το τετράπλευρο $AENZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- δ. Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .

Μονάδες $(5+8+7+5)=25$

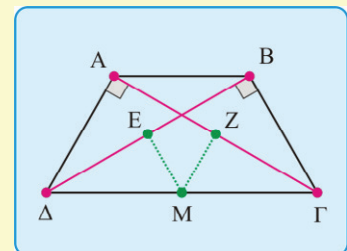
28.

Θ Ε Μ Α Δ

5.11

1867

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η $A\Gamma$ είναι κάθετη στην $A\Delta$ και η $B\Delta$ είναι κάθετη στη $B\Gamma$.



Θεωρούμε τα μέσα M, E και Z των $\Gamma\Delta, B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. $ME = MZ$.
- β. Η MZ είναι κάθετη στην $A\Gamma$.
- γ. Τα τρίγωνα $M\Delta E$ και $MZ\Gamma$ είναι ίσα.
- δ. Η OM είναι μεσοκάθετος του EZ .

Μονάδες $(6+6+7+6)=25$

29.

Θ Ε Μ Α Δ

5.11

1884

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και AD διάμεσος. Στο τμήμα AD θεωρούμε τυχαίο σημείο K από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα KZ και KE κάθετα στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $KB\Gamma$ και KZE είναι ισοσκελή.

β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ZE\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ. Ένας μαθητής στο α) i. ερώτημα έδωσε την εξής απάντηση:

«Το τμήμα AD είναι διάμεσος στη βάση του ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$ και μεσοκάθετος του $B\Gamma$. Οπότε το τρίγωνο $BK\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα $\triangle ABK$ και $\triangle AK\Gamma$ έχουν

1. $BK = K\Gamma$

2. $\angle BAK = \angle K\Gamma A$ επειδή AK διχοτόμος της γωνίας A

3. $\angle ABK = \angle K\Gamma A$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.»

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία- Πλευρά-Γωνία διατηρώντας τις πλευρές BK και $K\Gamma$.

Μονάδες $(8+10+7)=25$

30.

Θ Ε Μ Α Δ

5.11

1885

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του AH . Αν Δ, E και Z είναι τα μέσα των $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α. το τετράπλευρο ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β. οι γωνίες $H\Delta Z$ και HEZ είναι ίσες.

γ. οι γωνίες $E\Delta Z$ και EHZ είναι ίσες.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

31.

Θ Ε Μ Α Δ

5.11

1893

Έστω ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ > ΒΓ$ τέτοιο, ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία 60° . Από το $Δ$ φέρουμε $ΔΜ$ κάθετη στην $ΑΓ$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. το σημείο $Μ$ είναι μέσο του $ΑΟ$ όπου $Ο$ το κέντρο του ορθογωνίου.

ii. $ΑΜ = \frac{1}{4} ΑΓ$

β. Αν από το $Γ$ φέρουμε $ΓΝ$ κάθετη στη $ΒΔ$, να αποδείξετε ότι το $ΜΝΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες $[(8+7)+10]=25$

32.

Θ Ε Μ Α Δ

5.11

13539

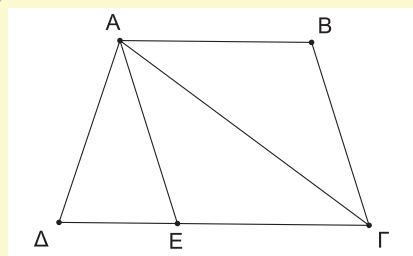
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ // ΓΔ$ και $\hat{A} = 108^\circ$. Στη βάση $ΓΔ$ θεωρούμε σημείο $Ε$, ώστε οι $ΑΓ$, $ΑΕ$ να τριχοτομούν τη γωνία $\hat{A}$.

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $ΑΔΕ$.

β. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $ΑΔΕ$ είναι ισοσκελές.

ii. Το τετράπλευρο $ΑΒΓΕ$ είναι ρόμβος.



Μονάδες $[10+(5+10)]=25$

33.

Θ Ε Μ Α Δ

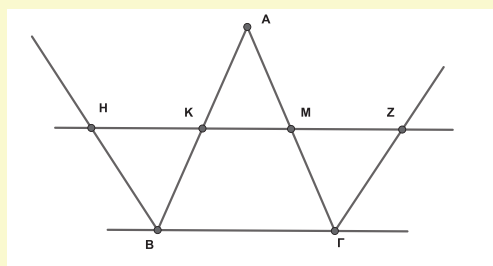
5.11

13838

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ=ΑΓ$), με $Κ, Μ$ τα μέσα των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $Κ$ και $Μ$ τέμνει τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών $Β$ και $Γ$ στα σημεία $Η$ και $Ζ$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΚΜΓΒ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΒΓΖΗ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Μονάδες $(11+14)=25$

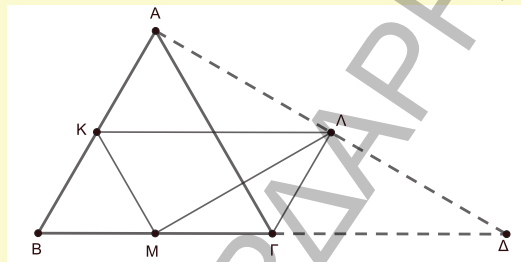
34.

Θ Ε Μ Α Δ

5.11

14882

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Αν M , K και Λ είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, AB και $A\Delta$ αντίστοιχα τότε:



α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $BA\Delta$.

β. Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τετράπλευρο $K\Lambda\Gamma M$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή.
- ii. Το τρίγωνο $KM\Lambda$ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες $[7+(8+10)]=25$

Κεφάλαιο

6ο

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

B-Δ 54

6.1 Εισαγωγικά - Ορισμοί.

6.2 Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης

6.3 Γωνία χορδής και εφαπτομένης

6.4 Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στον κύκλο Τόξο κύκλου που δέχεται γνωστή γωνία

6.5 Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο

6.6 Το εγγράψιμο τετράπλευρο

6.7 Γεωμετρικοί τόποι και γεωμετρικές κατασκευές με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων. (της απόδειξης του θεωρήματος που αναφέρεται στον εγγεγραμμένο κύκλο τριγώνου).

4.6 Άθροισμα γωνιών τριγώνου.

4.7 Γωνίες με πλευρές κάθετες (εκτός της απόδειξης του θεωρήματος και του πορίσματος)

4.8 Άθροισμα γωνιών κυρτού n-γώνου (Εκτός της απόδειξης του Πορίσματος)

ΘΕΜΑΤΑ B 25

6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6
1	14	6	0	2	2

B 25

ΘΕΜΑΤΑ Δ 29

6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6
0	7	3	0	4	15

B 29

Κεφάλαιο

6ο

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

6.1 ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ-ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ-ΟΡΙΣΜΟΙ (1)

1.

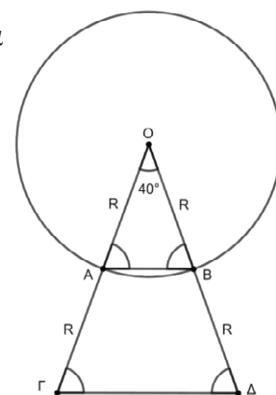
Θ Ε Μ Α Β

6.1

13687

Σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα R θεωρούμε επίκεντρη γωνία $\widehat{AOB} = 40^\circ$. Προεκτείνουμε τις ακτίνες OA και OB κατά τμήματα AG και BD αντίστοιχα, έτσι ώστε $AG = OA$ και $BD = OB$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

- α. Να αποδείξετε ότι $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 70^\circ$.
- β. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{O\Gamma\Delta}$ και $\widehat{O\Delta\Gamma}$.
- γ. Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$.



Μονάδες $(10+10+5)=25$

6.2 ΣΧΕΣΗ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗΣ ΕΠΙΚΕΝΤΡΗΣ (14)

1.

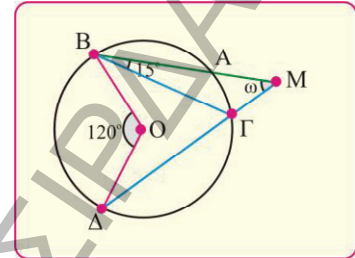
Θ Ε Μ Α Β

6.2

1580

Στο διπλανό σχήμα η επίκεντρη γωνία είναι 120° και η γωνία $\Gamma Β Α$ είναι 15° .

- Να υπολογίσετε τη γωνία $ΒΓΔ$.
- Να αποδείξετε ότι η γωνία ω είναι 45° .



Μονάδες $(12+13)=25$

2.

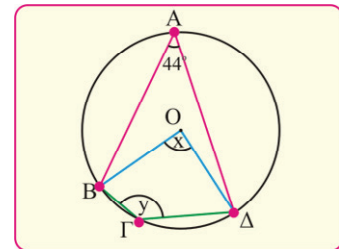
Θ Ε Μ Α Β

6.2

1581

Σε κύκλο κέντρου O δίνονται οι χορδές AB και $AΔ$ τέτοιες ώστε η γωνία $ΒΑΔ$ να είναι 44° . Θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου και σχηματίζουμε το τετράπλευρο $ΒΓΔΟ$.

- Να υπολογίσετε τη γωνία x .
- Να αποδείξετε ότι η γωνία y είναι 136° .



Μονάδες $(12+13)=25$

3.

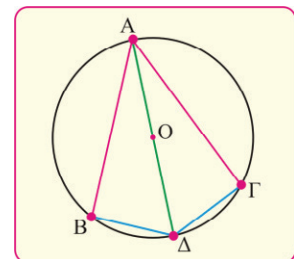
Θ Ε Μ Α Β

6.2

1663

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Αν η διάμετρος $AΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΒΑΓ$, να αποδείξετε ότι:

- Τα τόξα $BΔ$ και $ΔΓ$ είναι ίσα.
- Τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΔ$ είναι ίσα.



Μονάδες $(10+15)=25$

4.

Θ Ε Μ Α Β

6.2

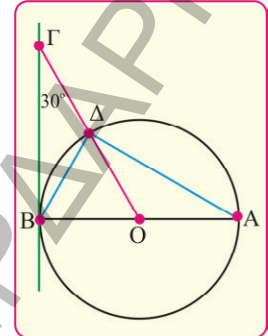
1665

Θεωρούμε κύκλο (O, ρ) και διάμετρό του AB . Στην εφαπτομένη του κύκλου στο B θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε, η γωνία BGO να είναι ίση με 30° .

Αν η OG τέμνει τον κύκλο στο Δ να αποδείξετε ότι:

α. $OG = 2OA$.

β. $BG = A\Delta$.



Μονάδες $(12+13)=25$

5.

Θ Ε Μ Α Β

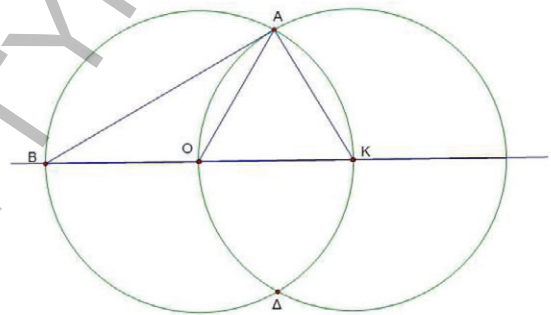
6.2

1673

Δίνονται δυο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) με $OK = \rho$, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και Δ .

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο.

β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BAK .



Μονάδες $(10+15)=25$

6.

Θ Ε Μ Α Β

6.2

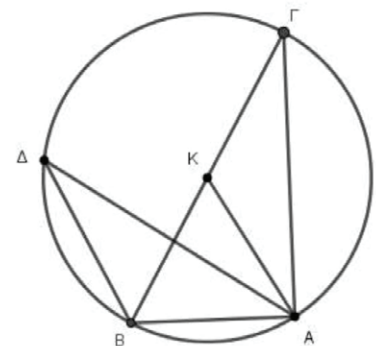
1696

Έστω κύκλος (K, ρ) , μια διάμετρός του $B\Gamma$ και χορδή του $BA = \rho$. Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των B και Γ , όπως στο σχήμα που ακολουθεί,

α. να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BKA είναι ισόπλευρο.

β. να υπολογίσετε την γωνία $B\Delta A$.

γ. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



Μονάδες $(7+9+9)=25$

7.

Θ Ε Μ Α Β

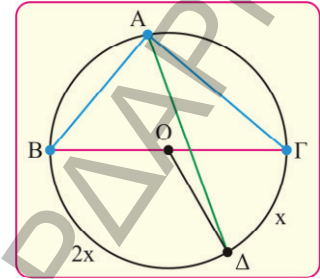
6.2

1703

Έστω κύκλος κέντρου O και διάμετρος του $B\Gamma$. Θεωρούμε σημεία A και Δ του κύκλου εκατέρωθεν της $B\Gamma$, τέτοια ώστε το τόξο $B\Delta$ να είναι διπλάσιο του τόξου $\Delta\Gamma$.

Να υπολογίσετε:

- το μέτρο x του τόξου $\Gamma\Delta$.
- τη γωνία $BO\Delta$.
- τη γωνία $B\Delta\Delta$.



Μονάδες $(8+9+8)=25$

8.

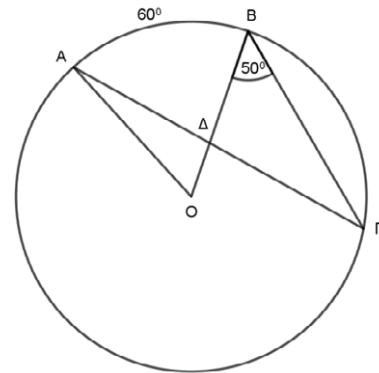
Θ Ε Μ Α Β

6.2

12638

Στον κύκλο του σχήματος, το O είναι το κέντρο του, το τόξο AB ισούται με 60° και η γωνία B ισούται με 50° . Αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:

- πόσες μοίρες είναι η γωνία Γ .
- πόσες μοίρες είναι η γωνία $A\Delta O$.



Μονάδες $(10+15)=25$

9.

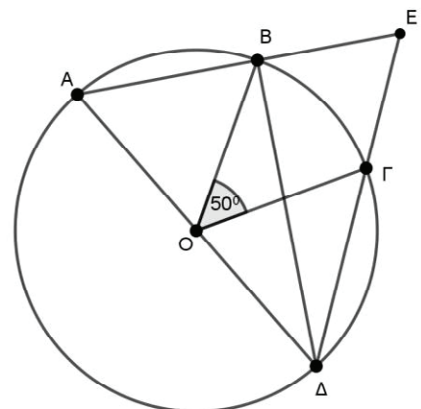
Θ Ε Μ Α Β

6.2

12642

Σε κύκλο με κέντρο το O , παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ και Δ , ώστε η $A\Delta$ να είναι διάμετρος και η γωνία $BO\Gamma$ να ισούται με 50° . Αν η προέκταση της AB προς το B , τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ προς το Γ στο E , αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:

- το μέτρο της γωνίας $B\Delta\Gamma$.
- το μέτρο της γωνία $A\Delta\Delta$.



Μονάδες $(10+15)=25$

10.

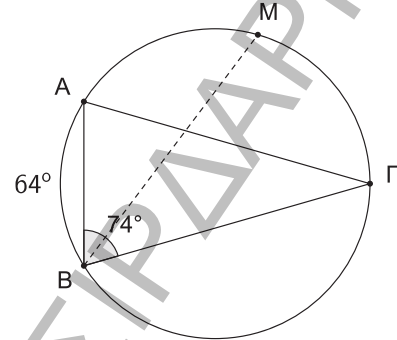
Θ Ε Μ Α Β

6.2

13441

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο με $\widehat{B} = 74^\circ$. Το μέτρο του τόξου AB που δεν περιέχει το σημείο Γ ισούται με 64° και M είναι το μέσο του τόξου $A\Gamma$.

- Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{\Gamma}$ και $\widehat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Ποιο είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις πλευρές του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- Να αποδείξετε ότι η BM είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$.



Μονάδες $(12+8+5)=25$

11.

Θ Ε Μ Α Β

6.2

13740

Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε μια τυχαία χορδή του AB , την οποία προεκτείνουμε προς το μέρος του B κατά ίσο τμήμα $B\Gamma$. Φέρουμε κάθετη στην $A\Gamma$ στο σημείο της B που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ . Να αποδείξετε ότι:

- $\Delta A = \Delta \Gamma$.
- Η $A\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου.

Μονάδες $(12+13)=25$

12.

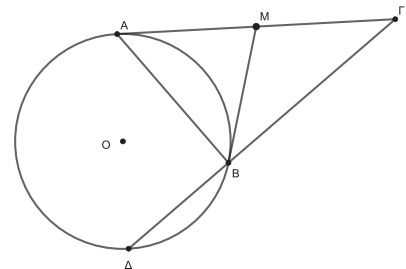
Θ Ε Μ Α Β

6.2

13747

Από σημείο M εξωτερικό ενός κύκλου κέντρου O φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB . Προεκτείνουμε το τμήμα AM προς το μέρος του M και παίρνουμε τμήμα $M\Gamma = AM$. Από το σημείο Γ φέρουμε την τέμνουσα $\Gamma B\Delta$ του κύκλου. Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
- Τα σημεία A και Δ είναι αντιδιαμετρικά.



Μονάδες $(13+12)=25$

13.

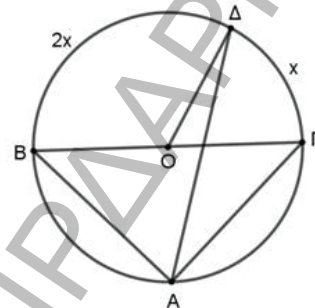
Θ Ε Μ Α Β

6.2

13753

Δίνεται κύκλος (O, ρ) με διάμετρο $B\Gamma$. Έστω A και Δ σημεία του κύκλου τα οποία βρίσκονται σε διαφορετικά ημικύκλια ως προς τη διάμετρο $B\Gamma$. Τα μέτρα των τόξων $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ είναι $2x$ και x αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το μέτρο:

- της γωνίας BAG .
- x του τόξου $\Gamma\Delta$.
- της γωνίας $BO\Delta$.



Μονάδες $(7+8+10)=25$

14.

Θ Ε Μ Α Β

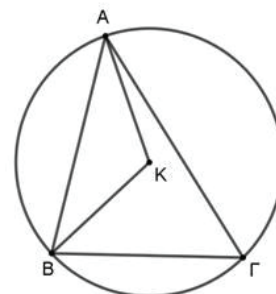
6.2

13756

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, ρ) .

Να αποδείξετε ότι:

- $\widehat{AKB} = 2 \widehat{A\Gamma B}$.
- το τρίγωνο AKB είναι ισοσκελές.
- $\widehat{KAB} + \widehat{A\Gamma B} = 90^\circ$.



Μονάδες $(7+5+13)=25$

6.2 ΣΧΕΣΗ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗΣ ΕΠΙΚΕΝΤΡΗΣ (7)

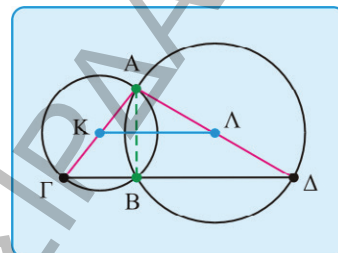
15.

Θ Ε Μ Α Δ

6.2

1717

Δύο κύκλοι (K, ρ) , (Λ, R) τέμνονται σε δύο σημεία A, B . Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του A στους δύο κύκλους, τότε να αποδείξετε ότι:



- $\alpha.$ $\angle AB\Gamma = 90^\circ$
- $\beta.$ τα σημεία Γ, B, Δ είναι συνευθειακά.
- $\gamma.$ το τετράπλευρο $K\Lambda\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.

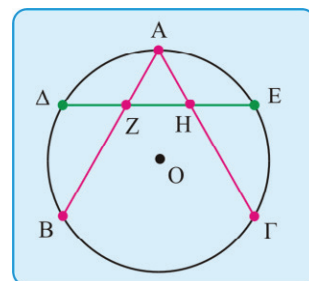
16.

Θ Ε Μ Α Δ

6.2

1739

Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε τα ίσα τόξα AB και AG , το καθένα ίσο με 120° . Έστω Δ και E τα μέσα των τόξων AB και AG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- $\alpha.$ Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
- $\beta.$ Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και AHE είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους.
- $\gamma.$ Η χορδή DE τριχοτομείται από τις χορδές AB και AG .

Μονάδες $(8+10+7)=25$

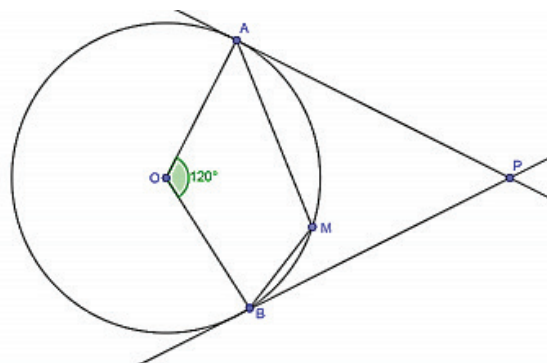
17.

Θ Ε Μ Α Δ

6.2

1768

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και μια επίκεντρη γωνία $\angle AOB$ ίση με 120° . Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B τέμνονται στο P . Θεωρούμε σημείο M του τόξου AB και φέρουμε τις χορδές AM και BM . Να αποδείξετε ότι:



- $\alpha.$ Το τρίγωνο APB είναι ισόπλευρο.
- $\beta.$ $\angle MAB + \angle MBA = 60^\circ$.
- $\gamma.$ Για ποια θέση του M είναι $AM \perp BP$;

Μονάδες $(8+8+9)=25$

18.

Θ Ε Μ Α Δ

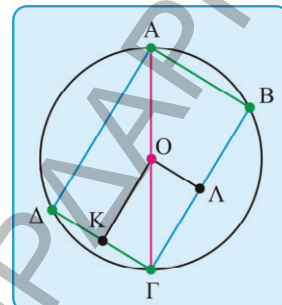
6.2

1848

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και $ΑΓ$ μια διάμετρος του. Θεωρούμε τις χορδές $ΑΔ = ΒΓ$. Έστω K και $Λ$ τα μέσα των χορδών $ΔΓ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- Οι χορδές $ΑΒ$ και $ΔΓ$ είναι παράλληλες.
- Το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο.
- Η $ΒΔ$ είναι διάμετρος του κύκλου.
- Το τετράπλευρο $ΟΛΓΚ$ είναι ορθογώνιο.



Μονάδες $(6+6+7+6)=25$

19.

Θ Ε Μ Α Δ

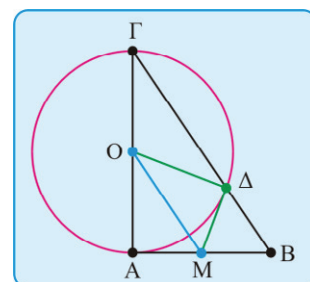
6.2

1883

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $ΓΑΒ$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Με διάμετρο την πλευρά του $ΑΓ$ φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα $ΒΓ$ στο $Δ$. Από το $Δ$ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την $ΑΒ$ στο $Μ$.

Να αποδείξετε ότι:

- $\hat{\Gamma\Delta\Delta} = \hat{B}$.
- $\hat{M\Delta B} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ και το τρίγωνο ΔMB είναι ισοσκελές.
- Το M είναι το μέσο του $ΑΒ$.



Μονάδες $(9+9+7)=25$

20.

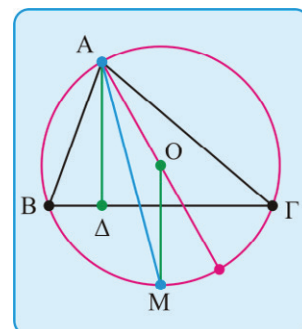
Θ Ε Μ Α Δ

6.2

1892

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ < ΑΓ$, εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O . Θεωρούμε το μέσο M του τόξου $ΒΓ$ το οποίο αντιστοιχεί σε κυρτή επίκεντρη γωνία και το ύψος $ΑΔ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$. Να αποδείξετε ότι:

- $ΑΜ$ διχοτόμος της γωνίας $\Delta ΑΟ$.
- $\angle ΟΑΓ = \angle ΔΑΒ$
- $\angle ΑΟ = B - \hat{\Gamma}$



Μονάδες $(8+9+8)=25$

21.

Θ Ε Μ Α Δ

6.2

12419

Δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, r) , με $R > r$, τέμνονται στα σημεία A και B . Από το σημείο A φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διάκεντρο των κύκλων, η οποία τέμνει τους κύκλους (K, R) και (Λ, r) στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. $\Gamma\Delta = 2K\Lambda$

β. Τα σημεία B και Γ είναι αντιδιαμετρικά.

Μονάδες $(15+10)=25$

6.3 ΓΩΝΙΑ ΧΟΡΔΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ (6)

1.

Θ Ε Μ Α Β

6.3

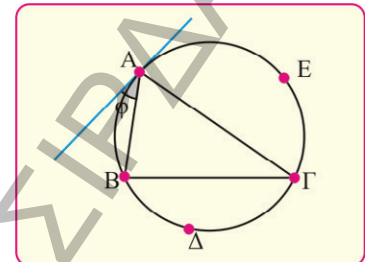
1561

Στο διπλανό σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με την πλευρά ΑΒ.

Αν το μέτρο του τόξου ΒΔΓ είναι 160°

α. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

β. να βρείτε το μέτρο του τόξου ΑΕΓ.



Μονάδες $(18+7)=25$

2.

Θ Ε Μ Α Β

6.3

1626

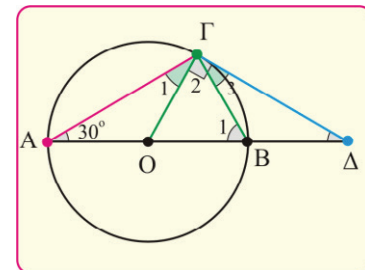
Δίνεται κύκλος (Ο, R) διαμέτρου ΑΒ, και χορδή ΑΓ τέτοια ώστε

$\hat{BAG} = 30^\circ$. Στο σημείο Γ φέρουμε την εφαπτομένη του

κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου ΑΒ (προς το Β) στο σημείο Δ.

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΟΓΔ.

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές.



Μονάδες $(12+13)=25$

3.

Θ Ε Μ Α Β

6.3

1672

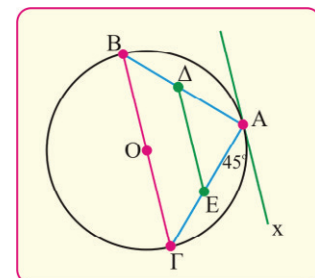
Σε σημείο Α ενός κύκλου, φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου Αχ

και τη χορδή ΑΓ που σχηματίζει με την εφαπτομένη γωνία 45° .

Φέρουμε τη διάμετρο ΓΒ και μια παράλληλη ευθεία στη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε.

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΓ.

β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Μονάδες $(10+15)=25$

4.

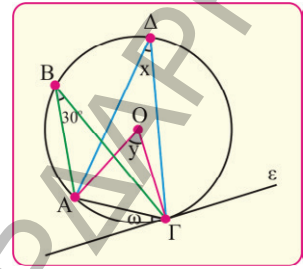
Θ Ε Μ Α Β

6.3

1695

Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου (O, ρ) στο σημείο Γ .

- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες χ , γ και ω δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.
- β. Να βρείτε το είδος του τριγώνου OAG ως προς τις πλευρές.



(Μονάδες (15+10)=25)

5.

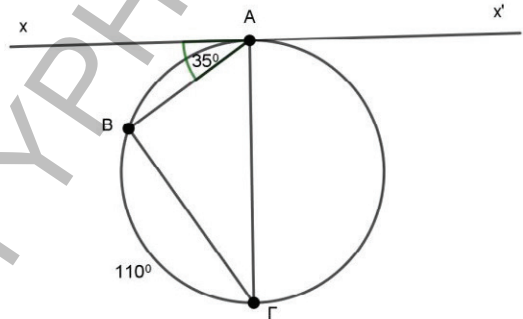
Θ Ε Μ Α Β

6.3

12637

Στο παρακάτω σχήμα η xx' είναι εφαπτομένη του κύκλου στο A και επιπλέον ισχύουν: $\widehat{BAx} = 35^\circ$ και $\widehat{B\Gamma} = 110^\circ$.

- α. Ποιό είναι το μέτρο της γωνίας Γ ;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Μονάδες (12+13)=25

6.

Θ Ε Μ Α Β

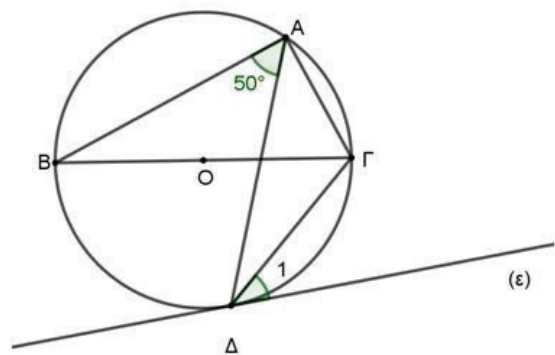
6.3

13754

Δίνεται κύκλος (O, ρ) με διάμετρο $B\Gamma$ και τα σημεία A, Δ του κύκλου εκατέρωθεν της διαμέτρου $B\Gamma$ έτσι ώστε $\widehat{BA\Delta} = 50^\circ$. Φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε) στον κύκλο στο σημείο Δ .

Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας :

- α. $\angle BAG$.
- β. $\angle B\Gamma\Delta$.
- γ. $\angle \Delta_1$.



Μονάδες (6+9+10)=25

6.3 ΓΩΝΙΑ ΧΟΡΔΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ (3)

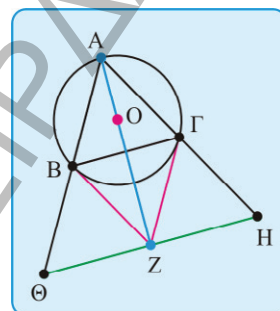
8.

Θ Ε Μ Α Δ

6.3

1720

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα ρ . Τα τμήματα ΓZ και BZ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία Γ και B αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΘH είναι κάθετο στο τμήμα AZ στο Z , να αποδείξετε ότι:



- α. Το τρίγωνο $ZB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
- β. Το τετράπλευρο $A\Gamma ZB$ είναι ρόμβος.
- γ. Το τετράπλευρο $B\Gamma H\Theta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο,

Μονάδες $(7+8+10)=25$

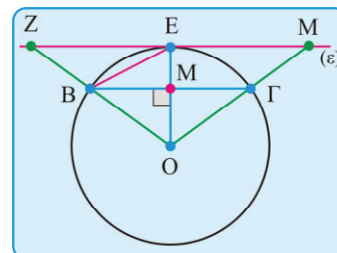
9.

Θ Ε Μ Α Δ

6.3

1772

Έστω κύκλος (O, ρ) και E το μέσον του τόξου του $B\Gamma$. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στο κύκλο στο E . Οι προεκτάσεις των $OB, O\Gamma$ τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Z και H αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α. $B\Gamma \parallel ZH$
- β. $OZ = OH$
- γ. Αν B το μέσον του OZ
 - i. να αποδείξετε ότι $BEZ = \frac{ZO H}{4}$.
 - ii. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ZOH .

Μονάδες $[5+5+(8+7)]=25$

10.

Θ Ε Μ Α Δ

6.3

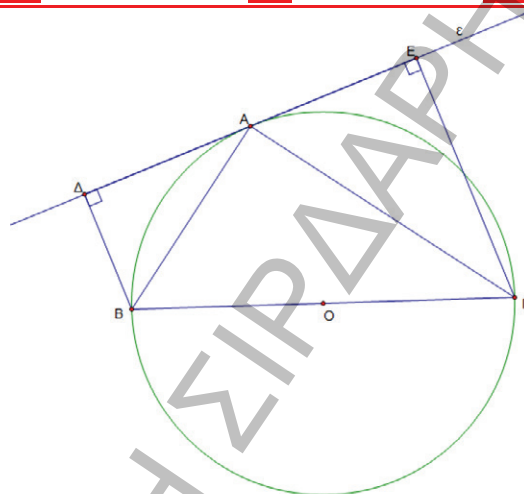
1809

Θεωρούμε κύκλο κέντρου O , με διάμετρο $BΓ$.

Από σημείο A του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη (ϵ) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ABΓ$.

Από τα σημεία B και $Γ$ φέρουμε τα τμήματα $ΒΔ$ και $ΓΕ$ κάθετα στην ευθεία (ϵ).

- α.** Να αποδείξετε ότι $ΒΑ$ και $ΓΑ$ είναι διχοτόμοι των γωνιών $ΔΒΓ$ και $ΕΓΒ$ αντίστοιχα.
- β.** Αν AZ είναι ύψος του τριγώνου $ABΓ$, να αποδείξετε ότι $ΑΔ=ΑΕ=ΑΖ$.
- γ.** Να αποδείξετε ότι $ΒΔ+ΓΕ=ΒΓ$.



Μονάδες $(8+8+9)=25$

6.5 ΤΟ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ (2)

1.

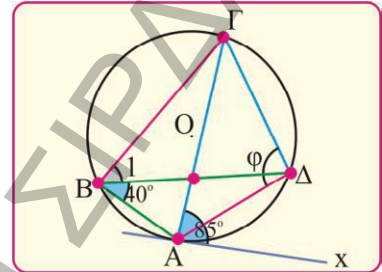
Θ Ε Μ Α Β

6.5

1530

Στο διπλανό σχήμα η Ax είναι εφαπτομένη του κύκλου (O, ρ) σε σημείο του A και επιπλέον $\angle Ax\Gamma = 85^\circ$ και $\angle B\hat{A} = 40^\circ$.

- α. Να αποδείξετε ότι $B_1 = 45^\circ$.
- β. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\phi}$.



Μονάδες $(10+15)=25$

2.

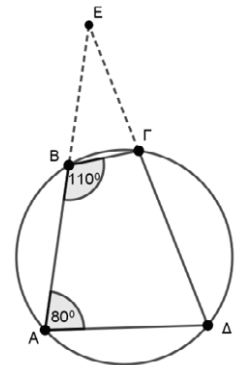
Θ Ε Μ Α Β

6.5

12643

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι πλευρές του AB και $\Delta\Gamma$ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο E . Αν η γωνία A του τετραπλεύρου ισούται με 80° και η γωνία B ισούται με 110° , να υπολογίσετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

- α. το μέτρο της γωνία $E\Gamma B$.
- β. το μέτρο της γωνία BEG .



Μονάδες $(12+13)=25$

6.5 ΤΟ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ (4)

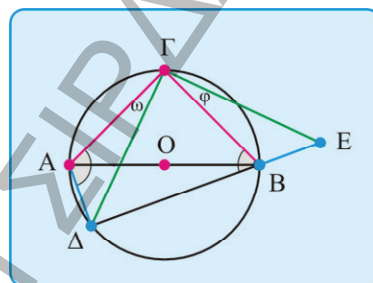
3.

Θ Ε Μ Α Δ

6.5

1712

Δίνεται κύκλος με κέντρο O , και έστω AB μια διάμετρος του, Γ το μέσο του ενός ημικυκλίου του και Δ τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της ΔB (προς το B) θεωρούμε σημείο E ώστε $BE=AD$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $\Delta\Delta\Gamma$ και $B\Gamma E$ είναι ίσα.

ii. Η $\Gamma\Delta$ είναι κάθετη στην ΓE .

β. Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι το αντιδιαμετρικό του Γ , η ΓE είναι εφαπτομένη του κύκλου.

Μονάδες $[(8+8)+9]=25$

4.

Θ Ε Μ Α Δ

6.5

1897

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) . Έστω σημείο Δ του τόξου AB τέτοιο ώστε $\Delta B \perp B\Gamma$.

α. Να αποδείξετε ότι $A\Delta \perp A\Gamma$.

β. Έστω H το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta B H$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Αν M το μέσον της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $OM=2 AH$.

Μονάδες $(8+9+8)=25$

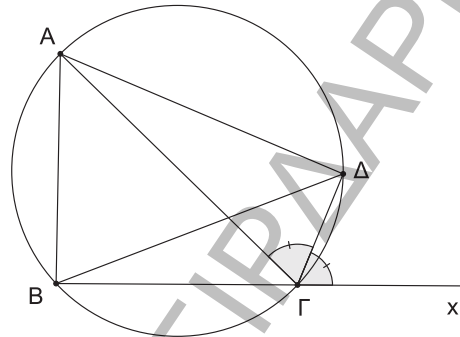
5.

Θ Ε Μ Α Δ

6.5

13444

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι διαγώνιοί του $A\Gamma$ και $B\Delta$. Η γωνία $\Delta\hat{\Gamma}x$ είναι εξωτερική γωνία του τετραπλεύρου και η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Gamma}x$.



- α. Να αποδείξετε ότι $B\hat{A}\Delta = \frac{1}{2} A\hat{\Gamma}x$.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές και να προσδιορίσετε τις ίσες πλευρές του.
- γ. Αν η $A\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $A\hat{\Gamma}B$ και $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι συμπληρωματικές.

Μονάδες $(10+10+5)=25$

6.

Θ Ε Μ Α Δ

6.5

13840

Δίνεται κύκλος (O, R) και μία ευθεία $x'x$ η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο A . Θεωρούμε τυχαίο σημείο M της ημιευθείας Ax . Αν για κάποιο σημείο B του κύκλου ισχύει η σχέση $MA = MB$, να αποδείξετε ότι:

- α. το MB είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O, R) .
- β. η διχοτόμος της γωνίας BMx είναι κάθετη στη MO .
- γ. το τετράπλευρο $AOBM$ είναι εγγράψιμο.
- δ. το ευθύγραμμο τμήμα OB τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας BMx .

Μονάδες $(7+6+6+6)=25$

6.6 ΤΟ ΕΓΓΡΑΨΙΜΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ (2)

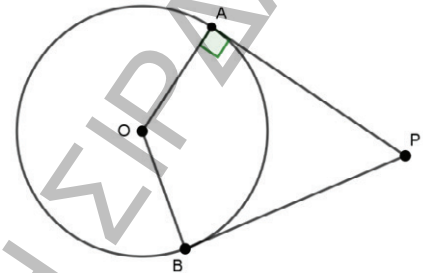
1.

Θ Ε Μ Α Β

6.6

12641

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα 4 cm . Από σημείο P εκτός του κύκλου φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB προς τον κύκλο. Επίσης η γωνία APB ισούται με 60° .



- α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $PAOB$ είναι εγγράψιμο.
- β. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας APO .
- γ. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος OP .

Μονάδες $(7+9+9)=25$

2.

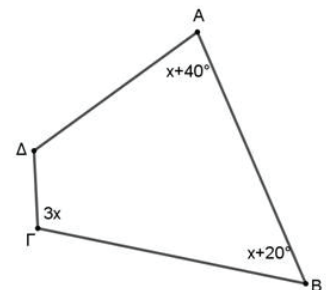
Θ Ε Μ Α Β

6.6

13818

Δίνεται το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ το οποίο είναι εγγράψιμο. Οι γωνίες A, B, Γ έχουν αντίστοιχα μέτρα $x + 40^\circ, x + 20^\circ, 3x$.

Να υπολογίσετε :



- α. πόσες μοίρες είναι το x .
- β. τα μέτρα των γωνιών του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

Μονάδες $(12+13)=25$

6.6 ΤΟ ΕΓΓΡΑΨΙΜΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ (15)

3.

Θ Ε Μ Α Δ

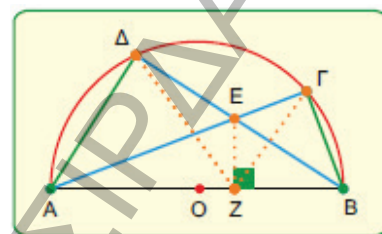
6.6

1769

Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου AB και δυο χορδές του AG και BD , οι οποίες τέμνονται στο σημείο E . Φέρουμε $EZ \perp AB$.

Να αποδείξετε ότι:

- Οι γωνίες ΔAG και ΔBG είναι ίσες
- Τα τετράπλευρα $A\Delta EZ$ και $EZBG$ είναι εγγράψιμα.
- Η EZ είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle AEB$.



Μονάδες $(7+9+9)=25$

4.

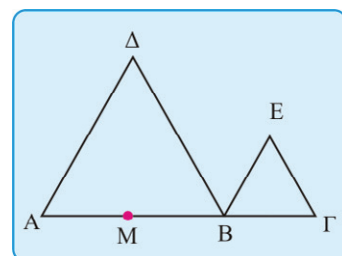
Θ Ε Μ Α Δ

6.6

1774

Έστω A, B, Γ συνευθειακά σημεία με $AB = 2B\Gamma$. Θεωρούμε το μέσο M της AB . Προς το ίδιο ημιπίεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΔAB , BEG . Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $A\Delta EB$ είναι τραπέζιο ($A\Delta \parallel BE$).
- Τα τρίγωνα ΔMB , ΔEB είναι ίσα.
- Το τετράπλευρο ΔMBE είναι εγγράψιμο.



Μονάδες $(9+8+8)=25$

5.

Θ Ε Μ Α Δ

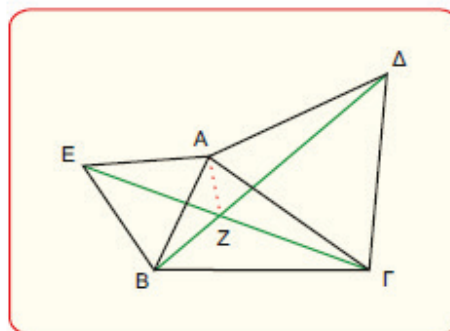
6.6

1776

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα τρίγωνα AEB , $A\Gamma\Delta$. Ονομάζουμε Z το σημείο τομής των τμημάτων BD , GE .

Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα AEG και $AB\Delta$ είναι ίσα και να γράψετε τα ζεύγη των ίσων γωνιών.
- Τα τετράπλευρα $AZ\Gamma\Delta$, $AZBE$ είναι εγγράψιμα.
- $\angle BZ\Gamma = 120^\circ$.



Μονάδες $(10+10+5)=25$

6.

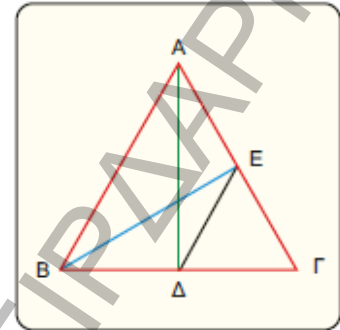
Θ Ε Μ Α Δ

6.6

1799

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και AD , BE τα ύψη του. Να αποδείξετε ότι:

- α. $B\Gamma = 2ED$.
- β. $BE\Delta = \frac{A}{2}$.
- γ. Το τετράπλευρο $AE\Delta B$ είναι εγγράψιμο.
- δ. $ABE = A\Delta E$.



Μονάδες $(6+7+7+5)=25$

7.

Θ Ε Μ Α Δ

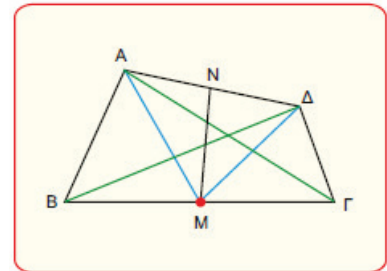
6.6

1807

Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ με $A = \Delta = 90^\circ$ και M, N τα μέσα των $B\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α. $AM = M\Delta$
- β. Η MN είναι κάθετη στην $A\Delta$.
- γ. $\Gamma B\Delta = \Gamma A\Delta$.



Μονάδες $(10+10+5)=25$

8.

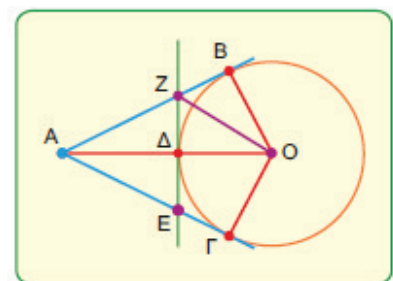
Θ Ε Μ Α Δ

6.6

1847

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Έστω σημείο A εξωτερικό του κύκλου και τα εφαπτόμενα τμήματα AB και $A\Gamma$ ώστε να ισχύει $B\hat{A}\Gamma = 60^\circ$. Έστω ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο Δ τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο $ABO\Gamma$ είναι εγγράψιμο με $OA = 2OB$.
- β. Το τρίγωνο AEZ είναι ισόπλευρο.
- γ. $2ZB = AZ$.
- δ. Το τετράπλευρο $EZB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Μονάδες $(6+6+7+6)$

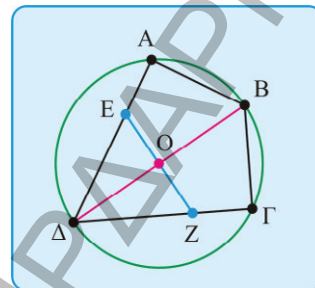
9.

Θ Ε Μ Α Δ

6.6

1864

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και ο περιγεγραμμένος του κύκλος (O , ρ) ώστε η διαγώνιος του ΔB να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία B είναι διπλάσια της Δ και οι πλευρές AB και $B\Gamma$ είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη $B\Delta$ στο O , η οποία τέμνει τις πλευρές $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$ στα E και Z αντίστοιχα.



- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.
- Να συγκρίνεται τα τρίγωνα ΔAB και $\Delta \Gamma B$.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma O$ είναι ρόμβος.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABOE$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Μονάδες $(6+6+7+6)=25$

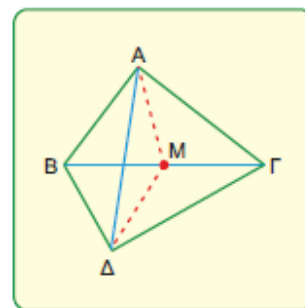
10.

Θ Ε Μ Α Δ

6.6

1886

Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) και $\Delta B\Gamma$ ($\Delta=90^\circ$) (όπου A και Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$) και το μέσο M της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



- το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές.
- $\angle AM\Delta = 2\angle \Gamma\Delta$
- $\angle B\Delta = \angle A\Delta$

Μονάδες $(9+9+7)=25$

11.

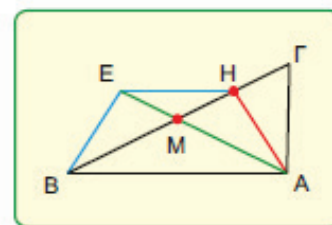
Θ Ε Μ Α Δ

6.6

1896

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) έχουμε ότι $B=30^\circ$.

Φέρουμε το ύψος AH και τη διάμεσο AM του τριγώνου $AB\Gamma$. Από την κορυφή B φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο AM , η οποία την τέμνει στο σημείο E όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να αποδείξετε ότι:



- $BE = \frac{AB}{2}$.
- $AH = BE$.
- το τετράπλευρο $AHEB$ είναι εγγράψιμο.
- $EH \parallel AB$.

Μονάδες $(7+7+6+5)=25$

12

Θ Ε Μ Α Δ

6.6

13521

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) φέρουμε το ύψος $A\Delta$. Έστω K, Λ, M τα μέσα των $AB, A\Gamma, B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. i. $K\Lambda \parallel B\Gamma$.
- ii. $M\Lambda = K\Delta$.
- iii. $KM = \Delta\Lambda$.
- β. Το $K\Lambda M\Delta$ είναι ένα εγγράψιμο τετράπλευρο.

Μονάδες $(5+6+6+8)=25$

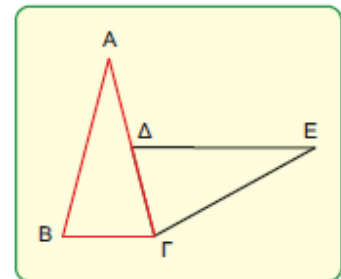
13

Θ Ε Μ Α Δ

6.6

13538

Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ με $AB = A\Gamma = E\Gamma = E\Delta$, όπου Δ είναι το μέσο της $A\Gamma$ και $B\Gamma = \frac{AB}{4}$.



- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι ίσα.
- β. Αν η προέκταση της $E\Delta$ προς το Δ τέμνει την AB στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι:
 - i. Το σημείο Z είναι το μέσο της AB .
 - ii. $\widehat{E\Lambda\Gamma} = \widehat{E\hat{Z}\Gamma}$.

Μονάδες $(10+8+7)=25$

14.

Θ Ε Μ Α Δ

6.6

13670

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2AB$. Έστω Δ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και E το μέσο του τμήματος $B\Delta$. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την $A\Gamma$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα ABE και $BZ\Delta$ είναι ίσα.
- β. Το τετράπλευρο $ZA\Delta E$ είναι εγγράψιμο.
- γ. Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{A}\Gamma$.

Μονάδες $(10+5+10)=25$

15.

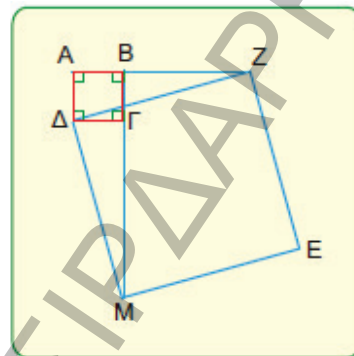
Θ Ε Μ Α Δ

6.6

13671

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} < \hat{\Gamma}$) θεωρούμε τα μέσα Δ , E , Z των πλευρών AB , $A\Gamma$, $B\Gamma$ αντίστοιχα. Έστω H η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά AB . Να αποδείξετε ότι:

- $HE = E\Gamma$ και $HZ = Z\Gamma$.
- $\widehat{Z\Delta E} = \widehat{ZH E}$.
- Το τετράπλευρο $Z\Delta HE$ είναι εγγράψιμο.



Μονάδες $(10+10+5)=25$

16.

Θ Ε Μ Α Δ

6.6

13847

Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά AB προς το B κατά τμήμα BZ . Επίσης προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma M = AZ$. Στη συνέχεια, θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο ΔMEZ να είναι παραλληλόγραμμο.

Να αποδείξετε ότι:

- τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και $\Gamma\Delta M$ είναι ίσα.
- το τετράπλευρο ΔMEZ είναι τετράγωνο.
- το τετράπλευρο $BZEM$ είναι εγγράψιμο.
- οι γωνίες BMZ και BEZ είναι ίσες.

Μονάδες $(5+9+6+5)=25$

17.

Θ Ε Μ Α Δ

6.6

14878

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και σημείο M εξωτερικό του κύκλου. Από το σημείο M φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB του κύκλου και στην προέκταση του OB παίρνουμε σημείο Γ ώστε $B\Gamma = OB$.

- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AMBO$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.
- Να προσδιορίσετε το κέντρο Λ του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου $AMBO$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Να αποδείξετε ότι $B\Lambda \parallel M\Gamma$.

Μονάδες $(7+9+9)=25$

ΙΕΠ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Α 2022 (9)

1.

Θ Ε Μ Α Α

11892

- A. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή το γράμμα Λ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- i. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και κάποια γωνία ίση, τότε είναι ίσα.
 - ii. Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.
 - iii. Κάθε τετράγωνο είναι και ρόμβος.
 - iv. Κάθε επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης που βαίνει στο ίδιο τόξο.
 - v. Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου η απόσταση από το μέσο κάθε πλευράς είναι τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.

Μονάδες 5x2=10

- B. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

Μονάδες 15

2.

Θ Ε Μ Α Α

11895

- A. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.
- i. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.
 - ii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.
 - iii. Οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται.
 - iv. Η διάμεσος ενός τραpezίου ισούται με το άθροισμα των δύο βάσεων του τραpezίου.
 - v. Αν γνωρίζουμε ότι δύο κύκλοι που έχουν ακτίνες R και ρ με $R > \rho$, εφάπτονται, τότε συμπεραίνουμε ότι η απόσταση των κέντρων τους είναι $R + \rho$.

Μονάδες 5x2=10

- B. Να δείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα, ότι κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

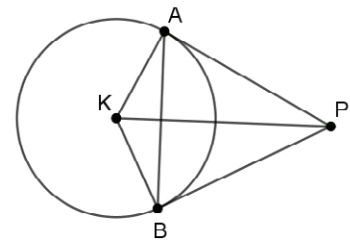
Μονάδες 15

3.

Θ Ε Μ Α Α

11898

- A. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.
- Οι μεσοκάθετες των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, που είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.
 - Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
 - Σε κάθε τρίγωνο βαρύκεντρο ονομάζεται το σημείο τομής των διχοτόμων του.
 - Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που άγεται από οποιαδήποτε κορυφή είναι διχοτόμος της αντίστοιχης γωνίας και διάμεσος της απέναντι πλευράς.
 - Αν στο παρακάτω σχήμα η PK είναι η διακεντρική ευθεία του σημείου P, τότε η ίδια ευθεία είναι μεσοκάθετος της χορδής AB.



Μονάδες $5 \times 2 = 10$

- B. Να δείξετε ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία ισούται με 30° , τότε η απέναντι πλευρά της είναι το μισό της υποτείνουσας.

Μονάδες 15

4.

Θ Ε Μ Α Α

11964

- A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι παραπληρωματικές.
 - Υπάρχουν σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος που δεν ισαπέχουν από τα άκρα του.
 - Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
 - Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.
 - Κάθε τετράγωνο είναι ορθογώνιο.

Μονάδες $5 \times 2 = 10$

- B. Να αποδείξετε ότι αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε οι γωνίες που πρόσκεινται σε μία βάση είναι ίσες.

Μονάδες 15

5.

Θ Ε Μ Α Α

12066

- A. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.
- Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.
 - Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου.
 - Αν δύο διαφορετικές ευθείες e_1 και e_2 είναι παράλληλες προς μια τρίτη ευθεία e , τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.
 - Αν ένα τετράπλευρο έχει όλες τις γωνίες του ίσες, τότε είναι τετράγωνο.
 - Αν σε ένα τετράπλευρο δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Μονάδες $5 \times 2 = 10$

- B. Από ένα σημείο Α εκτός ευθείας e φέρουμε το κάθετο τμήμα ΑΚ προς την e και τα πλάγια τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Να αποδείξετε ότι, αν τα πλάγια τμήματα ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους Β και Γ ισαπέχουν από το ίχνος Κ της καθέτου.

Μονάδες 15

6.

Θ Ε Μ Α Α

12070

- A. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.
- Από κάθε σημείο P που είναι εξωτερικό ενός κύκλου διέρχεται μόνο μία εφαπτόμενη ευθεία προς τον κύκλο.
 - Σε όλα τα κυρτά πολύγωνα το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών τους είναι 4 ορθές.
 - Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος.
 - Σε κάθε τραπέζιο οι διαγωνίες του είναι ίσες.
 - Δύο εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα του ίδιου κύκλου, είναι ίσες.

Μονάδες $5 \times 2 = 10$

- B. Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου ανά δύο είναι ίσες.

Μονάδες 15

7.

Θ Ε Μ Α Α

12106

- A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες.
 - Από σημείο εκτός ευθείας διέρχονται άπειρες κάθετες στην ευθεία.
 - Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.
 - Κάθε τετράπλευρο με ίσες διαγωνίους είναι ορθογώνιο.
 - Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη του κύκλου στο άκρο της χορδής ισούται με την επίκεντρη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

Μονάδες $5 \times 2 = 10$

- B. Να αποδείξετε ότι ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγωνιοί του τέμνονται κάθετα.

Μονάδες 15

8.

Θ Ε Μ Α Α

12416

- A. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.
- Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη της διαμέτρου.
 - Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι ίσα.
 - Αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου είναι ίσες και κάθετες, τότε το τετράπλευρο είναι τετράγωνο.
 - Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία είναι ίσα.
 - Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

Μονάδες $5 \times 2 = 10$

- B. Να αποδείξετε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που μπορούμε να φέρουμε από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

Μονάδες 15

9.

Θ Ε Μ Α Α

13704

- A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.
 - Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών του και μικρότερη από τη διαφορά τους.
 - Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.
 - Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.
 - Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.

Μονάδες $5 \times 2 = 10$

- B. Να αποδείξετε ότι: αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

Μονάδες 15

1.

Θ Ε Μ Α Γ

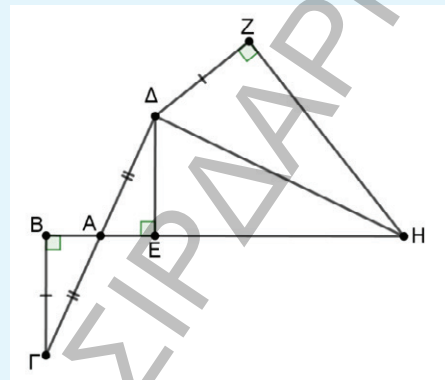
11882

Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta E$ και ΔZH είναι ορθογώνια με ορθές γωνίες $\widehat{A\Gamma B}$, $\widehat{A\Delta E}$ και $\widehat{\Delta ZH}$, αντίστοιχα. Επίσης $A\Gamma = A\Delta$ και $B\Gamma = \Delta Z$.

Να αποδείξετε ότι:

- Τα ευθύγραμμα τμήματα $B\Gamma$ και ΔE είναι ίσα.
- Η ΔH είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{E\hat{H}Z}$.
- Αν, επιπλέον, οι $A\Delta$ και ΔH είναι κάθετες, τότε

$$\widehat{A\Delta E} = \frac{\widehat{E\hat{H}Z}}{2}.$$



Μονάδες (10+6+9)=25

2.

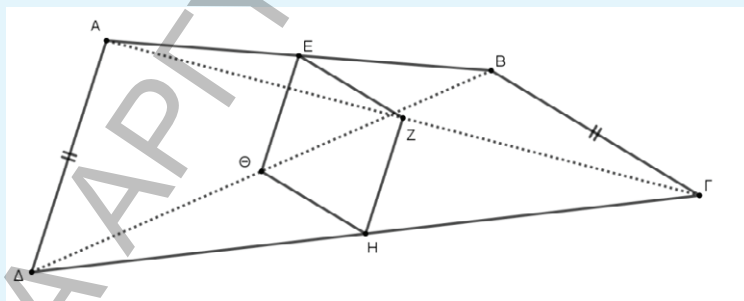
Θ Ε Μ Α Γ

11896

Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος ισχύει ότι $A\Delta = B\Gamma$ και τα σημεία E , Z , H και Θ είναι τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων AB , $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και $B\Delta$ αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι:

- $EZ // H\Theta$
- Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι ρόμβος.



Μονάδες (15+10)=25

3.

Θ Ε Μ Α Γ

11897

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσος του AM . Στην προέκταση της $A\Gamma$ προς το Γ παίρνουμε τμήμα $\Gamma\Delta = A\Gamma$. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την AM που τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι:

- $M\Gamma = \Gamma E$.
- Το τετράπλευρο $AM\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο.
- $\widehat{B} + \widehat{B\hat{A}M} = \widehat{\Gamma\hat{E}\Delta}$.

Μονάδες (9+7+9)=25

4.

Θ Ε Μ Α Γ

12068

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) και M το μέσο της υποτείνουσας του $B\Gamma$. Από το M φέρουμε $M\Delta \perp AB$ και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΔZ .

- α.** Να αποδείξετε ότι:
- Το τρίγωνο MBZ είναι ισοσκελές.
 - Το τετράπλευρο $AMBZ$ είναι ρόμβος.
- β.** Αν το αρχικό τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, τι είδους τετράπλευρο είναι το $AMBZ$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες $(8+9+8)=25$

5.

Θ Ε Μ Α Γ

12069

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) παίρνουμε στην πλευρά AB σημείο Δ , ώστε $\Delta B = 2A\Delta$, και στην πλευρά $A\Gamma$ σημείο E , ώστε $E\Gamma = 2A E$. Το M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

- α.** Να αποδείξετε ότι:
- Τα τμήματα ΔB και $E\Gamma$ είναι ίσα.
 - Το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές.
- β.** Αν P το σημείο τομής των τμημάτων BE και $\Gamma\Delta$ να δείξετε ότι:
- Οι γωνίες $\Gamma\hat{B}E$ και $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ίσες.
 - Το τμήμα PM διχοτομεί τη γωνία $B\hat{P}\Gamma$.

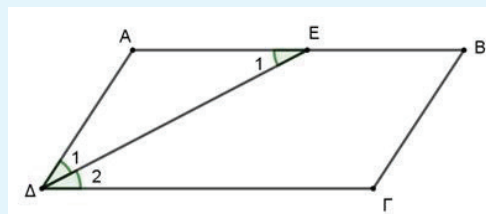
Μονάδες $[(6+6)+(6+7)]=25$

6.

Θ Ε Μ Α Γ

12165

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = 120^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας Δ που τέμνει την AB στο μέσο της E .



- α.** Να αποδείξετε ότι $AB = 2A\Delta$.
- β.** Αν το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από το σημείο E στην $\Gamma\Delta$ την τέμνει στο H , τότε να αποδείξετε ότι $\frac{\Delta E}{HE} = 2$.
- γ.** Αν M το μέσο της $\Gamma\Delta$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $M\Delta\Delta$ είναι ισόπλευρο.
- δ.** Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{A}\Gamma = 90^\circ$.

Μονάδες $(6+7+6+6)=25$

ΙΕΠ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ 2022 (10)

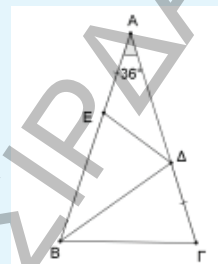
7.

Θ Ε Μ Α Γ

12200

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 36^\circ$. Έστω BD η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ και E σημείο της πλευράς AB ώστε $AE = \Gamma\Delta$.

- α. Να αποδείξετε ότι $AD = BD$.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BDE είναι ισοσκελές.
- γ. Η παράλληλη από το B προς την $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της DE (προς το E) στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.



Μονάδες $(8+7+10)=25$

8.

Θ Ε Μ Α Γ

12418

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB > \Gamma\Delta$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τρίγωνο ABE με βάση AB . Αν M είναι το μέσο της βάσης $\Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα AED και BEG είναι ίσα.
- β. Η διάμεσος EM του τριγώνου $E\Delta\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{AEB}$.

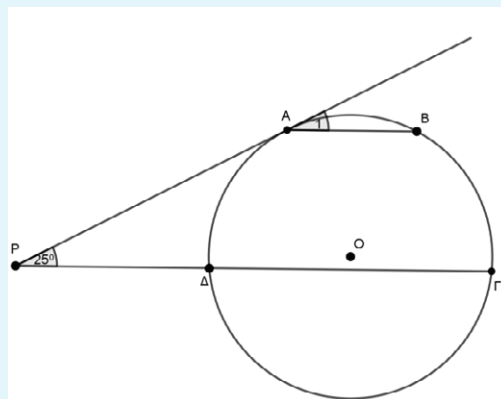
Μονάδες $(11+14)=25$

9.

Θ Ε Μ Α Γ

12460

Στον κύκλο (O, ρ) δίνονται τα σημεία A, B, Γ, Δ έτσι ώστε $AB \parallel \Gamma\Delta$. Στο σημείο A φέρνουμε εφαπτομένη στον κύκλο, η οποία τέμνει την προέκταση της $\Gamma\Delta$ προς το Δ , στο σημείο P . Αν η γωνία $\hat{\Delta PA} = 25^\circ$ και το τόξο $\Gamma\Delta$ (στο οποίο δεν ανήκουν τα A, B) είναι τριπλάσιο του τόξου AB (στο οποίο δεν ανήκουν τα Γ, Δ) να αποδείξετε ότι:



- α. τα τόξα $\widehat{\Delta AB}$ και $\widehat{AB\Gamma}$ είναι ίσα.
- β. το τόξο AB που είναι μικρότερο του ημικυκλίου ισούται με 50° .
- γ. το τόξο ΔA στο οποίο δεν ανήκουν τα B, Γ ισούται με 80° .
- δ. το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες $(7+6+6+6)=25$

10.**Θ Ε Μ Α Γ****13702**

Δίνονται δυο κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο A . Μια ευθεία (ε) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία B και Γ αντίστοιχα. Αν η εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους A τέμνει την ευθεία (ε) σε σημείο M , να αποδείξετε ότι:

- α.** τα σημεία A , B και Γ ανήκουν σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.
- β.** ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία A , B και Γ εφάπτεται στη διάκεντρο $K\Lambda$ των κύκλων (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) .

Μονάδες $(12+13)=25$