ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΒΑΘΜΙΣΜΕΝΗΣ ΔΥΣΚΟΛΙΑΣ 2024

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Β-Δ 370


Καλή επιτυχία!
Μην εξαντλείστε στο να κάνετε τα
"πράγματα σωστά" αλλά προσπαθείτε να
κάνετε τα "σωστά πράγματα".
Οι έξυπνοι άνθρωποι συνεργάζονται
δεν διαπληκτίζονται.
Κανένας στόχος δεν μπορεί να επιτευχθεί
χωρίς τη σωστή στρατηγική. Η στρατηγική
είναι η λεωφόρος που οδηγεί στην επίτευξη.
Οι νικητές διαθέτουν δύο πράγματα.
Ξεκάθαρους στόχους
και επιθυμία να πετύχουν.
Να θυμάστε πάντα ότι ο χρόνος σας είναι
το πιο πολύτιμο, το πιο ατομικό, το πιο
πεπερασμένο αγαθό.

Κεφάλαιο 2ο ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ Β-Δ ΑΝΑ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟ

2.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητές τους (10)

1. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **12685**

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι: $(\alpha+\beta)\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)=4$,

τότε να αποδείξετε ότι:

α. $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=2$. **β.** $\alpha=\beta$.

Μονάδες (12+13)=25

2. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **13053**

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma\neq0$.

α. Να αποδείξετε ότι

i. $\beta+\gamma=-\alpha$ **ii.** $\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=-\alpha$.

β. Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\dfrac{\beta^2}{\gamma+\alpha}, \dfrac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=0.$$

Μονάδες [(6+6)+13]=25

3. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **13088**

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε

$$A = 2(x+y)^2 - (x-y)^2 - 6xy - y^2$$

α. Να αποδείξετε ότι: $A = x^2$

β. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$$

είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

Μονάδες (13+12)=25

4. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **13472**

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν

$$\alpha^2 = 2\alpha + \beta \quad \text{και} \quad \beta^2 = 2\beta + \alpha .$$

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$.

ii. $\alpha + \beta = 1$.

β. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$.

Μονάδες [(8+8)+9]=25

5. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **14458**

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $(x+4y)(x+y) = 9xy$.

α. Να αποδείξετε ότι

i. $(2y-x)^2 = 0$ **ii.** $y = \frac{x}{2}$.

β. Να αποδείξετε ότι $\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = 10y^2$.

Μονάδες [(8+5)+12]=25

6. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **14473**

Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει: $\dfrac{4x+5y}{x-4y}=-2$.

α. Να δείξετε ότι $y=2x$.

β. Για $y=2x$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\dfrac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$.

Μονάδες (12+13)=25

7. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **14489**

Αν οι αριθμοί $2\alpha-1$ και $\beta-1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha\neq 1$ και $\beta\neq 1$ να δείξετε ότι:

α. $2\alpha+\beta=2\alpha\beta$.

β. Οι αριθμοί $x=\alpha-\beta$ και $y=\alpha(1-2\beta)+2\beta$ είναι αντίθετοι.

Μονάδες (10+15)=25

8. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **14555**

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$$(x-2y)^2-2(3-2xy)=5y^2-1$$

α. Να αποδείξετε ότι $x^2-y^2=5$.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P=(x+y)^3(x-y)^3$

Μονάδες (12+13)=25

9. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **35388**

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ με $\beta\neq 0$ και $\delta\neq\gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$$

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$.

β. Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi=\dfrac{\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta-\beta\cdot\gamma}$

Μονάδες (10+15)=25

10. **ΘΕΜΑ Β** **2.1** **36884**

α. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$$

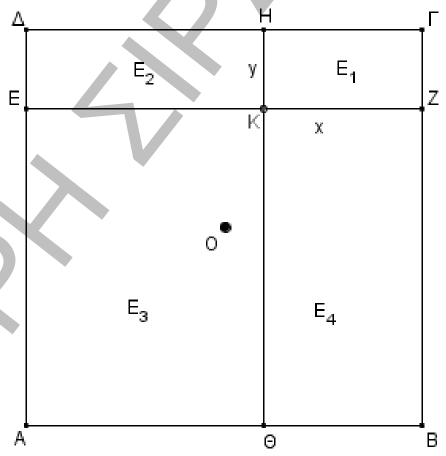
β. Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$

Μονάδες (12+13)=25

2.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητές τους (1)

1. ΘΕΜΑ Δ 2.1 15052

Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά ίση με 6 και οι ευθείες ΕΖ και ΗΘ είναι παράλληλες στις πλευρές του. Αν $KZ = x$ και $KH = y$, $x,\ y \in (0,\ 6)$, τότε:



α. Να υπολογίσετε τα $E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4$ με τη βοήθεια των $x,\ y$.

β. Να βρείτε τα εμβαδά $E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4$ των τεσσάρων ορθογωνίων του σχήματος όταν $x = 4$ και $y = 2$.

γ. Αν επιπλέον ισχύει $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$,

να αποδείξετε ότι:

i. $xy + 9 = 3(x + y)$.

ii. Τουλάχιστον ένα από τα τμήματα ΕΖ και ΗΘ διέρχεται από το κέντρο Ο του τετραγώνου.

Μονάδες [8+6+(5+5)]=25

2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών (10)

1. **ΘΕΜΑ Β** **2.2** **12673**

Έστω πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0<\alpha<\beta$.

α. Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta}<\frac{3}{\alpha}$.

β. Να αποδείξετε ότι $\alpha^3+\frac{3}{\beta}<\beta^3+\frac{3}{\alpha}$.

Μονάδες (13+12)=25

2. **ΘΕΜΑ Β** **2.2** **12922**

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\alpha^2+\beta^2$ και $B=2\alpha\beta$, $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$

α. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες $A=0$

β. Να αποδείξετε ότι $A-B\geq 0$ για κάθε $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$

γ. Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A-B=0$

Μονάδες (8+9+8)=25

3. **ΘΕΜΑ Β** **2.2** **13266**

Δίνονται οι παραστάσεις $A=\alpha^2+4\alpha+5$ και $B=(2\beta+1)^2-1$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει $A=(\alpha+2)^2+1$

β. **i.** Να δείξετε ότι $A+B\geq 0$.

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει $A+B=0$.

Μονάδες [8+(9+8)]=25

4. ΘΕΜΑ Β 2.2 13323

α. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+4)^2=x^2+y^2-2x+8y+17.$$

β. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2+y^2-2x+8y+17=0$

Μονάδες (12+13)=25

5. ΘΕΜΑ Β 2.2 14475

Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2\le\alpha\le4$ και $-4\le\beta\le-3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α. $\alpha+2\beta$.

β. $\alpha-\beta$

Μονάδες (12+13)=25

6. ΘΕΜΑ Β 2.2 14492

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4\le x\le7$ και $2\le y\le3$ τότε:

α. Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β. Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Μονάδες (12+13)=25

7. ΘΕΜΑ Β 2.2 14704

Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $x + y$ **β.** $2x - 3y$ **γ.** $\dfrac{x}{y}$

Μονάδες (5+10+10)=25

8. ΘΕΜΑ Β 2.2 35040

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

β. Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β.

γ. Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (3+10+12)=25

9. ΘΕΜΑ Β 2.2 36899

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha + \dfrac{4}{\alpha} \geq 4$ **β.** $(\alpha + \dfrac{4}{\alpha})(\beta + \dfrac{4}{\beta}) \geq 16$

Μονάδες (12+13)=25

10. ΘΕΜΑ Β 2.2 37179

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K = 2\alpha^2 + \beta^2 \quad \text{και} \quad \Lambda = 2\alpha\beta \ , \quad \text{όπου} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β.

β. Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$;

Μονάδες (12+13)=25

2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού (13)

1. ΘΕΜΑ Β 2.3 13177

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \le \alpha \le 3$ και $-2 \le \beta \le -1$

α. Να δείξετε ότι : $|\alpha-3| = 3-\alpha$ και $|\beta+2| = \beta+2$.

β. Να δείξετε ότι : . $0 \le \alpha+\beta \le 2$

γ. Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha+\beta|+|\alpha-3|-|\beta+2|$ είναι ίση με 1.

Μονάδες (8+8+9)=25

2. ΘΕΜΑ Β 2.3 14071

α. Η αλγεβρική παράσταση Κ, που εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού x από τους αριθμούς 2 και -1, πάνω στον άξονα είναι:

Α. Κ=|x+1|+|x-2| **Β.** Κ=|x-1|+|x+2| **Γ.** Κ=(|x|+1)+(|x|-2)

Να γράψετε στο τετράδιό σας τη σωστή παράσταση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Αν είναι Κ=|x+1| + |x-2| τότε:

i. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Κ όταν $x = \frac{3}{2}$.

ii. Αν x>2 να γράψετε χωρίς απόλυτο την παράσταση Κ και να αποδείξετε ότι Κ>3.

Μονάδες [5+(10+10)]=25

3. ΘΕΜΑ Β 2.3 14412

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$, τότε

α. Να δείξετε ότι $\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \frac{|1-\alpha|}{1-\alpha} = 2$.

β. Να δείξετε ότι $\alpha+\beta > \frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \frac{|1-\alpha|}{1-\alpha}$.

Μονάδες (12+13)=25

4. ΘΕΜΑ Β 2.3 14491

α. Να λυθεί η ανίσωση $|y-3|<1$

β. Αν x,y είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου.

Μονάδες (12+13)=25

5. ΘΕΜΑ Β 2.3 14572

Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει: $|x+2|<1$. Να δείξετε ότι:

α. $-3<x<-1$.

β. $|2x+4|<2$.

Μονάδες (10+15)=25

6. ΘΕΜΑ Β 2.3 14617

Δίνεται η ανίσωση $|x-7|<1$ (1)

α. Να αποδείξετε ότι $x\in(6,\,8)$

β. Αν γνωρίζουμε ότι $k\in(6,\,8)$ να αποδείξετε ότι $\dfrac{24}{k}\in(3,\,4)$

Μονάδες (12+13)=25

7. ΘΕΜΑ Β 2.3 15054

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha<0<\beta<\gamma$.

α. Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός $A=\alpha(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)\beta$ είναι θετικός.

β. Να αποδείξετε ότι $\alpha+|\alpha-\beta|+|\gamma-\beta|-\gamma=0$.

Μονάδες (16+9)=25

8. **ΘΕΜΑ Β** **2.3** **35041**

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x,3)=3-2x$

α. Να αποδείξετε ότι $x \le \frac{3}{2}$.

β. Αν $x \le \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K=|2x-3|-2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x.

Μονάδες (12+13)=25

9. **ΘΕΜΑ Β** **2.3** **35112**

Δίνεται η παράσταση: $A=|3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. για κάθε $x \ge 2$, $A=3x-4$.

ii. για κάθε $x<2$, $A=8-3x$

β. Αν για τον x ισχύει ότι $x \ge 2$ να αποδείξετε ότι: $\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=3x+4$.

Μονάδες (12+13)=25

10. **ΘΕΜΑ Β** **2.3** **35412**

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5<x<10$,

α. να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

β. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=\frac{|x-5|}{x-5}+\frac{|x-10|}{x-10}$

Μονάδες (10+15)=25

11. ΘΕΜΑ Β 2.3 36894

α. Αν $\alpha<0$, να δείξετε ότι: $\alpha+\frac{1}{\alpha}\le -2$

β. Αν $\alpha<0$, να δείξετε ότι: $|\alpha|+\left|\frac{1}{\alpha}\right|\ge 2$

Μονάδες (15+10)=25

12. ΘΕΜΑ Β 2.3 36898

α. Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}-\{0\}$, να δείξετε ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\ge 2$ (1)

β. Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (15+10)=25

13. ΘΕΜΑ Β 2.3 37201

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|+|y-3|$ με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $A=x-y+2$. **β.** $0<A<4$.

Μονάδες (12+13)=25

2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού (3)

1. ΘΕΜΑ Δ 2.3 13179

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1\leq\beta\leq 2$ και $2\leq\alpha\leq 4$.

α. i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3.

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα.

β. i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha}\leq 1\leq\frac{\alpha}{\beta}$

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1-\frac{\beta}{\alpha}\right|=\left|\frac{\alpha}{\beta}-1\right|$

Μονάδες [(7+7)+(5+6)]=25

2. ΘΕΜΑ Δ 2.3 33888

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει:

$$(\alpha-1)(1-\beta)>0$$

α. Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α και β.

β. Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K=|\alpha-1|+|1-\beta|.$$

Μονάδες (13+12)=25

3. **ΘΕΜΑ Δ** **2.3** **36672**

Δίνονται τα σημεία Α, Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2<x<7$.

α. Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i. $|x+2|$

ii. $|x-7|$

β. Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$$|x+2|+|x-7|$$

γ. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=|x+2|+|x-7|$$

γεωμετρικά.

δ. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

Μονάδες [(4+4)+5+5+7]=25

2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών (17)

1. ΘΕΜΑ Β 2.4 12943

Δίνονται οι αριθμοί

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right) \quad \text{και} \quad \beta=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$$

α. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha+\beta$ και το γινόμενο $\alpha\cdot\beta$

β. Να αποδείξετε ότι

$$\alpha^2+\beta^2=7$$

Μονάδες (12+13)=25

2. ΘΕΜΑ Β 2.4 14452

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\sqrt{3}-1$ και $\beta=\sqrt{3}+1$.

α. Να δείξετε ότι $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=10$.

β. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+1=5$.

Μονάδες (15+10)=25

3. ΘΕΜΑ Β 2.4 14599

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x|<2$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $-1<x<1$.

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(-1,1)$, ισχύει $x^2<1$.

Μονάδες (12+13)=25

4. ΘΕΜΑ Β 2.4 14682

Δίνονται οι αριθμοί: $A=(\sqrt{3})^6$ και $B=(\sqrt[3]{3})^6$

α. Να δείξετε ότι: $A-B=18$.

β. Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{3}, \sqrt[3]{3}$.

Μονάδες (12+13)=25

5. ΘΕΜΑ Β 2.4 14774

α. Να δείξετε ότι $\left(2+\sqrt{5}\right)^2=9+4\sqrt{5}$ και $\left(1-\sqrt{5}\right)^2=6-2\sqrt{5}$

β. Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι

$$\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}=1+2\sqrt{5}$$

Μονάδες (13+12)=25

6. ΘΕΜΑ Β 2.4 14849

α. Να αποδείξετε ότι $2<\sqrt{5}$.

β. Να αποδείξετε ότι $\left(2-\sqrt{5}\right)^2=9-4\sqrt{5}$.

γ. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$.

Μονάδες (7+10+8)=25

7. ΘΕΜΑ Β 2.4 15051

α. Να αποδείξετε ότι $\left(2-\sqrt{5}\right)^2=9-4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα $\left(2+\sqrt{5}\right)^2$.

β. Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9-4\sqrt{5}$ και $9+4\sqrt{5}$

Μονάδες (12+13)=25

8. ΘΕΜΑ Β 2.4 34152

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\sqrt{(x-2)^2}$ και $B=\sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

β. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;

γ. Να δείξετε ότι, για κάθε $x \le 2$, ισχύει $A = B$.

Μονάδες (7+8+10)=25

9. ΘΕΜΑ Β 2.4 34155

Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}$, $B=\sqrt{3}$, $\Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $A\cdot B\cdot \Gamma=\sqrt{15}$.

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς A, B.

Μονάδες (15+10)=25

10. ΘΕΜΑ Β 2.4 34157

Αν είναι $A=2-\sqrt{3}$, $B=2+\sqrt{3}$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $A\cdot B=1$.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2+B^2$.

Μονάδες (12+13)=25

11. **Θ Ε Μ Α Β** **2.4** **36778**

Δίνεται η παράσταση: $K=\dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}-\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α. Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει ο αριθμός x, ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β. Αν $-2<x<3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

Μονάδες (12+13)=25

12. **Θ Ε Μ Α Β** **2.4** **37172**

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$, $B=\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$, $\Gamma=\left(\sqrt[6]{6}\right)^6$

α. Να δείξετε ότι: $A+B+\Gamma=23$.

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.

Μονάδες (13+12)=25

13. **Θ Ε Μ Α Β** **2.4** **37192**

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$$\sqrt{2}\cong\cong 1{,}41 \quad \sqrt{3}\cong 1{,}73 \quad \sqrt{5}\cong 2{,}24 \quad \sqrt{7}\cong 2{,}64$$

α. Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς

$$\sqrt{20},\ \sqrt{45}\ \text{ και }\ \sqrt{80}$$

β. Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$;

Μονάδες (12+13)=25

14. ΘΕΜΑ Β 2.4 37194

α. Να δείξετε ότι: $3<\sqrt[3]{30}<4$.

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6-\sqrt[3]{30}$

Μονάδες (12+13)=25

15. ΘΕΜΑ Β 2.4 37197

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{x^4}$

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β. Αν $x=-3$, να αποδείξετε ότι: $A^3+A^2+A+1=0$

Μονάδες (13+12)=25

16. ΘΕΜΑ Β 2.4 37198

Δίνεται η παράσταση: $B=\sqrt[5]{(x-2)^5}$

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος.

β. Για $x=4$, να αποδείξετε ότι: $B^2+6B=B^4$

Μονάδες (13+12)=25

17. ΘΕΜΑ Β 2.4 37199

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$ και $B=\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$

α. Να δείξετε ότι $A-B=4$.

β. Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, 1, $\sqrt[3]{2}$

Μονάδες (13+12)=25

2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών (1)

1. **ΘΕΜΑ Δ** **2.4** **14931**

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α,β, με

$$\alpha=1+\sqrt{2} \quad \text{και} \quad \beta=1-\sqrt{2}.$$

α. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\alpha^2-\beta^2.$$

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$B=\sqrt{\alpha^2}-\sqrt{\beta^2}.$$

γ. Αν $A=4\sqrt{2}$ και $B=2$, να δείξετε ότι

$$\sqrt{\alpha^2-\beta^2}>\sqrt{\alpha^2}-\sqrt{\beta^2}.$$

Μονάδες (7+8+10)=25

Κεφάλαιο 3ο ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

3.1 Εξισώσεις 1ου Βαθμού (10)

1. ΘΕΜΑ Β 3.1 12857

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)x-2\lambda+2=0$

α. **i.** Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda=-2$

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το $x=1$ είναι ρίζα της εξίσωσης.

β. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση είναι ταυτότητα.

Μονάδες [(7+10)+8]=25

2. ΘΕΜΑ Β 3.1 12917

Δίνεται η εξίσωση $(|\alpha-1|-3)x=\alpha+2$ (1), με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

α. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για α=0 και α=5.

β. **i.** Να βρείτε για ποιες τιμές του α ισχύει $|\alpha-1|=3$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση (1) για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα **β) i.**

Μονάδες (8+8+9)=25

3. ΘΕΜΑ Β 3.1 13169

Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3\le x\le 5$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $x-5\le 0<x-2$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|-|x-5|=2$.

Μονάδες (10+15)=25

4. ΘΕΜΑ Β 3.1 14224

Δίνεται η παράσταση: $A = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x}, x \neq 0, x \neq 1$.

α. Να δείξετε ότι $A = \dfrac{x+1}{x}$.

β. **i.** Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται.

ii. Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες [8+(8+9)]=25

5. ΘΕΜΑ Β 3.1 14649

Δίνεται η παράσταση $K = |x+1| + 2$ όπου $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι $K = \begin{cases} x+3, & \text{αν } x \geq -1 \\ 1-x, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$

β. **i.** Να λυθεί η εξίσωση $|x-2| = 4$.

ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης K αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

Μονάδες [12+(6+7)]=25

6. ΘΕΜΑ Β 3.1 34146

Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha+3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. Όταν $\alpha = 1$.

ii. Όταν $\alpha = -3$.

β. Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

Μονάδες [(5+8)+12]=25

7. ΘΕΜΑ Β 3.1 34163

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

β. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

γ. Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (8+8+9)=25

8. ΘΕΜΑ Β 3.1 34872

Δίνεται η εξίσωση $\kappa x + 3 = 2x$, με παράμερο $\kappa \in \mathbb{R}$.

α. Να λύσετε την εξίσωση για $\kappa = 1$ και για $\kappa = 3$.

β. Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη για $\kappa = 2$.

Μονάδες (13+12)=25

9. ΘΕΜΑ Β 3.1 35033

Δίνονται οι παραστάσεις $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$, με x πραγματικό αριθμό.

α. Να αποδείξετε ότι αν $2 \le x < 3$, τότε $A + B = x - 1$.

β. Υπάρχει $x \in [2,3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (16+9)=25

10. ΘΕΜΑ Β 3.1 36896

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x = \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α. Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές τιμές για το λ, να γράψετε τρεις εξισώσεις.

β. **i.** Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μια και μοναδική λύση.

ii. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) να ισούται με 4

Μονάδες [9+(8+8)]=25

3.1 Εξισώσεις 1ου Βαθμού (3)

1. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **13170**

Υποθέτουμε ότι κάθε κεφάλαιο που κατατίθεται σε έναν λογαριασμό μιας τράπεζας, αυξάνεται στο τέλος κάθε έτους κατά $\varepsilon\%$ (το επίσημο επιτόκιο αύξησης που δίνει δηλαδή η τράπεζα είναι $\varepsilon\%$.

α. Αποδείξτε ότι αν καταθέσουμε στη συγκεκριμένη τράπεζα κεφάλαιο x € με επιτόκιο $\varepsilon\%$, ύστερα από δύο έτη θα εισπράξουμε κεφάλαιο $x\cdot\left(1+\dfrac{\varepsilon}{100}\right)^2$ €.

β. Ένα κεφάλαιο 15.000 € το χωρίζουμε σε δύο ποσά. Το ένα από τα δύο, κατατέθηκε σε μια τράπεζα Α με επιτόκιο 2% και το άλλο, κατατέθηκε σε μια άλλη τράπεζα Β με επιτόκιο 3%. Ύστερα από 2 χρόνια, εισπράχθηκε, με βάση το α) ερώτημα, και από τις δύο τράπεζες συνολικό κεφάλαιο 15.811 €. Ονομάζουμε y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β.

i. Να αποδείξετε ότι το ποσό y είναι λύση της εξίσωσης

$$\left(1,03^2-1,02^2\right)\cdot y=15811-15000\cdot 1,02^2$$

ii. Να βρείτε το κεφάλαιο που κατατέθηκε σε κάθε τράπεζα.

Μονάδες [7+(10+8)]=25

2. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **36651**

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4\lambda+5=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης όταν $\lambda=-2$ και όταν $\lambda=3$.

β. **i.** Να αποδείξετε ότι αν $\lambda=5$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη τιμή του λ, ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

γ. Αν ισχύει $|\lambda^2-4\lambda-5|=4\lambda-\lambda^2+5,\ \lambda\in\mathbb{R}-\{-1,\ 5\}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Μονάδες [8+(3+6)+8]=25

3. **ΘΕΜΑ Δ** **3.1** **36673**

Σε έναν άξονα τα σημεία Α , Β και Μ αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α. Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

β. Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$, τότε:

i. Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου Μ αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο Μ. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

Μονάδες [10+(7+8)]=25

3.2 Η εξίσωση $x^ν=α$ (1)

1. ΘΕΜΑ Δ 3.2 14820

α. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν ως ισότητες.

i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$. **ii.** $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$.

β. Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A.

ii. Με τη βοήθεια του β) ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

Μονάδες [(4+4)+6+(5+6)]=25

3.3 Εξισώσεις 2ου Βαθμού (14)

1. ΘΕΜΑ Β 3.3 13028

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - 2\alpha x - 2\alpha - 2 = 0$, με $\alpha \in \mathbb{R}^*$ (1).

α. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}^*$ για τις οποίες η εξίσωση (1) έχει ρίζα το 3.

β. Για α=2 να λύσετε την εξίσωση (1).

Μονάδες (10+15)=25

2. ΘΕΜΑ Β 3.3 34149

α. Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1).

β. Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| < 2$ (2).

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

Μονάδες (9+9+7)=25

3. ΘΕΜΑ Β 3.3 34150

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α ,β, τέτοιοι ώστε:

$$\alpha + \beta = 12 \text{ και } \alpha^2 + \beta^2 = 272.$$

α. Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι: $\alpha\beta = -64$.

β. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β .

γ. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α ,β.

Μονάδες (8+10+7)=25

4. ΘΕΜΑ Β 3.3 34154

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$, $B = \dfrac{1}{3+\sqrt{7}}$.

α. Να δείξετε ότι: $A + B = 3$ και $A \cdot B = \dfrac{1}{2}$.

β. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B.

Μονάδες (12+13)=25

5. ΘΕΜΑ Β 3.3 34161

α. Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=3$.

β. Αν α, β με $\alpha<\beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+3=0$.

Μονάδες (12+13)=25

6. ΘΕΜΑ Β 3.3 34436

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\dfrac{1}{5+\sqrt{5}}, B=\dfrac{1}{5-\sqrt{5}}$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $A+B=\dfrac{1}{2}$

ii. $A\cdot B=\dfrac{1}{20}$

β. Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β.

Μονάδες (8+8+9)=25

7. ΘΕΜΑ Β 3.3 34920

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+x-1$ (1).

α. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες του τριωνύμου (1), να βρείτε την τιμή των παραστάσεων x_1+x_2, x_1x_2 και $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$.

β. Αν $\dfrac{1}{x_1}=-1$ και $\dfrac{1}{x_2}=2$, να βρείτε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τις $\dfrac{1}{x_1}$ και $\dfrac{1}{x_2}$

Μονάδες (13+12)=25

8. ΘΕΜΑ Β 3.3 35038

Έστω α,β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha\beta=4$ και $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=20$

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha+\beta=5$.

β. Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α,β και να τους βρείτε.

Μονάδες (10+15)=25

9. ΘΕΜΑ Β 3.3 35100

α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $-2x^2+10x=12$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0$.

Μονάδες (15+10)=25

10. ΘΕΜΑ Β 3.3 35382

Δίνεται η παράσταση $K=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$.

α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-3x-2$.

β. Για ποιες τιμές του $x\in R$ ορίζεται η παράσταση Κ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Να απλοποιήσετε την παράσταση Κ.

Μονάδες (10+7+8)=25

11. ΘΕΜΑ Β 3.3 36890

α. Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=3$.

β. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος.

Μονάδες (10+15)=25

12. **ΘΕΜΑ Β** **3.3** **37171**

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha+\beta=2 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30$$

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-15$.

β. Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

Μονάδες (10+15)=25

13. **ΘΕΜΑ Β** **3.3** **37178**

Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις (x+1) μέτρα και x μέτρα.

α. Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

β. Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

Μονάδες (10+15)=25

14. **ΘΕΜΑ Β** **3.3** **37181**

Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\lambda-1)x+6=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

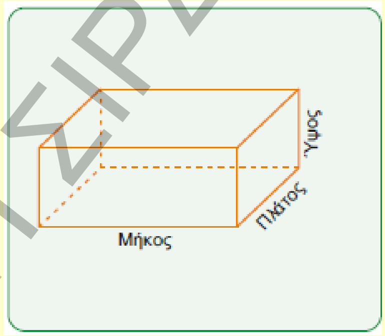
α. Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ..

β. Για $\lambda=2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

Μονάδες (13+12)=25

3.3 Εξισώσεις 2ου Βαθμού (17)

1. ΘΕΜΑ Δ 3.3 12683



Η δεξαμενή του διπλανού σχήματος έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.

α. Αν η δεξαμενή έχει όγκο $16m^3$, να βρείτε τις διαστάσεις της.

β. Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα. Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2m μικρότερο από το μήκος της υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης προκειμένου ο όγκος να παραμείνει $16m^3$.

γ. Αν η νέα δεξαμενή περιέχει $10m^3$ πετρέλαιο να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή.

Μονάδες (8+9+8)=25

2. ΘΕΜΑ Δ 3.3 14406

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, με $α \neq β$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{α^2+1}{β^2+1}=\frac{α}{β}$$

α. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K=\dfrac{α^{22}\cdot(β^3)^8}{α^{-2}\cdot(αβ)^{25}}$

γ. Αν επιπλέον οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου με άθροισμα $\frac{5}{2}$, να τους υπολογίσετε.

δ. Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσετε στο α ή στο β, έτσι ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο.

Μονάδες (5+7+8+5)=25

3. **ΘΕΜΑ Δ** **3.3** **14490**

Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.

α. Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω.

β. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$..

Να βρείτε:

i. Το σύνολο Α που περιέχει ως στοιχεία τις τιμές του λ ∈ Ω, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

ii. Την πραγματική τιμή του λ, αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.

γ. Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β ii να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης.

Μονάδες [5+(10+6)+4]=25

4. **ΘΕΜΑ Δ** **3.3** **14543**

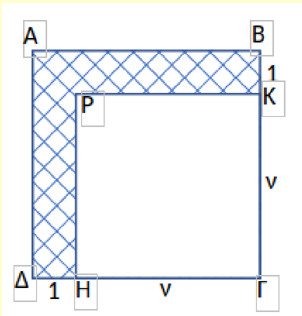
Κάθε περιττός ακέραιος αριθμός α γράφεται στη μορφή $\alpha = 2k + 1$, k ακέραιος.

α. Να γράψετε τους αριθμούς 3,5,7 ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων.

β. **i.** Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων ισούται πάντα με έναν περιττό ακέραιο.

ii. Να γράψετε τον αριθμό 2021 ως διαφορά δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

γ. Στο σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΓΗΡΚ είναι τετράγωνα με (ΓΗ)=(ΓΚ)=ν και (ΒΚ)=(ΔΗ)=1. Αν γνωρίζουμε ότι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 45, να βρεθεί η τιμή του θετικού ακεραίου ν.



Μονάδες [6+(6+6)+7]=25

5. **ΘΕΜΑ Δ** **3.3** **14651**

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4(\lambda + \frac{1}{\lambda})x + 16 = 0 \quad \text{όπου} \quad \lambda > 0 \ .$$

α. Να βρείτε:

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου.

β. Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda > 0$.

γ. Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση *με* 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

Μονάδες [(6+6)+7+6]=25

6. **ΘΕΜΑ Δ** **3.3** **14759**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 6\alpha x + 6\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36$

β. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) = \beta^2 - 36$.

γ. Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -6$.

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 6x$.

ii. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γi), να δείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}$$

Μονάδες [8+6+(6+5)]=25

7. **ΘΕΜΑ Δ** **3.3** **33584**

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2x+\lambda=0$, με παράμετρο $\lambda<1$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β. Να δείξετε ότι: $x_1+x_2=2$.

γ. Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1-2|=|x_2+2|$, τότε:

i. Να δείξετε ότι: $x_1-x_2=4$.

ii. Να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ.

Μονάδες $[6+4+(7+8)]=25$

8. **ΘΕΜΑ Δ** **3.3** **33585**

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2-\left(\alpha^2-1\right)x-\alpha=0$, με παράμετρο $\alpha\neq 0$.

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta=\left(\alpha^2+1\right)^2$.

β. Να βρείτε τις ρίζες ρ_1 και ρ_2 της εξίσωσης, ως συνάρτηση του α.

Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $\rho_1=\alpha$ και $\rho_2=-\dfrac{1}{\alpha}$,

γ. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε $|\rho_1-\rho_2|=2$.

Μονάδες $(5+10+10)=25$

9. **ΘΕΜΑ Δ** **3.3** **33826**

α. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^4-8x^2-9=0.$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β. Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε την εξίσωση:

$$x^4+\beta x^2+\gamma=0 \quad (1) \quad \text{με παραμέτρους } \beta,\gamma\in\mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι αν $\gamma < 0$, τότε:

i. $\beta^2 - 4\gamma > 0$.

ii. Η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Μονάδες (10+12)=25

10. ΘΕΜΑ Δ 3.3 33889

α. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$3x^2 - 14x + 8 = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad 8x^2 - 14x + 3 = 0 \quad (2)$$

β. Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \qquad \text{και} \qquad \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad (4), \quad \text{με } \alpha \cdot \gamma \neq 0.$$

Να αποδείξετε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε

i. $\rho \neq 0$.

ii. $\dfrac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (4).

Μονάδες [10+(5+10)]=25

11. ΘΕΜΑ Δ 3.3 34310

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

β. Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης ως συνάρτηση του λ.

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

Μονάδες (8+7+10)=25

12. **ΘΕΜΑ Δ** **3.3** **34327**

α. Να λύσετε την εξίσωση $x^2-3x-4=0$ (1)

β. Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α,β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2=0$.

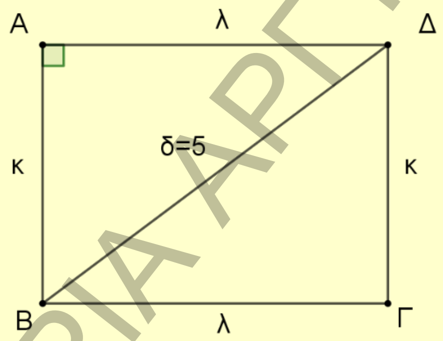
i. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β.

Μονάδες [10+(7+8)]=25

13. **ΘΕΜΑ Δ** **3.3** **34390**

Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις κ και λ του οποίου η περίμετρος είναι $\Pi=14\text{cm}$ και μια διαγώνιος $\delta=5\text{cm}$.



α. **i.** Με χρήση της ταυτότητας $(\kappa+\lambda)^2=\kappa^2+2\kappa\lambda+\lambda^2$, να δείξετε ότι για το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ισχύει $E=12\text{cm}^2$.

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί οι τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-7x+12=0$.

iii. Να βρείτε τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου.

β. Να δείξετε ότι ένα ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi=14\text{cm}$ πρέπει να έχει εμβαδόν $E\leq\frac{49}{4}$.

Μονάδες [(7+7+4)+7]=25

14. **ΘΕΜΑ Δ** **3.3** **34544**

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4(\lambda-1)=0$: (1) με άγνωστο το x και παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι η $\Delta=(2\lambda-4)^2$.

β. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.

γ. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου λ ο αριθμός $x=2$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

Μονάδες (7+9+9)=25

15. **ΘΕΜΑ Δ** **3.3** **36661**

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-\lambda)x^2-(\lambda^2-1)x+\lambda-1=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

α. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού.

β. Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$

γ. Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ. Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αύτη είναι 2ου βαθμού.

Μονάδες (6+6+7+6)=25

16. **ΘΕΜΑ Δ** **3.3** **36663**

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά (d+1)cm.

α. Να βρείτε, ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.

β. Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφτεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i. Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.

ii. Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

Μονάδες [6+(12+7)]=25

17. **ΘΕΜΑ Δ** **3.3** **36675**

Δίνεται η εξίσωση $x^2-4x+2-\lambda^2=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

β. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i. Να βρείτε το $S=x_1+x_2$.

ii. Να βρείτε το $P=x_1\cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ.

γ. Αν η μια ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2+\sqrt{3}$ τότε:

i. να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2-\sqrt{3}$,

ii. Να βρείτε το λ.

Μονάδες (10+5+10)=25

Κεφάλαιο 4ο ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

4.1 Ανισώσεις 1ου Βαθμού (21)

1. ΘΕΜΑ Β 4.1 12909

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x-3|<5$

α. Να δείξετε ότι $x \in (-2, 8)$

β. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x-3|<5$

γ. Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκαμε στο β) ερώτημα και B το σύνολο με $B=\{-3, -2, -1, 0, 3, 4\}$ να παραστήσετε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$ με αναγραφή των στοιχείων τους

Μονάδες (9+7+9)=25

2. ΘΕΜΑ Β 4.1 13025

α. Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{3-2x}{7} \geq 5$

β. Να λύσετε την ανίσωση $|-x-1| \leq 23$

γ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

Μονάδες (10+10+5)=25

3. **ΘΕΜΑ Β** **4.1** **14295**

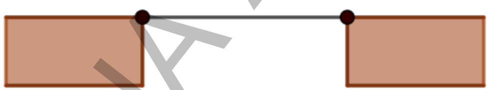
α. Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-1| \geq 6$ και στη συνέχεια να βρείτε τη θέση του πραγματικού αριθμού x πάνω στον άξονα, επιλέγοντας μια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις:

1.

2.

3.

4.



β. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο α) ερώτημα.

Μονάδες (12+13)=25

4. **ΘΕΜΑ Β** **4.1** **14319**

Δίνεται η ανίσωση $|2x-5|<3$

α. Να λύσετε την ανίσωση.

β. αν ο αριθμός α είναι μια λύση της ανίσωσης να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$A=(\alpha-1)(\alpha-5).$$

Μονάδες (12+13)=25

5. ΘΕΜΑ Β 4.1 34148

α. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i. $|2x-3| \leq 5$

ii. $|2x-3| \geq 1$

β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

Μονάδες [(9+9)+7]=25

6. ΘΕΜΑ Β 4.1 35043

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2|<3$

α. Να αποδείξετε ότι: $-1<x<5$

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\dfrac{|x+1|+|x-5|}{3}$

Μονάδες (12+13)=25

7. ΘΕΜΑ Β 4.1 35044

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί y, για τους οποίους ισχύει: $|y-2|<1$.

α. Να αποδείξετε ότι: $y \in (1,3)$

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\dfrac{|y-1|+|y-3|}{2}$

Μονάδες (12+13)=25

8. ΘΕΜΑ Β 4.1 35404

α. Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3|<1$.

β. Αν για τους x, y ισχύουν $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να αποδείξετε ότι $3<x+y<7$.

Μονάδες (15+10)=25

9. ΘΕΜΑ Β 4.1 35415

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|-|x-2|$.

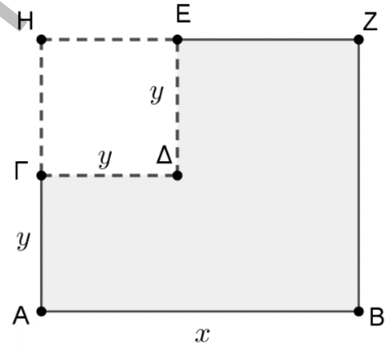
α. Για $1<x<2$, να δείξετε ότι: $A=2x-3$

β. Για $x<1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

Μονάδες (13+12)=25

10. ΘΕΜΑ Β 4.1 35549

Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.



α. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi=2x+4y$.

β. Αν ισχύει $5<x<8$ και $1<y<2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

Μονάδες (10+15)=25

11. ΘΕΜΑ Β 4.1 36777

Δίνονται δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν:

$$|x-3|\le 2 \quad \text{και} \quad |y-6|\le 4.$$

α. Να αποδείξετε ότι: $1\le x\le 5$ και $2\le y\le 10$.

β. Να βρείτε την μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y.

Μονάδες (12+13)=25

12. ΘΕΜΑ Β 4.1 36886

α. Να λύσετε την ανίσωση $|x-5|<2$

β. Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x|>5$.

γ. Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

Μονάδες (8+8+9)=25

13. ΘΕΜΑ Β 4.1 36888

α. Να λύσετε την ανίσωση $3x-1<x+9$.

β. Να λύσετε την ανίσωση $2-\frac{x}{2}\leq x+\frac{1}{2}$.

γ. Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

Μονάδες (7+8+10)=25

14. ΘΕΜΑ Β 4.1 36893

α. Να λύσετε την ανίσωση: $|2x-1|\leq 7$.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1|>2$.

γ. Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

Μονάδες (9+9+7)=25

15. ΘΕΜΑ Β 4.1 36895

α. Να λύσετε την εξίσωση: $|2x+4|=10$.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $|x-5|>1$.

γ. Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (9+9+7)=25

16. **ΘΕΜΑ Β** **4.1** **37170**

Η θερμοκρασία Τ σε βαθμούς Κελσίου (°C), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

$$T = 15 + 25 \cdot x, \text{ όταν } 0 \leq x \leq 200$$

α. Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου, το οποίο βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης.

β. Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με $290^o C$.

γ. Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από $440^o C$;

Μονάδες (7+10+8)=25

17. **ΘΕΜΑ Β** **4.1** **37191**

α. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i. $|1-2x|<5$ και

ii. $|1-2x|\geq 1$

β. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

Μονάδες (9+9+7)=25

18. **ΘΕΜΑ Β** **4.1** **37193**

Δίνεται η παράσταση: $A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)$

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να αποδείξετε ότι η παράσταση Α είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

Μονάδες (12+13)=25

19. ΘΕΜΑ Β 4.1 37193

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β. Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2+A-6=0$

Μονάδες (13+12)=25

20. ΘΕΜΑ Β 4.1 37196

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x-4}$.

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β. Αν $x=4$, να αποδείξετε ότι: $A^2-A=2\left(10-\sqrt{5}\right)$

Μονάδες (12+13)=25

21. ΘΕΜΑ Β 4.1 37200

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1|<2$,

α. να δείξετε ότι $x\in(-3,1)$

β. να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K=\dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x.

Μονάδες (12+13)=25

4.1 Ανισώσεις 1ου Βαθμού (10)

1. ΘΕΜΑ Δ 4.1 13114

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{|x-1|-|3-3x|+|2x-4|}{2}$.

α. Να δείξτε ότι $f(x)=d(x,2)-d(x,1)$.

β. Αν τα σημεία A και B παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 1 και 2, να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $f(x)=0$ και να προσδιορίσετε τη λύση της.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

Μονάδες (9+8+8)=25

2. ΘΕΜΑ Δ 4.1 13312

Δίνεται η εξίσωση $x^2-6x+\lambda=0$ (1) όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β. Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο α·β=λ, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\alpha\beta\le 9$.

ii. Να δείξετε ότι $\alpha\beta=9$ αν και μόνο αν α=β.

γ. Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α, β και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο.

Μονάδες (7+6+5+7)=25

3. **ΘΕΜΑ Δ** **4.1** **13474**

Δίνονται οι ανισώσεις $|x-1| \le \sqrt{3}$ (1) και $3-\frac{x+4}{2}<0$ (2)

α. Να λύσετε την ανίσωση (1).

β. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1).

γ. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).

δ. Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α, β είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) τότε και ο αριθμός $\frac{3\alpha+4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση τους.

Μονάδες (5+5+7+8)=25

4. **ΘΕΜΑ Δ** **4.1** **14650**

α. Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| \le 3$ (1).

β. Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x-1|$.

γ. Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-1| \le 3$.

δ. Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x|-1| \le 3$.

Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδες (7+5+5+8)=25

5. **ΘΕΜΑ Δ** **4.1** **33586**

Δύο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα.

Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους, κ.α.).

Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α. Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηναίο κόστος $K(\nu)$ της επιχείρησης, εάν γεμίζει ν τόνερ το μήνα.

β. Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει τα μηναία έσοδα $E(\nu)$ της επιχείρησης από την πώληση ν τόνερ το μήνα.

γ. Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση

i. να μην έχει ζημιά.

ii. να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ.

Μονάδες $[5+5+(7+8)]=25$

6. **ΘΕΜΑ Δ** **4.1** **33893**

α. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x-4|<2$.

β. Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x του οποίου η απόσταση από το 4 πάνω στο άξονα των πραγματικών είναι μικρότερη από 2.

i. Να δείξετε ότι $3x-4>0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού x από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

iii. Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.

Μονάδες $[7+(5+5+8)]=25$

7. **ΘΕΜΑ Δ** **4.1** **33896**

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι: $|\alpha-2|<1$ και $|\beta-3|\le 2$.

α. Να αποδείξετε ότι $1<\alpha<3$.

β. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκεται ο β.

γ. Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της παράστασης $2\alpha-3\beta$.

δ. Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της παράστασης $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Μονάδες $(4+5+7+9)=25$

8. **ΘΕΜΑ Δ** **4.1** **34322**

Μια υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x, να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που προκύπτει από τη σχέση:

$$\lambda=(2x+5)^2-8x \qquad (1)$$

α. Αν ο εισαγόμενος αριθμός x είναι ο -5, ποιος είναι ο εξαγόμενος αριθμός λ;

β. Αν ο εξαγόμενος αριθμός λ είναι ο 20, ποιος είναι ο εισαγόμενος αριθμός x;

γ. **i.** Να δείξετε ότι η σχέση (1) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί στη μορφή:

$$4x^2+12x+(25-\lambda)=0.$$

ii. Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5.

iii. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές που μπορεί να έχει ο εξαγόμενος αριθμός λ.

Μονάδες [4+6+(2+6+7)]=25

9. **ΘΕΜΑ Δ** **4.1** **34325**

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2-x+\lambda-\lambda^2=0, \text{ με παράμετρο } \lambda\in\mathbb{R}. \qquad (1)$$

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες;

γ. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0<d(x_1,x_2)<2$.

Μονάδες (10+6+9)=25

10. **Θ Ε Μ Α Δ** **4.1** **36671**

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x,5) \le 9$.

α. Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

β. Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x.

γ. Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

δ. Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$$|x+4|+|x-14|=18$$

Μονάδες (5+5+10+5)=25

4.2 Ανισώσεις 2ου Βαθμού (15)

1. ΘΕΜΑ Β 4.2 12722

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=x^2-x-3$

α. Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$

β. Να επιλύσετε την ανίσωση $-2f(x)<0$

Μονάδες (12+13)=25

2. ΘΕΜΑ Β 4.2 12976

α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-x-1$

β. Να λύσετε την ανίσωση $x(1-2x)\leq -1$

Μονάδες (12+13)=25

3. ΘΕΜΑ Β 4.2 13321

α. Να λύσετε την εξίσωση $x^4-16=0$ (1)

β. Να λύσετε την ανίσωση $x^2+3x\leq 0$ (2).

Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2).

Μονάδες (8+9+8)=25

4. ΘΕΜΑ Β 4.2 14189

α. Αν $x^2-3x-4<0$, να δείξετε ότι $-1<x<4$.

β. Δίνεται η παράσταση $A=|2x+2|+|x-5|$ με τις τιμές του x να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος α).

Να αποδείξετε ότι: $A=x+7$.

Μονάδες (12+13)=25

5. ΘΕΜΑ Β 4.2 14474

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+3x-5$.

α. Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου.

β. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

Μονάδες (12+13)=25

6. ΘΕΜΑ Β 4.2 14577

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x-2=0$ (1).

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -1.

β. Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1).

γ. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A=\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x}$, $x\neq 0$, $x\neq -1$.

Μονάδες (8+8+9)=25

7. ΘΕΜΑ Β 4.2 34162

α. Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x-5|\leq 3$ και $2x^2-x-1\geq 0$.

β. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος (α).

Μονάδες (16+9)=25

8. ΘΕΜΑ Β 4.2 34919

α. Να λύσετε την ανίσωση $x^2-10x+21<0$ (1).

β. Αν η ανίσωση (1) έχει λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $3<x<7$ και ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω ανίσωσης, να δείξετε ότι η παράσταση $A=|x-3|+|x-7|$ είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

Μονάδες (13+12)=25

9. ΘΕΜΑ Β 4.2 35030

α. Να αποδείξετε ότι $x^2+4x+5>0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

β. Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B=\left|x^2+4x+5\right|-\left|x^2+4x+4\right|$$

Μονάδες (10+15)=25

10. ΘΕΜΑ Β 4.2 35035

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=3x^2+9x-12,\ x\in\mathbb{R}$.

α. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β. Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του α) ερωτήματος.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (13+12)=25

11. ΘΕΜΑ Β 4.2 36887

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2-3x+1$.

α. Να βρείτε τις ρίζες του.

β. Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες $2x^2-3x+1<0$.

γ. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος β).

Μονάδες (105+10)=25

12. ΘΕΜΑ Β 4.2 36892

α. Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{|x|}{3}-\dfrac{|x|+4}{5}=\dfrac{2}{3}$.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2+2x+3\le 0$

γ. Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (9+9+7)=25

13. ΘΕΜΑ Β 4.2 37168

Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2+5x-6<0$ (1) και $x^2-16\le 0$ (2).

α. Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2).

β. Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

Μονάδες (12+13)=25

14. ΘΕΜΑ Β 4.2 37169

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}$.

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$

β. Να παραγοντοποιήσετε το αρχικό τριώνυμο.

Μονάδες (10+13)=25

15. ΘΕΜΑ Β 4.2 37182

α. Να λυθεί η εξίσωση: $x^2-x-2=0$

β. Να λυθεί η ανίσωση: $x^2-x-2>0$
και να παραστήσετε το σύνολο λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

γ. Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β);
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (8+12+5)=25

4.2 Ανισώσεις 2ου Βαθμού (29)

1. ΘΕΜΑ Δ 4.2 13174

Δίνονται οι παραστάσεις $A=\frac{-x^2+4|x|-3}{|x|-1}$ και $B=\frac{x^2-4|x|+4}{|x|-2}$.

α. Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις Α και Β;

β. Να δείξετε ότι $A=3-|x|$ και $B=|x|-2$

γ. Να λύσετε την ανίσωση $B-A<2d(x,4)-5$

Μονάδες (8+8+9)=25

2. ΘΕΜΑ Δ 4.2 13176

Δίνονται οι ανισώσεις $|x-1|<2$ και $x^2-3x+2\ge 0$

α. Να βρείτε τις λύσεις τους.

β. Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in(-1,1]\cup[2,3)$.

γ. **i.** Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2, με $\rho_1<\rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1,\rho_2\in(-1,1]$, είναι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

ii. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2, με $\rho_1<\rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με

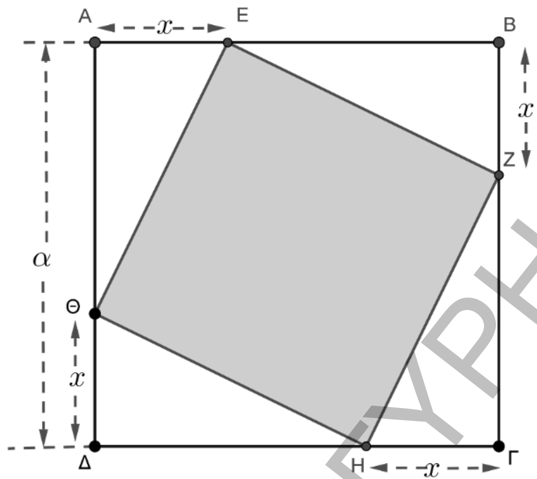
$$\rho_1\in(-1,1] \quad \text{και} \quad \rho_2\in[2,3),$$

είναι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

Μονάδες [8+8+(4+5)]=25

3. **ΘΕΜΑ Δ** **4.2** **13368**

Στο παρακάτω σχήμα οι κορυφές του τετραγώνου ΕΖΗΘ βρίσκονται πάνω στις πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ.



α. Αν η πλευρά του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι α και η απόσταση των κορυφών του ΕΖΗΘ από τις αντίστοιχες κορυφές του ΑΒΓΔ είναι x, όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι το εμβαδόν του ΕΖΗΘ δίνεται από τη σχέση:

$$(\text{ΕΖΗΘ}) = x^2 + (\alpha - x)^2 \quad \text{με } 0 \le x \le \alpha.$$

β. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ΕΖΗΘ δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το μισό του εμβαδού ΑΒΓΔ.

γ. Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου ΑΒΓΔ αν για $x = 1$, το εμβαδόν του ΕΖΗΘ είναι τα δύο τρίτα του εμβαδού του ΑΒΓΔ, δηλαδή: $(\text{ΕΖΗΘ}) = \frac{2}{3}(\text{ΑΒΓΔ})$.

(Δίνεται $\sqrt{3} \approx 1,73$)

Μονάδες (6+11+8)=25

4. **ΘΕΜΑ Δ** **4.2** **14123**

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-\alpha x-(\alpha+1)$, $x\in R$, με παράμετρο $\alpha\in R$.

α. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α να βρείτε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου.

β. Αν είναι $\alpha>-2$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί -1 και $\alpha+1$.

ii. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία το μήκος του διαστήματος λύσεων της ανίσωσης $x^2-\alpha x-(\alpha+1)\le 0$ είναι ίσο με 2024.

iii. Να βρείτε το πρόσημο του $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Μονάδες [7+(4+7+7)]=25

5. **ΘΕΜΑ Δ** **4.2** **14615**

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2-2\lambda x+\lambda^2-1=0, \quad \text{με παράμετρο } \lambda\in\mathbb{R}$$

α. Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του λ, πραγματικές και άνισες ρίζες.

β. Να λύσετε την εξίσωση.

Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1<\rho_2$

γ. Να βρείτε για ποιες της παραμέτρου λ, η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8.

δ. Θεωρούμε έναν αριθμό k ώστε $\rho_1<k<\rho_2$.

Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του αριθμού $k^2-2\lambda k+\lambda^2-1$.

Μονάδες (6+7+6+6)=25

6. **Θ Ε Μ Α Δ** **4.2** **14652**

α. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i. Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

ii. Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \alpha^2, \dfrac{\alpha+\alpha^2}{2}$.

Μονάδες (8+10+7)=25

7. **Θ Ε Μ Α Δ** **4.2** **14653**

Δίνεται η ανίσωση $|x-1| \le 3$. (1)

α. Να λύσετε την ανίσωση (1).

β. Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

γ. Να βρείτε μία ανίσωση 2ου βαθμού που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την (1).

δ. Να δείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιό του, τότε η απόσταση του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3.

Μονάδες (7+3+8+7)=25

8. **Θ Ε Μ Α Δ** **4.2** **14654**

α. Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2,\ x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

β. Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha < \beta$ για τους οποίους ισχύει

$$\left(\alpha^2 - 3\alpha + 2\right)\left(\beta^2 - 3\beta + 2\right) < 0 .$$

i. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha - 1$ και $\beta - 2$ είναι ομόσημοι.

ii. Να δείξετε ότι $\left|(\alpha-1)(\beta-2)\right| = (\alpha-1)(\beta-2)$.

Μονάδες [10+(10+5)]=25

9. **ΘΕΜΑ Δ** **4.2** **14924**

α. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

β. Να δείξετε ότι

$$\left(\frac{\pi+9}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi+9}{3}\right) - 12 > 0, \quad \text{όπου} \quad \pi = 3{,}1415\ldots.$$

γ. Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι

$$(|\alpha|+3)^2 - (|\alpha|+3) - 12 < 0,$$

να δείξετε ότι

$$\alpha \in (-1, 1).$$

Μονάδες (8+9+8)=25

10. **ΘΕΜΑ Δ** **4.2** **14963**

Δίνεται η εξίσωση $|x-4| - |x-2| = 2$.

α. Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της παραπάνω εξίσωσης.

β. Να αιτιολογήσετε γεωμετρικά ότι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν στο $(-\infty, 2]$ και μόνο αυτοί.

γ. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι $|x-4| - |x-2| = 2$, τότε να δείξετε ότι $x^2 - 6x + 8 \geq 0$.

Μονάδες (8+8+9)=25

11. **ΘΕΜΑ Δ** **4.2** **32682**

α. **i.** Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x+3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$.

β. **i.** Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του αριθμού x

ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$|x^2+9x+18| = -x^2-9x-18.$$

Μονάδες $[(4+7)+(7+7)]=25$

12. **ΘΕΜΑ Δ** **4.2** **33582**

Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $\Pi = 40\text{cm}$. Αν $x\,\text{cm}$ είναι το μήκος του ορθογωνίου, τότε να δείξετε ότι:

α. $0<x<20$.

β. Το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση $E(x)=20x-x^2$.

γ. Για το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ισχύει: $E(x)\le 100$, για κάθε $x\in(0,20)$.

δ. Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40 cm, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10 cm.

Μονάδες $(4+8+6+7)=25$

13. **ΘΕΜΑ Δ** **4.2** **33587**

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=-x^2+2x+3,\ x\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

β. Να βρείτε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:

$$f(2{,}999)\cdot f(-1{,}002).$$

γ. Αν $-3<\alpha<3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $-\alpha^2+2|\alpha|+3$.

Μονάδες $(9+7+9)=25$

14. **ΘΕΜΑ Δ** **4.2** **33698**

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-6x+\lambda-3$, με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

β. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

γ. Αν $3<\lambda<12$ τότε:

i. Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

ii. Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa<0$ και $x_1<\mu<x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa\cdot f(\kappa)\cdot\mu\cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες $[5+7+(6+7)]=25$

15. **ΘΕΜΑ Δ** **4.2** **33711**

Δίνεται το τριώνυμο: x^2-2x-8.

α. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x.

β. Αν $\kappa=-\dfrac{8889}{4444}$, η τιμή της παράστασης $\kappa^2-2\kappa-8$ είναι μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Αν ισχύει $-4<\mu<4$, ποιο είναι το πρόσημο της τιμής της παράστασης:

$$\mu^2-2|\mu|-8;$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(10+8+7)=25$

16. **ΘΕΜΑ Δ** **4.2** **33712**

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2+\beta x+\beta^2$, όπου $\beta\in\mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

β. **i.** Αν $\beta\neq 0$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;

ii. Πως αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta=0$;

γ. Με τη βοήθεια της απάντησης στο ερώτημα β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

Μονάδες $[4+(7+6)+8]=25$

17. ΘΕΜΑ Δ 4.2 33855

α. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

ii. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x+3,\ x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)-2}\leq 2$.

Μονάδες [(6+6)+(7+6)]=25

18. ΘΕΜΑ Δ 4.2 33890

α. Να λύσετε την ανίσωση $x^2+1\geq\frac{5}{2}x$ (1).

β. Δίνονται δύο αριθμοί κ,λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$.

i. Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των αριθμών κ,λ.

ii. Να δείξετε ότι $|\kappa-\lambda|\geq\frac{3}{2}$.

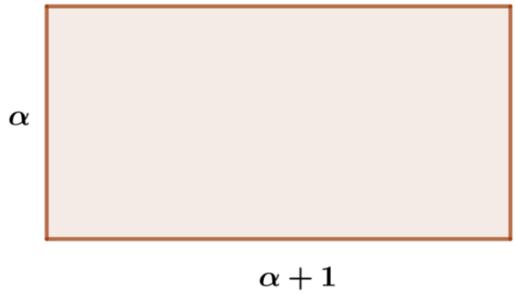
Μονάδες [10+(8+7)]=25

19. ΘΕΜΑ Δ 4.2 33892

α. Να λύσετε την ανίσωση $x^2+x-6<0$.

β. Να λύσετε την ανίσωση $\left|x-\frac{1}{2}\right|>1$.

γ. Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο με πλευρές α και $\alpha+1$.



Ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|>1$. Αν για τον εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E<6$, τότε:

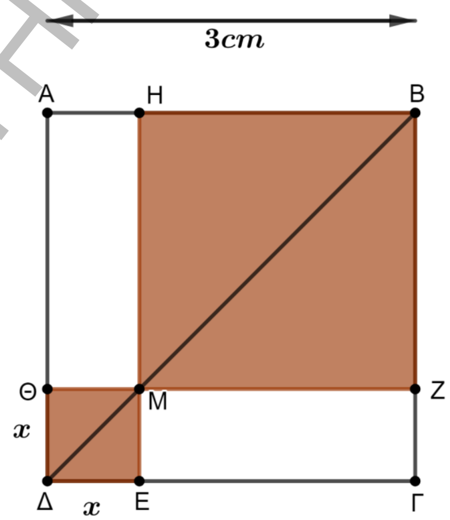
i. Να δείξετε ότι $\frac{3}{2}<\alpha<2$.

ii. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

Μονάδες [8+5+(7+5)]=25

20. **ΘΕΜΑ Δ** **4.2** **34182**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $AB=3cm$ και τυχαίο σημείο Μ που κινείται στη διαγώνιο ΒΔ εσωτερικά (δηλαδή το Μ δεν θα ταυτιστεί με τα άκρα της διαγωνίου).



α. Να εκφράσετε το συνολικό εμβαδόν E των σκιασμένων τετραγώνων ΗΒΖΜ και ΘΜΕΔ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

β. Αν το εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων είναι $E(x)=2x^2-6x+9$, να αποδείξετε ότι $E(x)\geq\frac{9}{2}$, για κάθε $x\in(0,3)$.

γ. Για ποια θέση του M πάνω στη ΒΔ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(9+7+9)=25$

21. **ΘΕΜΑ Δ** **4.2** **34185**

α. Να λύσετε την ανίσωση $x^2-5x-6<0$.

β. Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K=\left(-\frac{46}{47}\right)^2+5\cdot\frac{46}{47}-6$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

γ. Αν $\alpha\in(-6,6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda=\alpha^2-5|\alpha|-6$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες $(9+7+9)=25$

22. **ΘΕΜΑ Δ** **4.2** **34186**

Οι πλευρές x_1 και x_2 ενός ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-2x+\lambda(2-\lambda)=0$, με $\lambda\in(0,2)$.

α. Να βρείτε

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου.

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ.

β. Να δείξετε ότι $E\leq 1$, για κάθε $\lambda\in(0,2)$.

γ. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in(0,2)$ για την οποία το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1. Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

Μονάδες $[(6+6)+7+6]=25$

23. **ΘΕΜΑ Δ** **4.2** **34319**

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + \kappa x - 4$, με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ, το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β. Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\alpha < x_1 < x_2 < \beta,$$

να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (10+5+10)=25

24. **ΘΕΜΑ Δ** **4.2** **34323**

Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ίσες ρίζες;

γ. Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$,

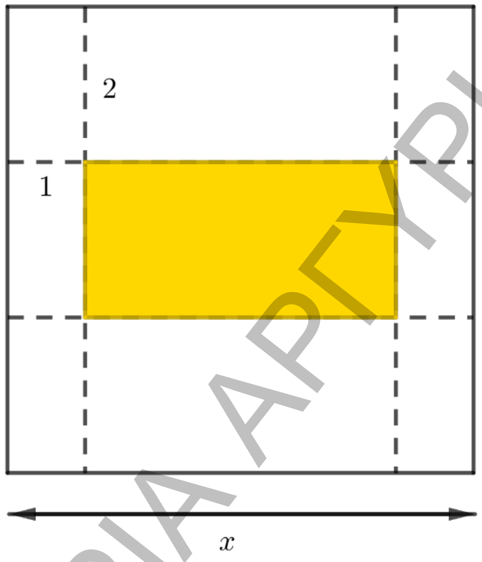
ii. να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$f(x_2), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f(x_2 + 1).$$

Μονάδες [10+6+(4+5)]=25

25. **ΘΕΜΑ Δ** **4.2** **35724**

Για μια επαγγελματική κάρτα επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς $x\,\text{cm}$ $(5 \le x \le 10)$ στο οποίο η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων (με κίτρινο χρώμα στο παρακάτω σχήμα) περιβάλλεται από περιθώρια $2\,\text{cm}$ στο πάνω και στο κάτω μέρος της και $1\,\text{cm}$ δεξιά και αριστερά.



α. Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x) = (x-2)(x-4),\ 5 \le x \le 10 .$$

β. Να βρείτε την τιμή του x, ώστε το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι $35\,\text{cm}^2$.

γ. Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον $24\,\text{cm}^2$.

Μονάδες $(8+7+10)=25$

26. **ΘΕΜΑ Δ** **4.2** **36658**

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση:

$$y = 60t - 5t^2$$

α. Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

β. Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y = 175\text{m}$;

γ. Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m.

Μονάδες (8+8+9)=25

27. **ΘΕΜΑ Δ** **4.2** **36669**

Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \le |x| \le 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

α. Να βρείτε τις λύσεις τους.

β. Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2,3]$.

γ. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

Μονάδες (10+5+10)=25

28. **ΘΕΜΑ Δ** **4.2** **36670**

Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1| \le 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α. Να λύσετε τις ανισώσεις.

β. Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3,-1)$.

γ. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι:

$$\rho_1 - \rho_2 \in (-2,2)$$

Μονάδες (10+5+10)=25

29. **ΘΕΜΑ Δ** **4.2** **36678**

α. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.

i. Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0,\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \sqrt{\alpha}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

ii. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα:

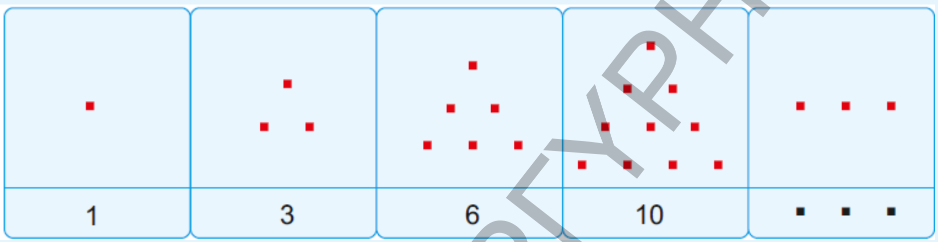
$$\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha}$$

Μονάδες [8+ (10+7)]=25

5.1 Ακολουθίες (1)

1. **ΘΕΜΑ Δ** **5.1** **13056**

Οι αριθμοί 1,3,6,10,... και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, αν παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα λέγονται τριγωνικοί.



Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο $T_\nu = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}, \quad \nu \in \mathbb{N}^*$.

α. Να βρείτε τον 10^o τριγωνικό αριθμό.

β. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός.

γ. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

Μονάδες (6+9+10)=25

Κεφάλαιο 5ο ΠΡΟΟΔΟΙ

5.2 Αριθμητική πρόοδος (20)

1. ΘΕΜΑ Β 5.2 13319

Δίνονται οι αριθμοί

$$1-x,\ \frac{x}{2},\ 2x-1,\quad x\in\mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, με αυτή τη σειρά, είναι πάντοτε διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.

β. Να βρείτε την τιμή του x, αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω αυτής της προόδου είναι 5.

Μονάδες (13+12)=25

2. ΘΕΜΑ Β 5.2 14476

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών: $1, 3, 5, 7, \dots$

α. **i.** Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου.

ii. Να βρείτε τον τριακοστό της όρο.

β. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου ισούται με 30^2.

Μονάδες (4+8+13)=25

3. ΘΕΜΑ Β 5.2 14512

α. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$x^2=1 \quad \text{και} \quad x^2=9.$$

β. Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά και στη συνέχεια

i. να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς αριθμητικής προόδου (α_ν) της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω.

ii. να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (α_ν).

Μονάδες (9+9+7)=25

4. ΘΕΜΑ Β 5.2 14573

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει:

$$\alpha_4 - \alpha_2 = 10.$$

α. Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$.

β. Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 33, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

Μονάδες (10+15)=25

5. ΘΕΜΑ Β 5.2 14574

Ο 1ος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) ισούται με 2 και ο 3ος όρος ισούται με 8.

α. Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

β. Αν είναι $\omega = 3$, να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 35.

Μονάδες (12+13)=25

6. ΘΕΜΑ Β 5.2 14597

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε επόμενη σειρά έχει τέσσερα καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η έβδομη σειρά έχει 36 καθίσματα.

α. Αποτελούν τα καθίσματα κάθε σειράς του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

β. Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς.

γ. Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά.

Μονάδες (8+8+9)=25

7. ΘΕΜΑ Β 5.2 14656

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) δίνονται

$$\alpha_1 = 41 \quad \text{και} \quad \alpha_6 = 26.$$

α. Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3.

β. Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν, ώστε

$$\alpha_\nu = \nu.$$

Μονάδες (12+13)=25

8. ΘΕΜΑ Β 5.2 34145

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α. Να δείξετε ότι: $\dfrac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7} = 2$.

β. Αν $\alpha_{15}-\alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

Μονάδες (13+12)=25

9. ΘΕΜΑ Β 5.2 34147

Σε αριθμητική πρόοδο (αν) με διαφορά ω = 4, ισχύει: $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

α. Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

β. Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (12+13)=25

10. ΘΕΜΑ Β 5.2 34153

Οι αριθμοί x+6, 5x+2, 11x-6 είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

α. Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι ω=4.

β. Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1=0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων.

Μονάδες (12+13)=25

11. ΘΕΜΑ Β 5.2 34158

Σε αριθμητική πρόοδο (αν) είναι $\alpha_1=2$ και $\alpha_5=14$.

α. Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με 3.

β. Να βρείτε πόσους από τους πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου (αν) πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77. (Δίνεται: $\sqrt{1849}=43$).

Μονάδες (12+13)=25

12. ΘΕΜΑ Β 5.2 34746

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\beta x+\left(\beta^2-4\right)$, (1) με παράμετρο $\beta\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1=\beta-2$ και $x_2=\beta+2$.

β. Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1,β,x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

Μονάδες (12+13)=25

13. ΘΕΜΑ Β 5.2 34871

α. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε οι αριθμοί $x+2$, $x+1$, $3x+2$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β. Για $x=-1$, να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

Μονάδες (13+12)=25

14. ΘΕΜΑ Β 5.2 34877

α. Να λύσετε την εξίσωση $x^2-2x-3=0$ (1).

β. Αν x_1,x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1,1,x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Μονάδες (13+12)=25

15. ΘΕΜΑ Β 5.2 35046

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_1=2$ και $\alpha_{25}=\alpha_{12}+39$.

α. Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega=3$.

β. Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

Μονάδες (12+13)=25

16. ΘΕΜΑ Β 5.2 35143

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2=0$, $\alpha_4=4$.

α. Να αποδείξετε ότι $\omega=2$ και $\alpha_1=-2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.

β. Να αποδείξετε ότι ο ν-οστος όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu=2\nu-4$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

Μονάδες (10+15)=25

17. ΘΕΜΑ Β 5.2 35299

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α. Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς.

β. Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

γ. Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

Μονάδες (9+8+8)=25

18. **ΘΕΜΑ Β** **5.2** **35408**

Οι αριθμοί $A=1$, $B=x+4$, $\Gamma=x+8$, είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α. Να βρείτε την τιμή του x.

β. Αν $x=1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν).

i. να υπολογίσετε τη διαφορά ω.

ii. να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.

Μονάδες (10+7+8)=25

19. **ΘΕΜΑ Β** **5.2** **35375**

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι:

$$\alpha_1=19 \quad \text{και} \quad \alpha_{10}-\alpha_6=24.$$

α. Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega=6$.

β. Να βρείτε τον α_{20}.

γ. Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

Μονάδες (9+8+8)=25

20. **ΘΕΜΑ Β** **5.3** **36897**

α. Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων 1, 2, 3,…,ν.

β. Να βρείτε πόσοι από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους έχουν άθροισμα 45

Μονάδες (12+13)=25

5.2 Αριθμητική πρόοδος (21)

1. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **12694**

Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

α. Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.
Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος;

β. Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων.
Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι.

γ. Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι.

δ. Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι;

Μονάδες [(3+4)+6+6+6]=25

2. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **12764**

Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

α. Αν α_ν το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι α_ν είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω.

β. Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα.

γ. Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθήμενους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα.

Μονάδες (9+9+7)=25

3. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **12945**

Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_{11} = 32$ και την αριθμητική πρόοδο (β_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha_3 = 2$ και $\omega = 3$

β. Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο.

γ. Αν το άθροισμα των 2ν πρώτων όρων της είναι ίσο με το άθροισμα των ν πρώτων όρων της (β_ν) να βρείτε τον αριθμό ν.

Μονάδες (7+8+10)=25

4. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **13089**

Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δυο φορές γιατί της άρεσε πολύ!
Την πρώτη φορά, διάβασε την 1η ημέρα 1 σελίδα, την 2η ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Τη δεύτερη φορά άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Διάβασε την 1η ημέρα 13 σελίδες, την 2η ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δυο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

α. **i.** Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο α_ν αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

ii. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_ν) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο β_ν, αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

β. Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο.

γ. Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.

δ. Να δείξετε ότι $\alpha_\nu = \beta_{8-\nu}$ για κάθε $\nu = 1, 2, \ldots, 7$

Μονάδες $[(4+4)+7+5+5]=25$

5. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **13171**

Το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (α_ν) είναι

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu = S_\nu = 2\nu^2 + 3\nu, \quad \nu \in \mathbb{N} \text{ με } \nu \geq 1$$

α. Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1.

β. Να αποδείξετε ότι $S_{\nu-1} = 2\nu^2 - \nu - 1, \quad \nu \geq 2$

γ. Να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu = 4\nu + 1, \quad \nu \geq 1$

δ. Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω.

Μονάδες $(5+6+7+7)=25$

6. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **13173**

Δίνεται η ακολουθία (α_ν) με γενικό τύπο $\alpha_\nu = 10\nu + 3$

α. **i.** Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος.

ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

β. Να βρείτε ποιοι όροι της (α_ν) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401.

Πόσοι είναι οι όροι αυτοί;

γ. Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401.

Μονάδες $[(6+3)+8+8]=25$

7. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **14758**

Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν 5 τέτοια οχήματα. Στη συνέχεια όμως, κάθε μήνα κατασκευάζονταν 13 νέα οχήματα.

α. Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα συνολικά στο τέλος κάθε μήνα στο διάστημα του πρώτου εξαμήνου;

β. Να αιτιολογήσετε γιατί ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

γ. Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τα τέσσερα πρώτα χρόνια;

δ. Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το $250^{ο}$ αυτοκίνητο;

Μονάδες (6+6+6+7)=25

8. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **14809**

Ο Θοδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ». Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κοκ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων

ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ…

α. Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (α_ν) με $\alpha_1=5$ και να βρείτε τη διαφορά της.

β. Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για $23^{η}$ φορά το γράμμα Β.

γ. Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην $200^{η}$ θέση στην παραπάνω διαδοχή.

Μονάδες (6+10+9)=25

9. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **14927**

Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ. Επιπλέον, μόνο για τη δέσμευση του χώρου πρέπει ο ενδιαφερόμενος να πληρώσει ένα πάγιο ποσό, ακόμα κι αν τελικά δεν γίνει η δεξίωση. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν)

α. Να δείξετε ότι το κόστος για ν καλεσμένους είναι $\alpha_\nu = 107\nu + 1210$. (1)

β. Να ερμηνεύσετε τη σημασία

i. του αριθμού 1210 στη σχέση (1).

ii. της διαφοράς $\omega = 107$ της προόδου στο πλαίσιο του προβλήματος.

γ. Να υπολογίσετε το κόστος για 80 καλεσμένους.

Μονάδες [9+(5+5)+6]=25

10. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **14962**

Έστω μία αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά $\omega = 3$. Αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $\Delta = [2,8]$ υπάρχουν ακριβώς 3 διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου (α_ν),

α, Να εξετάσετε αν ο αριθμός μηδέν είναι όρος της (α_ν).

β. Να βρείτε τους 3 διαδοχικούς όρους της (α_ν) που υπάρχουν στο $\Delta = [2,8]$.

γ. Αν $\alpha_6 = 14$,

i. να βρείτε τον α_1.

ii. να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της (α_ν) που πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο του 186. (Δίνεται $\sqrt{4489} = 67$)

Μονάδες [6+7+(6+6)]=25

11. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **32741**

Στην Α' τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας, η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται τον Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x-1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α. Να βρείτε την τιμή του x.

β. Να αποδείξετε ότι η Α’ τάξη έχει 90 μαθητές.

γ. Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες θα δημιουργηθούν.

Μονάδες $(6+6+13)=25$

12. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **33579**

Οι αριθμοί : $x^2+5,\quad x^2+x,\quad 2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x.

β. Αν $x=3$ και ο αριθμός x^2+5 είναι ο $4^{ος}$ όρος της προόδου, να βρείτε:

i. Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

ii. Τον πρώτο όρο της προόδου.

iii. Το άθροισμα $S=\alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+\ldots+\alpha_{24}$.

Μονάδες $(6+5+6+8)=25$

13. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **33581**

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο $3^{ος}$ όρος είναι $\alpha_3=8$ και ο $8^{ος}$ όρος είναι $\alpha_8=23$.

α. Να βρείτε τον $1^{ο}$ όρο α_1 και τη διαφορά ω της προόδου.

Αν $\alpha_1=2$ και $\omega=3$,

β. Να υπολογίσετε τον $31^{ο}$ όρο της προόδου.

γ. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S=(\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+(\alpha_3+3)+\ldots+(\alpha_{31}+31)$

Μονάδες $(9+6+10)=25$

14. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **33583**

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_{20} = 61$.

α. Να αποδείξετε ότι ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 4$ και η διαφορά είναι $\omega = 3$.

β. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου.

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν), τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$.

Μονάδες (8+8+9)=25

15. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **33858**

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_2 = \kappa^2$ και $\alpha_3 = (\kappa+1)^2$, όπου κ ακέραιος με $\kappa > 1$.

α. Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι περιττός αριθμός.

β. Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$, τότε:

i. Να βρείτε την τιμή του κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$.

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 72 είναι όρος της προόδου.

Μονάδες [8+(8+9)]=25

16. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **36650**

Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21 € ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις. Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.

α. Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.

β. Αν, για κάθε $\nu \leq 51$ ο αριθμός α_ν εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο ν-οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου.

γ. Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51ος επιβάτης.

δ. Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21 € ανά εισιτήριο. (Δίνεται ότι: $\sqrt{10201} = 101$)

Μονάδες (4+6+7+8)=25

17. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **36653**

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_ν), όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$ της οποίας οι τρεις πρώτοι όροι είναι:

$$\alpha_1 = x,\ \alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4,\ \alpha_3 = x^2 - 2$$, με x ακέραιο.

α. Να αποδείξετε ότι $x = 3$.

β. Να βρείτε τον ν-οστό όρο της προόδου και να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014.

γ. Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + ... + \alpha_{15}$.

Μονάδες (10+8+7)=25)

18. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **36660**

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επομένη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγουμένη κυψέλη.

α. Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το ν-οστό όρο αυτής της προόδου.

Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;

β. Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20η κυψέλη;

γ. Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη συλλέγει το μέλι, από μια κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

i. Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη;

ii. Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

Μονάδες [6+6+(6+7)]=25

19. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **36662**

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμία από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α. Να βρείτε ποσά καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

β. Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου.

γ. Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7η μέχρι και την 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

Μονάδες (10+5+10)=25

20. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **36674**

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιο του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α. Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών.

γ. Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ. Ο Γιώργος πηρέ το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

Μονάδες (4+7+7+7)=25

21. **ΘΕΜΑ Δ** **5.2** **37204**

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων.

Η 1^{η} σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7^{η} σειρά έχει 28 καθίσματα.

α. Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί οροί αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.

β. Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου.

γ. Ποσά καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

δ. Αν στην 1^{η} σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2^{η} υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3^{η} υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2^{η} και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i. Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

ii. Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.

Μονάδες [5+4+5+(5+6)]=25

5.3 Γεωμετρική πρόοδος (10)

1. **ΘΕΜΑ Β** 5.3 12763

Δίνεται μία πρόοδος α_ν με πρώτους όρους $2,\ 2\sqrt{2},\ 4,\ 4\sqrt{2},$

α. Να εξετάσετε αν η α_ν είναι αριθμητική πρόοδος.

β. Να αποδείξετε ότι η α_ν είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το ν-οστό της όρο.

Μονάδες (12+13)=25

2. **ΘΕΜΑ Β** 5.3 12787

α. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$

β. Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό κ ώστε οι αριθμοί $\kappa - 2,\ \kappa,\ 2\kappa + 3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο.

Μονάδες (10+15)=25

3. **ΘΕΜΑ Β** 5.3 14920

Μια γεωμετρική πρόοδος (α_ν) έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 4$, λόγο $\lambda > 0$ και $\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1} = 4$.

α. Να αποδείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 2$.

β. Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου.

γ. Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

Μονάδες (9+8+8)=25

4. **ΘΕΜΑ Β** 5.3 34156

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει $\dfrac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$.

α. Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$.

β. Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1.

Μονάδες (10+15)=25

5. ΘΕΜΑ Β 5.3 34447

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0 \ (1)$, με παράμετρο $\beta > 0$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$.

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

Μονάδες (12+13)=25

6. ΘΕΜΑ Β 5.3 34874

α. Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - 5x + 2 = 0$ (1).

β. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Μονάδες (13+12)=25

7. ΘΕΜΑ Β 5.3 35037

Οι αριθμοί $\kappa - 2$, 2κ και $7\kappa + 4$, $\kappa \in \mathbf{N}$ είναι με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν).

α. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου.

β. **i.** Να εκφράσετε τον 2^o όρο, τον 5^o και τον 4^o όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1.

ii. Να αποδείξετε ότι $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$.

Μονάδες [12+(6+7)]=25

8. **Θ Ε Μ Α Β** **5.3** **35042**

α. Να βρείτε, για ποιες τιμές του x, οι αριθμοί $x+4,\ 2-x,\ 6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β. Αν $x=5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, να βρείτε:

i. το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου. **ii.** τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

Μονάδες [13+(6+6)]=25

9. **Θ Ε Μ Α Β** **5.3** **35205**

α. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: $x,\ 2x+1,\ 5x+4$, με την σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β. Να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i. $x=1$ **ii.** $x=-1$

Μονάδες [13+(6+6)]=2512)

10. **Θ Ε Μ Α Β** **5.3** **36891**

Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο λ, για την οποία ισχύει: $\alpha_3=1$ και $\alpha_5=4$.

α. Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.

β. Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_\nu=2^{\nu-3}$

Μονάδες (13+12)=25

5.3 Γεωμετρική πρόοδος (10)

1. ΘΕΜΑ Δ 5.3 12731

Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ ($\kappa \neq 0,\ \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$).

Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$

α. Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός.

γ. Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa \cdot \lambda$, $(\kappa > 0,\ \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1)$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$

να βρείτε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$.

Μονάδες (8+10+7)=25

2. ΘΕΜΑ Δ 5.3 12998

Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (α_ν): $\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$

α. Να αποδείξετε ότι:

i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^7$

β. Αν $\alpha_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο ν-οστός όρος της γεωμετρικής προόδου.

γ. Αν $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της

γεωμετρικής προόδου (α_ν) είναι ίσο με $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}$.

Μονάδες [(5+5)+7+8]=25

3. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **14375**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \mu x - 2, \ \mu \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$

β. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι αριθμοί $x = -2$ και $x = 3$ βρίσκονται εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ ενώ ο $x = 1$ βρίσκεται εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

γ. Αν επιπλέον οι τιμές $f(-2), f(1), f(3)$ με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε:

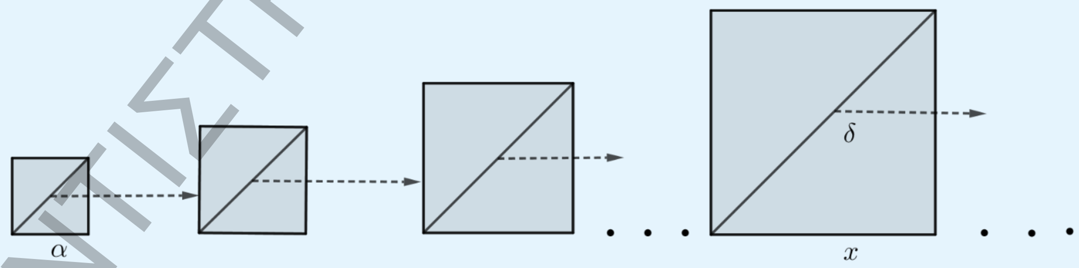
i. Να βρείτε τις τιμές του μ.

ii. Για $\mu = \dfrac{13}{7}$ να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου.

Μονάδες $[6+6+(7+6)]=25$

4. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **14645**

Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς α, σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



α. **i.** Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x, να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta = \sqrt{2}$.

ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda=2$ και γενικό όρο $\alpha_\nu=\alpha^2\cdot 2^{\nu-1}$.

β. Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με 8 τ.μ, να βρείτε:

i. την πλευρά α του αρχικού τετραγώνου.

ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν 255 τ.μ.

Μονάδες [(4+7)+(8+6)]=25

5. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **33891**

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν:

$\alpha_3=4,\ \alpha_5=16$ και $\lambda>0$.

α. Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τον λόγο λ της προόδου.

β. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με $\beta_\nu=\dfrac{1}{\alpha_\nu}$, $\nu=1,2,3,\ldots$ είναι επίσης γεωμετρική πρόοδος με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν).

γ. Αν S_{10} είναι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (α_ν) και S'_{10} το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (β_ν) αντίστοιχα, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$S'_{10}=\frac{1}{2^9}S_{10}.$$

Μονάδες (8+9+8)=25

6. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **34180**

Δίνονται οι αριθμοί $2,x,8,\ x\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την τιμή του x, ώστε οι αριθμοί $2,x,8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

β. Να βρείτε τον αριθμό x, ώστε οι $2,x,8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;

γ. Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος $2,5,8,11,...$ και (β_ν) η γεωμετρική πρόοδος $2,4,8,16,...$, τότε να βρείτε:

i. Το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν).

ii. Την τιμή του ν, ώστε για το άθροισμα S_ν του γi) ερωτήματος να ισχύει:

$$2\cdot(S_\nu+24)=\beta_7.$$

Μονάδες [5+7+(5+8)]=25

7. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **34181**

Δίνεται ορθογώνιο μήκους α, πλάτους β και εμβαδού E. Οι αριθμοί α, E, β, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

α. Να υπολογίσετε την τιμή του εμβαδού E.

β. Αν $E=1$ και $\alpha+\beta=10$,

i. να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες α και β.

ii. να βρείτε τις διαστάσεις α και β του ορθογωνίου.

Μονάδες [10+(5+10)]=25

8. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **36649**

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204.800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102.400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51.200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α. Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

β. Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3.200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_ν το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης $(\nu\leq 5)$.

i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

ii. Να εκφράσετε το πλήθος β_ν των βακτηρίων συναρτήσει του ν.

iii. Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

Μονάδες [6+(6+6+7)]=25

9. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **36677**

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1^o μήνα 1 ευρώ, το 2^o μήνα 2 ευρώ, τον 3^o μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει πόσο διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1^o μήνα 100 ευρώ, το 2^o μήνα 110 ευρώ, τον 3^o μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει πόσο κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α. Να βρείτε

i. το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το ν^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

ii. το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το ν^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

iii. το ποσό A_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

iv. το ποσό B_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

β. **i.** Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα;

ii. Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

Μονάδες [(4+4+5+5)+(3+4)]=25

10. **ΘΕΜΑ Δ** **5.3** **37205**

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α. Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5ης ημέρας μετά το ατύχημα.

β. Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.;

γ. Στο τέλος της 9ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

Μονάδες (7+9+9)=25

Κεφάλαιο 6ο ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης (16)

1. ΘΕΜΑ Β 6.1 12765

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-2}$.

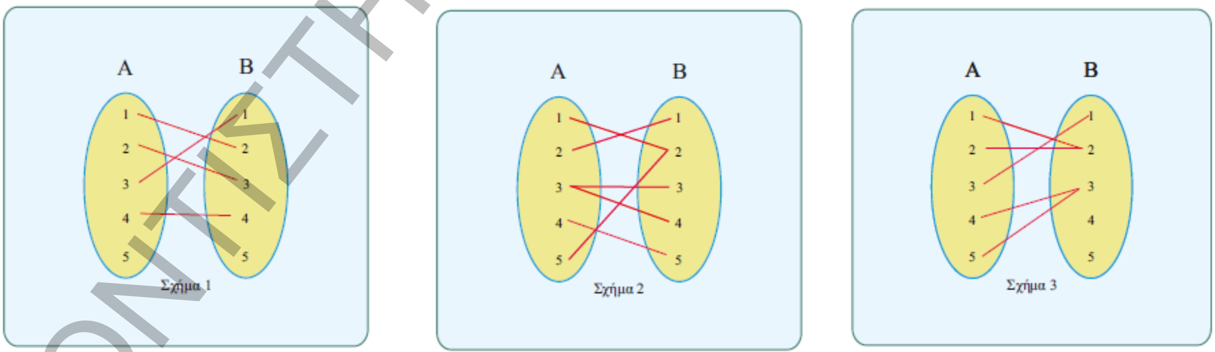
α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης f για όποιους από τους αριθμούς -1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 6, είναι αυτό δυνατό.

Μονάδες (13+12)=25

2. ΘΕΜΑ Β 6.1 12908

Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β.



α. Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το Α στο Β ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το Α στο Β.

β. Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f,

i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

ii. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών f(A) της συνάρτησης f.

iii. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(2)$.

Μονάδες [9+(4+4+8)]=25

3. **ΘΕΜΑ Β** **6.1** **12997**

Έχουμε μπροστά μας τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της Α΄ Λυκείου ενός Γενικού Λυκείου.

Σχηματίζουμε τα σύνολα Α, με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της Α΄ τάξης ενός Γενικού Λυκείου και Β με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της Α΄ τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου.

Ορίζουμε την αντιστοίχιση $f: A \to B$ σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την $g: B \to A$ με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.

α. Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $f: A \to B$ ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο Α στο σύνολο Β.

β. Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση $g: B \to A$ αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο Β στο σύνολο Α και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή.

Μονάδες (10+15)=25

4. **ΘΕΜΑ Β** **6.1** **13026**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 2x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$.

α. Να υπολογίσετε τις τιμές $f\left(\sqrt{2}\right)$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

β. Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $\left[f(x)\right]^2 = 4x - 1$

Μονάδες (10+15)=25

5. ΘΕΜΑ Β 6.1 13031

Δίνεται η συνάρτηση G, με $G(x)=\dfrac{2x+3}{x-4}$.

α. Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης G για $x=2$, $x=0$, $x=-\dfrac{1}{2}$.

β. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G.

γ. Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G, στο 3.

Μονάδες (9+7+9)=25

6. ΘΕΜΑ Β 6.1 13032

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=1-3x$ και $g(x)=\sqrt{x+5}$.

α. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f και g.

β. Να δείξετε ότι $f(-1)=g(11)$.

γ. Να βρείτε την τιμή του x, ώστε $f(x)=g(4)$

Μονάδες (8+8+9)=25

7. ΘΕΜΑ Β 6.1 14681

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<0 \\ 2x+2, & x\geq 0 \end{cases}$$

α. Να βρείτε τις τιμές $f(3)$ και $f(-3)$

β. Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x)=8$.

Μονάδες (12+13)=25

8. ΘΕΜΑ Β 6.1 14728

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x<0 \\ x^2+1, & x\geq 0 \end{cases}$

α. Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(-1)$ και $f(1)$

β. Για $x\geq 0$ να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\geq 2$.

Μονάδες (12+13)=25

9. ΘΕΜΑ Β 6.1 14781

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x\to y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: -2, -1, 0, $\frac{1}{2}$, 1 και 3.

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

α. i. Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x\to y$ είναι συνάρτηση.

ii. Είναι η αντιστοίχιση $y\to x$ συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x\to y$.

Μονάδες (13+12)=25

10. ΘΕΜΑ Β 6.1 34446

Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μία πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: $y=35+0,8x$

α. Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;

β. Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

Μονάδες (12+13)=25

11. ΘΕΜΑ Β 6.1 35298

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} 2x+4, x<0 \\ x-1, x\geq 0 \end{cases}$

α. Να δείξετε ότι $f(-1)=f(3)$.

β. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ώστε: $f(x)=0$

Μονάδες (13+12)=25

12. ΘΕΜΑ Β 6.1 35405

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2-x-6}$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να δείξετε ότι:

$$f(2)+f(4)=0.$$

Μονάδες (15+10)=25

13. ΘΕΜΑ Β 6.1 37175

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases} 8-x, & x<0 \\ 2x+5, & x\geq 0 \end{cases}$.

α. Να δείξετε ότι $f(-5)=f(4)$.

β. Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ώστε $f(x)=9$.

Μονάδες (13+12)=25

14. ΘΕΜΑ Β 6.1 37185

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-16x}{x-4}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x)=x^2+4x$.

β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=32$.

Μονάδες (15+10)=25

15. ΘΕΜΑ Β 6.1 37189

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $x\neq 0$.

α. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{5}{2}$.

Μονάδες (10+15)=25

16. ΘΕΜΑ Β 6.1 37202

α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2-5x+6 .

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(x)=\frac{1}{x-3}$.

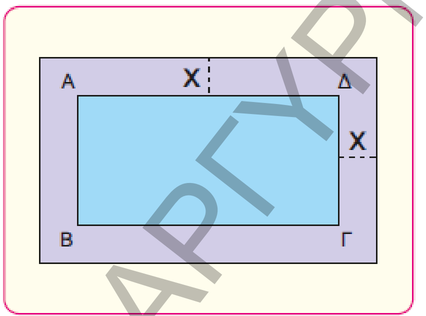
Μονάδες (12+5+8)=25

6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης (13)

1. **ΘΕΜΑ Δ** **6.1** **12911**

Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις 15m και 25m.

Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m (x>0), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση:

$$E(x) = 4x^2 + 80x\,, x > 0\,.$$

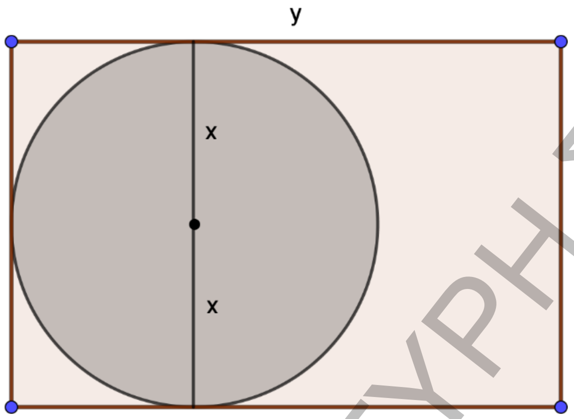
β. Να βρείτε το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500\ m^2$.

γ. Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από $500\ m^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (9+7+9)=25

2. **ΘΕΜΑ Δ** **6.1** **14122**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο με μήκος $y\,\text{cm}$ και περίμετρο $10\,\text{cm}$. Μέσα σε αυτό δίνεται κύκλος με ακτίνα $x\,\text{cm}$, ο οποίος εφάπτεται στις τρεις πλευρές του ορθογωνίου.



α. **i.** Να αποδείξετε ότι η σχέση που εκφράζει το μήκος y (σε cm) του ορθογωνίου ως συνάρτηση της ακτίνας x του κύκλου είναι:

$$y = 5 - 2x,\ x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου (σε cm^2) δίνεται από τη σχέση

$$E_{\text{ορθ}} = 10x - 4x^2,\ x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

β. Να αποδείξετε ότι το μέρος του εμβαδού του ορθογωνίου (σε cm^2) που βρίσκεται έξω από τον κύκλο δίνεται από τη σχέση:

$$E = 10x - (\pi + 4)x^2,\ x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

γ. Αν το εμβαδό E του ορθογωνίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο είναι ίσο με $(6-\pi)\text{cm}^2$ και ο x είναι ένας ρητός αριθμός, τότε να βρείτε:

i. την ακτίνα x του κύκλου.

ii. τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

Μονάδες [(4+4)+6+(6+3)]=25

3. **ΘΕΜΑ Δ** **6.1** **14562**

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}.$$

α. **i.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

ii. Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ για κάθε $x\in A$.

β. Να εξετάσετε αν η ευθεία $y=1$ έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $|f(x)|$.

Μονάδες [(7+8)+10]=25

4. **ΘΕΜΑ Δ** **6.1** **14629**

Σε μια γραπτή εξέταση 100 ερωτήσεων Σ-Λ (Σωστό - Λάθος) σε κάποιο Πανεπιστήμιο, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 1 μονάδα και κάθε λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται με $-\frac{1}{3}$ της μονάδας (για κάθε τριάδα λανθασμένων απαντήσεων αφαιρείται μια μονάδα).

α. Να αποδείξετε ότι αν ένας φοιτητής απαντήσει σωστά σε x από τις 100 ερωτήσεις, τότε η βαθμολογία του $E(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$E(x)=\frac{4}{3}(x-25).$$

β. Ένας φοιτητής βαθμολογήθηκε με 88. Πόσες ήταν οι σωστές και πόσες οι λανθασμένες απαντήσεις που έδωσε;

γ. Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50. Πόσες σωστές απαντήσεις πρέπει να δώσει ένας φοιτητής για να πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση που είναι 50;

δ. Το άθροισμα των επιδόσεων δυο φοιτητών ήταν 140. Πόσες ήταν οι λανθασμένες απαντήσεις και των δυο μαζί;

Μονάδες (7+4+8+6)=25

5. **ΘΕΜΑ Δ** **6.1** **14655**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\mathrm{A}=90°$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x και y τέτοια, ώστε

$$x+y=10.$$

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου τριγώνου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$E(x)=\frac{1}{2}\left(10x-x^2\right) \quad \text{με} \quad x\in(0,10).$$

β. **i.** Να αποδείξετε ότι

$$E(x)\le\frac{25}{2} \quad \text{για κάθε } x\in(0,10).$$

ii. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$;

γ. Αν x=5, ποιο συμπέρασμα προκύπτει για το είδος του τρίγωνου ως προς τις πλευρές του;

Μονάδες [8+(7+6)+4]=25

6. **ΘΕΜΑ Δ** **6.1** **14702**

Για της ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ενός κτηρίου, απαιτείται η κατασκευή μιας μακέτας ενός πάρκου, σχήματος ορθογώνιου ΑΒΓΔ, με διαστάσεις

$$x \text{ και } 2x-1 \text{ όπου } x>\frac{1}{2}$$

α. Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν Ε της μακέτας σε συνάρτηση του x.

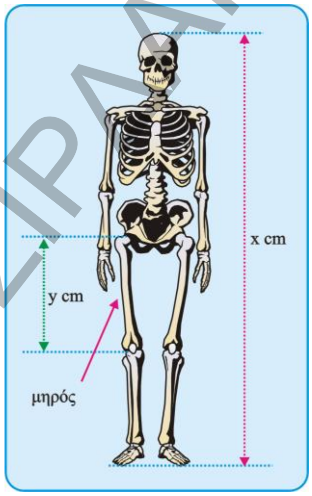
β. Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας, ώστε η περίφραξη του πάρκου στη μακέτα, να μη ξεπερνά τα 8 μέτρα.

γ. Να βρείτε τις τιμές του x, ώστε το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο.

Μονάδες (8+7+10)=25

7. **ΘΕΜΑ Δ** **6.1** **32753**

Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του:



Γυναίκα: $y = 0,43x - 26$ **Άνδρας:** $y = 0,45x - 31$

α. Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας.

β. Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164 cm.
Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42,8 cm που ανήκει σε άντρα.
Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

Μονάδες (8+8+9)=25

8. **ΘΕΜΑ Δ** **6.1** **34184**

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{A} = 90°$) με κάθετες πλευρές $ΑΒ = x$ και $ΑΓ = y$, έτσι ώστε

$$x + y = 10.$$

α. Να εκφράσετε το εμβαδόν $Ε$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

β. Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$E(x) = \frac{1}{2}\left(-x^2 + 10x\right),$$

να δείξετε ότι

$$E(x) \le \frac{25}{2}, \text{ για κάθε } x \in (0,10).$$

γ. Να βρείτε την τιμή του $x \in (0,10)$ ώστε το εμβαδόν $E(x)$ να γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$.

Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $ΑΒΓ$;

Μονάδες (9+9+7)=25

9. **ΘΕΜΑ Δ** **6.1** **34317**

Το ποσό που θα πληρώσει (σε ευρώ) ένας κάτοικος μιας πόλης $Α$ ο οποίος καταναλώνει x κυβικά μέτρα νερού σε ένα χρόνο, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x + 12, & \text{αν } 0 < x \le 30 \\ 0,7x + 6, & \text{αν } x > 30 \end{cases}.$$

α. Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει κάποιος αν:

i. έλλειπε από το σπίτι του και δεν έχει καταναλώσει καθόλου νερό,

ii. έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού,

iii. έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

β. Σε μια άλλη πόλη $Β$, το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο:

$$g(x) = 12 + 0,6x, \text{ για } x \ge 0.$$

Ένας κάτοικος της πόλης $Α$ και ένας κάτοικος της πόλης $Β$ κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά μέτρα νερού. Αν ο κάτοικος της πόλης $Α$ πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλης $Β$, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

Μονάδες [(2+3+5)+15]=25

10. **ΘΕΜΑ Δ** **6.1** **36654**

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Σε διάστημα ενός μηνός τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση

$$K(x)=12,5x+120$$

και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), από τη συνάρτηση

$$E(x)=15,5x\,.$$

α. Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος;

γ. Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση).

δ. Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες (6+4+6+9)=25)

11. **ΘΕΜΑ Δ** **6.1** **36668**

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^oC) σε βαθμούς Φαρενάιτ (^oF), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^oC) σε βαθμούς Κέλβιν (^oK), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου (^oC) το 273.

α. Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν (°K) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ (°F) είναι η

$$K=\frac{F-32}{1,8}+273$$

γ. Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278 °K μέχρι 283 °K. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε °F.

Μονάδες (8+7+10)=25

12. ΘΕΜΑ Δ 6.1 36679

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=|x|-2$.

γ. Για $x\in A$, να λύσετε την εξίσωση $(f(x)+2)^2-4f(x)-5=0$.

Μονάδες (6+9+10)=25

13. ΘΕΜΑ Δ 6.1 36680

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=x^2-4x+\alpha \text{ και } g(x)=\alpha x-5, \text{ με } \alpha\in\mathbb{R}.$$

α. Αν ισχύει $f(2)=g(2)$, να βρείτε την τιμή του α.

β. Για $\alpha=1$,

i. να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=g(x)$.

ii. να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$.

Μονάδες [7+(8+10)]=25

6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης (17)

1. ΘΕΜΑ Β 6.2 12680

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να εξετάσετε αν το σημείο M(4,3) ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

γ. Να εξετάσετε αν το σημείο $N(-1,-2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

Μονάδες (10+7+8)=25

2. ΘΕΜΑ Β 6.2 12686

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

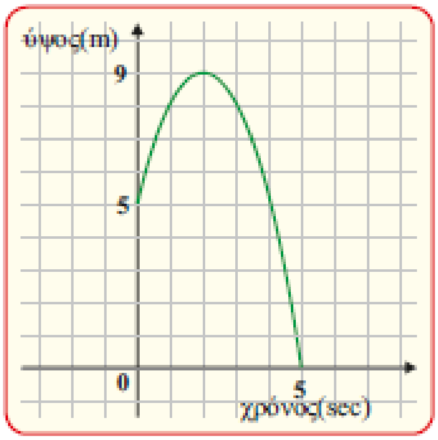
β. Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2, 4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

Μονάδες (8+9+8)=25

3. ΘΕΜΑ Β 6.2 12729

Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή, ώστε η απόστασή του από το έδαφος (μέτρα) σε σχέση με το χρόνο (sec) να φαίνονται στο διπλανό διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



α. Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή;

β. Ποιο το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό;

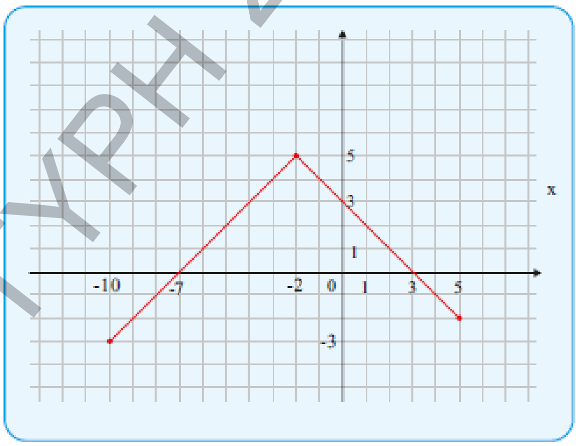
γ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος.

δ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα συναντά το έδαφος.

Μονάδες $(6+6+7+6)=25$

4. **ΘΕΜΑ Β** **6.2** **12910**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α και το σύνολο τιμών της $f(A)$.

β. Να βρείτε τις τιμές $f(-2), f(0), f(3)$.

γ. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x)=0$

δ. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x)<0$

Μονάδες $(8+6+4+7)=25$

5. **ΘΕΜΑ Β** **6.2** **12913**

α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2+2x-3.

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της παραπάνω συνάρτησης f.

ii. Να δείξετε ότι $f(x)=x+3$ για κάθε $x\in A$.

iii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

Μονάδες $[8+(5+4+8)]=25$

6. ΘΕΜΑ Β 6.2 13322

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\frac{x}{x^2+2}+\sqrt{x-1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g.

β. Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για $x=1$, $x=-2$, $x=2$

γ. Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον $y'y$ άξονα;

Μονάδες (8+9+8)=25

7. ΘΕΜΑ Β 6.2 14072

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

β. Ανήκει το σημείο $M(1,3)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f;

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες (8+8+9)=25

8. ΘΕΜΑ Β 6.2 14306

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{5}+3$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Να υπολογίσετε το $f(-24)$.

γ. Να εξετάσετε αν το σημείο (1, 3) ανήκει στην γραφική παράσταση;

Μονάδες (10+7+8)=25

9. ΘΕΜΑ Β 6.2 14596

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x+1}$ με $x\neq-1$.

α. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι

$$f(x)=x-3 \quad \text{για} \quad \text{κάθε} \ x\neq -1.$$

β. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1,\ -4)$.

Μονάδες (13+12)=25

10. ΘΕΜΑ Β 6.2 14603

Δίνεται η συνάρτηση f , με: $f(x)=\begin{cases}2x-5, & x\leq 3\\ x^2, & 3<x<10\end{cases}$

α. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

β. Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $y'y$ άξονα.

Μονάδες (6+10+9)=25

11. ΘΕΜΑ Β 6.2 14628

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x}$, $x\neq 0$.

α. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(4,\ 3)$.

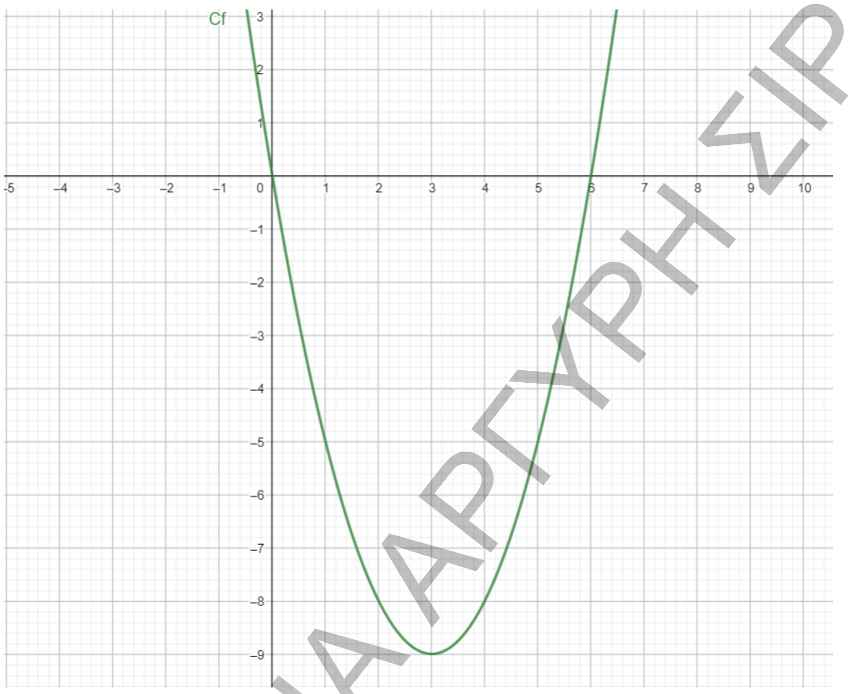
β. Να εξετάσετε αν το σημείο $B(-4,\ -3)$ είναι σημείο της C_f.

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y=3$.

Μονάδες (7+8+10)=25

12. **Θ Ε Μ Α Β** **6.2** **15000**

Δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Με τη βοήθεια του σχήματος:

α. Να βρείτε τις τιμές της f για $x=0,1,3,5$.

β. Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x)=0$.

γ. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x)<0$.

Μονάδες (8+6+11)=25

13. **Θ Ε Μ Α Β** **6.2** **34159**

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

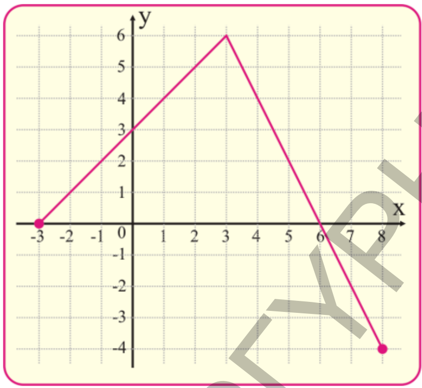
β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f.

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες $(7+9+9)=25$

14. **ΘΕΜΑ Β** **6.2** **35034**

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	−3	−1	0	3		
y					−2	−4

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες συντεταγμένων

δ. Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

Μονάδες $(6+6+6+7)=25$

15. **ΘΕΜΑ Β** **6.2** **35413**

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο

$$f(x)=\frac{1}{x^2-1}.$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το σημείο $M\left(\alpha,\frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Μονάδες (13+12)=25

16. ΘΕΜΑ Β 6.2 36885

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. **i.** Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=0$.

ii. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(3)$.

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

Μονάδες [5+(6+6)+8]=25

17. ΘΕΜΑ Β 6.2 36889

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x-15,\ x\in R$.

α. Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-5)+f(0)+f(3)$.

β. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

Μονάδες (10+15)=25

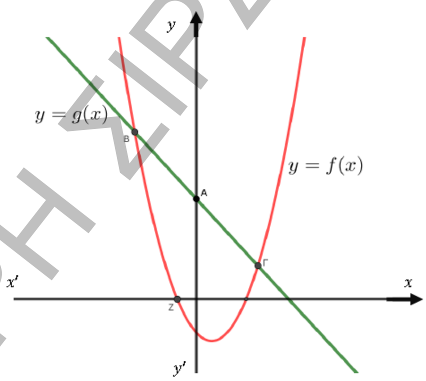
6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης (44)

1. ΘΕΜΑ Δ 6.2 12628

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x)=x^2-x-1 \quad \text{και} \quad g(x)=3-x$$

των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο διπλανό σχήμα.



α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Ζ.

β. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y=f(x)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y=g(x)$.

γ. Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α, η απόσταση των αριθμών $f(\alpha)$ και $-g(\alpha)$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1.

Μονάδες (10+6+9)=25

2. ΘΕΜΑ Δ 6.2 12788

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{3})+f(-\sqrt{3})=8$

β. Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f, με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία y=4.

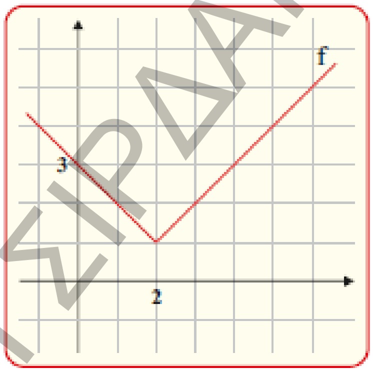
γ. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha\neq\beta$ ώστε να ισχύει f(α)=f(β).

Να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=2$

Μονάδες (7+9+9)=25

3. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **12914**

Έστω η ευθεία $\varepsilon: y = c$, με παράμετρο $c \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x) = |x-2| + 1$, η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο διπλανό σχήμα:



α. i. Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινά σημεία;

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος α) i).

β. Έστω ότι η ευθεία ε έχει με τη γραφική παράσταση της f δυο κοινά σημεία Α, Β. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι $A(3-c,\ c)$ και $B(c+1,\ c)$.

γ. i. Αν Α, Β τα σημεία του ερωτήματος β), με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του c το μήκος του τμήματος ΑΒ είναι $(AB) < 2$;

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ) i).

Μονάδες [(4+5)+8+(4+4)]=25

4. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **12941**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{9-x^2}{3-|x|}$.

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f .

β. Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι $f(x) = 3 + |x|$

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.

δ. Αν $g(x) = 3 - x^2$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Μονάδες (6+5+6+8)=25

5. ΘΕΜΑ Δ 6.2 12944

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x+\frac{1}{x}$ και $g(x)=x-\frac{1}{x}$, $x\neq 0$

α. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=f(2)+g(2)-f\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)$.

β. Να αποδείξετε ότι $[f(x)]^2-[g(x)]^2=4$ για οποιοδήποτε αριθμό x με $x\neq 0$

γ. Θεωρούμε την ευθεία $y=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να αποδείξετε ότι $|\alpha|\geq 2$

Μονάδες (7+8+10)=25

6. ΘΕΜΑ Δ 6.2 13030

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$ και $g(x)=|x+3|$

Να βρείτε:

α. τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β. τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g

γ. τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g

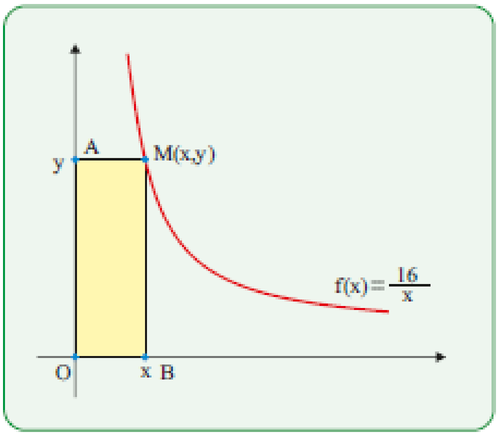
Μονάδες (10+7+8)=25

7. ΘΕΜΑ Δ 6.2 13090

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{16}{x},\quad x>0.$$

Ένα σημείο M(x, y) κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης και έστω A και B οι προβολές του M



στους άξονες y΄y και x΄x αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.

α. Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου Μ έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περίμετρός τους δίνεται, σε μονάδες μήκους, από τη συνάρτηση $\Pi(x)=2x+\dfrac{32}{x}$. όπου x η τετμημένη του Μ.

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜΒ να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους.

γ. Αν Μ΄ είναι το σημείο της γραφικής παράστασης f της ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜ΄Β να είναι τετράγωνο τότε:

i. Να δείξετε ότι το Μ΄ έχει τετμημένη 4.

ii. Να δείξετε ότι το τετράγωνο ΟΑΜ΄Β έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ, δηλαδή ότι $\Pi(x)\geq\Pi(4)$ για κάθε $x>0$.

Μονάδες [8+7+(4+6)]=25=25

8. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **13120**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-(\lambda-1)x-4\lambda^2,\quad \lambda\in\mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β. Για $\lambda\neq 0$ να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$

γ. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το συμμετρικό του σημείου Α(4, 4) ως προς τον άξονα $x'x$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

δ. Για $\lambda=-1$ να βρείτε τις τιμές του *x* για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

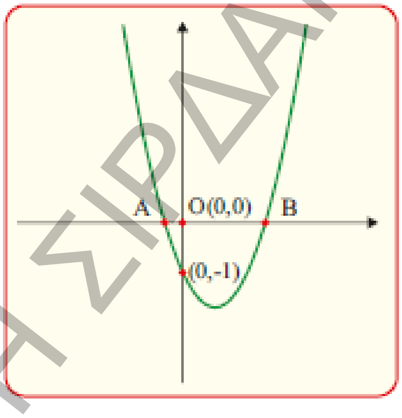
Μονάδες (8+5+7+5=25)

9. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **13168**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 + 2\lambda x + \gamma \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0,-1)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\gamma = 1$

ii. Η γραφική παράσταση της f δεν είναι κάτω από την ευθεία

$$y = -\lambda^2 - 1 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία A και B με συντεταγμένες

$$A\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2+1},\ 0\right) \text{ και } B\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2+1},\ 0\right)$$

γ. Να αποδείξετε ότι η απόσταση των A και B είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Μονάδες [(5+7)+7+6)=25

10. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **13313**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^7 - x}{x^3 - x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο A ορισμού της f.

β. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες $x'x$ και $y'y$

γ. Να δείξετε ότι $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ για κάθε $x \in A$.

δ. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει λύση στο σύνολο A.

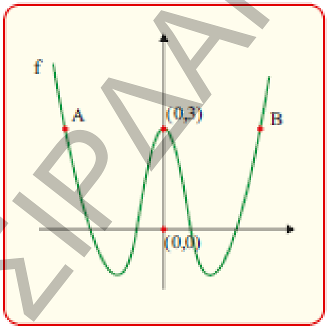
Μονάδες (6+6+6+7)=25

11. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **13454**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της

$$f(x) = \alpha x^4 - 4x^2 + \gamma$$

η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.



α. Να δείξετε ότι $\gamma = 3$

β. Αν $A(\alpha^2 - 3, 3)$ και $B(5 - 3\alpha, 3)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f, όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και να γράψετε τον τύπο της f

γ. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

δ. Με τη βοήθεια του σχήματος και την απάντηση του ερωτήματος γ), να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες (6+7+6+6)=25

12. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **13479**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16|$

Αν $|x| \leq 4$, τότε:

α. Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f χωρίς τις απόλυτες τιμές.

β. Αν $f(x) = 3x^2 - x - 44$

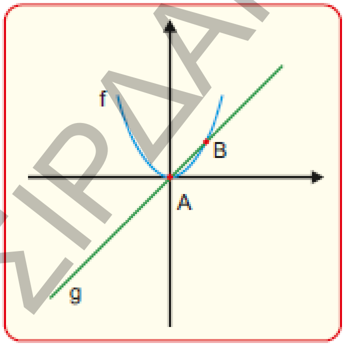
i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

ii. Αν το σημείο $M(\mu + 1, -20)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, να βρείτε την ακέραια τιμή του μ.

Μονάδες (9+8+8)=25

13. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **13557**

Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=x$ που τέμνονται στα σημεία A,B.



α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A,B.

β. Αν $A(0,0)$, $B(1,1)$, τότε:

i. Με βάση το σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο i. ερώτημα.

γ. Αν $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2<\frac{\alpha}{\beta}$ για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς α,β με $\beta\neq 0$, να δείξετε (με βάση τα παραπάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε) ότι $|\alpha|<|\beta|$.

Μονάδες [7+(5+7)+6]=25

14. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **14185**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{x^3-2x^2+x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

β. Να αποδείξετε ότι : $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x\in A$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=1$.

δ. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από την ευθεία $y=1$.

Μονάδες (6+4+7+8)=25

15. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **14190**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

β. Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha\neq-\frac{1}{2}$, τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες α και $-\alpha-1$ έχουν την ίδια τεταγμένη.

γ. Θεωρούμε μεταβλητό σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $\beta>0$. Από το Μ φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και έστω Α και Δ τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τους άξονες, όπου το Α ανήκει στον $x'x$ και το Δ στον $y'y$. Αποδείξτε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου ΟΑΜΔ είναι $[\sqrt{2}(\beta+1)]^2$.

Μονάδες (8+8+9)=25

16. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **14225**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(x-2)(x^2-5x+4)}{x-1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A.

β. Να δείξετε ότι $f(x)=x^2-6x+8$, $x\in A$.

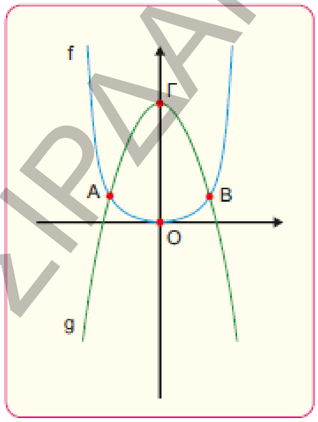
γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι πάνω από την ευθεία $y=3$.

δ. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x)=x^4-6x-4$ τέμνει την γραφική παράσταση της f.

Μονάδες (5+7+6+7)=25

17. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **14307**

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^4$ και $g(x)=2-x^2$. Τα σημεία A,B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f,g ενώ Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $y'y$.



α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A,B,Γ.

Αν $A(-1,1), B(1,1), \Gamma(0,2)$

β. Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

γ. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση σας στο ερώτημα β).

Μονάδες (9+6+10)=25

18. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **14459**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ και η ευθεία $y=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

α. Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

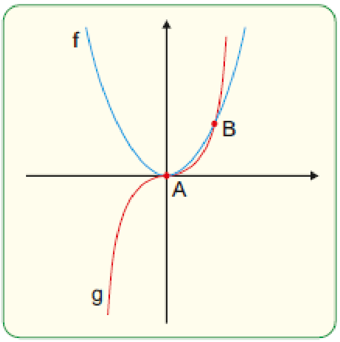
β. Να αποδείξετε ότι αν $0<\alpha<1$, τότε η C_f έχει με την ευθεία δυο κοινά σημεία των οποίων να βρείτε τις τετμημένες.

γ. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $|xf(x)|\le\dfrac{1}{2}$.

Μονάδες (5+10+10)=25

19. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **14665**

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=x^3$ που τέμνονται στα σημεία A,B.



α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B.

Έστω $A(0,0), B(1,1)$.

β. Με βάση το παραπάνω σχήμα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει ότι $x^3 < x^2$.

γ. Είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ. Για τον πραγματικό αριθμό $\pi = 3{,}1415...$ να δείξετε ότι

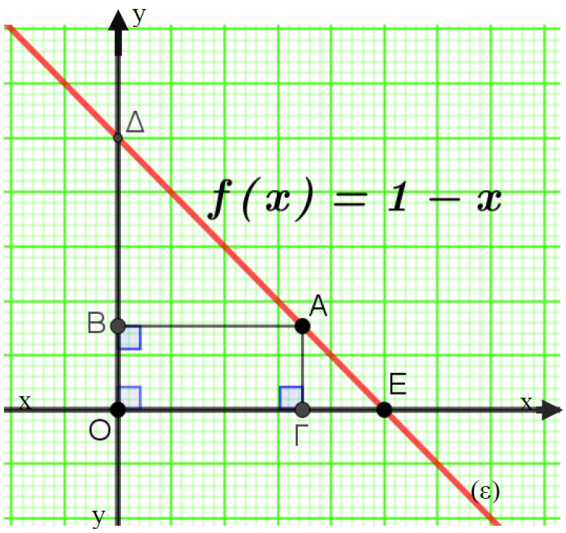
i. $(\pi-3)^3 < (\pi-3)^2$. **ii.** $\pi^3 - 10\pi^2 + 33\pi - 36 < 0$.

Μονάδες $[8+6+5+(3+3)]=25$

20. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **14744**

α. Να αποδείξετε ότι $x - x^2 \le \frac{1}{4}$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. Πότε ισχύει το ίσον;

β. Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί η γραφική παράσταση (ε) της συνάρτησης $f(x) = 1 - x$, $x \in R$, η οποία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα. Ένα μεταβλητό σημείο Α, με τετμημένη α, κινείται επί της ευθείας (ε) και



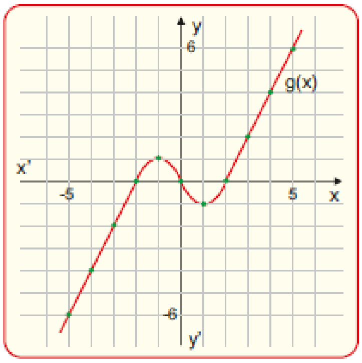
μεταξύ των σημείων Δ και Ε. Φέρνουμε από το Α καθέτους στους άξονες και έστω Β και Γ τα σημεία τομής με $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα.

- **i.** Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΟΓ.
- **ii.** Να αποδείξετε ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του εμβαδού του μεταβλητού ορθογωνίου ΑΒΟΓ είναι $\frac{1}{4}$. Για ποια θέση του σημείου Α επιτυγχάνεται αυτή η τιμή;

Μονάδες [8+(10+7)]=25

21. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **14745**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$. Κάποια σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν ακέραιες συντεταγμένες έχουν σημειωθεί με έντονο τρόπο.



α. Να λύσετε την ανίσωση $-2 \le g(x) \le 0$.

β. Να λύσετε την ανίσωση $|g(x)| \le 2$.

. **i.** Να βρείτε το πλήθος λύσεων των εξισώσεων $g(x) = \frac{4}{5}$ και $g(x) = -1$.

ii. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k.

Μονάδες [6+7+(6+6)]=25

22. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **14760**

Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x - 12}}\right]^3 \cdot (x^2 - 16)$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g.

β. Να δείξετε ότι $g(x)=\dfrac{x+4}{x+3}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.

γ. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τους άξονες.

Μονάδες $(8+9+8)=25$

23. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **14763**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3\sqrt{x^2-8x+\lambda}}{x-4}+2$, για $x\neq 4$ και $\lambda\geq 16$.

α. Να βρείτε το $\lambda\geq 16$ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο της $M(0,-1)$.

β. Αν $\lambda=16$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases}-1, & x<4\\ 5, & x>4\end{cases}$.

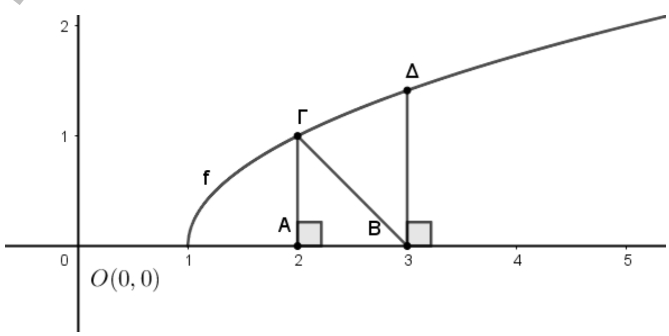
ii. Να σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της f.

iii. Για $x<4$, να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f των οποίων η απόστασή τους από το σημείο $A(-1,-1)$ είναι 10 μονάδες μήκους.

Μονάδες $[7+(7+5+6)]=25$

24. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **14771**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x-\alpha}$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.



α. Με βάση το σχήμα, να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

β. Αν $\alpha = 1$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

γ. **i.** Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ είναι $(2,1)$ και $(3,\sqrt{2})$ αντίστοιχα.

ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος $\mathrm{B\Gamma}$.

iii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\mathrm{B\Delta\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες [6+5+(5+4+5)]=25

25. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **14786**

Δίνονται τα σημεία $A(\lambda,1)$ και $B(2-\lambda^2, \mu)$, με $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.

α. Αν τα σημεία A, B είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$, να βρείτε τις τιμές των λ,μ

β. Αν επιπλέον το σημείο A βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος, να βρείτε την τιμή του λ.

γ. Για $\lambda = -2$ και $\mu = -1$

i. Να βρείτε την απόσταση των σημείων A, B.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB, όπου O η αρχή των αξόνων.

Μονάδες [7+6+(7+5)]=25

26. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **14810**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 7x + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $y = 10$.

α. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 10$.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

γ. Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, $\alpha < \beta$ δυο σημεία της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

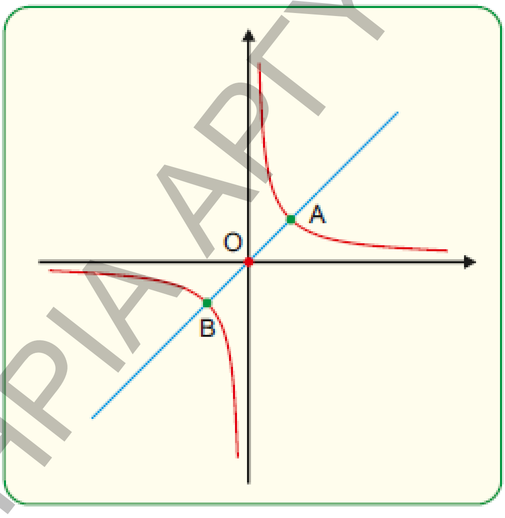
i. Να αποδείξετε ότι $\alpha < \frac{2\alpha+3\beta}{5} < \beta$

ii. Να εξετάσετε αν το σημείο της C_f με τετμημένη $x_0 = \frac{2\alpha+3\beta}{5}$ βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα x΄x.

Μονάδες [5+6+(6+8)]=25

27. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **14925**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{x}$ και η ευθεία AB με εξίσωση $y=x$.



α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των A, B και να δείξετε ότι το $O(0,0)$ είναι το μέσο του AB.

Έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο της γραφική παράστασης της f.

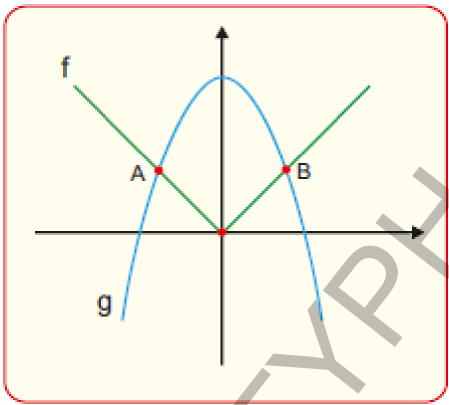
β. Να δείξετε ότι και το συμμετρικό M' του M ως προς το $O(0,0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

γ. Αν $A(1,1), B(-1,-1)$, $M'(-x,-y)$ να δείξετε ότι $(AB) \le (MM')$ για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ και να εξετάσετε πότε $(AB)=(MM')$.

Μονάδες (9+8+8)=25

28. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **14926**

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=|x|$ και $g(x)=2-x^2$. Τα A, B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g.



α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

β. Αν $A(-1,1)$ και $B(1,1)$,

i. Με βάση το παραπάνω σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι: $f(x)<g(x)$.

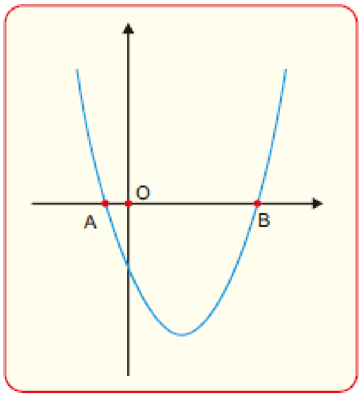
ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $f(x)<g(x)$ επαληθεύοντας την απάντηση στο ερώτημα βi).

Μονάδες $[10+(6+9)]=25$

29. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **14961**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-x-1$.

Αν $A(\omega,0)$, $B(\varphi,0)$



α. Να δείξετε ότι :

i. $\omega+\varphi=1$

ii. $\omega\cdot\varphi=-1$

β. Να δείξετε ότι $(OB)>(OA)$.

γ. Αν ένας θετικός αριθμός β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, να δείξετε ότι $\beta>\varphi$.

δ. Να δείξετε ότι $\varphi<\frac{5}{3}$.

Μονάδες $[(4+4)+6+6+5]=25$

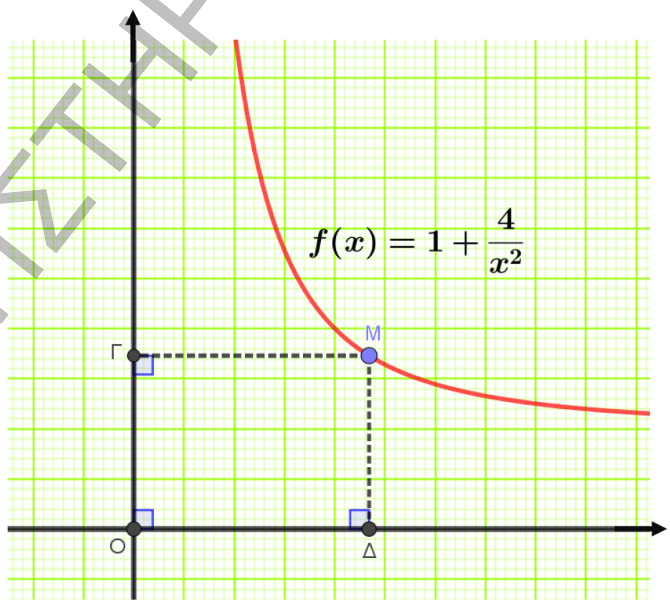
30. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **16153**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=1+\frac{4}{x^2}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ. Έστω $\alpha>0$ η τετμημένη ενός τυχαίου σημείου Μ της γραφικής παράστασης της f. Αν ονομάσουμε Ε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΓΜΔ του σχήματος, να αποδείξετε ότι



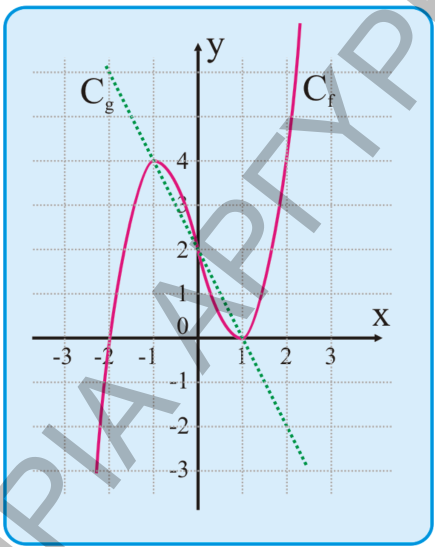
i. $E = \alpha + \dfrac{4}{\alpha}$.

ii. $E \geq 4$.

Μονάδες $[5+7+(7+6)]=25$

31. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **32742**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2$.



Με τη βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

α. τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = -2x + 2$,

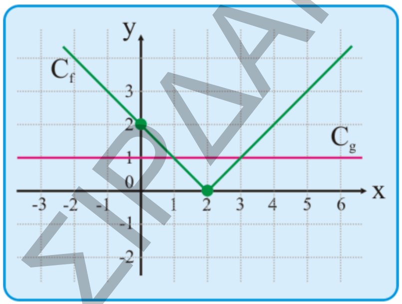
β. τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$ και $f(1)$,

γ. τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g,

δ. τις τιμές του x, για τις οποίες η παράσταση $A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$ ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

Μονάδες $(6+6+6+7)=25$

32. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **33597**



Στο διπλανό σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με

$$f(x)=|x-2| \quad \text{και} \quad g(x)=1,\ x\in\mathbb{R}$$

α. Με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος, να βρείτε

i. τα σημεία τομής των C_f και C_g.

ii. τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από την C_g.

β. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα αi) και αii).

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ η παράσταση $A=\dfrac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$ ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

Μονάδες $[(5+5)+10+5]=25$

33. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **33701**

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(x-1)^2-4$ και $g(x)=|x-1|+2$ με $x\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

β. Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

Μονάδες $(9+4+12)=25$

34. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **33754**

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μια ημέρα, η εταιρία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο: $y=60+0,20x$

Όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α. Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α ο οποίος, σε μια ημέρα, ταξίδεψε 400Km;

β. Πόσα χιλιόμετρα ταξίδεψε ένας πελάτης ο οποίος για μια ημέρα πλήρωσε 150 ευρώ;

γ. Μια άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 80 + 0{,}10x$$

όπου, όπως και προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

δ. Αν

$$f(x) = 60 + 0{,}20x \quad \text{και} \quad g(x) = 0{,}80 + 0{,}10x$$

είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α κα Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή κάθε μιας από τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα το ερωτήματος γ).

Μονάδες (5+5+10+5)=25

35. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **34309**

Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = x + \alpha$ με $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Για $\alpha = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

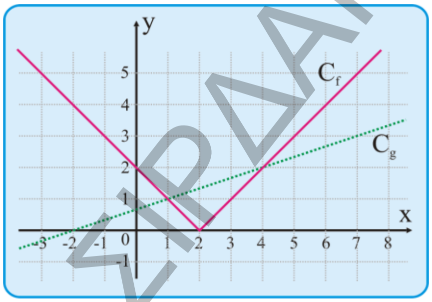
β. Να βρείτε για ποιες τιμές του α, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία.

γ. Για $\alpha > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

Μονάδες (5+10+10)=25

36. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **34312**

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με



$$f(x)=|x-2| \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

α. Με βάση το σχήμα, να εκτιμήσετε την τιμή των συντεταγμένων των σημείων τομής γραφικών παραστάσεων C_f και C_g.

β. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση σας στο ερώτημα α).

γ. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g.

δ. Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς η παράσταση:

$$K=\sqrt{3|2-x|-(x+2)}$$

Μονάδες (6+8+6+5)=25

37. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **35385**

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+\beta$, $g(x)=x+\beta$, όπου $x\in R$ και β σταθερός πραγματικός αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3\beta}{2},-3-\frac{\beta}{2}\right)$.

α. Να αποδείξτε ότι $\beta=-1$.

β. Για $\beta=-1$

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{f(x)}{g(x)}+\dfrac{g(x)}{f(x)}=3$.

Μονάδες $[6+(5+7+7)]=25$

38. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **35409**

Δίνεται το τριώνυμο $x^2-\lambda x+1$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

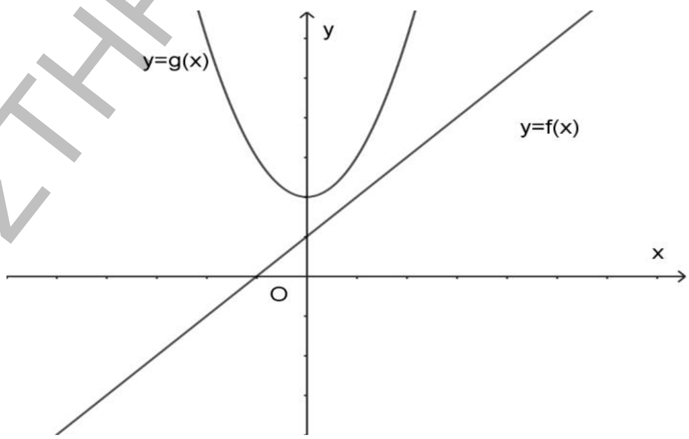
α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=\lambda^2-4$.

β. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f,g που είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με

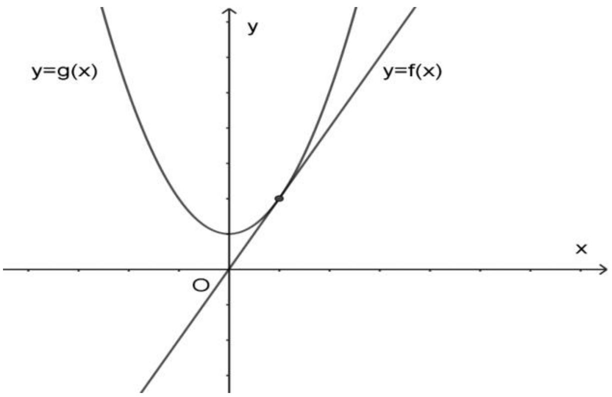
$$f(x)=\lambda x-\lambda+2 \quad \text{και} \quad g(x)=x^2-\lambda+3,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση από την οποία μπορούμε να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x^2-\lambda x+1=0$.

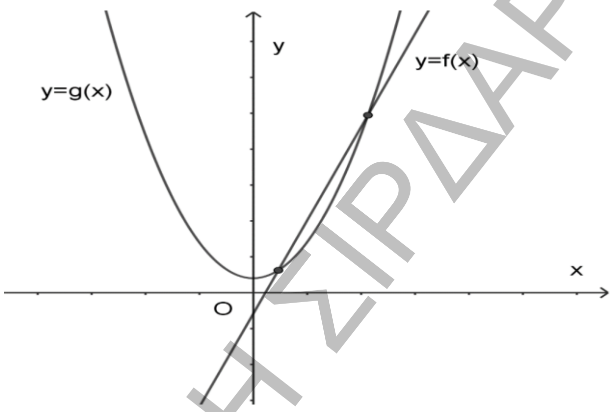
ii. Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται οι γραφικές παραστάσεις των δυο συναρτήσεων για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Με δεδομένο ότι $\lambda \in \{1,2,4\}$, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ σε καθένα από τα σχήματα, δικαιολογώντας την απάντηση σας.

Μονάδες [5+(5+15)]=25

39. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **35410**

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 4\lambda^2 - 16\lambda - 20$.

β. Θεωρούμε την συνάρτηση f, που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με τύπο

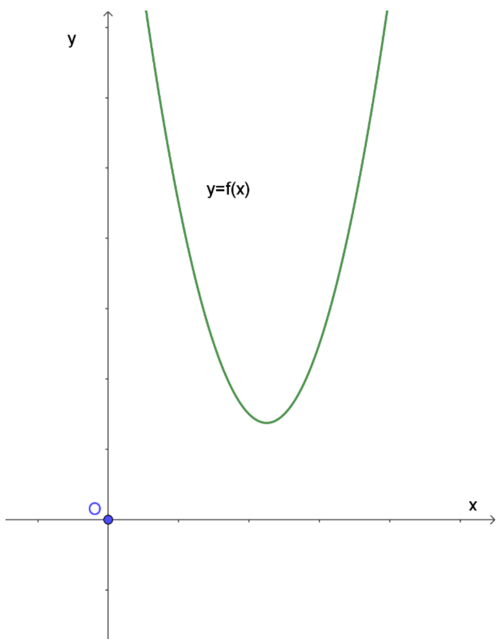
$$f(x) = x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5.$$

Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ.

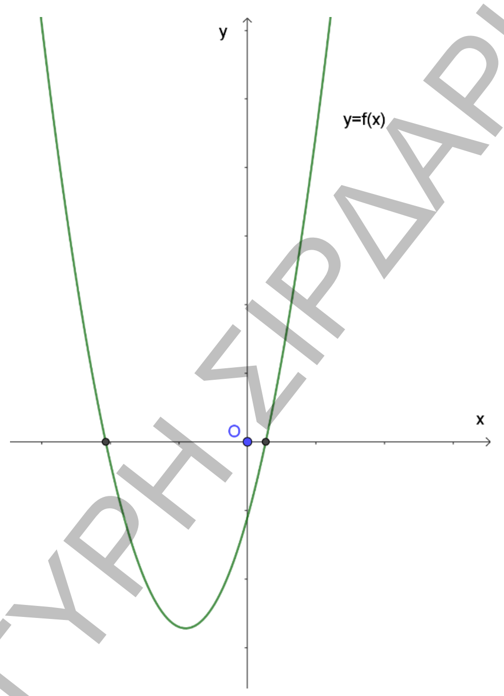
i. Για τα δύο πρώτα σχήματα δίνεται ότι η παράμετρος $\lambda \in \{-2,4\}$.

Να βρείτε σε ποια τιμή του λ αντιστοιχεί το καθένα από τα σχήματα αυτά, δικαιολογώντας την απάντηση σας.

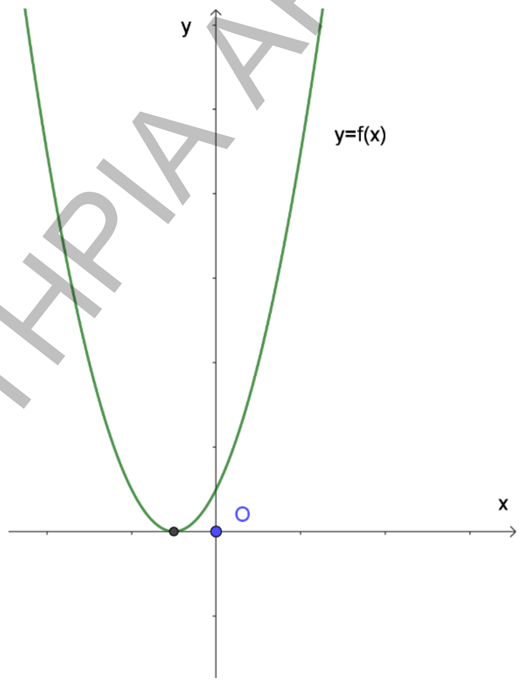
ii. Για το σχήμα 3 να βρείτε τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η παράμετρος $\lambda \in \mathbb{R}$, δικαιολογώντας την απάντηση σας.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Μονάδες [5+(10+10)]=25

40. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **36657**

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=x^2 \quad \text{και} \quad g(x)=\lambda x+(1-\lambda),\ x\in\mathbb{R} \quad \text{και } \lambda\neq 0 \text{ παράμετρος}$$

α. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β. Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

γ. Αν $\lambda\neq 2$ και x_1,x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει:

$$(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2.$$

Μονάδες (8+8+9)=25

41. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **36676**

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x-\alpha+2$ και $g(x)=x^2-\alpha+3$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο (1,2) για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α .

β. Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$.

ii. Για $\alpha=2$ υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

γ. Να αποδείξετε ότι το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ίδιο με το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2-\alpha x+1=0$ και στη συνέχεια ότι για $\alpha=3$, $\alpha=-2$, $\alpha=1$ έχουν αντίστοιχα δύο, ένα, κανένα σημεία τομής.

Μονάδες [7+(4+4)+10]=25

42. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **36681**

Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f, με $f(x)=(\lambda+1)x^2-(\lambda+1)x+2$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο A(0, 2).

β. Για $\lambda=-1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

γ. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B(2, 0), να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο.

δ. Για $\lambda=1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες (3+4+8+10)=25

43. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **36684**

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x)=x^2-2x$ και $g(x)=3x-4$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

β. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g.

γ. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f.

Μονάδες (5+10+10)=25

44. **ΘΕΜΑ Δ** **6.2** **37206**

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+3x+2$ και $g(x)=x+1$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε.

β. Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x+\alpha$. Να δείξετε ότι:

i. αν $\alpha>1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii. αν $\alpha<1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

Μονάδες (10+15)=25

6.3 Η Συνάρτηση f(x)=αx+β (16)

1. **ΘΕΜΑ Β** **6.3** **12630**

Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο $(1,\ 1)$.

α. Να βρείτε τις τιμές των α και β .

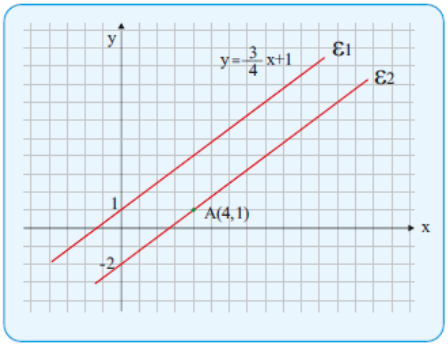
β. Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα $y'y$.

γ. Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία.

Μονάδες (8+8+9)=25

2. **ΘΕΜΑ Β** **6.3** **12631**

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε χαράξει δυο ευθείες, την (ε_1) με εξίσωση $y=\frac{3}{4}x+1$ και την (ε_2) που διέρχεται από το σημείο $A(4,\ 1)$ και είναι παράλληλη στην (ε_1).



α. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε_1).

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2).

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε_2) με τους άξονες.

Μονάδες (7+9+9)=25

3. **ΘΕΜΑ Β** **6.3** **12684**

Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση $y=-\frac{1}{2}x-2$ και μια ευθεία (ε_2) διέρχεται από το σημείο $A(-4,\ 1)$ και είναι παράλληλη στην (ε_1).

α. Να γράψετε την κλίση της ευθείας (ε_1) και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα $y'y$.

β. Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον άξονα $x'x$.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2).

Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες;

Μονάδες $(9+7+9)=25$

4. ΘΕΜΑ Β 6.3 12730

Δίνεται η ευθεία $y=\alpha x+\beta$.

α. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45^o και διέρχεται από το σημείο Α(0, 3).

β. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ αν η ευθεία $y=\lambda x+\kappa$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y=x+3$ και τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο με τετμημένη 2.

Μονάδες $(13+12)=25$

5. ΘΕΜΑ Β 6.3 12856

Δίνεται ευθεία ε: y=αx+5. Αν η ευθεία $\delta: y=3x-6$ είναι παράλληλη στην (ε), τότε:

α. **i.** Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε.

ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x΄x;

β. Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

Μονάδες $(6+7+12)=25$

6. ΘΕΜΑ Β 6.3 12939

Έστω η ευθεία $\varepsilon_1: y=\alpha x+\beta$, η οποία τέμνει τον άξονα y΄y στο $A(0,\,-6)$ και τον άξονα x΄x στο σημείο $B(-3,\,0)$.

α. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β.

β. Να βρείτε την ευθεία ε_2 που είναι παράλληλη με την ε_1 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων

Μονάδες $(13+6+6)=25$

7. ΘΕΜΑ Β 6.3 13033

Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon):\ y=-\frac{1}{2}x+4$

α. **i.** Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε).

ii. Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$ άξονα;

β. Να εξετάσετε ποια από τα σημεία $A(6,1)$, $B(-2,3)$ και $\Gamma(8,0)$ είναι σημεία της ευθείας (ε).

γ. Να βρείτε την τιμή του $k\in\mathbb{R}$ ώστε το σημείο $(k,5)$ να είναι σημείο της ευθείας (ε).

Μονάδες [(4+4)+9+8)=25

8. ΘΕΜΑ Β 6.3 13054

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1:\ y=(3\alpha+4)x-4$ και $\varepsilon_2:\ y=(3-4\alpha)x+4$ $\alpha\in\mathbb{R}$

α. Αν α=1, να βρείτε:

i. Τις εξισώσεις των ευθειών.

ii. Το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα x΄x.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

Μονάδες [(6+6)+13]=25

9. ΘΕΜΑ Β 6.3 13178

Δίνεται το σημείο $M(3,4)$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Μ και από το $O(0,0)$.

β. Δίνεται το σημείο $N(-3,\lambda)$ με $\lambda\in\mathbb{R}$, το οποίο ανήκει στην ευθεία ΟΜ.

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$

ii. Αν $N(-3,-4)$ να εξετάσετε αν τα σημεία Μ, Ν είναι συμμετρικά ως προς το Ο.

Μονάδες [9+(8+8)]=25

10. **ΘΕΜΑ Β** **6.3** **13318**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=-x+\sqrt{2},\ x\in\mathbb{R}$

α. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0),\ f\left(\sqrt{2}\right),\ f\left(-\sqrt{2}\right),\ \left[f\left(-\sqrt{2}\right)\right]^2$

β. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Μονάδες (12+13)=25

11. **ΘΕΜΑ Β** **6.3** **13400**

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon:\ y=-x+2$

α. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

β. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

γ. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε.

Μονάδες (9+9+7)=25

12. **ΘΕΜΑ Β** **6.3** **13471**

Θεωρούμε τα σημεία $A(2,1)$, $B(-1,-5)$, $\Gamma(27,50)$ και την ευθεία ε: $y=\lambda x-3$.

Αν το σημείο Α είναι πάνω στην ευθεία, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $\lambda=2$.

β. Να αποδείξετε ότι το σημείο Β είναι πάνω στην ευθεία. Κατόπιν να εξετάσετε αν και το σημείο Γ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

Μονάδες (11+14)=25

13. **ΘΕΜΑ Β** **6.3** **14575**

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-3}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f.

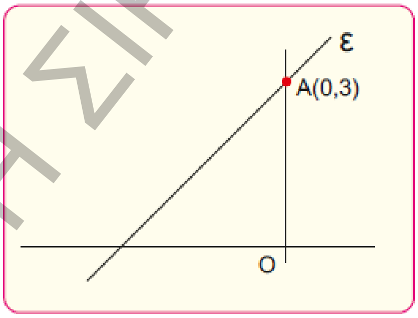
β. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x$, για κάθε $x\in A$.

γ. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Μονάδες (8+8+9)=25

14. ΘΕΜΑ Β 6.3 14641

Η παρακάτω ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45°



α. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε.

β. Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας ε.

γ. Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$.

(Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 45^{\circ}=1$.

Μονάδες (7+9+9)=25

15. ΘΕΜΑ Β 6.3 35201

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,6)$, $B(-1,4)$ να βρείτε τις τιμές των α,β.

β. Αν $\alpha=1$ και $\beta=5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες (13+12)=25

16. ΘΕΜΑ Β 6.3 37183

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(0)=5$ και $f(1)=3$.

α. Να δείξετε ότι $\alpha=-2$ και $\beta=5$.

β. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Μονάδες (10+7+8)=25

6.3 Η Συνάρτηση f(x)=αx+β (27)

1. **ΘΕΜΑ Δ** **6.3** **12681**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=|x-3|+4-(|6-3x|+2) \quad \text{με} \quad x\in\mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι

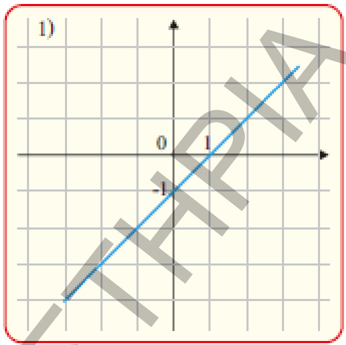
$$f(x)=2-|x-3|$$

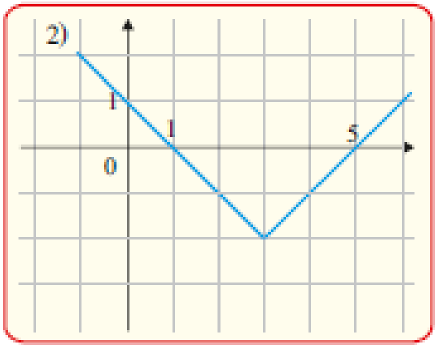
β. Αφού δείξετε ότι

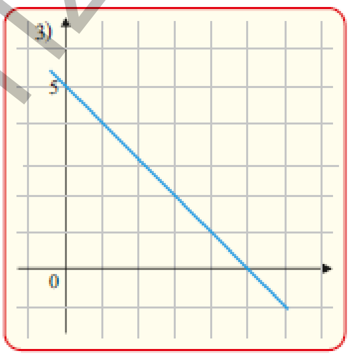
$$f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{αν} \quad x<3 \\ 5-x, & \text{αν} \quad x\geq 3 \end{cases}$$

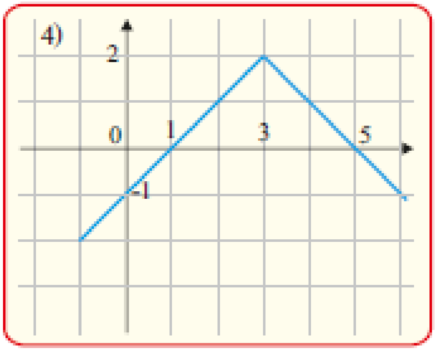
να επιλέξετε το σωστό και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Η γραφική παράσταση της f είναι:









γ. **i.** Στο σχήμα με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να σχεδιάσετε την ευθεία

$$y = -1$$

και με τη βοήθειά της να λύσετε την ανίσωση

$$2 - |x - 3| > -1.$$

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

Μονάδες [5+9+(5+6)]=25

2. ΘΕΜΑ Δ 6.3 12682

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 1 - (x-1)^2 \quad \text{και} \quad g(x) = |x-1| + 2, \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$

β. Να αποδείξετε ότι

$$g(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ -x+3, & x < 1 \end{cases}$$

και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση C_g.

γ. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

Μονάδες (8+10+7)=25

3. ΘΕΜΑ Δ 6.3 12689

Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_1(t) = 150 + 50t, \quad t \in [0, 5]$$

Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_2(t) = 650 - 25t \,.$$

α. Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο;

β. Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το 5ο μέχρι το 10ο λεπτό της κίνησής του;

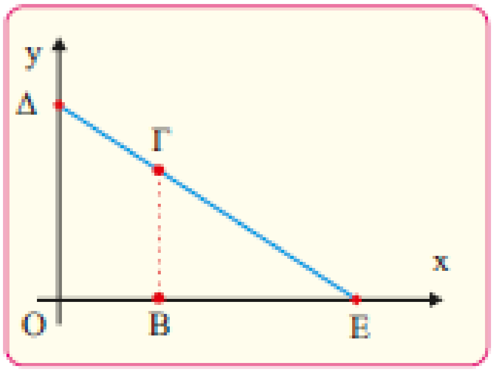
γ. Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτέρου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα.

δ. **i.** Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

Μονάδες [6+5+6+(4+4)]=25

4. **ΘΕΜΑ Δ** **6.3** **12728**



Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων, Δ είναι ένα σημείο στον $y'y$ άξονα, Ε ένα σημείο του $x'x$ άξονα και Ο είναι η αρχή των αξόνων.

Η εξίσωση της ευθείας ΔΕ είναι: $y + \frac{1}{2}x = 4$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Ε και Δ. Ένα σημείο $\Gamma(t,\ y_\Gamma)$ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ και Β ένα σημείο του α άξονα, τέτοιο ώστε ΒΓ να είναι παράλληλη στον $y'y$ άξονα.

β. Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ και να δείξετε ότι $y_\Gamma = 4 - \frac{1}{2}t$.

γ. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(t) = 4t - \frac{1}{4}t^2$ εκφράζει το εμβαδόν του τραπεζίου ΟΒΓΔ και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής στο πλαίσιο του προβλήματος.

δ. Αν το εμβαδόν του τραπεζίου ισούται με 9,75 τετραγωνικές μονάδες, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

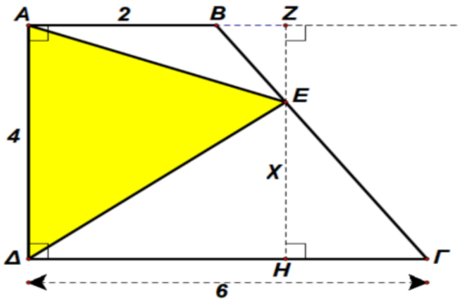
Μονάδες (6+6+7+6)=25

5. **ΘΕΜΑ Δ** **6.3** **12834**

Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ ώστε

ΑΒ=2, ΑΔ=4, ΓΔ=6,

ενώ η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΒ και επίσης κάθετη στην ΓΔ. Το σημείο Ε μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση επί του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ και ονομάζουμε x την απόσταση του Ε από την ΓΔ.



α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΑΕΔ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = 2x + 12$.

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης;

β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

γ. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma = f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{4}{16}\right) + \ldots + f\left(\frac{64}{16}\right)$.

Μονάδες (10+7+8)=25

6. ΘΕΜΑ Δ 6.3 12921

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2|\kappa|x-2$ και η ευθεία $\varepsilon:\ y=2x-\kappa^2,\ \kappa\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$

έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

β. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου . κ.

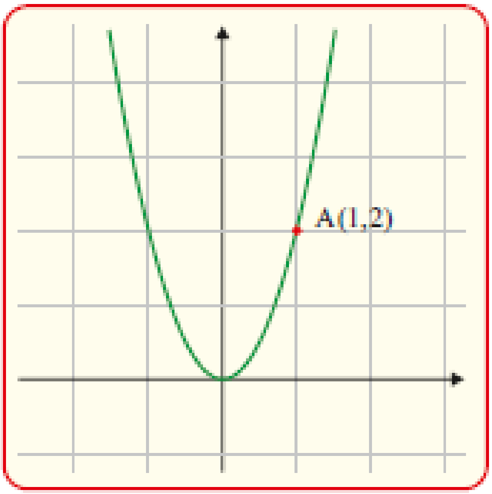
γ. Για $\kappa=-3$ να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την γραφική παράσταση της f.

δ. Αν Α και Β τα σημεία τομής του ερωτήματος (γ), να βρείτε την απόσταση (ΑΒ).

Μονάδες (5+8+5+7)=25

7. ΘΕΜΑ Δ 6.3 12942

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2$ με παράμετρο α.



α. Αν το σημείο Α(1,2) ανήκει στη γραφική παράσταση της f, να δείξετε ότι τιμή της παραμέτρου είναι $\alpha=2$.

β. **i.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο (1, 6) και έχει κλίση $\lambda=2$.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.

γ. **i.** Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x)<2x+4$.

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος.

Μονάδες [6+(4+4)+(4+7)]25

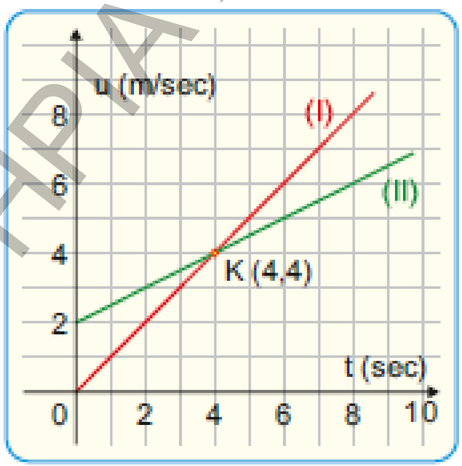
8. **ΘΕΜΑ Δ** **6.3** **12999**

Ένα όχημα, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει ταχύτητα, η οποία δίνεται από τη σχέση $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha \cdot t$, όπου υ η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t και α η σταθερή επιτάχυνσή του στη διάρκεια της κίνησης, ενώ υ_0 η αρχική ταχύτητα της κίνησής του.

α. Αν η παραπάνω σχέση αποτελεί συνάρτηση της ταχύτητας του οχήματος ως προς το χρόνο, να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη, ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποιο το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής.

β. Ένα όχημα Α, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ξεκινά από θέση ηρεμίας και τη χρονική στιγμή 4 sec έχει ταχύτητα 4 m/sec, ενώ ένα άλλο όχημα Β, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει αρχική ταχύτητα 2m/sec. Οι παρακάτω ευθείες (Ι), (ΙΙ) στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου περιγράφουν τις ταχύτητες των δύο οχημάτων.

i. Ποια από τις δύο ευθείες (Ι), (ΙΙ) περιγράφει την ταχύτητα του οχήματος Α και ποια την ταχύτητα του οχήματος Β;



ii. Να προσδιορίσετε ποιο από τα οχήματα Α, Β κινείται ταχύτερα για κάθε χρονική στιγμή t sec, $t \in [3, 5]$.

iii. Αν ένα όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος Α, να σχεδιάσετε στο παραπάνω διάγραμμα μία ευθεία, η οποία θα μπορούσε να περιγράφει την κίνησή του.

Μονάδες [6+(6+7+6)]=25

9. **ΘΕΜΑ Δ** **6.3** **13055**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x^2-4x+5,\ x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \text{η ευθεία } y=2x+\beta,\ \beta\in\mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f(2+x)=f(2-x)$

β. Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης .

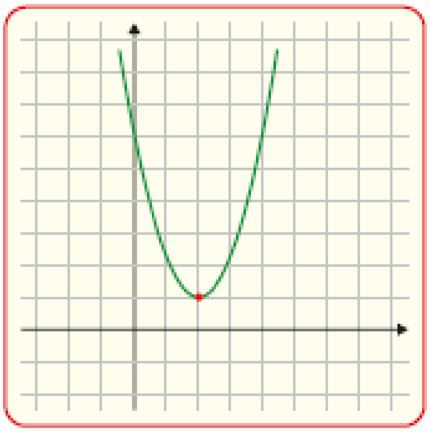
$$A=f(3{,}52)-f(0{,}52)+f(3{,}48)-f(0{,}48)$$

γ. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν $\beta=-5$.

δ. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του β, ώστε η C_f να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία.

Μονάδες (6+6+6+7)=25

10. **ΘΕΜΑ Δ** **6.3** **13091**



Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-4x+5$

α. Με βάση το διπλανό σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = 7 και στη συνέχεια να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας.

β. i. Με βάση το διπλανό σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο β) i.

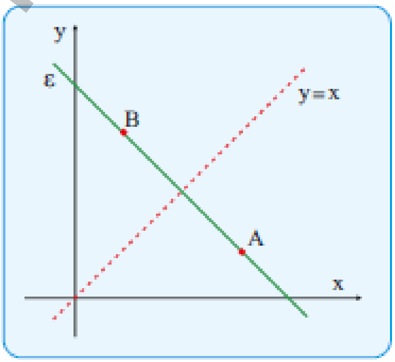
γ. Έστω ότι μια ευθεία $y=\lambda$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 με $x_1<x_2$.

Να δείξετε ότι $x_1+x_2=4$.

Μονάδες [6+(6+7)+6]=25

11. **ΘΕΜΑ Δ** **6.3** **13298**

Τα σημεία Α και Β είναι σημεία του 1ου τεταρτημορίου και είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο $y=x$ της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Αν $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$ να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες του σημείου Α με τις συντεταγμένες του σημείου Β.

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε που διέρχεται από τα Α και Β έχει κλίση $\alpha=-1$.

γ. Αν επιπλέον τα σημεία Α και Β έχουν συντεταγμένες $(4,\ \kappa^2-3\kappa+1)$ και $(\kappa-2,\ 4)$ αντίστοιχα, τότε:

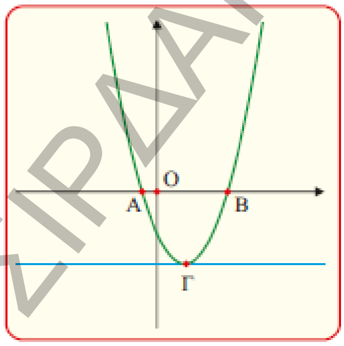
i. Να δείξετε ότι κ=3 και να προσδιορίσετε τα σημεία Α και Β.

ii. Για κ=3, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.

Μονάδες [3+6+(8+8)]=25

12. **ΘΕΜΑ Δ** **6.3** **13314**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-x-3,\ x\in\mathbb{R}$.



Αν $A(\alpha,0),\ B(\beta,0),\ \Gamma(\gamma,\delta)$

σημεία της γραφικής παράστασής της όπως φαίνεται στο σχήμα και η παράλληλη από το Γ στον x΄x έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο, τότε:

α. Να δείξετε ότι $\alpha=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\beta=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

β. Να δείξετε ότι $f\left(\sqrt{2}\right)<0$.

γ. Να δείξετε ότι $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}<\sqrt{2}<\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

δ. Να βρείτε τις τιμές των γ και δ.

Μονάδες (6+6+6+7)=25

13. **ΘΕΜΑ Δ** **6.3** **13367**

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y=\left(\omega^2-6\omega+8\right)x+2$, όπου $\omega\in\mathbb{R}$

α. Για τις διάφορες τιμές $\omega\in\mathbb{R}$ να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$

β. Αν ο αριθμός ω είναι ακέραιος και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\omega=3$.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

iii. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε.

Μονάδες [9+(6+5+5)]=25

14. **ΘΕΜΑ Δ** **6.3** **13473**

Δίνεται η παράσταση $A=\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{1-2x+x^2}$

α. Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.

Δίνεται επιπλέον $1\le x\le 3$.

β. **i.** Να δείξετε ότι Α=2.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x-3|-|x-1|=2$.

γ. **i.** Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=3-x \quad \text{και} \quad g(x)=x-1 \quad \text{για} \quad 1\le x\le 3.$$

ii. Για ποιες τιμές του x είναι $|f(x)-g(x)|=2$.

Μονάδες [6+(4+5)+(6+4)]=25

15. **ΘΕΜΑ Δ** **6.3** **14184**

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

γ. Αν είναι $f(x)=x+2,\ x\ne -1$, τότε:

i. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f τη γραφική παράσταση της $g(x)=x^2$.

ii. Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

Μονάδες [4+8+(7+6)]=25

16. **ΘΕΜΑ Δ** **6.3** **14320**

Σε κάποιο τόπο, μια χειμερινή μέρα, ξεκινάμε να μετράμε τη θερμοκρασία από τις 6 το πρωί και μετά. Ο τύπος που δίνει τη θερμοκρασία, x ώρες μετά τις 6 το πρωί, είναι:

$$f(x)=\begin{cases}2x+4, & x\in[0,6]\\ 16, & x\in(6,9]\\ 25-x, & x\in(9,12]\end{cases}$$

και μετριέται σε βαθμούς Κελσίου.

α. Να βρείτε τη θερμοκρασία στον τόπο αυτό, στις 6 το πρωί, στις 12 το μεσημέρι και στις 5 το απόγευμα.

β. Να βρείτε σε ποιο χρονικό διάστημα της ημέρας η θερμοκρασία:

i. Διατηρείται σταθερή.

ii. Είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου.

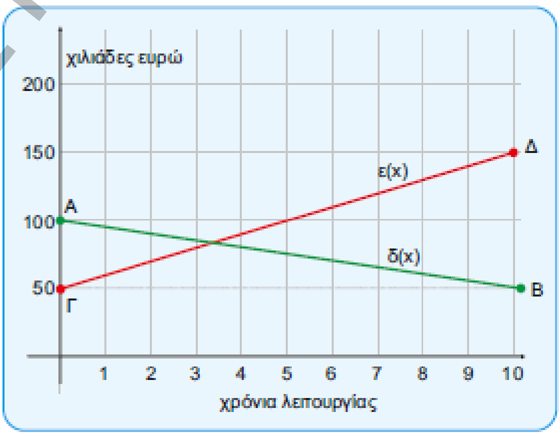
γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Μονάδες [6+(4+7)+8]=25

17. **ΘΕΜΑ Δ** **6.3** **14477**

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων η ευθεία ΑΒ με Α(0,100) και Β(10,50) παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

Η ευθεία ΓΔ με Γ(0,50) και Δ(10,150) παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



α. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τις δαπάνες τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.

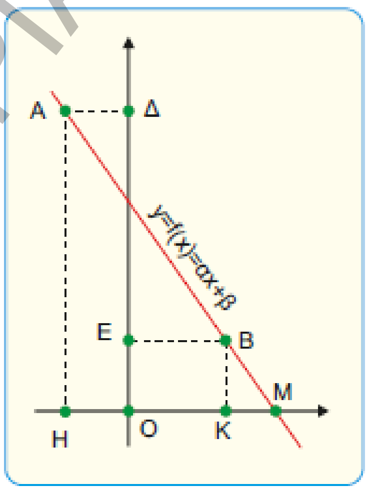
β. **i.** Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x)$, $\varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές.

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ΑΒ και ΓΔ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.

Μονάδες [4+(15+6)]=25

18. **ΘΕΜΑ Δ** **6.3** **14556**

Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β σταθεροί μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τα σημεία Α και Β της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$, των οποίων οι προβολές στους άξονες x΄x, y΄y είναι τα σημεία Η, Δ και Κ, Ε αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΗΚ και ΔΕ έχουν μήκη 6 και 9 αντίστοιχα.



α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -\frac{3}{2}$.

β. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το σημείο Μ έχει τετμημένη 6, να αποδείξτε ότι $\beta = 9$.

γ. Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΟΚ έχει μήκος 4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) η οποία διέρχεται από το σημείο Ε και είναι παράλληλη προς την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

Μονάδες $(9+7+9)=25$

19. **ΘΕΜΑ Δ** **6.3** **33894**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|2-x|}$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

β. Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\begin{cases} x-3, & x>2 \\ -x+3, & x<2 \end{cases}$

γ. **i.** Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$.

Μονάδες $[5+7+(4+4)+5]=25$

20. **ΘΕΜΑ Δ** **6.3** **33895**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x)=2x-\alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

γ. Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$, αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,-1)$.

δ. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες $(5+8+7+5)=25$

21. **ΘΕΜΑ Δ** **6.3** **34183**

Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία ταξί με το όνομα «RED» χρεώνει τον πελάτη 1 ευρώ με την είσοδο στο ταξί και $0,6$ ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει. Μια άλλη εταιρεία ταξί με το όνομα «YELLOW» χρεώνει τον πελάτη 2 ευρώ με την είσοδο στο ταξί και $0,4$ ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει.

Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α. **i.** Αν $f(x)$ είναι το ποσό (σε ευρώ) που χρεώνει η εταιρεία «RED» για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)	0	2	8
f (x) (ευρώ)			

ii. Αν $g(x)$ είναι το ποσό (σε ευρώ) που χρεώνει η εταιρεία «YELLOW» για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)			
g(x) (ευρώ)	2	3,2	4,8

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο των συναρτήσεων f και g.

γ. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f, g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας ‘RED’ είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

δ. Αν δυο πελάτες A και B μετακινηθούν με την εταιρεία ‘RED’ και ο πελάτης A διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον B, να βρείτε πόσα περισσότερα χρήματα θα πληρώσει ο A σε σχέση με τον B.

Μονάδες [(3+3)+8+8+3]=25

22. ΘΕΜΑ Δ 6.3 36652

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4x+2$ και $g(x)=x^2-9$. με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$.

β. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3,\ 0)$ και $(-3,0)$.

γ. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.

δ. Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το Α(0, 3) και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Οx.

Μονάδες (6+4+8+7)=25

23. ΘΕΜΑ Δ 6.3 36655

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

γ. Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β.

Μονάδες (10+7+8) =25

24. ΘΕΜΑ Δ 6.3 36659

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α. Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, ποσά λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.

β. Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i. Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β (i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

γ. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

Μονάδες [5+(7+4)+9]=25

25. **ΘΕΜΑ Δ** **6.3** **36682**

Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

β. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

γ. Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x - 1| < 3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

Μονάδες (5+10+10)=25

26. **ΘΕΜΑ Δ** **6.3** **36683**

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{αν } x < 0 \\ x + 2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

α. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

β. **i.** Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y = 3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

ii. Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

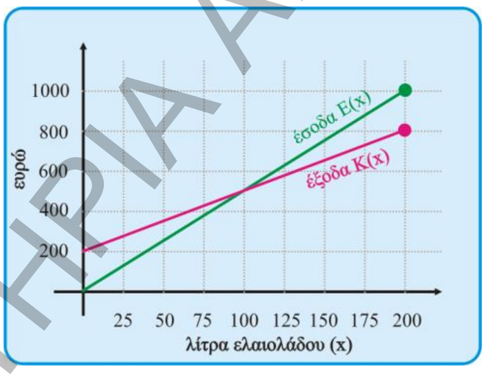
γ. **i.** Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

Μονάδες [3+(5+4)+(5+8)]=25

27. **ΘΕΜΑ Δ** **6.3** **37203**

Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παρακάτω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.



α. Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του.

β. Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;

γ. Ποσά λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημία;

δ. Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γ).

Μονάδες (6+5+6+8)=25

1. ΘΕΜΑ Α 14731

Α. Σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε Σωστό (Σ), αν η πρόταση που διατυπώνεται είναι σωστή και Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta\geq 0$ ισχύει ότι $\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

β. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει ότι $|\alpha+\beta|\leq|-\alpha|+|\beta|$.

γ. Κάθε ευθεία η οποία έχει θετική κλίση, σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία.

δ. Η εξίσωση $x^3=-8$ είναι αδύνατη στους πραγματικούς αριθμούς.

ε. Αν είναι $\alpha\beta>1$, τότε θα ισχύει αναγκαστικά $\alpha>1 \text{και} \beta>1$.

Μονάδες 15

Β. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \alpha\neq 0$. Αν έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1,x_2, τότε να αποδείξετε ότι το άθροισμά τους είναι ίσο με $x_1+x_2=\frac{-\beta}{\alpha}$.

Μονάδες 10

2. ΘΕΜΑ Α 14782

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Τα σημεία $A(x,y)$ και $B(-x,y)$ είναι για κάθε τιμή των x,y συμμετρικά ως προς τον άξονα xx'.

ii. Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$ με $\alpha<0$ και ν περιττό, έχει ακριβώς μία λύση την $-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$.

iii. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει $|\alpha|+|\beta|=|\alpha+\beta|$.

iv. Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0$.

v. Για κάθε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με λόγο $\lambda=1$, το άθροισμα των ν πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο $S_\nu=\nu\cdot\alpha_1$.

Μονάδες 10

Β. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$ να δείξετε ότι $P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$.

Μονάδες 15

3. ΘΕΜΑ Α 14801

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση Σ (Σωστό), αν η πρόταση είναι αληθής ή Λ (Λάθος), αν η πρόταση είναι ψευδής.

i. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει η πρόταση:

Αν $\alpha<\beta$ και $\gamma<\delta$, τότε $\alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\delta$.

ii. Για κάθε $\theta\in(0,+\infty)$ ισχύει: $|x|<\theta \Leftrightarrow -\theta<x<\theta$.

iii. Η εξίσωση $x^3=5$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

iv. Αν ισχύουν $\alpha>0$ και $\Delta<0$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι αρνητικό για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x.

v. Ο παρακάτω πίνακας θα μπορούσε να είναι πίνακας τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0,4]$.

x	0	1	1	2	4
$y=f(x)$	0	1	-1	2	0,5

Μονάδες 5x2=10

Β. Να αποδείξετε ότι, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει η ανισότητα:

$$|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|.$$

Μονάδες 15

4. ΘΕΜΑ Α 14811

Α. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Το σημείο $M(x,y)$ με $x>0$ και $y<0$ βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

ii. Αν τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε ισχύει: $\beta^2=\alpha\cdot\gamma$.

iii. Ισχύει $|\alpha|\geq\alpha$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

iv. Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta$, τότε: $\alpha-\gamma>\beta-\delta$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, δ.

v. Η εξίσωση $\alpha x=\alpha$ έχει μοναδική λύση $x=1$ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 10

Β. Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β να αποδείξετε ότι: $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$.

Μονάδες 15

5. ΘΕΜΑ Α 14813

Α1. Στις τέσσερις πρώτες ερωτήσεις να γράψετε στην κόλλα σας το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι σωστή ή το γράμμα Λ αν η πρόταση είναι λάθος, μετά από τον αριθμό της ερώτησης. Στην πέμπτη ερώτηση να γράψετε το γράμμα της σωστής απάντησης μετά από τον αριθμό της ερώτησης.

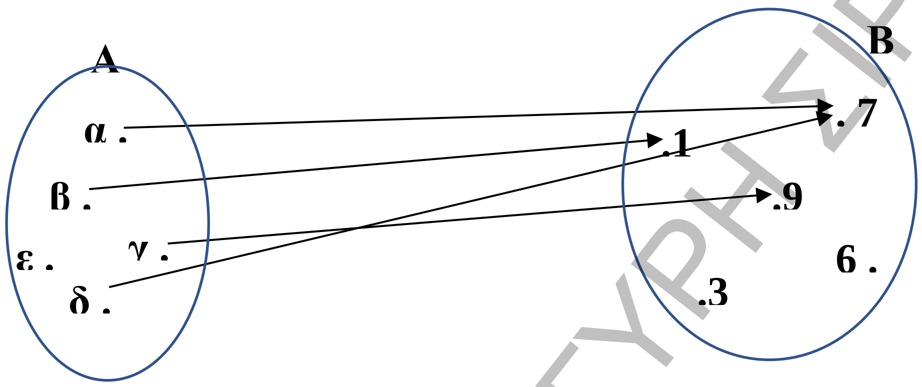
i. Αν $\alpha\leq 0$ και ν άρτιος, τότε ισχύει $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=|\alpha|$.

ii. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$ μπορεί να τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ακριβώς δύο σημεία.

iii. Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο (α_ν) με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω. Το άθροισμα S_ν των ν πρώτων διαδοχικών όρων της (α_ν) δίνεται από την σχέση $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right]$.

iv. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ είναι αδύνατη ως προς x, όταν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$

v.



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται μια αντιστοιχία στοιχείων ενός συνόλου Α σε στοιχεία ενός συνόλου Β. Ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό;

Α. η αντιστοιχία αυτή παριστάνει συνάρτηση από το σύνολο Α στο σύνολο Β.

Β. η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι στο 3 και στο 6 δεν αντιστοιχεί κανένα στοιχείο του Α.

Γ. η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι τα διαφορετικά στοιχεία α και δ του συνόλου Α αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο του συνόλου Β, το 7.

Δ. η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι το στοιχείο ε δεν αντιστοιχεί σε κανένα στοιχείο του Β.

Μονάδες 10

A2. Έστω x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο πραγματικές ρίζες του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $x \in R$. Να αποδείξετε ότι, αν για την μεταβλητή x ισχύει $x < x_1$ ή $x > x_2$ τότε τότε το τριώνυμο $f(x)$ γίνεται ομόσημο του α.

Μονάδες 15

6. ΘΕΜΑ Α 14829

Α. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Αν $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ τότε $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$

ii. Για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, ισχύει $|-\alpha|=\alpha$.

iii. Η γραφική παράταση μιας συνάρτησης f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.

iv. Αν το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε $\beta^2-4\alpha\gamma>0$.

v. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: y=\alpha_1 x+\beta_1$ και $\varepsilon_2: y=\alpha_2 x+\beta_2$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, τότε $\alpha_1=\alpha_2$ και $\beta_1\neq\beta_2$.

Μονάδες 10

Β. Να αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί α,β και γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $\beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$.

Μονάδες 15

7. ΘΕΜΑ Α 14932

Α. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ είναι αδύνατη, όταν $\alpha\neq 0$ και $\beta=0$.

ii. Αν $\alpha\leq 0$ και ν άρτιος φυσικός, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}$ =α.

iii. Αν α>0 και Δ<0 η ανίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$ αληθεύει για κάθε $x\in R$.

iv. Αν η απόσταση του x από το 0 είναι ίση με 3, τότε x=3 ή x=-3.

v. Η γραφική παράταση μιας συνάρτησης f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 10

Β. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β , να αποδείξετε ότι

$$|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta| \ .$$

Μονάδες 15

8. **ΘΕΜΑ Α** **14935**

Α. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ) , γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα **Σ** αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα **Λ** αν αυτή είναι Λάθος.

i. Για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς α, β ισχύει: $\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

ii. Αν $\rho>0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $|x|<\rho \Leftrightarrow -\rho<x<\rho$.

iii. Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$, με ν περιττό φυσικό και $\alpha<0$, έχει λύση την $x=\sqrt[\nu]{|\alpha|}$.

iv. Για οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(3,\ 5)$ ισχύει $f(5)=3$.

v. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2=\alpha\gamma$.

Μονάδες 5x2=10

Β. Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι:

$$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$$

Μονάδες 15

1. **ΘΕΜΑ Γ** **14052**

α. Να λύσετε την εξίσωση $x^2-1=0$.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $|x|+x=0$.

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $|x|+|x^2-1|+x=0$.

Μονάδες (6+9+10)=25

2. **ΘΕΜΑ Γ** **14320**

Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $A=\frac{-\alpha}{\beta}$, $B=\alpha^2$

α. Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α, β οι αλγεβρικές παραστάσεις A, B είναι πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί του 0.

β. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί A, B είναι αντίθετοι, αν και μόνο, αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

Μονάδες (10+15)=25

3. **ΘΕΜΑ Γ** **14576**

Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=\frac{2x^2-6|x|}{2|x|-6}.$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x)=|x|$, για κάθε $x\in A$.

γ. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, για $x>0$.

Μονάδες (10+10+5)=25

4. **ΘΕΜΑ Γ** **14578**

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση

$$\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$$

β. Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0.$$

Μονάδες (10+15)=25

5. **ΘΕΜΑ Γ** **14601**

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει

$$|2x - 1| < 1,$$

τότε:

α. Να δείξετε ότι $0 < x < 1$.

β. Να βάλετε σε αύξουσα διάταξη τους αριθμούς

$$1,\ x,\ x^2.$$

Μονάδες (12+13)=25

6. **ΘΕΜΑ Γ** **14602**

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι

$$0 < \alpha^3 < \alpha.$$

β. Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0,\ \alpha^3,\ 1,\ \alpha,\ \frac{1}{\alpha}.$$

Μονάδες (13+12)=25

7. **ΘΕΜΑ Γ** **14604**

Δίνεται η συνάρτηση f με: $f(x)=\begin{cases} 2x-5, & x\le 3 \\ x^2, & 3<x<10 \end{cases}$

α. Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

β. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

γ. Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

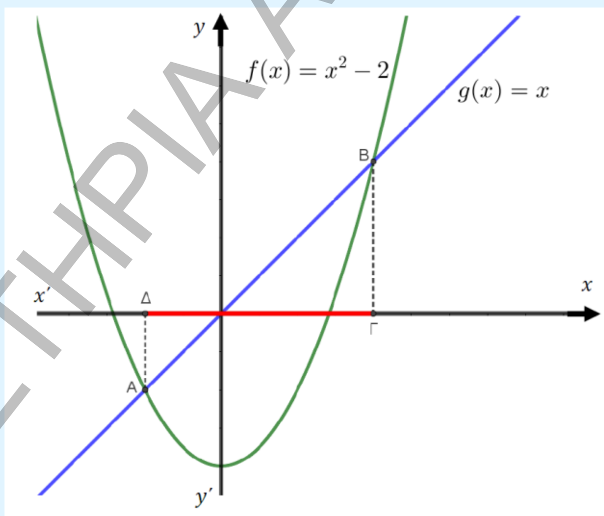
δ. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη $y=21$.

Μονάδες (6+6+6+7)=25

8. **ΘΕΜΑ Γ** **14673**

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=x^2-2 \quad \text{και} \quad g(x)=x$$



α. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β είναι $A(-1,-1)$ και $B(2,2)$

β. Να λύσετε την ανίσωση $x^2-x-2<0$

γ. Να λύσετε την ανίσωση $\omega^2-|\omega|-2<0$

Μονάδες (9+8+8)=25

9. **ΘΕΜΑ Γ** **14713**

Δίνεται η παράσταση $A=\dfrac{\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18}{\alpha^2+2\alpha}$, $\alpha>0$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18=(\alpha^2+9)(\alpha+2)$.

β. Για κάθε $\alpha>0$ ισχύει

i. $A=\dfrac{\alpha^2+9}{\alpha}$.

ii. $A\geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα $A=6$;

Μονάδες [7+(8+10)]=25

10. **ΘΕΜΑ Γ** **14749**

α. **i.** Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ορίζεται η παράσταση: $A=\dfrac{x}{x-|x|}$.

ii. Για τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A, να δείξετε ότι $A=\dfrac{1}{2}$.

β. Για $x<0$, να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{x^3}{x-|x|}=\dfrac{3}{2}x+2$.

Μονάδες (9+7+9)=25

11. **ΘΕΜΑ Γ** **14752**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-2}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A.

β. Να δείξετε ότι το σημείο $M(1,-\sqrt{2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες xx', yy'.

Μονάδες (10+5+10)=25

12. **ΘΕΜΑ Γ** **14753**

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $2|x|-2\le 0$ (1).

α. Να δείξετε ότι $x\in[-1,1]$.

β. Να δείξετε ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν την (1) απέχουν από το -3 απόσταση το πολύ 4.

γ. Για τους πραγματικούς αριθμούς x που ικανοποιούν την (1) να γράψετε την παρακάτω παράσταση Α χωρίς τις απόλυτες τιμές. $A=|2x-3|-|4-3x|$

Μονάδες (10+5+10)=25

13. **ΘΕΜΑ Γ** **14754**

α. Να δείξετε ότι $x^2+2x+4>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left|\dfrac{x^3-8}{x-2}\right|$.

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A.

γ. Να δείξετε ότι $f(x)=x^2+2x+4$ για κάθε $x\in A$.

δ. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της g, όπου $g(x)=6x$.

Μονάδες (7+4+6+8)=25

14. **ΘΕΜΑ Γ** **14805**

Έστω α ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει $\alpha=|3\sqrt{2}-4|+2|\sqrt{2}-2|$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\sqrt{2}$. (Θεωρήστε ότι $\sqrt{2}=1,41$)

β. Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) να αποδείξετε ότι $\alpha^3=2\alpha$.

γ. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A=\alpha^3+(\alpha-1)^2$.

Μονάδες (10+5+10)=25

15. **ΘΕΜΑ Γ** **34910**

α. Να λύσετε την ανίσωση $x^2-4x+3<0$ (1).

β. Αν η (1) έχει λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $1<x<3$ και οι αριθμοί α,β είναι λύσεις της ανίσωσης (1), να δείξετε ότι και ο αριθμός $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης (1).

Μονάδες (13+12)=25

16. **ΘΕΜΑ Γ** **35296**

α. Να λύσετε την ανίσωση $|x-1|\geq 5$.

β. Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

γ. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των α) και β).

Μονάδες (8+9+8)=25

17. **ΘΕΜΑ Γ** **35411**

α. Αν οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

β. Αν οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

γ. Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x, x, 2$ να είναι διαδοχικοί αριθμοί αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

Μονάδες (9+9+7)=25

18. **ΘΕΜΑ Γ** **37190**

α. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A=x^3-x^2+3x-3$.

β. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=\frac{3}{x} \quad \text{και} \quad g(x)=x^2-x+3$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1,3)$.

Μονάδες (13+12)=25