ΤΑΞΗ: **3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Τετάρτη 27 Απριλίου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 76

Α2. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελ. 30

Α3. α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Σ

Α4. (Ι) α→2 β→5 γ→1 δ→3

(ΙΙ) α) $A_f = R$ β) $A_f = [0,+\infty)$ γ) $A_f = R$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\bar{x} = 6 \Leftrightarrow \dfrac{\frac{\alpha}{3} + 4 + \alpha + 3 + 5\alpha - 5 + 13 - 2\alpha + 7 + \alpha + 2 + 6 - \alpha + 5}{8} = 6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\alpha}{3} + 4\alpha + 35}{8} = 6 \Leftrightarrow \frac{\alpha + 12\alpha}{3} + 35 = 6 \cdot 8 \Leftrightarrow \frac{13\alpha}{3} = 48 - 35 \Leftrightarrow$$

$$\frac{13\alpha}{3} = 13 \Leftrightarrow 13\alpha = 39 \Leftrightarrow \alpha = \frac{39}{13} \Leftrightarrow \alpha = 3$$

Β2. Οι 8 αριθμοί θα είναι: 5, 6, 10, 7, 7, 5, 3, 5.

Σε αύξουσα σειρά: 3, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 10

$R = x_{max} - x_{min} = 10 - 3 \Leftrightarrow R = 7$

ν=8 (άρτιος) Μεσαίες: η 4η → 5 και η 5η → 6. Άρα $\delta = \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow \delta = 5{,}5$

Β3. $s^2 = \frac{(3-6)^2 + (5-6)^2 \cdot 3 + (6-6)^2 + (7-6)^2 \cdot 2 + (10-6)^2}{8} = \frac{9+3+0+2+16}{8} =$

$= \frac{30}{8} = \frac{15}{4} = 3{,}75$. Άρα $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{3{,}75} \approx 1{,}93$

$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{1{,}93}{6} \simeq 0{,}32$ ή 32%.

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές, γιατί CV>10%.

Β4. Νέα μέση τιμή: $\bar{y} = \bar{x} + \frac{30}{100}\bar{x} - 2 = \bar{x}(1+0{,}3) - 2 = 6 \cdot 1{,}3 - 2 \Leftrightarrow \bar{y} = 5{,}8$

Νέα τυπική απόκλιση: $s_y = s_x + \frac{30}{100}s_x = s_x(1+0{,}3) = 1{,}93 \cdot 1{,}3 = 2{,}509$

$CV' = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{2{,}509}{5{,}8} \simeq 0{,}43$ ή 43%

Ομοιογενέστερος πληθυσμός είναι ο παλιός, γιατί CV<CV'.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θα πρέπει: $x \geq 0$ και $2 - \sqrt{x} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq 2 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 \neq 2^2 \Leftrightarrow x \neq 4$

Άρα $A_f = [0,4) \cup (4,+\infty)$

Γ2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=-\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow f'(1)=-\dfrac{9}{2}$

$$f'(x)=\frac{\left(\kappa x^2-2x-8\right)'\left(2-\sqrt{x}\right)-\left(\kappa x^2-2x-8\right)\left(2-\sqrt{x}\right)'}{\left(2-\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(2\kappa x-2\right)\left(2-\sqrt{x}\right)-\left(\kappa x^2-2x-8\right)\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(2-\sqrt{x}\right)^2}$$

$$f'(1)=-\frac{9}{2}\Leftrightarrow\frac{\left(2\kappa\cdot 1-2\right)\left(2-\sqrt{1}\right)-\left(\kappa\cdot 1^2-2\cdot 1-8\right)\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{1}}\right)}{\left(2-\sqrt{1}\right)^2}=-\frac{9}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(2\kappa-2\right)\cdot 1-\left(\kappa-10\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{1^2}=-\frac{9}{2}\Leftrightarrow 2\kappa-2+\frac{\kappa-10}{2}=-\frac{9}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\kappa-4+\kappa-10=-9\Leftrightarrow 5\kappa=-9+14\Leftrightarrow 5\kappa=5\Leftrightarrow \kappa=1$$

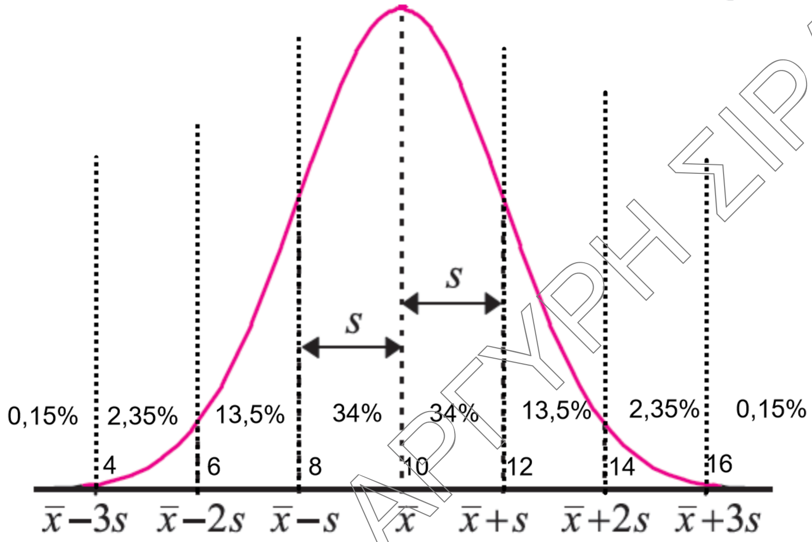
Γ3. $\lim\limits_{x\to 4}f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x-8}{2-\sqrt{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x+2)\left(2+\sqrt{x}\right)}{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)}=$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+2)\left(2+\sqrt{x}\right)}{2^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+2)\left(2+\sqrt{x}\right)}{4-x}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+2)\left(2+\sqrt{x}\right)}{-(x-4)}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x+2)\left(2+\sqrt{x}\right)}{-1}=-(4+2)\left(2+\sqrt{4}\right)=-6\cdot 4=-24$$

Γ4. Κανονική κατανομή→ $\delta = \overline{x} = 10$.

Έχουμε $\dfrac{640}{4000} = 0{,}16$ ή 16%, το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα από $\overline{x} + s$ και μετά. Άρα $\overline{x} + s = 12 \Leftrightarrow s = 12 - 10 \Leftrightarrow s = 2$.



Το πολύ 6 έχουν τιμή το 2,5% των παρατηρήσεων.

$0{,}025 \cdot 4000 = 100$ παρατηρήσεις → $\alpha = 100$

$\lim\limits_{x \to 4} g(x) = \lim\limits_{x \to 4} f(x) = -24$ (Από Γ3 ερώτημα)

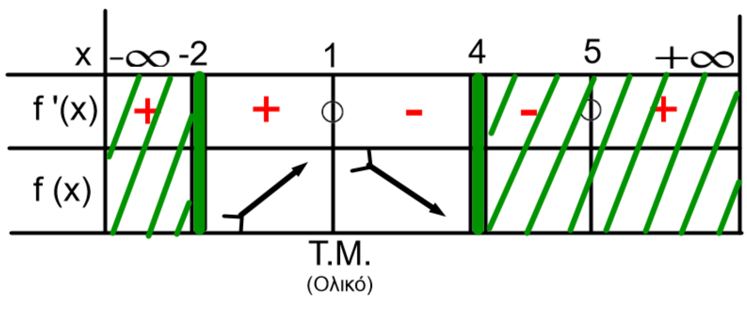
$$g(4) = -\frac{6}{25} \cdot \alpha = -\frac{6}{25} \cdot 100 = -6 \cdot 4 = -24$$

Παρατηρώ ότι: $\lim\limits_{x \to 4} g(x) = g(4) = -24$, άρα η g είναι συνεχής στο $x_0 = 4$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \left(\dfrac{x^3}{3}\right)' - (3x^2)' + (5x)' - \left(\dfrac{1}{3}\right)' = x^2 - 6x + 5$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$, $x_1 = 5$ ή $x_2 = 1$



Στο $\left(-2,1\right]$ η f είναι γν. Αύξουσα. Στο $\left[1,4\right)$ η f είναι γν, Φθίνουσα.

Στο $x_0 = 1$ η f παρουσιάζει Μέγιστο (ολικό) : $f\left(1\right)=\frac{1^3}{3}-3\cdot1^2+5\cdot1-\frac{1}{3}=$

$=\frac{1}{3}-3+5-\frac{1}{3}=2$.

Δ2.

Κλάσεις	Κέντρο x_i	v_i	N_i	f_i	F_i	$x_i v_i$
[-2 , 0)	-1	1	1	0,05	**0,05**	-1
[0 , 2)	1	5	6	**0,25**	0,30	5
[2 , 4)	**3**	4	**10**	0,20	0,50	12
[4 , 6)	5	**6**	16	0,30	0,80	30
[6 , 8)	7	4	20	0,20	1,00	28
Σύνολα		20		1,00		74

1η κλάση: [α , α+c) 2η κλάση: [α+c, α+2c) 3η κλάση: [α+2c, α+3c) κλπ.

Το πλάτος ισούται με το ακρότατο, άρα $c = f(1) = 2$.

Η συχνότητα της 1ης κλάσης ισούται με $v_1 = x_0$ (θέση ακρότατου f) = 1.

Είναι κέντρο $x_3=3\Leftrightarrow\frac{\alpha+2c+\alpha+3c}{2}=3\Leftrightarrow2\alpha+5c=6\Leftrightarrow2\alpha+5\cdot2=6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow2\alpha=6-10\Leftrightarrow2\alpha=-4\Leftrightarrow\alpha=-2$

$f_1=F_1=0,05\quad,\quad N_1=v_1=1\quad,\quad v=\frac{v_1}{f_1}=\frac{1}{0,05}=\frac{100}{5}=20$

$v_2=f_2\cdot v=0,25\cdot20=5\quad,\quad v_3=N_3-N_2=10-6=4\quad,\quad f_3=\frac{v_3}{v}=\frac{4}{20}=0,2$

$f_4=\frac{v_4}{v}=\frac{6}{20}=0,3\quad,\quad v_5=N_5-N_4=20-16=4\quad,\quad f_5=\frac{v_5}{v}=\frac{4}{20}=0,2$

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i\cdot v_i}{v}=\frac{74}{20}=3,7$$

Δ3. Σημείο Α(x, 2) αρχή των Αξόνων (0, 0)

Απόσταση (ΟΑ)= $\sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (2-0)^2} =$

$= \sqrt{x^2 + 2^2} = \sqrt{x^2+4}$, την οποία ονομάζω $d(x) = \sqrt{x^2+4}$, $x \in \mathbb{R}$ και θα την μελετήσω ως προς τα ακρότατα.

$$d'(x) = \left(\sqrt{x^2+4}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot \left(x^2+4\right)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
d ' (x)		0	
d (x)	↘	T.E.	↗

Άρα για x = 0 η απόσταση γίνεται ελάχιστη.

Η ελάχιστη απόσταση είναι: $d(0) = \sqrt{0^2+4} = \sqrt{4} = 2$

Δ4. $h(x) = -f'(x) - 2 \cdot d'(x) \cdot \sqrt{x^2+4} = -\left(x^2 - 6x + 5\right) - \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} \cdot \sqrt{x^2+4} =$

$= -x^2 + 6x - 5 - 2x = -x^2 + 4x - 5$

Η εφαπτομένη της C_h έχει εξίσωση της μορφής: $y = \lambda x + \beta$, η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{1}{2}x + 9$. Συνεπώς $\lambda_{\text{εφαπτομένης}} \cdot \lambda_{\text{ευθείας}} = -1$.

$$\lambda \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda = 2 \Leftrightarrow h'(x_0) = 2$$

Είναι: $h'(x) = -\left(x^2\right)' + \left(4x\right)' - \left(5\right)' = -2x + 4$

$$h'(x_0) = 2 \Leftrightarrow -2 \cdot x_0 + 4 = 2 \Leftrightarrow -2 \cdot x_0 = -4 + 2 \Leftrightarrow -2 \cdot x_0 = -2 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

$$h(1) = -1^2 + 4 \cdot 2 - 5 = -1 + 8 - 5 = 8 - 6 = 2 = y$$

$$y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow 2 = 2 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow 2 - 2 = \beta \Rightarrow 0 = \beta$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = 2x + 0 \Leftrightarrow y = 2x$.