ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τετάρτη 27 Απριλίου 2022

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α4. **α)** Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Λάθος

Θέμα Β

Β1. Η $f=\varphi o g$ ορίζεται για $x>0$ και $\ln x\neq 0$ δηλαδή όταν $0<x\neq 1$ με τύπο $(\varphi o g)(x)=\dfrac{e^{\ln x}}{\ln x}=\dfrac{x}{\ln x}$

Β2. $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$ Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

x	$0 \quad\quad 1$		$e \quad\quad +\infty$
$f'(x)$	-	-	+
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Η f για $x=e$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(e)=e$.

Β3. $$f''(x)=\frac{\frac{1}{x}(\ln x)^2-\frac{2}{x}\ln x(\ln x-1)}{(\ln x)^4}=\frac{\ln x\cdot(-\ln x+2)}{x\cdot(\ln x)^4}$$

x	$0 \quad\quad 1$		$e^2 \quad\quad +\infty$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	κοίλη	κυρτή	κοίλη

Είναι $\ln x>0\Leftrightarrow x>1$

$-\ln x+2\geq 0\Leftrightarrow x\leq e^2$

Η f για $x=e^2$ παρουσιάζει καμπή $\mathrm{M}\left(e^2,\dfrac{e^2}{2}\right)$ το σημείο καμπής.

Β4. • $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\cdot\dfrac{1}{\ln x}\right)=0$ διότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

Άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη όταν $x \to 0^+$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(x\cdot\dfrac{1}{\ln x}\right) = 1\cdot(-\infty) = -\infty$

  διότι $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln x = 0$ και $\ln x < 0$ αριστερά του 1.

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x\cdot\dfrac{1}{\ln x}\right) = 1\cdot(+\infty) = +\infty$

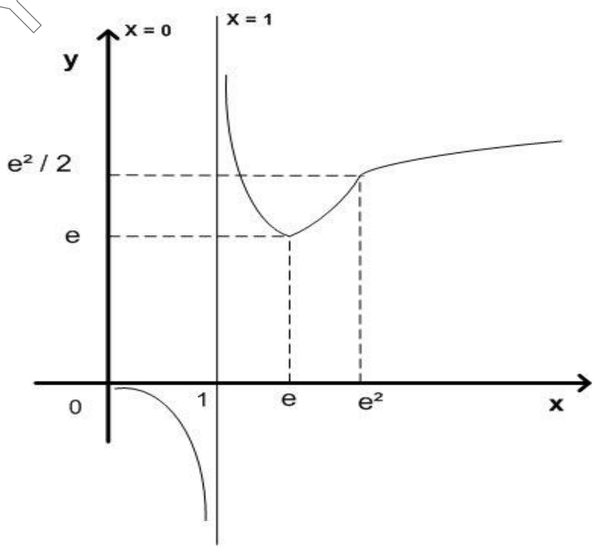
  διότι $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x = 0$ και $\ln x > 0$ δεξιά του 1.

Άρα η $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f όταν $x \to 1$.

Πίνακας μεταβολών της f

x	0	1	e	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	+	
$f''(x)$	-	+	+	-	
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow$	$\nearrow$	$\nearrow +\infty$	

Γραφική παράσταση



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad f(e) = e, \quad f(e^2) = \dfrac{e^2}{2}$

Θέμα Γ

Γ1. • Η f είναι συνεχής στο $x=0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

απ' όπου προκύπτει $\alpha = 1+\beta \quad (1)$

- $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot f(e-1) < 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)\cdot(2+\beta) < 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} (\alpha-1)\cdot(\alpha+1) < 0 \Leftrightarrow$

  $-1 < \alpha < 1$. Επειδή $\alpha \in \mathbb{Z}$ είναι $\alpha = 0$ οπότε $\beta = -1$

Γ2. Για κάθε $x>0$, $f(x) - \dfrac{x^2-x}{2} \le \ln\lambda \quad (2)$

Έστω $\varphi(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x^2-x}{2}$, $x>0$. Είναι $\varphi'(x)=\ldots=\dfrac{-2x^2-x+3}{2(x+1)}$

x	0 $\quad\quad$ 1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	-
$\varphi(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Η μονοτονία της φ φαίνεται στο διπλανό πίνακα.
Η φ για $x=1$ παρουσιάζει μέγιστο
το $\varphi(1)=\ln 2$.
Ισχύει η (2) για κάθε $x>0$ και $\lambda>0$ όταν
$\max\varphi(x)\le\ln\lambda \Leftrightarrow \ln 2\le\ln\lambda \Leftrightarrow \lambda\ge 2$. Η μικρότερη τιμή του λ είναι $\lambda=2$.

Γ3. $\mathrm{I}=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\varepsilon\varphi x\,dx+\int_{0}^{e-1}\ln(x+1)\,dx=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2$

- $\mathrm{I}_1=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\varepsilon\varphi x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx=-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx=-\left[\ln(\sigma\upsilon\nu x)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0}=$

  $=-\ln(\sigma\upsilon\nu 0)+\ln\left(\sigma\upsilon\nu\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=\ldots=-\dfrac{1}{2}\ln 2$

- $\mathrm{I}_2=\displaystyle\int_{0}^{e-1}(x+1)'\ln(x+1)\,dx=\int_{1}^{e}u'\ln u\,du=$ (θέτω $x+1=u$)

  $=\left[u\cdot\ln u\right]_1^e-\displaystyle\int_1^e 1\cdot du=e-(e-1)=1$

Άρα $\mathrm{I}=-\dfrac{1}{2}\ln 2+1$

Γ4. Είναι $\varepsilon\varphi\theta=f'(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$, $\alpha>0$. Τα α και θ είναι συναρτήσεις του χρόνου t, έστω $\alpha(t)$ και $\theta(t)$ αντίστοιχα.

Έχουμε $\varepsilon\varphi\theta(t)=\dfrac{1}{\alpha(t)+1}$ οπότε $\theta'(t)\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}=-\dfrac{\alpha'(t)}{\left(1+\alpha(t)\right)^2}$

- Για $t=t_0$, $\quad\theta'(t_0)=-\dfrac{\alpha'(t_0)}{\left(1+\alpha(t_0)\right)^2}\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)\quad$ (3)

  Τη χρονική στιγμή t_0 ισχύουν $\alpha'(t_0)=1\dfrac{cm}{\sec}$ και $\alpha(t_0)=\sqrt{3}-1$

  Είναι $\varepsilon\varphi\theta(t_0)=\dfrac{1}{\alpha(t_0)+1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1+1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Άρα $\theta(t_0)=\dfrac{\pi}{6}$ και

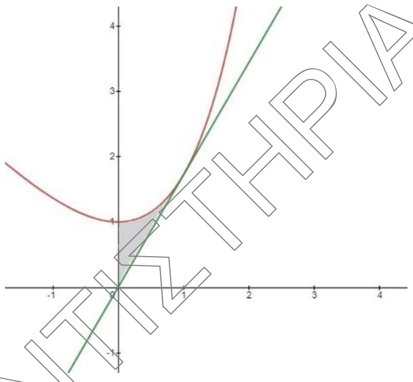
$\sigma\upsilon\nu\theta(t_0)=\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Επομένως με αντικατάσταση στην (3) προκύπτει :

$$\theta'(t_0)=-\frac{1}{\left(\sqrt{3}-1+1\right)^2}\cdot\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}\frac{rad}{\sec}$$

Θέμα Δ

Δ1. Για $x=0$ είναι $f(0)=1$ οπότε ισχύει $f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Άρα η f στο $x_0=0$ παρουσιάζει ελάχιστο, είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό και το 0 είναι εσωτερικό σημείο. Σύμφωνα με το Θ. Fermat είναι $f'(0)=0$. Επομένως $e^0-\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=1$.

Δ2. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\mathrm{M}(1,e-1)$ είναι
$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow y=(e-1)x$



Το ζητούμενο εμβαδόν
$$\mathrm{E}=\int_0^1\left|f(x)-(e-1)x\right|dx$$
επειδή $f''(x)=e^x>0$ η f είναι κυρτή.
Άρα $f(x)\geq(e-1)x$ οπότε

$$\mathrm{E}=\int_0^1\left(e^x-x-ex+x\right)dx=\int_0^1\left(e^x-ex\right)dx=\left[e^x-e\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\ e-\frac{e}{2}-1=\frac{e}{2}-1 \text{ τ.μ.}$$

Δ3. $g(x)=\ln e^x-\ln\left(e^x-x\right)=x-\ln\left(e^x-x\right), x\in\mathbb{R}$

$$g'(x)=1-\frac{e^x-1}{e^x-x} \text{ και } g''(x)=\frac{(x-2)e^x+1}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{h(x)}{\left(e^x-x\right)^2}, \text{ όπου } h(x)=(x-2)e^x+1,\ x\in\mathbb{R}$$

➢ Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $g''(x)=0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις x_1,x_2 και στη συνέχεια ότι η $g''(x)$ αλλάζει πρόσημο αριστερά και δεξιά των x_1,x_2.
Δηλαδή αρχικά ότι η $h(x)=0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, βρίσκοντας το σύνολο τιμών της.

- Είναι $h(x)=(x-2)e^x+1,\quad h'(x)=e^x+(x-2)e^x=(x-1)e^x$

x	$-\infty$ x_1 1	x_2 $+\infty$
$h'(x)$	-	+
$h(x)$	1 ↘ 1-e	↗ $+\infty$

$h(1)=1-e$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^x=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-2)e^x+1\right]=0+1=1$ διότι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{\frac{1}{e^x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-2)'}{\left(\frac{1}{e^x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to-\infty}\left(-e^x\right)=0$$

- Αν $x\in(-\infty,1]=\mathrm{A}_1$ τότε $h(\mathrm{A}_1)=[1-e,1)$ και η $h\downarrow$

  Επειδή $o\in h(\mathrm{A}_1)$ η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς μια λύση $x_1\in(-\infty,1)$,

  επομένως και η $g''(x)=0$.

- Αν $x\in[1,+\infty)=\mathrm{A}_2$ τότε $h(\mathrm{A}_2)=[1-e,+\infty)$ και η $h\uparrow$

  Επειδή $o\in h(\mathrm{A}_2)$ η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς μια λύση $x_2\in(1,+\infty)$,

  επομένως και η $g''(x)=0$.

➢ Θα βρούμε το πρόσημο της $h(x)$ στο $(-\infty,1)$ από τη μονοτονία της και τη ρίζα της x_1.

  - Για κάθε $x<x_1$ είναι $h(x)>h(x_1)=0$ και για κάθε $x_1<x<1$ είναι $h(x)<h(x_1)=0$

➢ Όμοια το πρόσημο της $h(x)$ στο $(1,+\infty)$ από τη μονοτονία της και τη ρίζα της x_2.

  - Για κάθε $1<x<x_2$ είναι $h(x)>h(x_2)=0$ και για κάθε $x>x_2$ είναι $h(x)>h(x_2)=0$.

    Το πρόσημο της $h(x)$ είναι και πρόσημο της $g''(x)$.

x	$-\infty$ x_1	1		x_2 $+\infty$
$g''(x)$	+	-	-	+
$g(x)$	κυρτή	κοίλη		κυρτή

Επομένως όπως φαίνεται στο διπλανό πίνακα η συνάρτηση g παρουσιάζει καμπή ακριβώς στα x_1 και x_2

Δ4. Εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση g στο $[x_1,1]$.

Άρα υπάρχει $\xi_1\in(x_1,1)$ τέτοιος ώστε

$$g'(\xi_1)=\frac{g(1)-g(x_1)}{1-x_1}\Leftrightarrow(1-x_1)\cdot g'(\xi_1)=g(1)-g(x_1)\quad(1)$$

- Εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση g στο $[1,x_2]$.

  Άρα υπάρχει $\xi_2 \in (1,x_2)$ τέτοιος ώστε

$$g'(\xi_2)=\frac{g(x_2)-g(1)}{x_2-1} \Leftrightarrow (x_2-1)\cdot g'(\xi_2)=g(x_2)-g(1) \quad (2)$$

α΄ μέθοδος

➢ Η $g(x)$ είναι κοίλη στο $[x_1,x_2]$, άρα $g'\downarrow$ οπότε από $x_1<\xi_1<1$ έχουμε $1-x_1>0$ και $g'(\xi_1)>g'(1)=0$.

Επομένως $(1-x_1)g'(\xi_1)>0 \quad (3)$

➢ από $1<\xi_2<x_2$ έχουμε $x_2-1>0$ και $g'(\xi_2)<g'(1)=0$.

Επομένως $(x_2-1)g'(\xi_2)<0 \quad (4)$

Συνεπώς από (3) και (4) προκύπτει: $(1-x_1)g'(\xi_1)>(x_2-1)g'(\xi_2)$

β΄ μέθοδος

Είναι $g'(x)=1-\frac{e^x-1}{e^x-x}=\frac{-x+1}{e^x-1}$

➢ Η $g\uparrow$ στο $(-\infty,1]$ και $x_1<1$ άρα $g(1)>g(x_1) \Leftrightarrow g(1)-g(x_1)>0$.

Επομένως από την (1) συμπεραίνουμε ότι: $(1-x_1)g'(\xi_1)>0 \quad (5)$.

➢ Η $g\downarrow$ στο $[1,+\infty)$ και $x_2>1$ άρα $g(x_2)<g(1) \Leftrightarrow g(x_2)-g(1)<0$.

Επομένως από τη (2) συμπεραίνουμε ότι: $(x_2-1)g'(\xi_2)<0 \quad (6)$.

Συνεπώς από (5) και (6) προκύπτει: $(1-x_1)g'(\xi_1)>(x_2-1)g'(\xi_2)$