ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Μαΐου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 134

Α2. Σελίδα 33

Α3. Σ Λ Σ Σ Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\begin{cases} P(1)=0 \\ P(2)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+\alpha-5+\beta=0 \\ 16+4\alpha-10+\beta=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=3 \\ 4\alpha+\beta=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=3 \\ 3\alpha=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=2 \end{cases}$

Β2. $P(x)=2x^3+x^2-5x+2$

Κάνουμε σχήμα Horner, φυσικά με το 1.

2	1	-5	2	1
	2	3	-2	
2	3	-2	0	

$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+3x-2)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ ή } x=\frac{1}{2}$

Β3. α)

2	1	-5	2	2
	4	10	10	
2	5	5	12	

$P(x)=(x-2)(2x^2+5x+5)+12$

β) $P(x)-12<0 \Leftrightarrow (x-2)(2x^2+5x+5)<0 \Leftrightarrow x-2<0 \Leftrightarrow x<2$

Το τριώνυμο $2x^2+5x+5$ είναι πάντοτε θετικό αφού έχει αρνητική διακρίνουσα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή από την θεωρία ως γνωστόν *ισχύει* :

$$\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu\chi \ , \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu\chi$$

$$, \sigma\upsilon\nu(2\pi - x) = \sigma\upsilon\nu\chi \ , \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sigma\upsilon\nu\chi$$

και τέλος $\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu\chi$ η f(x) γίνεται :

f(x)= $\eta\mu^2\chi + 2\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 2\sigma\upsilon\nu\chi + 1$

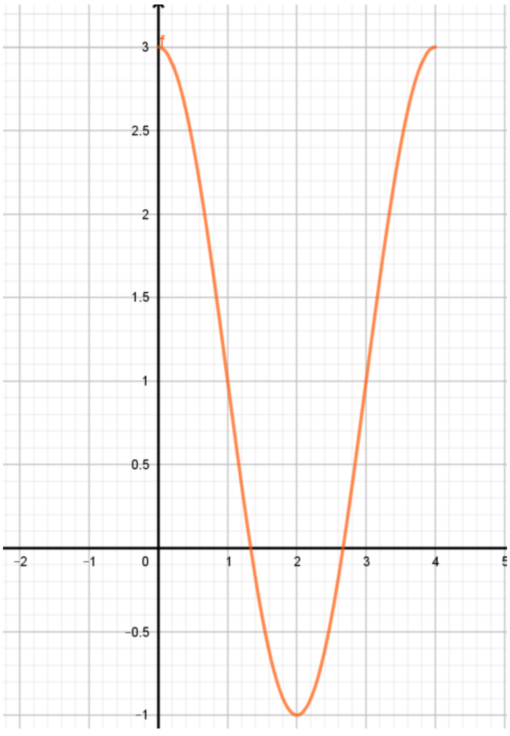
Γ2. Για $x \in \mathbb{R}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}x \in [-1,1]$ τότε $2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}x \in [-2,+2]$

άρα $g(\chi)=2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}x + 1 \in [-1,3]$

άρα έχει ελάχιστο το -1, μέγιστο το 3 και περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

Γ3. Κατασκευάζουμε ένα πίνακα τιμών

x	0	1	2	3	4
y	3	1	-1	1	3



Γ4. $2συν\frac{π}{2}x+1=0 \Leftrightarrow συν\frac{π}{2}x=-1/2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow συν\frac{π}{2}x=συν(π-π/3) \Leftrightarrow \frac{π}{2}x=2κπ\pm 2π/3 \Leftrightarrow χ=4κ\pm 4/3$ $κ \in Z$

$0<χ<4 \Rightarrow 0<4κ+4/3<4 \Rightarrow -4/3<4κ<8/3 \Rightarrow -1/3<κ<2/3$ οπότε κ=0 όμοια

$0<χ<4 \Rightarrow 0<4κ-4/3<4 \Rightarrow 4/3<4κ<16/3 \Rightarrow 1/3<κ<4/3$ οπότε κ=1

Για κ = 0 ο τύπος με το + δίνει χ=4/3. Για κ=1 ο τύπος με το – δίνει 8/3

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $0<f(x)<1 \Leftrightarrow 0<\log\ 2^{x+1}+8\ -2\log 2<1 \Leftrightarrow$

$\log 1<\log\ 2^{x+1}+8\ -\log 2^2<\log 10 \Leftrightarrow$

$\log 1<\log\frac{2^{x+1}+8}{4}<\log 10 \xLeftrightarrow[\log x \uparrow]{} 1<\frac{2^{x+1}+8}{4}<10$

$\Leftrightarrow 4<2^{x+1}+8<40 \Leftrightarrow -4<2^{x+1}<32 \Leftrightarrow$

(η πρώτη ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$) $2^{x+1}<2^5 \xLeftrightarrow[2^x \uparrow]{} x+1<5 \Leftrightarrow x<4$

Δ2 Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές αφού οι α, β είναι ακέραιοι. Ο α, ως ακέραια ρίζα του πολυωνύμου P, ανήκει στο σύνολο των διαιρετών του σταθερού όρου 3. Δηλαδή είναι ένας από τους -1, 1, -3, 3. Σε κάθε περίπτωση α<4. Επομένως, από το Δ1, προκύπτει ότι 0< f(α)<1. Έτσι έχουμε: $f(α)^{5β-24}<f(α)^{β(β-5)}$ $\xLeftrightarrow{(f(α))^x \downarrow}$ $5β-24>β(β-5) \Leftrightarrow β^2-10β+24<0$ και από τον κανόνα προσήμου τριωνύμου προκύπτει $4<β<6$, οπότε αφού ο β είναι ακέραιος έπεται ότι β=5.

Για β=5 και αφού ο α είναι ρίζα του πολυωνύμου P έχουμε:

$P(α)=0 \Leftrightarrow 2α^3+5α^2-4α^2-3=0 \Leftrightarrow 2α^3+α^2-3=0 \Leftrightarrow$ (σχήμα Horner στη θέση 1) $(α-1)(2α^2+3α+3)=0 \Leftrightarrow α=1$ ($2α^2+3α+3=0$ αδύνατη)

Δ3. $P(x)<0 \Leftrightarrow 2x^3+5x^2-4x-3<0 \Leftrightarrow$ (σχήμα Horner στη θέση 1)

$(x-1)(2x^2+7x+3)<0$

x	$-\infty$		-3		-1/2		1		$+\infty$
x-1		-		-		-	0	+	
$2x^2+7x+3$		+	0	-	0	+		+	
P(x)		-	0	+	0	-	0	+	

Επομένως $x \in -\infty,-3 \cup \left(-\frac{1}{2},1\right)$

Δ4. Για $x \in 0,\pi$ είναι ημ$x \in 0,1$. Από τον πίνακα του Δ3 προκύπτει ότι

$P(\text{ημχ}) \le 0$ (2).

Επίσης από το Δ1, προκύπτει ότι για ημ$x \le 1 < 4$ είναι f(ημx)<1 (3)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2) και (3) προκύπτει P(ημx) + f(ημx)<1.