

**ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.****ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ****Ημερομηνία: Σάββατο 16 Μαΐου 2020****Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες****ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ****ΘΕΜΑ Α**

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 31

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 60

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 65

Α4. 1. Λ

2. Σ

3. Λ

4. Σ

5. Λ

ΘΕΜΑ Β

$$\text{B1. } \begin{cases} f' \left(\frac{1}{3} \right) = 0 \\ f'(x) = 3\kappa^2 x^2 - 18\kappa x + 15 \end{cases} \Rightarrow \kappa^2 - 18\kappa + 45 = 0 \Rightarrow \kappa = 3 \text{ ή } 15$$

$$\text{B2. } f(x) = 9x^3 - 27x^2 + 15x + 3 \text{ και}$$

$$f'(x) = 27x^2 - 54x + 15 = 3(9x^2 - 18x + 5)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ή } \frac{5}{3} \text{ άρα: } \begin{cases} f'(x) > 0 \text{ για } x \in (-\infty, \frac{1}{3}), \text{ άρα } f \uparrow (-\infty, \frac{1}{3}] \\ f'(x) < 0 \text{ για } x \in (\frac{1}{3}, \frac{5}{3}), \text{ άρα } f \downarrow [\frac{1}{3}, \frac{5}{3}] \\ f'(x) > 0 \text{ για } x \in (\frac{5}{3}, +\infty), \text{ άρα } f \uparrow [\frac{5}{3}, +\infty) \end{cases}$$

Επομένως η f έχει τοπικό μέγιστο στο $\frac{1}{3}$ και τοπικό ελάχιστο στο $\frac{5}{3}$.

Το τοπικό μέγιστο είναι το $f(\frac{1}{3}) = \frac{16}{3}$ και το τοπικό ελάχιστο είναι το $f(\frac{5}{3}) = \frac{184}{3}$.

B3. $y = \lambda x + \beta \Rightarrow \begin{cases} x = 0, y = f(0), \lambda = f'(0) = 15 \\ 3 = 15 \cdot 0 + \beta \end{cases} \Rightarrow \beta = 3$

Επομένως $y = 15x + 3$

Τομή x' : $0 = 15x + 3 \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$ άρα έχουμε το σημείο $A(-\frac{1}{5}, 0)$

Τομή y' : $y = 15 \cdot 0 + 3 = 3$ άρα $B(0, 3)$

B4. $f''(x) = 54x - 54$ και $f(0) = 3$

Έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f''(x) - 18f(0)}{\sqrt{x+2} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{54x - 54 - 18 \cdot 3}{\sqrt{x+2} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{54x - 108}{\sqrt{x+2} - 2} =$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{54(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{54(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)} = 54 \cdot 4 = 216$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η $f(x)$ είναι συνεχής θα ισχύει:

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = v^2 - 40v + 401$

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1) + x - 1}{(x-1)(x+1)} = v^2 - 40v + 401 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = v^2 - 40v + 401$

$\Leftrightarrow 1 = v^2 - 40v + 401 \Leftrightarrow v^2 - 40v + 400 = 0 \Leftrightarrow (v - 20)^2 = 0 \Leftrightarrow v = 20$

Γ2. I. Έχουμε: $\alpha = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{3x - 9} = \alpha = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{3(x-3)} = 2$

II. Έχουμε: $\beta = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = 4 + 4 + 4 = 12$

III. Έχουμε: $\gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-10\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-10\eta\mu^2 x}{-\eta\mu^2 x} = 10$

Γ3. I. Έχουμε: $\delta = \lim_{x \rightarrow 0} 15 \frac{\varepsilon \varphi x}{\eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} 15 \frac{\frac{\eta \mu x}{\sigma \upsilon \nu x}}{\eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} 15 \frac{1}{\sigma \upsilon \nu x} = 15$

II. Έχουμε: $\varepsilon = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x+\frac{1}{2})}{x-2} = 2 \left(2 + \frac{1}{2} \right) = 4 + 1 = 5$

Γ4. Έχουμε: $N_1=2$ και $f_1\% = \frac{v_1}{v} 100 = \frac{2}{20} 100 = 10$

$v_2 = N_2 - v_1 = 12 - 2 = 10$ άρα $f_2\% = \frac{v_2}{v} 100 = \frac{10}{20} 100 = 50$

$f_3\% = \frac{v_3}{v} 100 \Leftrightarrow 10 = \frac{v_3}{20} 100 \Leftrightarrow v_3 = 2$ άρα $N_3 = v_1 + v_2 + v_3 = 2 + 10 + 2 = 14$

$N_4 = v_4 + N_3 \Leftrightarrow 15 = v_4 + 14 \Leftrightarrow v_4 = 1$ άρα $f_4\% = \frac{v_4}{v} 100 = \frac{1}{20} 100 = 5$

$f_5\% = \frac{v_5}{v} 100 \Leftrightarrow 5 = \frac{v_5}{20} 100 \Leftrightarrow v_5 = 1$ άρα $N_5 = v_5 + N_4 = 1 + 15 = 16$

$N_5 + v_6 = 20 \Leftrightarrow 16 + v_6 = 20 \Leftrightarrow v_6 = 4$ άρα $f_6\% = \frac{v_6}{v} 100 = \frac{4}{20} 100 = 20$

Αριθμός λογαριασμών σε κοινωνικά δίκτυα x_i	Αριθμός μαθητών v_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
0	$\alpha=v_1=2$	$N_1=2$	$f_1=10$
1	$v_2=10$	$\beta=N_2=12$	$f_2=50$
2	$v_3=2$	$N_3=14$	$\gamma=f_3=10$
3	$v_4=1$	$\delta=N_4=15$	$f_4=5$
4	$v_5=1$	$N_5=16$	$\varepsilon=f_5=5$
5	$v_6=4$	$v=20$	$f_6=20$
Σύνολο	$v=20$		100

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $x^2 + y^2 = 3^2 \Leftrightarrow y^2 = 9 - x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{9 - x^2}$

Δ2.
$$\begin{cases} y(t_0) = \sqrt{9 - x^2(t_0)} \\ x(t_0) = 2 \end{cases} \Rightarrow y(t_0) = \sqrt{5}m$$

Δ3. $x^2(t) + y^2(t) = 9 \Rightarrow 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0 \xrightarrow{t=t_0}$

$$\begin{cases} 2x(t_0)x'(t_0) + 2y(t_0)y'(t_0) = 0 \\ x(t_0) = 2, y(t_0) = \sqrt{5}m, y'(t_0) = \sqrt{5}m/s \end{cases} \Rightarrow x'(t_0) = -\frac{5}{2}m/s$$

Δ4. I. $E(x) = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x\sqrt{9 - x^2}$

II. $E'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{9 - x^2} + \frac{1}{2}x \frac{1}{2\sqrt{9 - x^2}}(-2x) = \frac{9 - x^2 - x^2}{2\sqrt{9 - x^2}} = \frac{9 - 2x^2}{2\sqrt{9 - x^2}}$

$E'(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (δεκτό το $+\frac{3\sqrt{2}}{2}$)

$E'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ άρα $E \uparrow [0, \frac{3\sqrt{2}}{2}]$

$E'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\frac{3\sqrt{2}}{2}, 3)$ άρα $E \downarrow [\frac{3\sqrt{2}}{2}, 3]$

Άρα έχουμε μέγιστο στο $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

III. $\frac{\pi}{18} < \frac{\pi}{5} \xrightarrow{\eta\mu x \uparrow [0, \frac{\pi}{2}]} \eta\mu\left(\frac{\pi}{18}\right) < \eta\mu\left(\frac{\pi}{5}\right) \leq 1 < \frac{3\sqrt{2}}{2}$ καθώς $\eta\mu x \leq 1$

Έχουμε: $\eta\mu\left(\frac{\pi}{18}\right) < \eta\mu\left(\frac{\pi}{5}\right) \xrightarrow{E \uparrow [0, \frac{3\sqrt{2}}{2}]} E\left(\eta\mu\left(\frac{\pi}{18}\right)\right) < E\left(\eta\mu\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$