

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020  
Β' ΦΑΣΗ

E\_3.Μλ3ΘΟ(α)

**ΤΑΞΗ:** Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Κυριακή 24 Μαΐου 2020  
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

A1. Σελίδα 116, η πρώτη κουκίδα.

A2. Σελίδα 128. Σχήμα και επιβεβαίωση αμέσως μετά το θεώρημα.

- A3. α) Λάθος  
β) Σωστό  
γ) Λάθος  
δ) Σωστό

A4. Ο ισχυρισμός είναι Ψευδής.

Έχουμε την πρόταση: Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

Αν η  $f$  είναι σταθερή τότε το  $f(\mathbb{R})$  είναι σύνολο με ένα μόνο στοιχείο (μονοσύνολο).

Αν δεν είναι σταθερή τότε το  $f(\mathbb{R})$  είναι διάστημα.

Αλλά το  $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  δεν είναι σύνολο με ένα στοιχείο ούτε διάστημα, αλλά ένωση διαστημάτων.

## ΘΕΜΑ Β

**B1.** Πρέπει και αρκεί:  $e^{x-1} - 1 > 0$ . Η τελευταία είναι διαδοχικά ισοδύναμη,  
 $e^{x-1} > 1 \Leftrightarrow e^{x-1} > e^0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ . Άρα,  $A = (1, +\infty)$ .

Για το σύνολο τιμών θεωρούμε την εξίσωση

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \ln(e^{x-1} - 1) \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 = e^y \Leftrightarrow e^{x-1} = 1 + e^y \quad (1)$$

Επειδή  $1 + e^y > 0$ , η (1) έχει λύση για κάθε  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$(1) \Leftrightarrow x - 1 = \ln(1 + e^y) \Leftrightarrow x = \ln(1 + e^y) + 1 \quad (2)$$

Επειδή  $x > 1$  πρέπει  $\ln(1 + e^y) + 1 > 1$  που ισχύει για κάθε  $y \in \mathbb{R}$ .

Άρα,  $f(A) = \mathbb{R}$ .

Σημείωση: το σύνολο τιμών θα μπορούσε να βρεθεί με τη βοήθεια της μονοτονίας και των αντιστοίχων ορίων.

**B2.** Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{1}{e^{x-1} - 1} (e^{x-1} - 1)' = \frac{e^{x-1}}{e^{x-1} - 1} > 0, x \in A. \text{ Συμπεραίνουμε ότι η } f \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα επομένως και "1-1" συνεπώς αντιστρέφεται. Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f^{-1}(x) = \ln(1 + e^x) + 1, x \in \mathbb{R}.$$

Σημείωση: Η ιδιότητα ότι η  $f$  είναι "1-1" θα μπορούσε να αποδειχθεί με τη βοήθεια του ορισμού.

**B3.** Έστω ότι υπάρχει  $\rho \in \mathbb{R}$  τέτοιος ώστε:  $f^{-1}(\ln(e^{\rho-1} - 1)) = \rho^2 - \rho + 1 \quad (1)$ .

Επειδή γνωρίζουμε ότι:  $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$ ,

$$(1) \Rightarrow f^{-1}(f(\rho)) = \rho^2 - \rho + 1 \Rightarrow \rho = \rho^2 - \rho + 1 \Rightarrow (\rho - 1)^2 = 0 \Rightarrow \rho = 1, \text{ άτοπο διότι } 1 \notin A.$$

**B4.**  $f^{-1}(x) = \ln(1 + e^x) + 1, x \in \mathbb{R}$ .

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[-1, 1]$ , ως άθροισμα των συνεχών  $\ln(1 + e^x)$  (σύνθεση των συνεχών  $\ln x, 1 + e^x$ ) και 1 (σταθερή).

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-1, 1)$  ομοίως ως άθροισμα παραγωγισίμων με

$$(f^{-1}(x))' = (\ln(1 + e^x) + 1)' = \frac{e^x}{1 + e^x}, x \in (-1, 1).$$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα  $[-1,1]$ .

Υπάρχει ένας τουλάχιστον  $\zeta \in (-1,1)$  τέτοιο ώστε:

$$(f^{-1})'(\zeta) = \frac{f^{-1}(1) - f^{-1}(-1)}{1 - (-1)} \Leftrightarrow \frac{e^\zeta}{1 + e^\zeta} = \frac{\ln(1+e) + 1 - \ln(1+e^{-1}) - 1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^\zeta}{1 + e^\zeta} = \frac{\ln(1+e) - \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right)}{2} \Leftrightarrow \frac{e^\zeta}{1 + e^\zeta} = \frac{\ln e}{2} \Leftrightarrow \frac{e^\zeta}{1 + e^\zeta} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$2e^\zeta = 1 + e^\zeta \Leftrightarrow e^\zeta = 1 \Leftrightarrow \zeta = 0.$$

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.**  $f'(x) = 2x + 2 - 2\ln x - 2 = 2(x - \ln x) > 0$ , για κάθε  $x > 0$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, αφού  $\ln x \leq x - 1 < x$ . Το τελευταίο αποδεικνύεται και από τη μελέτη της συνάρτησης  $g(x) = x - \ln x$ . Προκύπτει επίσης άμεσα από τη θέση της γραφικής παράστασης της  $y = x$  και  $h(x) = \ln x$ .

Επειδή  $f(1) = 0$ , αν  $x > 1$  είναι  $f(x) > f(1) = 0$

αν  $0 < x < 1$  είναι  $f(x) < f(1) = 0$

**Γ2. α.**  $f(x) > 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2x\ln x - 3 > 2x - 3$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x\ln x > 0 \Leftrightarrow x - 2\ln x > 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $r(x) = x - 2\ln x$ ,  $x > 0$

$$r'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}, x > 0$$

Για  $x < 2$ , είναι  $r'(x) < 0$  και άρα η  $r$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0,2)$

Για  $x > 2$ , είναι  $r'(x) > 0$  και άρα η  $r$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[2, +\infty)$

Η συνεχής συνάρτηση  $r$  στο σημείο 2 παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το  $r(2) = 2 - 2\ln 2 = 2(\ln e - \ln 2) > 0$  και άρα  $r(x) > 0$

**β.** Θεωρούμε το  $D = [1, +\infty)$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3) = +\infty$ , είναι και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Έτσι  $f(D) = [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [0, +\infty)$  και επειδή το  $2020 \in f(D)$  προφανώς υπάρχει  $x_0$  και μάλιστα μοναδικός, αφού η  $f$  είναι "1-1", ώστε  $f(x_0) = 2020$

**Γ3.** Έστω το σημείο  $M_0(x_0, f(x_0))$

Η εφαπτόμενη της  $C_f$  στο  $M_0$  είναι η ευθεία  $(\epsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Επειδή θέλουμε να διέρχεται από το σημείο  $A(0, -2)$  πρέπει και αρκεί

$$-2 - f(x_0) = -x_0 f'(x_0) \Leftrightarrow -2 - (x_0^2 + 2x_0 - 2x_0 \ln x_0 - 3) = -x_0(2x_0 - 2 \ln x_0) \Leftrightarrow$$

$$x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

Οπότε, πρόκειται για την εφαπτομένη  $(\epsilon): y = 2x - 2$  στο σημείο  $M_0(1, 0)$

**Γ4.** Επειδή στο  $(1, +\infty)$  είναι  $f(x) > 0$  και στο  $(0, 1)$  είναι  $f(x) < 0$  τελικά είναι  $f(x) \neq 0$ , για κάθε  $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ . Άρα και  $F(x) \neq 0$  διαστήματα  $(0, 1)$  και  $(1, +\infty)$

Αφού αναζητούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $F$  που ικανοποιούν τη δεδομένη σχέση αυτές θα είναι κατ'ανάγκη και συνεχείς. Ως συνεχής, η  $F$  διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από αυτά.

Από  $F^2(x) = f^2(x)$  στο  $(0, 1)$  είναι ή  $F(x) = -f(x)$  ή  $F(x) = f(x)$

και στο  $(1, +\infty)$  είναι ή  $F(x) = -f(x)$  ή  $F(x) = f(x)$

Οπότε

$$\text{ή } F_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } 0 < x < 1 \\ f(x) & \text{αν } x \geq 1 \end{cases} = f(x) \text{ ή } F_2(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{αν } 0 < x < 1 \\ -f(x) & \text{αν } x \geq 1 \end{cases} = -f(x)$$

$$\text{ή } F_3(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } 0 < x < 1 \\ -f(x) & \text{αν } x \geq 1 \end{cases} \text{ ή } F_4(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{αν } 0 < x < 1 \\ f(x) & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

Οι  $F_1$  και  $F_2$  είναι παραγωγίσιμες.

Όμως, η συνάρτηση  $F_3$  στο 1 δεν είναι παραγωγίσιμη

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{F_3(x) - F_3(1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{f(x)}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = f'(1) = 2$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{F_3(x) - F_3(1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{-f(x)}{x - 1} \right) = - \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = -f'(1) = -2$$

Εντελώς όμοια καταλήγουμε ότι και η  $F_4$  στο 1 δεν είναι παραγωγίσιμη.

Οπότε, υπάρχουν ακριβώς δύο παραγωγίσιμες στο  $\Delta$  συναρτήσεις  $F$  οι οποίες μάλιστα είναι και αντίθετες.

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.**

Α' τρόπος

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , άρα και για  $x=0$  όπου χρειαστεί, έχουμε:

$$f''(x) - f(x) = 2e^x \Rightarrow f''(x) + f'(x) - f'(x) - f(x) = 2e^x \Rightarrow (f'(x) + f(x))' - (f'(x) + f(x)) = 2e^x \Rightarrow e^{-x}(f'(x) + f(x))' - e^{-x}(f'(x) + f(x)) = e^{-x}2e^x \Rightarrow e^{-x}(f'(x) + f(x))' + (e^{-x})'(f'(x) + f(x)) = 2 \Rightarrow (e^{-x}(f'(x) + f(x)))' = (2x)' \Rightarrow e^{-x}(f'(x) + f(x)) = 2x + c,$$

για  $x=0$  είναι  $e^{-0}(f'(0) + f(0)) = 2 \cdot 0 + c \Rightarrow 1(2 - 1) = c \Rightarrow c = 1.$

Άρα  $e^{-x}(f'(x) + f(x)) = 2x + 1 \Rightarrow e^{2x}e^{-x}(f'(x) + f(x)) = e^{2x}(2x + 1) \Rightarrow e^x(f'(x) + f(x)) = 2xe^{2x} + e^{2x} \Rightarrow e^x f'(x) + (e^x)' f(x) = x(e^{2x})' + x'e^{2x} \Rightarrow (e^x f(x))' = (xe^{2x})' \Rightarrow e^x f(x) = xe^{2x} + c_1$

για  $x=0$  είναι  $e^0 f(0) = 0 \cdot e^{2 \cdot 0} + c_1 \Rightarrow 1(-1) = c_1 \Rightarrow c_1 = -1$

Άρα  $e^x f(x) = xe^{2x} - 1 \Rightarrow e^{-x}e^x f(x) = e^{-x}(xe^{2x} - 1) \Rightarrow f(x) = xe^x - e^{-x}$

Β' τρόπος

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , άρα και για  $x=0$  όπου χρειαστεί, έχουμε:

$$f''(x) - f(x) = 2e^x \Rightarrow f''(x) + f'(x) - f'(x) - f(x) = 2e^x \Rightarrow e^x f''(x) + e^x f'(x) - e^x f'(x) - e^x f(x) = 2e^{2x} \Rightarrow (e^x f''(x) + (e^x)' f'(x)) - (e^x f'(x) + (e^x)' f(x)) = 2e^{2x} \Rightarrow (e^x f'(x))' - (e^x f(x))' = (e^{2x})' \Rightarrow (e^x f'(x) - e^x f(x))' = (e^{2x})' \Rightarrow e^x f'(x) - e^x f(x) = e^{2x} + c$$

Για  $x=0$  είναι  $e^0 f'(0) - e^0 f(0) = e^{2 \cdot 0} + c \Rightarrow 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) = 1 + c \Rightarrow c = 2$

Άρα  $e^x f'(x) - (e^x)' f(x) = e^{2x} + 2 \Rightarrow \frac{e^x f'(x) - (e^x)' f(x)}{e^{2x}} = \frac{e^{2x} + 2}{e^{2x}} \Rightarrow \left( \frac{f(x)}{e^x} \right)' = 1 + 2e^{-2x} = (x - e^{-2x})' \Rightarrow$

$\frac{f(x)}{e^x} = x - e^{-2x} + c_1.$  Για  $x=0$  είναι  $\frac{f(0)}{e^0} = 0 - e^{-2 \cdot 0} + c_1 \Rightarrow -1 = -1 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0.$

Έτσι έχουμε  $\frac{f(x)}{e^x} = x - e^{-2x} \Rightarrow e^x \frac{f(x)}{e^x} = e^x(x - e^{-2x}) \Rightarrow f(x) = xe^x - e^{-x}$

**Δ2.**

Έχουμε  $f(x) = xe^x - e^{-x}$  και  $f'(x) = e^x + xe^x + e^{-x} = (x+1)e^x + e^{-x} = (x+1)e^x + \frac{1}{e^x} = \frac{(x+1)e^{2x} + 1}{e^x}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = (x+1)e^{2x} + 1$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων στο  $\mathbb{R}$  συναρτήσεων, με  $h'(x) = e^{2x} + 2e^{2x}(x+1) = (2x+3)e^{2x}$ . Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνεται η συμπεριφορά της συνάρτησης  $h$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

|    |           |                |           |
|----|-----------|----------------|-----------|
| x  | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
| h' | -         | 0              | +         |
| h  | ↘         | ολ. ελ.        | ↗         |

Η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση  $x = -\frac{3}{2}$  την τιμή

$$h\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2} + 1\right) e^{2\left(-\frac{3}{2}\right)} + 1 = -\frac{1}{2e^3} + 1 = \frac{2e^3 - 1}{2e^3} > 0.$$

Επομένως  $h(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε  $\frac{h(x)}{e^x} > 0$  ή  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και επομένως 1-1 στο  $\mathbb{R}$ .

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  ως παραγωγίσιμη σε αυτό. Επομένως είναι συνεχής και στο  $[0, 1]$ .

Επίσης έχουμε  $f(0)f(1) = -1\left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{1 - e^2}{e} < 0$ . Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του

θεωρήματος Bolzano

για την συνάρτηση f στο  $[0, 1]$ , επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένας  $\rho \in (0, 1)$  τέτοιος ώστε  $f(\rho) = 0$ .

Έτσι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, 1)$  άρα και στο  $\mathbb{R}$  η οποία είναι και η μοναδική αφού η f είναι 1-1 στο  $\mathbb{R}$ .

### Δ3.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πράξεις παραγωγίσιμων στο  $\mathbb{R}$  συναρτήσεων, με

$g'(x) = e^x + (x-1)e^x - e^{-x} = xe^x - e^{-x} = f(x)$ . Από το Δ2, γνωρίζουμε ότι η f γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  με μοναδική ρίζα  $\rho$  μεταξύ 0 και 1.

Έχουμε για κάθε  $x_1, x_2$  με  $x_1 < \rho < x_2 \stackrel{f \text{ γ. αυξ}}{\Rightarrow} f(x_1) < f(\rho) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) < 0 < f(x_2)$ . Από τα προηγούμενα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μελέτης της συνάρτησης g:

|      |           |        |        |   |
|------|-----------|--------|--------|---|
| x    | $-\infty$ | 0      | $\rho$ | 1 |
|      | $+\infty$ |        |        |   |
| g'=f | -         | 0      | +      |   |
| g    | ↘         | ολ. ελ | ↗      |   |

Στο διάστημα  $(-\infty, \rho]$  η g είναι γνησίως φθίνουσα άρα 1-1. Συνεπώς η προφανής ρίζα  $x=0$  είναι η μοναδική στο διάστημα αυτό.

Επίσης έχουμε  $0 < \rho \stackrel{g \text{ γ. φθ}}{\Rightarrow} g(\rho) < g(0) \Rightarrow g(\rho) < 0$  (1).

Παρατηρούμε επίσης ότι  $g(1) = e^{-1} > 0$  (2).

Η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  ως παραγωγίσιμη σε αυτό. Επομένως είναι συνεχής και στο  $[\rho, 1]$ . Επίσης, από (1), (2) είναι  $g(\rho) \cdot g(1) < 0$ . Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για την συνάρτηση  $g$  στο  $[\rho, 1]$ , επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένας  $x_0 \in (\rho, 1)$  τέτοιος ώστε  $g(x_0) = 0$ .

Έτσι η εξίσωση  $g(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(\rho, 1)$  άρα και στο  $(\rho, +\infty)$  η οποία είναι και η μοναδική αφού η  $g$  είναι 1-1 στο  $[\rho, +\infty)$ , ως γνησίως αύξουσα σε αυτό. Τελικά λοιπόν η εξίσωση  $g(x) = 0$ , εκτός της προφανούς ρίζας  $x = 0$ , έχει ακριβώς μία ακόμα τη  $x = x_0$ .

#### Δ4.

##### Α' τρόπος

Αφού το σημείο  $M$  κινείται επί της καμπύλης της  $y = g(x)$  δηλαδή επί της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$ , η τεταγμένη του  $y$  συναρτήσει του χρόνου  $t$  για  $t \geq 0$  sec δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = g(x(t)) \Rightarrow y'(t) = g'(x(t)) \cdot x'(t), \quad t \geq 0 \quad (1)$$

Αν είναι  $t_0 \geq 0$  η ζητούμενη χρονική στιγμή τότε θα πρέπει  $y'(t_0) = -2$  μον/sec

Η (1) για  $t = t_0$  γίνεται  $y'(t_0) = g'(x(t_0)) \cdot x'(t_0)$  και αφού  $x'(t) = 2$  μον/sec για κάθε  $t \geq 0$ , έχουμε

$$-2 \text{ μον/sec} = g'(x(t_0)) \cdot 2 \text{ μον/sec} \Rightarrow g'(x(t_0)) = -1 \quad \stackrel{A3}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow f(x(t_0)) = -1 \Rightarrow f(x(t_0)) = f(0) \stackrel{f^{-1}}{\Rightarrow} x(t_0) = 0$ . Επομένως το ζητούμενο θα συμβεί όταν το  $M$  φθάσει στη θέση με τεταγμένη 0. Αφού ξεκινά από τη θέση με τεταγμένη -2 και η τεταγμένη έχει ρυθμό μεταβολής 2 μον/sec, θα φτάσει στη θέση που πρέπει σε 1 sec από την έναρξη της κίνησης, δηλαδή  $t_0 = 1$  sec.

Με χρήση του συμβολισμού Leibniz:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad \text{και για } t = t_0 \text{ είναι } \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0=x(t_0)} \cdot \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_0}$$

##### Β' τρόπος

$x'(t) = 2 = (2t)' \Rightarrow x(t) = 2t + c$  και αφού  $x(0) = -2 \Rightarrow c = -2$ . Επομένως είναι  $x(t) = 2t - 2$ ,  $t \geq 0$

Τότε είναι  $y(t) = g(x(t)) = (2t - 3)e^{(2t-2)} + e^{-(2t-2)}$

$$\Rightarrow y'(t) = \dots = 2(e^{2t-2}(2t-2) - e^{-(2t-2)}) \Rightarrow y'(t) = 2f(2t-2)$$

Τη χρονική στιγμή  $t = t_0$  είναι  $y'(t_0) = 2f(2t_0 - 2) = -2$

$$\Rightarrow 2f(2t_0 - 2) = 2f(0) \Rightarrow f(2t_0 - 2) = f(0) \stackrel{f^{-1}}{\Rightarrow} 2t_0 - 2 = 0 \Rightarrow t_0 = 1 \text{ sec.}$$