

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελ. 30

A2. Σχολικό βιβλίο σελ. 22

A3. $\Lambda - \Sigma - \Sigma - \Lambda - \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 12x + 10, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

B1. $f'(x) = 6x^2 + 2\alpha x - 12, \quad x \in \mathbb{R}$

B2. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ για $x=1$ επομένως ισχύει : $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 + 2\alpha - 12 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$

B3. Για $\alpha=3$ είναι $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10, \quad x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12, \quad x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9, \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -2$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$		$\bigcirc$	$\bigcirc$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -2]$ και $[1, +\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 1]$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -2$ το $f(-2) = 30$ και τοπικό ελάχιστο $x_2 = 1$ το $f(1) = 3$

B4.
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 + 6x - 12}{x-1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(x+2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 6(x+2) = 18$$

ΘΕΜΑ Γ

Κλάσεις [,)	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$
[8, 12)	10	20	200
[12, 16)	14	15	210
[16, 20)	18	v_3	$18v_3$
[20, 24)	22	5	110
Σύνολο		$40 + v_3$	$520 + 18v_3$

Γ1. $\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \frac{520 + 18v_3}{40 + v_3} = 14 \Leftrightarrow 520 + 18v_3 = 560 + 14v_3 \Leftrightarrow 4v_3 = 40 \Leftrightarrow v_3 = 10$

Γ2.

Κλάσεις [,)	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$
[8, 12)	10	20	200
[12, 16)	14	15	210
[16, 20)	18	10	180
[20, 24)	22	5	110
Σύνολο		50	700

Γ3. $s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$

Κλάσεις [,)	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
[8, 12)	10	20	200	-4	16	320
[12, 16)	14	15	210	0	0	0
[16, 20)	18	10	180	4	16	160
[20, 24)	22	5	110	8	64	320
Σύνολο		50	700			800

Επομένως $s^2 = \frac{800}{50} = 16$ και έτσι

Γ4. Η τυπική απόκλιση θα είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$ και ο συντελεστής μεταβλητότητας

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \approx 0.2 = 20\% > 10\% \text{ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}, x \neq 0 \text{ και } f'(x) = -\frac{-1}{x^4}(x^2)' = \frac{1}{x^4}2x = \frac{2}{x^3}, x \neq 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} = 0, \text{ Αδύνατη}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$			

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ ενώ δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Δ2. Για κάθε $-4 \leq x \leq -1$ $\overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(-1) \leq f(x) \leq f(-1) \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$

Δ3. Ψάχνουμε εφαπτομένη στο $M(1, f(1))$ με $f(1) = -1$ και $\lambda = f'(1) = 2$.

$$y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow -1 = 2 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3.$$

Επομένως η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η $(\varepsilon): y = 2x - 3$

Δ4. Για τις συντεταγμένες (x_i, y_i) των σημείων A, B και Γ που ανήκουν στην $(\varepsilon): y = 2x - 3$ θα ισχύει $y_i = 2x_i - 3$.

$$\text{Επομένως θα είναι } \bar{y} = 2\bar{x} - 3 = 5 \text{ και } s_y = |2| \cdot s_x = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\text{Οπότε ο συντελεστής μεταβλητότητας των } y_i \text{ θα είναι } CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{4}{5} = 0.8 = 80\%$$