Πανελλαδικές Εξετάσεις

Ημερησίων - Εσπερινών Επαγγελματικών Λυκείων

Σάββατο 4 Ιουνίου 2022

Εξεταζόμενο Μάθημα: Μαθηματικά (Άλγεβρα)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 28-29

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 87

Α3. α. ΛΑΘΟΣ **β**. ΣΩΣΤΟ **γ**. ΛΑΘΟΣ

Α4. α. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ **β.** $\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)' = f'\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right)$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η μέση τιμή είναι $\bar{x} = \frac{25+10+5+20+15}{5} = \frac{75}{5} = 15$

Το εύρος είναι $R = 25 - 5 = 20$

Β2. Η διακύμανση είναι

$$s^2 = \frac{\left(25-15\right)^2 + \left(10-15\right)^2 + \left(5-15\right)^2 + \left(20-15\right)^2 + \left(15-15\right)^2}{5} = \frac{100+25+100+25}{5} =$$

$$= \frac{250}{5} = 50$$

Β3. Η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{5\sqrt{2}}{15} = \frac{\sqrt{2}}{3} > \frac{1}{3} > 0.1$

Συνεπώς το δείγμα **δεν** είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

$f(x)=x^3-9x^2+\alpha x+1,\ x\in\mathbb{R}$

Γ1. Είναι $f'(x)=3x^2-18x+\alpha,\ x\in\mathbb{R}$

με $f'(1)=3\cdot1^2-18\cdot1+\alpha=3-18+\alpha=-15+\alpha$.

Ο ρυθμός μεταβολής της f για x=1 είναι 0, επομένως :

$f'(1)=0\Rightarrow-15+\alpha=0\Rightarrow\alpha=15$

Γ2.

Για $\alpha=15$ η δοσμένη συνάρτηση γίνεται

$f(x)=x^3-9x^2+15x+1,\ x\in\mathbb{R}$ με

$f'(x)=3x^2-18x+15,\ x\in\mathbb{R}$.

Έστω $(\varepsilon):\ y=\lambda x+\beta$ η ζητούμενη εφαπτομένη της Cf στο $M(2,f(2))$.

Είναι $\lambda=f'(2)=3\cdot2^2-18\cdot2+15=3\cdot4-36+15=-9$ οπότε

$(\varepsilon):\ y=-9x+\beta$

Επίσης είναι $f(2)=2^3-9\cdot2^2+15\cdot2+1=8-9\cdot4+30+1=39-36=3$

άρα $M(2,3)$ το σημείο επαφής. Οι συντεταγμένες του σημείου M επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, οπότε

$(\varepsilon):\ 3=-9\cdot2+\beta\ \Rightarrow\ 3=-18+\beta\ \Rightarrow\ \beta=21.$

Τελικά η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $(\varepsilon):\ y=-9x+21$

Γ3.

$f'(x)=0\ \Rightarrow\ 3x^2-18x+15=0\ \overset{:3}{\Rightarrow}\ x^2-6x+5=0$

$\Delta=36-4\cdot1\cdot5=36-20=16$ $\qquad x=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\dfrac{6\pm4}{2}$ άρα

$x_1=1$ ή $x_2=5$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων για την f'

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty,1]$ και $[5,+\infty)$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,5]$
- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=1$, το $f(1)=8$
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=5$, το $f(5)=-24$

Γ4.

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{3x^2-18x+15}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{3(x^2-6x+5)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{3\cancel{(x-1)}(x-5)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{3(x-5)}{x+1}=\frac{3\cdot(-4)}{2}=\frac{-12}{2}=-6$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

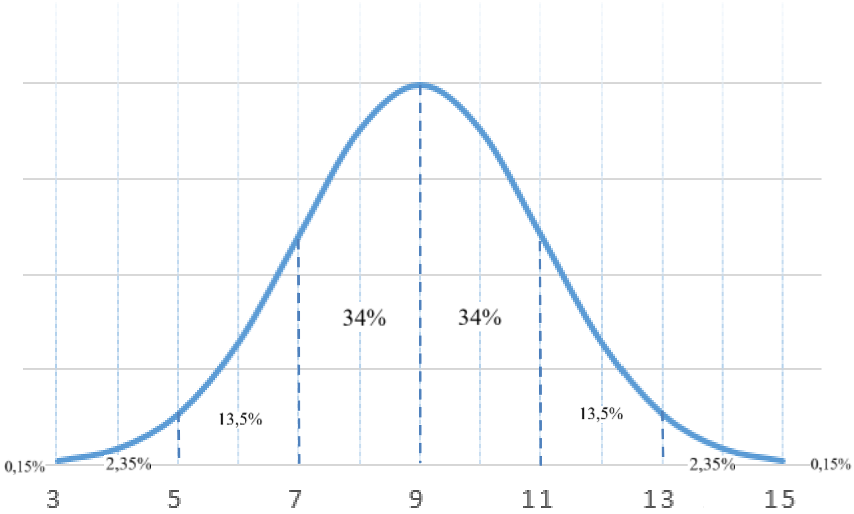
$f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $x\neq-1$ οπότε $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ με

$$f'(x)=\frac{(x)'(x+1)-x(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

Δ2.

$f'(2)=\dfrac{1}{(2+1)^2}=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9}$ οπότε $\bar{x}=\dfrac{1}{\frac{1}{9}}=9$

$f'(1)=\dfrac{1}{(1+1)^2}=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$ οπότε $s=\dfrac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$



Δ3.

Το ποσοστό των μαθητών που έχουν χρόνο επιστροφής από 5 εώς 11 λεπτά είναι : 13,5% + 34% + 34% = 81,5%.

Οπότε το πλήθος των μαθητών είναι: $\frac{81,5}{100} \cdot 2000 = 1630$ μαθητές

Το ποσοστό των μαθητών που έχουν χρόνο επιστροφής πάνω από 15 λεπτά είναι 0,15%.

Οπότε το πλήθος των μαθητών είναι : $\frac{0,15}{100} \cdot 2000 = 3$ μαθητές

Δ4.

Αν αυξηθούν όλες οι παρατηρήσεις x_i κατά 3 προκύπτουν παρατηρήσεις $y_i = x_i + 3$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, 2000$ οι οποίες θα έχουν

μέση τιμή : $\overline{y} = \overline{x} + 3 = 9 + 3 = 12$ και

τυπική απόκλιση : $s_y = s_x = 2$