

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020**  
Β' ΦΑΣΗ**E\_3.Μλ2ΓΑ(α)**

**ΤΑΞΗ:** Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

**Ημερομηνία:** Κυριακή 24 Μαΐου 2020  
**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ****ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Θεωρία από το Σχολικό Βιβλίο σελ 135.

**A2.**

1. Λ
2. Λ
3. Λ
4. Σ
5. Σ

**A3.**

- A → 4  
B → 2  
Γ → 1  
Δ → 5  
E → 3

**ΘΕΜΑ Β'**

**B1.**

$$\varepsilon\varphi(\pi - x) = -\varepsilon\varphi x$$

$$\sigma\upsilon\nu(2\pi + x) = \sigma\upsilon\nu x$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\eta\mu x$$

$$\eta\mu(13\pi + x) = \eta\mu(12\pi + \pi + x) = -\eta\mu x$$

$$\sin(-x) = \sin x$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{2} + x\right) = \sigma\varphi\left(10\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\varepsilon\varphi x$$

$$A = \frac{(-\varepsilon\varphi x) \cdot \sin x \cdot (-\eta\mu x)}{(-\eta\mu x) \cdot \sin x \cdot (-\varepsilon\varphi x)} = 1$$

**B2.**

$$f(x) = 6\eta\mu 2x$$

$$\alpha\varphi\acute{o}\upsilon -1 \leq \eta\mu 2x \leq 1$$

$$-6 \leq 6\eta\mu 2x \leq 6$$

Μέγιστη Τιμή: 6

$$\text{Περίοδος: } T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

**B3.**

$$f(x) = 3$$

$$6\eta\mu 2x = 3$$

$$\eta\mu 2x = \frac{1}{2}$$

$$\eta\mu 2x = \eta\mu \frac{\pi}{6}$$

$$2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } 2x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{12} \text{ ή } x = \kappa\pi + \frac{5\pi}{12} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{|l} x \in [-\pi, \pi] \\ -\pi \leq \kappa\pi + \frac{\pi}{12} \leq \pi \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} x \in [-\pi, \pi] \\ -\pi \leq \kappa\pi + \frac{5\pi}{12} \leq \pi \end{array} \right.$$

$$-\frac{13\pi}{12} \leq \kappa\pi \leq \frac{11\pi}{12}$$

$$-\frac{13}{12} \leq \kappa \leq \frac{11}{12}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\kappa = -1 \text{ ή } \kappa = 0$$

$$\kappa = -1 \text{ τότε } x = -\frac{11\pi}{12}$$

$$\kappa = 0 \text{ τότε } x = \frac{\pi}{12}$$

$$-\frac{17\pi}{12} \leq \kappa\pi \leq \frac{7\pi}{12}$$

$$-\frac{17}{12} \leq \kappa \leq \frac{7}{12}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\kappa = -1 \text{ ή } \kappa = 0$$

$$\kappa = -1 \text{ τότε } x = -\frac{7\pi}{12}$$

$$\kappa = 0 \text{ τότε } x = \frac{5\pi}{12}$$

**B4.**

$$(1 + \eta\mu x)(2 + 2\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x)(6\eta\mu 2x + 6\sigma\upsilon\nu 2x) = 0$$

$$\text{Τότε } 1 + \eta\mu x = 0$$

$$\eta\mu x = -1$$

$$\eta\mu x = \eta\mu \frac{3\pi}{2}$$

$$x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \text{ ή } x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ή το } 2 + 2\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x = 2\kappa\pi \pm \frac{3\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Η το } 6\eta\mu 2x + 6\sigma\upsilon\nu 2x = 0$$

$$6\eta\mu 2x = -6\sigma\upsilon\nu 2x$$

$$\eta\mu 2x = \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)$$

$$2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} - 2x \quad \text{ή} \quad 2x = 2k\pi + \pi - \frac{3\pi}{2} + 2x: \text{αδύνατη}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

**ΘΕΜΑ Γ'**  
**Γ1.**

**Α' ΤΡΟΠΟΣ**

Έστω  $y = ax + \beta$

Το σημείο  $A(0,6)$  ανήκει στην ευθεία άρα  $6 = \beta$

Το σημείο  $B(-2,0)$  ανήκει στην ευθεία οπότε

$$0 = -2a + 6$$

$$a = 3$$

**Β' ΤΡΟΠΟΣ**

Χρησιμοποιώ τον τύπο:

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 6}{-2 - 0} = 3$$

και η εξίσωση θα είναι:

$$y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$$

$$y - 0 = 3(x + 2)$$

$$y = 3x + 6$$

**Γ2.** Λύνω την εξίσωση  $f(x) = y$

$$x^4 - x^3 + x^2 = 3x + 6$$

$$x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6 = 0$$

1	-1	1	-3	-6	2
↓	2	2	6	6	
1	1	3	3	0	

$$(x - 2) \cdot (x^3 + x^2 + 3x + 3) = 0$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & -1 \\ \downarrow & -1 & 0 & -3 & \\ 1 & 0 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$(x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 3) = 0$$

$$x = 2 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x^2 = -3 \text{ αδύνατη}$$

Για  $x = 2$ ,  $y = 12$  και για  $x = -1$ ,  $y = -9$   
Επομένως τα σημεία τομής είναι τα  $A(2, 12)$   $B(-1, 3)$

**Γ3.** Για να ορίζεται η  $h(x)$  αρκεί  $f(x) > 3x + 6$

1ος Τρόπος Αλγεβρικά

$$\text{Γνωρίζω ότι: } f(x) - y = (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 3)$$

	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$	
$x-2$	-	-	•	+	
$x+1$	-	•	+	+	
$x^2+3$	+	+	+	+	
γινόμενο	+	•	-	•	+

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $h$  είναι:

$$A = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

2ος Τρόπος Γραφικά

Παρατηρώ από το σχήμα ότι η  $C_f$  είναι “πάνω” από την ευθεία  $(\varepsilon)$  όταν  $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$  αρα  $A = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

Γ4. i) Το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$f(x): (x-1) \text{ είναι } v = f(1) \quad \text{και} \quad Q(x): (x-1) \text{ είναι } v = Q(1)$$

Άρα,

$$\begin{aligned} f(1) &= Q(1) \\ 1 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + a \\ a &= 1 \end{aligned}$$

ii)  $\frac{x^4 - x^3 + x^2}{-\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1} \geq 0 \Leftrightarrow (x^4 - x^3 + x^2) \left( -\frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} + 1 \right) \geq 0 \quad (1)$

$$\begin{aligned} \text{πρέπει } -\frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} + 1 &= \frac{-x^4 + x^2 + 2}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \\ \frac{1 - x^4 + x^2 + 1}{2} &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } (1 - x^2)(1 + x^2) + x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow (2 - x^2)(1 + x^2) \neq 0$$

$$\text{Οπότε } 1 + x^2 \neq 0 \text{ που ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } 2 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{2}$$

Επίσης

$$x^4 - x^3 + x^2 = x^2(x^2 - x + 1)$$

$$\text{Άρα η (1) γίνεται: } x^2(x^2 - x + 1) \frac{(1+x^2)(2-x^2)}{2} \geq 0$$

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$x^2 - x + 1 = 0, \Delta < 0 \text{ άρα αδύνατη.}$$

$$-\infty \quad -\sqrt{2} \quad 0 \quad +\sqrt{2} \quad +\infty$$

$x^2$	+	+	•	+	+
$x^2 - x + 1$	+	+		+	+
$x^2 + 1$	+	+		+	+
$2 - x^2$	-	+		+	-
Γινόμενο	-	+	•	+	-

$$\text{Άρα, } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

**ΘΕΜΑ Δ**

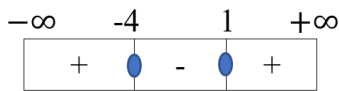
**Δ1.** Πρέπει  $e^x + 3 - 4e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^x + 3 - \frac{4}{e^x} > 0$   

$$\frac{e^{2x} + 3e^x - 4}{e^x} > 0$$

Επειδή  $e^x > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε  $e^{2x} + 3e^x - 4 > 0$

Θέτω  $e^x = \omega$ ,  $\omega > 0$ , άρα έχουμε  $\omega^2 + 3\omega - 4 > 0$ .

Οι ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης  $\omega^2 + 3\omega - 4 = 0$  είναι  $\omega_1 = -4$  και  $\omega_2 = 1$ .



Άρα  $\omega < -4$  απορρίπτεται,  $\omega > 1 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

Άρα  $A_f = (0, +\infty)$

**Δ2.**  $f(x) = \ln(e^x + 3 - 4e^{-x}) = \ln\left(e^x + 3 - \frac{4}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{e^{2x} + 3e^x - 4}{e^x}\right) =$   
 $\ln(e^{2x} + 3e^x - 4) - \ln e^x = \ln(e^{2x} + 3e^x - 4) - x, x > 0$

**Δ3.**  $f(x) \leq x$ , για  $x > 0$  (1) έχουμε :

$$\ln(e^{2x} + 3e^x - 4) - x \leq x \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^{2x} + 3e^x - 4) \leq 2x \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^{2x} + 3e^x - 4) \leq \ln e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$e^{2x} + 3e^x - 4 \leq e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$3e^x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow e^x \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow x \leq \ln \frac{4}{3} \quad (2)$$

$$\left(\frac{4}{3} > 1 \Leftrightarrow \ln \frac{4}{3} > 0\right)$$

Από (1) και (2) έχουμε  $0 < x \leq \ln \frac{4}{3}$

**Δ4.**

- $f(\ln 2) = \ln\left(e^{\ln 2} + 3 - \frac{4}{e^{\ln 2}}\right) = \ln\left(2 + 3 - \frac{4}{2}\right) = \ln 3$

- $f(\ln 3) = \ln\left(e^{\ln 3} + 3 - \frac{4}{e^{\ln 3}}\right) = \ln\left(3 + 3 - \frac{4}{3}\right) = \ln \frac{14}{3}$

Επειδή  $\frac{14}{3} > 3 \xrightarrow{\ln} \ln \frac{14}{3} > \ln 3 \Leftrightarrow$

$$f(\ln 2) - f(\ln 3) < 0$$