

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α1

A1. Απόδειξη σχ. βιβλίου σελ. 135

A2. Θεώρημα σχ. βιβλίο σελ. 51

A3. Ορισμός σχ. βιβλίο σελ. 23

A4. α β γ δ ϵ
 Σ Λ Σ Σ Σ

ΘΕΜΑ Β

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x+1) = (x+1)e^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B1. Θέτω $u = x+1 \Leftrightarrow x = u-1$ οπότε $f(u) = u \cdot e^{-u+1}$

$x \in \mathbb{R}$ και $u \in \mathbb{R}$ άρα $f(x) = x \cdot e^{1-x}, \quad x \in \mathbb{R}$.

B2. Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών $y = e^{1-x} = e^x \circ (1-x)$

$$f'(x) = e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \cdot (1-x)' = e^{1-x} - x e^{1-x} = e^{1-x} (1-x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{1-x} (1-x) > 0 \stackrel{e^{1-x} > 0}{\Leftrightarrow} 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Άρα	$-\infty$	1	$+\infty$	$f \nearrow$ για κάθε $x \in (-\infty, 1]$
f'	$+$	0	$-$	$f \searrow$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$
f	$\nearrow$		$\searrow$	

Ο.Μ.

Στο $x_0 = 1$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο με τιμή $f(1) = 1 \cdot e^0 = 1$.

B3. $f'(x) = e^{1-x} \cdot (1-x)$

$$f''(x) = -e^{1-x} (1-x) + e^{1-x} (-1) = e^{1-x} (-1+x-1) = e^{1-x} (x-2)$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=2, \quad f''(x)>0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2)>0 \stackrel{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} x-2>0 \Leftrightarrow x>2$$

Άρα

	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\curvearrowright$		$\curvearrowleft$

Σ.Κ.

$f \curvearrowright$ για κάθε $x \in (-\infty, 2]$
 $f \curvearrowleft$ για κάθε $x \in [2, +\infty)$

Στο $x_0=2$ έχω σημείο καμπής $f(2)=2 \cdot e^{-1}=\frac{2}{e}$. Άρα $A\left(2, \frac{2}{e}\right)$.

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

- στο $-\infty$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} \stackrel{u=1-x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow +\infty}} e^u = +\infty$$

Άρα στο $-\infty$ δεν υπάρχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη.

- στο $+\infty$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} \stackrel{u=1-x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow -\infty}} e^u = 0$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{1-x} \stackrel{(+\infty) \cdot 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \frac{1}{+\infty} = 0$$

Άρα $\varepsilon: y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη.

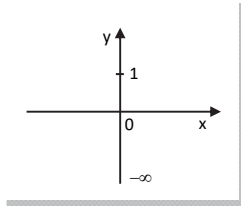
B4. i) στο $A_1 = (-\infty, 1]$ $f \nearrow$ $f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 1]$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^{1-x}) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

στο $A_2 = [1, +\infty)$ $f \searrow$ $f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right] = (0, 1]$

$$\text{όποτε } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1] \cup (0, 1] = (-\infty, 1].$$

ii) Εξίσωση $f(x) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$



- Αν $\lambda > 1$ εξίσωση αδύνατη
- Αν $\lambda = 1$ εξίσωση έχει μον. ρίζα το $x=1$ αφού εκεί παρουσιάζει Ο.Μ.

- Αν $\lambda \in (0, 1)$ $\lambda \in f(A_1)$ μοναδική ρίζα $x_1 \in (-\infty, 1)$
 $\lambda \in f(A_2)$ μοναδική ρίζα $x_2 \in (1, +\infty)$
- Αν $\lambda \in (-\infty, 0]$ $\lambda \in f(A_1)$ μοναδική ρίζα $x_3 \in (-\infty, 1]$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Στο $(-\infty, 0)$ η f είναι συνεχής ως πολ/κή.

Στο $(0, +\infty)$ η f είναι συνεχής ως τριγωνομετρική άρα και στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Στο $x=0$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \alpha \cdot 0 - 0 - 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 1$$

$$\text{Άρα η } f \text{ συνεχής στο } A = \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Παράγωγος στο $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x^2 - 3x - 1) = -1$$

Άρα η f δεν είναι παρ/μη στο $x=0$.

$$\text{Έχουμε } f'(x) = \begin{cases} 3\alpha x^2 - 6x - 1, & x < 0 \\ -\eta \mu x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Γ2. i) • Η f συνεχής στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ λόγω Γ1.

• Η f παρ/μη στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x) = -\eta\mu x$

• $f(0) = 1, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} = 0$

Άρα η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θ. Rolle στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

ii) $f'(x) = -\eta\mu x$. Άρα $f'(x) = 0 \Rightarrow -\eta\mu x = 0 \Rightarrow \eta\mu x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \eta\mu x = \eta\mu 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi + 0 \\ 2k\pi + \pi - 0 \end{cases} \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Για $k=1, x=\pi$ άρα το μοναδικό $\xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ ώστε $f'(\xi) = 0$ είναι το $\xi = \pi$.

Γ3. Θέλουμε να δείξουμε ότι δεν υπάρχει $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 < 0$ ώστε $f'(x_0) = \lambda_\varepsilon = 0$ ($\varepsilon // x'x \Rightarrow \lambda_\varepsilon = 0$, (ε) η εφαπτομένη στο A).

Όμως $f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1 < 0$ για κάθε $x < 0$

$$\text{διότι } \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3\alpha \cdot (-1) = 36 + 12\alpha = 12(3 + \alpha) < 0$$

αφού $\alpha < -3 \Rightarrow 3 + \alpha < 0$.

Γ4.

	$-\infty$	0	$\xi = \pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$+\infty$
$f'(x) = -\eta\mu x$			- 0 +		
$f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1$	-	-	-		
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$		

Ο.Ε.

$$0 < x < \pi \Rightarrow \eta\mu x > 0 \Rightarrow -\eta\mu x < 0$$

$$\pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu x < 0 \Rightarrow -\eta\mu x > 0$$

Η f είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty, \pi]$ και γν. αύξουσα στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Για κάθε $x \in A: f(x) \geq f(\pi) \Rightarrow f(x) \geq \text{συν}\pi \Rightarrow f(x) \geq -1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρώ $h(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ συνεχής στο $(0, +\infty)$.

$$h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \text{ για κάθε } x > 0 \quad h \uparrow (0, +\infty) \text{ άρα και στο } [1, e]$$

$$h(1) = \ln 1 - 1 = -1 < 0 \quad h(e) = \ln e - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$$

$$\text{Θ.Β. } \exists \text{ τουλάχιστον } x_0 \in (1, e): h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0} \quad (1)$$

$h \uparrow [1, e]$ άρα x_0 μοναδικό.

Δ2. $f(x) = (\ln x_0)(x+1) - \ln x - 1, x > 0$.

Η f συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών.

$$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} = \frac{x \ln x_0 - 1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln x_0} = \frac{1}{\frac{1}{x_0}} = x_0.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \ln x_0 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \ln x_0 > 1 \Leftrightarrow_{x>0} x > \frac{1}{\ln x_0} \quad (\ln x_0 > 0)$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{\frac{1}{x_0}} \Leftrightarrow x > x_0$$

	$-\infty$	1	x_0	e	$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Ο.Ε.

Η f στο $x = x_0$ έχει Ο.Ε. με τιμή $f(x_0) = 0$ αφού

$$f(x_0) = (\ln x_0)(x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 = x_0 \ln x_0 + \cancel{\ln x_0} - \cancel{\ln x_0} - 1 \stackrel{(1)}{=} \cancel{x_0} \cdot \frac{1}{\cancel{x_0}} - 1 = 0$$

Δ3. Για $x \leq 0$ παρατηρώ ότι $g(x) \leq 0$ και $h(x) > 0$.

Άρα στο $(-\infty, 0]$ δεν αναζητούμε λύση.

Για $x > 0$: $g(x) > 0$, $h(x)$.

$$\text{Αν } \underline{g(x) = h(x)} \Rightarrow x \cdot e^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Rightarrow \ln x + \ln e^{-x} = (x+1) \cdot \ln \frac{x_0}{e}$$

$$\Rightarrow \ln x - x = (x+1) \cdot (\ln x_0 - 1) \Rightarrow \ln x - x = (x+1) \ln x_0 - x - 1$$

$$\Rightarrow (x+1) \cdot \ln x_0 - \ln x - 1 = 0 = f(x) \stackrel{(\Delta 2)}{\Rightarrow} x = x_0.$$

Άρα οι C_g και C_h τέμνονται στο σημείο $M(x_0, y_0)$ το οποίο είναι μοναδικό.

Θ.δ.ο. $\underline{g'(x_0) = h'(x_0)}$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0} (1 - x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \ln \left(\frac{x_0}{e}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0} (1 - x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \left(\ln x_0^{\frac{1}{x_0}} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0} (1 - \cancel{x_0}) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \frac{1 - \cancel{x_0}}{x_0}$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \frac{1}{x_0}$$

$$g'(x) = e^{-x} \cdot (1 - x)$$

$$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot \ln \left(\frac{x_0}{e}\right)$$

$$\ln x_0 = \frac{1}{x_0} \Rightarrow x_0 \ln x_0 = 1$$

$$1 - x_0 \neq 0$$

$$x_0 \neq 1$$

$$\Leftrightarrow -x_0 = (x_0 + 1) \cdot \ln \frac{x_0}{e} + (\ln 1 - \ln x_0) \Leftrightarrow -x_0 = (x_0 + 1) \cdot (\ln x_0 - 1) - \ln x_0$$

$$\Leftrightarrow -x_0 = (x_0 + 1) \ln x_0 - x_0 - 1 - \ln x_0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x_0} \cdot \ln x_0 + \ln x_0 - 1 - \ln x_0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ Αληθές}$$

Άρα οι C_g , C_h έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη.

$$\Delta 4. \quad (AB) = \sqrt{(x-x)^2 + (f(x) - \phi(x))^2} = |f(x) - \phi(x)| = f(x) - \phi(x)$$

$$f(x) > \phi(x)$$

Θεωρώ την $d(x) = f(x) - \phi(x)$ στο $(0, +\infty)$.

- Αν η ϕ δεν είναι παρ/μη στο x_0 τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της ϕ .
- Αν η ϕ είναι παρ/μη στο x_0 τότε η d
 - α) παρουσιάζει ακρότατο στο x_0
 - β) το x_0 είναι εσωτερικό του $(0, +\infty)$
 - γ) η d είναι παρ/μη στο x_0 ως διαφορά παρ/μων στο x_0 .

Άρα από θ. Fermat

$$d'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) - \phi'(x_0) = 0 \Rightarrow 0 - \phi'(x_0) = 0 \Rightarrow \phi'(x_0) = 0.$$

Άρα το x_0 πάλι κρίσιμο σημείο της ϕ .