ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχ. βιβλίο. σελ. 111

Α2. Αντιστοιχίζοντας $\forall x \in A_1$ στο $f'(x)$ ορίζουμε την $f': A_1 \to \mathbb{R}$

Α3. Θεωρία σχ. βιβλίο σελ. 74.

Α4. α) Λ   β) πχ $f(x) = \frac{1}{x}$ $\lim_{x \to 0} x = 0$.

αφού $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

άρα δεν υπάρχει όριο.

Α5. α) Σ   β) Λ   γ) Λ

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-3} \qquad x \in \mathbb{R} - \{3\} = A$$

Β1.

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{3x_1+1}{x_1-3} = \frac{3x_2+1}{x_2-3} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{3x_1x_2} - 9x_1 + x_2 \cancel{-3} = \cancel{3x_1x_2} - 9x_2 + x_1 \cancel{-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x_2 = 10x_1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$ άρα f 1-1

οπότε αντιστρέψιμη.

Β2.

$$y = \frac{3x+1}{x-3} \Rightarrow yx - 3y = 3x+1 \Rightarrow (y-3)x = 3y+1$$

$$\overset{y \neq 3}{\Rightarrow} x = \frac{3y+1}{y-3}$$ άρα $f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y-3}$ με $y \neq 3$

άρα f και f^{-1} ίσες.

Β3.

$D_{fof} = \{x \in A / f(x) \in A\}$ διότι $x \neq 3$ και

$$\frac{3x+1}{x-3} \neq 3 \Rightarrow 3x+1 \neq 3x-9$$ ισχύει.

άρα $D_{fof} = \mathbb{R} - \{3\}$

$$\text{Η } f(x) = \frac{3\,\frac{3x+1}{x-3} + 1}{\frac{3x+1}{x-3} - 3} = \frac{\frac{9x+3+x-3}{x-3}}{\frac{3x+1-3x+9}{x-3}} = \frac{10x}{10} = x$$

B4.

$$\left| f(x)\cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| \le |f(x)| \iff$$

$$-|f(x)| \le f(x)\cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \le |f(x)|$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}} |f(x)| = \lim_{x\to -\frac{1}{3}} \left| \frac{3x+1}{x-3} \right| = \left| \frac{0}{-\frac{1}{3}-3} \right| = 0$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}} \left(-|f(x)|\right) = \dots \quad = 0$$

άρα από κρ. παρ. $\lim_{x\to -\frac{1}{3}} f(x)\cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} = 0$

B3. B' τρόπος $(f\circ f)(x) = f(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$

$\forall x \in D_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{3\}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΒΓ \cdot ΑΜ.$

στο ορθογ. τριγ. $Ο\hat{Μ}Β$ ισχύει $ημθ = \frac{ΒΜ}{ΟΒ} = \frac{ΒΜ}{1}$

$συνθ = \frac{ΟΜ}{ΟΒ} = \frac{ΟΜ}{1}$

άρα $ΒΓ = 2ΒΜ = 2\,ημθ$ $\Rightarrow E = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} ημθ(1+συνθ)$

$ΑΜ = ΑΟ + ΟΜ = 1 + συνθ$

$\Rightarrow E(θ) = ημθ(1+συνθ)$, $θ \in (0, π)$

Γ2. $E'(θ) = συνθ(1+συνθ) + ημθ(-ημθ) = συνθ + συν^2θ - ημ^2θ$

$\Rightarrow E'(θ) = συνθ + συν2θ$

$E'(θ) = 0 \Leftrightarrow συν2θ = -συνθ \Leftrightarrow συν2θ = συν(π-θ)$

αφού $θ \in (0, π)$ $2θ = π - θ \Leftrightarrow 3θ = π \Leftrightarrow θ = \frac{π}{3}$

θ	0	$θ_1$	$π/3$	$θ_2$	π
E'		+	0	−	
E		↗	ολ.μ.	↘	

η E' συνεχής στο $(0, π)$ ως πράξη συνεχών. έχει μοναδική ρίζα το $\frac{π}{3}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, \frac{π}{3})$ και $(\frac{π}{3}, π)$

άρα $E'(\frac{π}{6}) = συν\frac{π}{6} + συν\frac{2π}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} > 0.$

$E'(x) > 0$ στο $(0, \frac{π}{3})$

$E'(\frac{π}{2}) = 0 + συνπ = -1 < 0$

$E'(x) < 0$ στο $(\frac{π}{2}, π)$.

στην γωνία $θ = \frac{π}{3}$ το εμβαδό γίνεται μέγιστο.

Γ3. $A_1=\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$

$E(\theta)$ συνεχής στο $\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$ και γν. αύξουσα $\Rightarrow E(A_1)=\left(\lim_{\theta\to 0^+}E(\theta),\ E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$

• $\lim_{\theta\to 0^+}E(\theta)=\lim_{\theta\to 0^+}[\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)]=0\cdot 2=0$

$E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{3}\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}.$

Το $\frac{3}{4}\in E(A_1)$ λόγω μονοτονίας $\exists$ μοναδικό $\theta_1\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$: $E(\theta_1)=\frac{3}{4}$.

• $A_2=\left[\frac{\pi}{3},\pi\right)$

$E(\theta)$ συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right)$ και γν. φθίνουσα $\Rightarrow E(A_2)=\left(\lim_{\theta\to\pi^-}E(\theta),\ E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$

$\lim_{\theta\to\pi^-}[\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)]=\eta\mu\pi\cdot(1+\sigma\upsilon\nu\pi)=0\cdot 0=0.$

το $\frac{3}{4}\in E(A_2)$ λόγω μονοτονίας $\exists$ μοναδικό $\theta_2\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ $E(\theta_2)=\frac{3}{4}$.

άρα η εξίσωση $E(\theta)=\frac{3}{4}$ έχει 2 ακριβώς ρίζες.

Γ4. • η $E(\theta)$ συνεχής στο $\left[\theta_1,\frac{\pi}{3}\right]$, παραγ/μη στο $\left(\theta_1,\frac{\pi}{3}\right)$

ΘΜΤ. $\exists$ τ. $\xi_1\in\left(\theta_1,\frac{\pi}{3}\right)$: $E'(\xi_1)=\dfrac{E\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cancel{E(\theta_1)}^{0}}{\frac{\pi}{3}-\theta_1}$

• $E(\theta)$ συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{3},\theta_2\right]$, παραγ/μη στο $\left(\frac{\pi}{3},\theta_2\right)$

ΘΜΤ. $\exists$ τ. $\xi_2\in\left(\frac{\pi}{3},\theta_2\right)$: $E'(\xi_2)=\dfrac{\cancel{E(\theta_2)}^{0}-E\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2-\frac{\pi}{3}}=\dfrac{E\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3}-\theta_2}$

Έχω: $\cancel{\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)}\cdot\dfrac{E\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cancel{\frac{\pi}{3}-\theta_1}}=\cancel{\left(\frac{\pi}{3}-\theta_2\right)}\cdot\dfrac{E\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cancel{\frac{\pi}{3}-\theta_2}}$

$\Leftrightarrow E\left(\frac{\pi}{3}\right)=E\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ισχύει

ΘΕΜΑ Δ

$f(x) = x\ln x - \ln(\lambda x)$, $x \in (0,+\infty)$, $\lambda \in (0,+\infty)$

$g(x) = x^x \quad \forall x > 0$

Δ1. $f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{\lambda x}\cdot \lambda = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$

$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ η $f' \nearrow (0,+\infty)$

$f'(1) = 0$ μοναδική ρίζα. $\forall\ x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$.

$\forall\ x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$.

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

στο $x_0 = 1$ η f παρουσιάζει Ο.Ε.

με τιμή $f(1) = -\ln\lambda$

άρα στο ση. ακροτάτων $A(1, -\ln\lambda)$, $\lambda > 0$.

η ευθ. $x = 1$ είναι η κατακόρυφη ευθεία στην οποία ανήκουν τα σημεία ακροτάτων.

Δ2. $x^x \geq \lambda x \Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln(\lambda x) \Leftrightarrow x\ln x \geq \ln(\lambda x)$

$\Leftrightarrow x\ln x - \ln(\lambda x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$

όμως το ελάχιστο της f είναι το $-\ln\lambda$.

άρα θα πρέπει $-\ln\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \ln\lambda \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 1$

άρα η $\max \lambda = 1$.

Δ3. Α' ΤΡΟΠΟΣ $g(x)=x^x,\ x>0$. $\varepsilon: y=\lambda\cdot x,\ \lambda>0$

Αρκεί να ∃ μον. $M(x_0,y_0)$ ώστε

$y_0=x_0^{x_0}$ και $y_0=\lambda\cdot x_0$ και $g'(x_0)=\lambda$.

$g(x)=e^{x\ln x} \Rightarrow g'(x)=g(x)\cdot(\ln x+1)$

$$\begin{cases} y_0=x_0^{x_0} \\ y_0=\lambda\cdot x_0 \\ g(x_0)(\ln x_0+1)=\lambda \Leftrightarrow x_0^{x_0}(\ln x_0+1)=\lambda \Leftrightarrow y_0(\ln x_0+1)=\lambda \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \lambda x_0(\ln x_0+1)=\lambda \Leftrightarrow x_0(\ln x_0+1)=1$

$\Leftrightarrow x_0\ln x_0+x_0-1=0 \overset{:x_0}{\Leftrightarrow} \ln x_0+1-\frac{1}{x_0}=0$

$\Leftrightarrow f'(x_0)=0$ από Δ1 $\Rightarrow \boxed{x_0=1}$

Άρα στο σημείο $M(1,1)$ η $\varepsilon: y=\lambda x$ εφάπτεται στην C_g.

Δ4. $h(x)=\begin{cases} x^x, & x>0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

i) $\forall x>0$ $h(x)=e^{x\ln x}$ σύνθεση συνεχών $e^x\circ(x\ln x)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$

$=\lim\limits_{u\to 0} e^u=e^0=1$

$f(0)=1$ άρα

η f συνεχής και στο $x_0=0$.

Θέτω $u=x\ln x$

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{DLH}{=}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2}{x}\right)=0$

14 ii) Θεωρώ $\Phi(x) = x^{2020}\left(3-2\int_1^2 g(t)\,dt\right) + (1-x)\int_0^1 h(1-t)\,dt$

η Φ συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών

$\Phi(0) = \int_0^1 h(1-t)\,dt$ Θέτω $u = 1-t \Rightarrow du = -dt$

$u_1 = 1,\ u_2 = 0.$

$\Phi(0) = -\int_1^0 h(u)\,du = \int_0^1 h(u)\,du$ όμως $h(x) > 0\ \forall x \in [0,1]$

άρα $\int_0^1 h(x)\,dx > 0$

$\Phi(1) = 3 - 2\int_1^2 g(t)\,dt < 0$ γιατί. $g'(x) = x^x(\ln x + 1)$

$g''(x) = x^x(\ln x+1)^2 + x^x \cdot \frac{1}{x}$

$= x^x\left[(\ln x+1)^2 + \frac{1}{x}\right] > 0\ \forall x > 0.$

άρα η g $\cup$ $(0,+\infty)$

οπότε $g(x) \geq x$ το = μόνο για $x=1$

άρα $\int_1^2 g(x)\,dx > \int_1^2 x\,dx$

$\Leftrightarrow \int_1^2 g(x)\,dx > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3 - 2\int_1^2 g(x)\,dx < 0.$

οπότε $\Phi(0)\cdot\Phi(1) < 0$. Άρα Θ.Β. $\exists$ τουλ. $x_0 \in (0,1) : \Phi(x_0) = 0.$

Δ3. Β' ΤΡΟΠΟΣ

εφ: $y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$

$\overset{x=y=0}{\Longrightarrow}$ $-g(x_0) = g'(x_0)(-x_0) \Rightarrow -x_0^{x_0} = x_0^{x_0}(\ln x_0 + 1)(-x_0)$

$\Leftrightarrow x_0 \ln x_0 + x_0 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \ln x_0 + 1 - \frac{1}{x_0} = 0$

$\Leftrightarrow f'(x_0) = 0$

$\Leftrightarrow x_0 = 1$ από Δ1.

άρα εφ: $y - 1 = 1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow \boxed{y = x}$

Ο Αγώνας

ΣΥΝΕΧΙΖΕΤΑΙ