Πανελλήνιες 2019

Μαθηματικά ΓΕΛ

ΘΕΜΑ Α

A1

α)

Σχολικό βιβλίο σελίδα 15 – Ορισμός

β)

i) Σχολικό βιβλίο σελίδα 35

ii) Σχολικό βιβλίο σελίδα 36

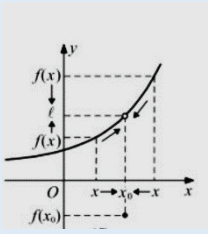
A2

Σχολικό βιβλίο σελίδα 142 – Θεώρημα

A3

Σχολικό βιβλίο σελίδα 135 – Απόδειξη

A4

α)	Λ	Το θεώρημα ισχύει σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων. $\pi\chi\ f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$ αν και $f'(x)=0\ \forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Εντούτοις η $\boldsymbol{f}$ όχι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.
β)	Λ	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ όταν η $\boldsymbol{f}$ είναι συνεχής στο $\boldsymbol{x_0}$ $\pi\chi \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ όμως $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ 

A5

$$\int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx-\int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx+\int_{\gamma}^{\delta} f(x)dx=2-1+3=4.$$

Άρα απάντηση **γ.**

ύρη Σιρδάρη

ΘΕΜΑ Β

B1

Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda\right)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}+\lambda\right)=2 \Leftrightarrow \cancel{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}^{0}+\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=2$

B2

Θεωρώ $g(x)=f(x)-x$ συνεχής στο R ως πράξεις συνεχών $y=f(x)$ και $y=x$ άρα συνεχής και στο $[2,3]$

για λ=2 $\quad f(x)=e^{-x}+2$ οπότε $g(x)=e^{-x}+2-x$.

$g(2)=e^{-2}\cancel{+2}\cancel{-2}=\frac{1}{e^2}>0$

$g(3)=e^{-3}+2-3=\frac{1}{e^3}-1=\frac{1-e^3}{e^3}<0$

$g(2)\cdot g(3)<0$. Ισχύει Θεώρημα Bolzano.

Άρα $\exists$ τουλάχιστον $x_0\in(2,3)$: $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0$

Η g παραγωγίσιμη στο R με $g'(x)=-e^{-x}-1<0\ \forall\ x\in R$ άρα η $g\searrow R$ οπότε και 1-1.

Άρα η λύση $x_0\in(2,3)$ είναι μοναδική.

B3

α) τρόπος

Για λ=2 $f(x)=e^{-x}+2,\ x\in R$

$f'(x)=-e^{-x}<0\ \forall\ x\in R$ άρα η $f\searrow R \Rightarrow 1-1$ άρα αντιστρέφεται. Έχουμε

$y=f(x)\Leftrightarrow y=e^{-x}+2\Leftrightarrow e^{-x}=y-2$ πρέπει $y-2>0\Leftrightarrow y>2$

$\Leftrightarrow -x=\ln(y-2)\Leftrightarrow x=-\ln(y-2)$

Άρα $f^{-1}(x)=-\ln(x-2),\ x>2$

β) τρόπος

Η $f\searrow R$ και συνεχής άρα $Df^{-1}=f(R)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(2,+\infty)$ γιατί :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}+2\right)=0+2=2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x}+2\right)\underset{x\to-\infty}{\overset{u=-x}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\left(e^{u}+2\right)=+\infty$

Φροντιστήρια Αργύρη Σιρδάρη

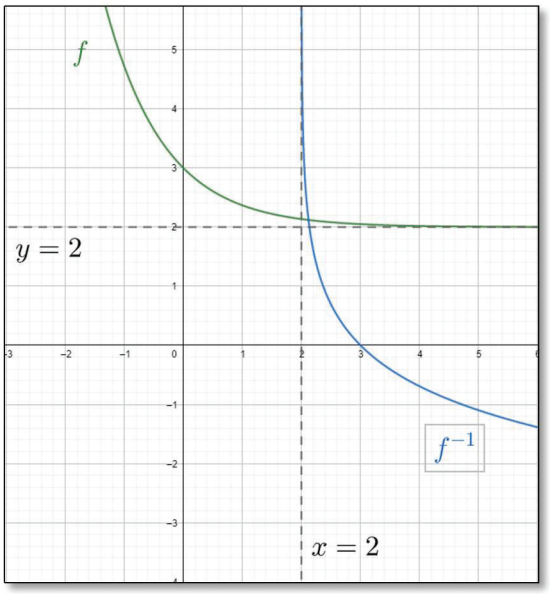
Β4

α) τρόπος

$f^{-1}(x) = -\ln(x-2),\ x > 2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left[-\ln(x-2)\right]$

Θέτω $\left.\begin{array}{r} y = x-2 \\ x\to 2^+,\ y\to 0^+ \end{array}\right|$ άρα $\lim\limits_{y\to 0^+}(-\ln y) = +\infty$ οπότε $\varepsilon : x = 2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.



$f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x + 2$ κατακόρυφη μετατόπιση της $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ κατά 2 μονάδες επάνω.

$f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$ $\qquad$ $f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-2) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$

$y = -\ln x$ μετατοπισμένη οριζόντια κατά 2 μονάδες

β) τρόπος

$\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left[-\ln(x-2)\right] = -\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u = -\infty$

Θέτω $x-2 = u$. Αν $x\to 2^+$ τότε $u\to 0^+$

Άρα η $x = 2$ είναι Κ.Α. της f^{-1}.

Για την Cf

$f'(x) = -e^{-x} < 0$ Άρα η $f \searrow$ στο R

$f''(x) = +e^{-x} > 0$ Άρα η $f \circlearrowleft$ στο R

Επίσης $f(x) > 0\ \ \forall x \in R$

Φροντιστήρια

Για $x=0$ $f(0)=e^0+2=3$ $A(0,3)$

Επίσης η Cf τέμνει την $y=x$ σε κάποιο $M(x_0,y_0)$ με $x_0\in(2,3)$

Για την Cf^{-1}

$f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$

$\left(f^{-1}(x)\right)'=-\dfrac{1}{x-2}<0$ $\forall x>2$ Άρα η f^{-1} ↘

$\left(f^{-1}(x)\right)''=+\dfrac{1}{(x-2)^2}>0$ $\forall x>2$ Άρα η f^{-1} ↺

Για $y=0\Rightarrow -\ln(x-2)=0\Rightarrow \ln(x-2)=\ln 1\Rightarrow x=3$ $B(3,0)$

Επίσης γνωρίζουμε ότι η Cf , Cf^{-1} έχουν Ο.Α και Κ.Α. αντίστοιχα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

Η f παραγωγίσιμη οπότε συνεχής στο R. Άρα συνεχής στο $x_0=1$. Άρα $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)$

- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(x^2+a\right)=1+a=f(1)\\ \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(e^{x-1}+\beta x\right)=1+\beta=f(1)\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha=\beta$
- Η f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

- $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{e^{x-1}+\beta x-\alpha-1}{x-1}\overset{\alpha=\beta}{=}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{e^{x-1}+\beta x-\beta-1}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\%}{=}}\lim\limits_{x\to1^-}\left(e^{x-1}+\beta\right)=1+\beta$ ①
- $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+\alpha-1-\alpha}{x-1}\overset{\alpha=\beta}{=}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2$ ②

Άρα ① = ② $\Leftrightarrow 1+\beta=2\Leftrightarrow\beta=1$ και $\alpha=1$

Γ2

$$f(x)=\begin{cases}e^{x-1}+x, & x<1\\ x^2+1, & x\geq1\end{cases}$$

Φροντιστήρια Αργύρη Σιρδάρη

- Για $x \in (-\infty, 1)$ τότε $f'(x) = e^{x-1} + 1 > 0$
- Για $x \in (1, +\infty)$ τότε $f'(x) = 2x > 0$

Άρα $f \nearrow$ στο **R** αφού ***f*** συνεχής στο χ_0=1.

- Άρα $f(R) \underset{\text{συνεχής}}{\overset{f}{=}} \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = R$ αφού $\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (e^{x-1} + x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 + 1) = +\infty \end{array}$

Γ3

i) $f \nearrow$ A1 $= (-\infty, 0]$ και συνεχής σε αυτό. Οπότε $f(A_1) = f\left((-\infty, 0]\right) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(0)\right] = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$

Άρα $0 \in f(A_1)$, οπότε $\exists\, x_0 < 0$ ώστε $f(x_0) = 0$ μοναδικό αφού $f \nearrow$ στο A_1.

ii) Έχουμε $f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)\left(f(x) - x_0\right) = 0$

ν.δ.ο. είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$

- ✓ $f(x_0) = 0,\ f \nearrow$ στο R $\forall x > x_0$ τότε $f(x) > f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) > 0$
- ✓ $f(x) > 0 > x_0$ οπότε $f(x) - x_0 > 0$

Άρα $f(x)\left(f(x) - x_0\right) > 0 \quad \forall x > x_0$

Άρα η $f(x)\left(f(x) - x_0\right) = 0$ αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$

Γ4

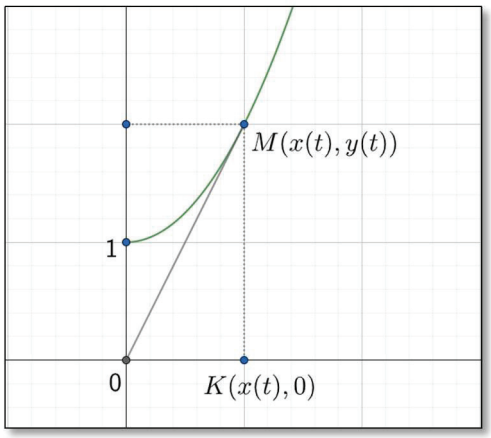
$f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 1$

(ΜΟΚ) $= \frac{1}{2}(0K)(KM) = \frac{1}{2}|x(t)||y(t)| = \frac{1}{2}x(t)\left(x^2(t) + 1\right) = \frac{1}{2}\left(x^3(t) + x(t)\right)$ αφού $x(t) \geq 1 > 0$ και $y(t) > 0$.

Θεωρώ την $h(t) = \frac{1}{2}\left(x^3(t) + x(t)\right)$ με $x(t) \geq 1$

$$h(t) = \frac{1}{2}\left(3x^2(t) \cdot x'(t) + x'(t)\right)$$

Για $t = t_0$ οπότε $x'(t_0) = 2$ και $x(t_0) = 3$



$$h'(t_0) = \frac{1}{2}\left(3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) + x'(t_0)\right) = \frac{1}{2}\left(3 \cdot 3^2 \cdot 2 + 2\right) = 28\ \tau.\mu / \sec$$

Φροντιστήρια Αργύρη Σιρδάρη

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

$f(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)+\alpha\chi+\beta,\quad \alpha,\beta\in R$

$\varepsilon: y=-x+2$ εφαπτομένη της Cf στο $A(1,1)$

Άρα πρέπει: $f(1)=1 \Leftrightarrow \alpha+\beta=1$ ①

$$f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+(x-1)\frac{1}{x^2-2x+2}(2x-2)+\alpha=$$
$$=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+\alpha$$

Πρέπει $f'(1)=-1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=-1} \overset{(1)}{\Rightarrow} -1+\beta=1 \Leftrightarrow \boxed{\beta=2}$

Δ2

α) τρόπος

$f(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)-x+2$

$E(\Omega)$ από $Cf, \varepsilon, \chi=1, \chi=2$

Άρα $f(x)-\varepsilon=(x-1)\ln(x^2-2x+2)\cancel{-x}\cancel{+2}\cancel{+x}\cancel{-2}$

$$\left.\begin{array}{r}\ln\left(x^2-2x+2\right)=\ln\left[\left(x-1\right)^2+1\right]\\ (x-1)^2+1\geq 1\end{array}\right| \text{άρα } \ln\left(x^2-2x+2\right)\geq 0 \quad \forall x\in[1,2] \quad (x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)\geq 0$$

Άρα $E=\int_1^2 (x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)dx$

Θέτω $u=x^2-2x+2 \Rightarrow du=(2x-2)dx \Rightarrow du=2(x-1)dx$

$u_1=1-2+2=1$

$u_2=4-4+2=2$

Γίνεται

$$E=\int_1^2 \cancel{(x-1)}\ln u\frac{du}{2\cancel{(x-1)}}=\frac{1}{2}\int_1^2 \ln u du=$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^2 (u)'\ln u du=\frac{1}{2}\left[u\ln u\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 \cancel{u}\frac{1}{\cancel{u}}du=$$
$$=\frac{1}{2}\left[u\ln u\right]_1^2-\frac{1}{2}(2-1)=\frac{1}{2}\left(2\ln 2-0\right)-\frac{1}{2}=$$
$$=\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\ln 2-\frac{1}{2}=\ln 2-\frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

Φροντιστήρια Αργύρη Σιρδάρη

β) τρόπος

$$f''(x)=\frac{1}{x^2-2x+2}\left(x^2-2x+2\right)'+\frac{4(x-1)\left(x^2-2x+2\right)-4(x-1)^3}{\left(x^2-2x+2\right)^2}=$$

$$=\frac{2(x-1)\left(x^2-2x+2\right)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}+\frac{4(x-1)\left(x^2-2x+2\right)-4(x-1)^3}{\left(x^2-2x+2\right)^2}=$$

$$=\frac{2(x-1)\left[\left(x^2-2x+2\right)+2\left(x^2-2x+2\right)-2(x-1)^2\right]}{\left(x^2-2x+2\right)^2}=$$

$$=\frac{2(x-1)\left(x^2-2x+2+2x^2-4x+4-2x^2+4x-2\right)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}=$$

$$=\frac{2(x-1)\left(x^2-2x+4\right)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$$

$x^2-2x+4>0$ αφού $\Delta=4-16=-12<0$

x	-∞		1		+∞
f''		-	0	+	
f		∩	Σ.Κ.	∪	

Οπότε Cf για $x>1$ είναι πάνω από την ε : y=-x+2 και άρα

$$E=\int_1^2\left[f(x)-(-x+2)\right]dx=\int_1^2(x-1)\ln(x^2-2x+2)dx$$

$u=x^2-2x+2$

$\frac{du}{dx}=2x-2\Rightarrow\frac{du}{2}=(x-1)dx$

$u_1=1\,,\,u_2=2$

$$E=\int_1^2\ln u\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int_1^2(u)'\ln u\,du=\frac{1}{2}\left[u\ln u\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 u\frac{1}{u}du=\frac{1}{2}2\ln 2-\frac{1}{2}\left[u\right]_1^2=$$

$$=\ln 2-\frac{1}{2}(2-1)=\ln 2-\frac{1}{2}\,\tau.\mu.$$

Φροντιστήρια Αργύρη Σιρδάρη

Δ3

i)

α) τρόπος

$$f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1$$

$$f'(x)\geq -1 \Leftrightarrow \ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq 0$$

Ισχύει γιατί είναι: $\ln(x^2-2x+2)=\ln\left[(x-1)^2+1\right]\geq 0$

αφού $(x-1)^2+1\geq 1$

και $\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq 0 \;\; \forall x\in R$ (το " = " ισχύει μόνο για x=1)

και $x^2-2x+2>0 \;\; \forall x\in R$ αφού $\Delta<0$

β) τρόπος

	$-\infty$	1	$+\infty$
$2(x-1)$	-	0	+
x^2-2x+4	+		+
$(x^2-2x+4)^2$	+		+
f''	-	0	+
f'	↘		↗
		ΟΕ	

Άρα $\forall x\in R \quad f'(x)\geq f'(1)\Rightarrow f'(x)\geq -1$

ii)

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2},\;\; \lambda\in R$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq f(\lambda)+\lambda-2+\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f(\lambda)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq -\frac{1}{2}$$

- ✓ Η f συνεχής στο $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$
- ✓ Η f παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$

Φροντιστήρια Αργύρη Σιρδάρη

Λόγω **Θ.Μ.Τ.** $\exists$ τουλάχιστον $x_0 \in \left(\lambda, \lambda+\frac{1}{2}\right)$ ώστε $f'(x_0) = \dfrac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}$

Όμως

$$f'(x) \geq -1 \ \ \forall x \in R \text{ άρα } f'(x_0) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda) \geq -\frac{1}{2} \text{ Ισχύει}$$

Δ4

Έστω $A(\alpha, \mathrm{f}(\alpha))$ τυχαίο σημείο της Cf και $B(\beta, \mathrm{f}(\beta))$ τυχαίο σημείο της Cg.

Ισχύει $g'(x) = -3x^2 - 1$.

Πρέπει

$$f'(\alpha) = g'(\beta) \Leftrightarrow \ln(\alpha^2-2\alpha+2) + \frac{2(\alpha-1)^2}{\alpha^2-2\alpha+2} \cancel{-1} = -3\beta^2 \cancel{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(\alpha^2-2\alpha+2) + \frac{2(\alpha-1)^2}{\alpha^2-2\alpha+2} + 3\beta^2 = 0$$

Επειδή

$$\left.\begin{array}{c} \ln(\alpha^2-2\alpha+2) = \ln\left[(\alpha-1)^2+1\right] \geq 0 \\ \text{και} \\ \dfrac{2(\alpha-1)^2}{a^2-2a+2} \geq 0 \\ \text{και} \\ 3\beta^2 \geq 0 \end{array}\right| \text{ άρα πρέπει α=1 και β=0.}$$

Οπότε η κοινή εφαπτομένη
$\varepsilon : y - g(\beta) = g'(\beta)(x-\beta) \Leftrightarrow y - g(0) = g'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - 2 = -1x \Leftrightarrow y = -x+2$

Ο αγώνας συνεχίζεται...

Φροντιστήρια Αργύρη Σιρδάρη