ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $\mathbf{x}_0$, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι "1-1" είναι και γνησίως μονότονη»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η συνάρτηση **f(x) = ημx** με $\mathbf{x}\in\mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

β) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση **f** σε ένα διάστημα **Δ**, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $\mathbf{f'(x) > 0}$ για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbf{\Delta}$.

γ) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$

δ) Αν η **f** είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις **C** και **C'** των συναρτήσεων **f** και $\mathbf{f^{-1}}$ αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία **y** = **χ**.

ε) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\dfrac{4}{x^2},\quad x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 8

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δε σβήνει.)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι

$$E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\quad x\in(0,8)$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2**.**

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = 2e^{\chi-\alpha} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha>1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha > 1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά x_1 $x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο χ_1 και τοπικό ελάχιστο στο χ_2.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, χ_2).

Μονάδες 6

Δ 4. Αν α = 2 να αποδείξετε ότι :

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}$$

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

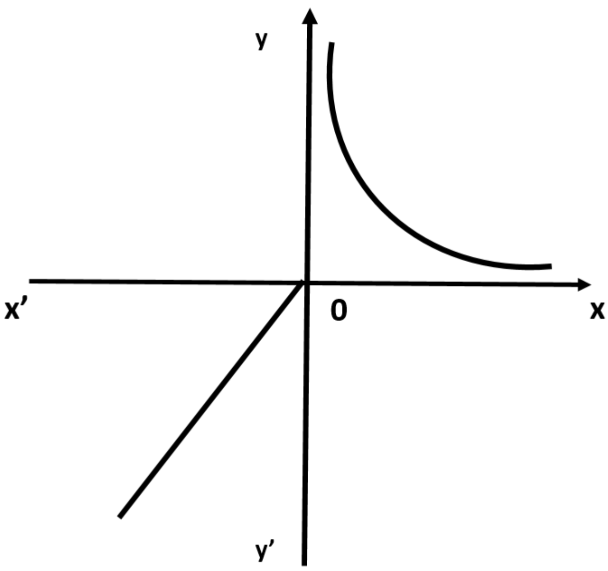
ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 99.

Α2. α. Ψευδής

β. Αντιπαράδειγμα σχολικού βιβλίου σελ. 35.

$$g(x)=\begin{cases} x, & x\le 0\\ \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$$



Η g είναι συνάρτηση “1-1” αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.

Α3. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ. 216.

Α4. α. Λάθος, β. Λάθος, γ. Σωστό, δ. Σωστό, ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = x - \frac{4}{x^2}, \quad x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$$

Β1. Η f συνεχής ως πράξεις συνεχών με

$$f'(x) = 1 - \frac{4' \cdot x^2 - 4(x^2)'}{x^4} = 1 - \frac{-4 \cdot 2x}{x^4} = 1 + \frac{8x}{x^4} = \frac{x^4 + 8x}{x^4}$$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^4 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^3+8) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^3 = -8$

  $x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^4+8x}{x^4} > 0 \Leftrightarrow (x^4+8x) \cdot x^4 > 0 \overset{x^4>0}{\Leftrightarrow} x^4 + 8x > 0 \Leftrightarrow x(x^3+8) > 0$

	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x	-	-	0	+
x^3+8	-	0 +		+
f′	+	-		+
f	↗	↘		↗
		ΤΜ		

αφού $\chi^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow \chi^3 > -8 \Leftrightarrow \chi > -2$

- $\chi \in (-\infty, -2]$ f ↗ , $x \in [-2,0)$ f ↘, $x \in (0, +\infty)$ f ↗

  στο $\chi = -2$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή

  $$f(-2) = -2 - \frac{4}{4} = -2 - 1 = -3$$

Β2. $f'(x) = 1 + \frac{8x}{x^4} = 1 + \frac{8}{x^3}$

$$f''(x) = -\frac{8(x^3)'}{x^6} = -\frac{8}{x^6} \cdot 3x^2 = \frac{-24x^2}{x^6} = \frac{-24}{x^4} < 0$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
f′′	—		—
f	∩		∩

Άρα η f κοίλη
στα $(-\infty,0)$ και $(0, +\infty)$

Β3. Κατακόρυφες: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-}\left(x - \frac{4}{x^2}\right) = 0 - (+\infty) = -\infty$$

Αφού $\chi^2 > 0$ κοντά στο 0, άρα ε: x=0 κατακόρυφη ασύμπτωτη

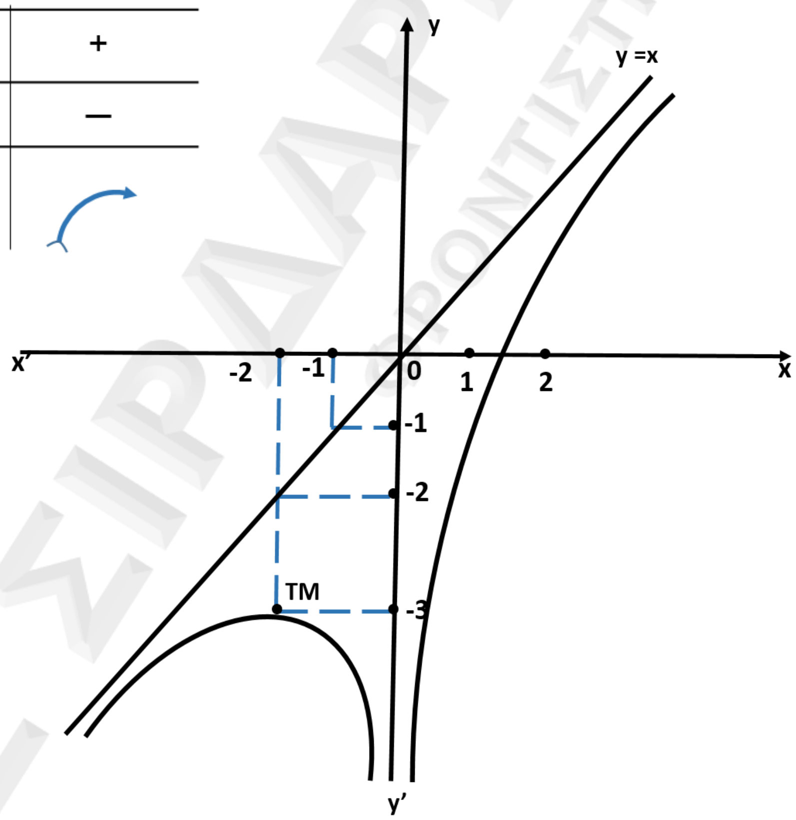
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+}\left(x - \frac{4}{x^2}\right) = 0 - (+\infty) = -\infty$$

- $\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - \dfrac{4}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 - \dfrac{4}{x^3}\right) = 1 - 0 = 1$
- $\beta = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cancel{x} - \dfrac{4}{x^2} - \cancel{x}\right) = 0$

άρα η ε: y=x πλάγια ασύμπτωτη στο +∝, ομοίως και στο -∝.

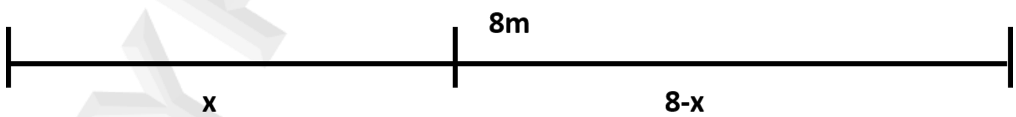
Β4.

	- ∞		- 2		0		+ ∞
f΄		+	0	−	‖	+	
f΄΄		−		−	‖	−	
f		↗	-3	↘	‖	↗	
			ΤΜ				



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



$$\left\{\begin{array}{c} x>0 \\ 8-x>0 \Rightarrow x<8 \end{array}\right\}$$

Τετράγωνο $\left\{\begin{array}{l} \text{Περίμετρος x άρα πλευρά } \dfrac{x}{4} \\ E_{\text{τετράγωνου}} = \dfrac{x^2}{16} \end{array}\right.$

Κύκλος $\left\{\begin{array}{l} \text{Περιφέρεια 8-x : 8-χ=2πρ} \Rightarrow \rho = \dfrac{8-x}{2\pi} \text{ (ακτίνα)} \\ E_{\text{κύκλου}} = \pi\rho^2 = \pi \cdot \left(\dfrac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \dfrac{(8-x)^2}{4\pi} \end{array}\right.$

$$E(x) = E_{τετ.} + E_{κυκ.} = \frac{x^2}{16} + \frac{(8-x)^2}{4\pi} = \frac{\pi x^2 + 4\left(64 - 16x + x^2\right)}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}$$

με $x \in (0,8)$

Γ2. $$E'(x) = \frac{2(\pi+4)x - 64}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x - 32}{8\pi}$$

$$E'(x) = 0 \Rightarrow (\pi+4)x - 32 = 0 \Rightarrow x = \frac{32}{\pi+4}$$

$$E'(x) > 0 \Rightarrow (\pi+4)x - 32 > 0 \Rightarrow x > \frac{32}{\pi+4}$$

	0	$\frac{32}{\pi+4}$	8
$E'(x)$	$-$	0	$+$
$E(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Ο. Ε.

Για $x = \frac{32}{\pi+4}$ τότε η πλευρά είναι $\frac{x}{4} = \frac{8}{\pi+4}$

Τότε $\delta = 2\rho = 2\frac{8-x}{2\pi} = \frac{8 - \frac{32}{\pi+4}}{\pi} = \frac{\frac{8\pi + \cancel{32} - \cancel{32}}{\pi+4}}{\pi} = \frac{8}{\pi+4}$

Διάμετρος κύκλου = πλευρά τετραγώνου

Γ3.

<u>Α΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>

$$\lim_{x\to 0} E(x) = \frac{256}{16\pi} = \frac{16}{\pi} \qquad \frac{16}{\pi} > 5 \Rightarrow 16 > 5\pi \Rightarrow \frac{16}{5} > \pi$$

ισχύει $3{,}2 > \pi$

$$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{\frac{32^2}{\pi+4} - \frac{64\cdot 32}{\pi+4} + \frac{256(\pi+4)}{\pi+4}}{16\pi} = \frac{16\left(64 - 128 + 16(\pi+4)\right)}{16\pi\cdot(\pi+4)}$$

$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{16}{\pi+4} < 5$ αφού $16 < 5\pi + 20 \Rightarrow -4 < 5\pi$.

$$\lim_{x\to 8} E(x) = \frac{(\pi+4)8^2 - 64\cdot 8 + 256}{16\pi} = \frac{64\pi}{16\pi} = 4$$

Η $E(x)$ συνεχής ως πολυωνυμική στο $(0,8)$

$$E(A_1) = E\left(\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]\right) \underset{=\!=}{E\searrow} \left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right)$$

$$E(A_2) = E\left(\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)\right) \underset{=\!=}{E\nearrow} \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right)$$

$5 \in E(A_1)$, η E συνεχής και $\searrow$ $E(x) = 5$ άρα έχει ακριβώς μία ρίζα

$5 \notin E(A_2)$, άρα δεν έχει ρίζα $E(x) = 5$.

Β΄ ΤΡΟΠΟΣ

x	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	Ο. Ε.	$\nearrow$	

Θα δείξω ότι υπάρχει $x_0 \in (0,8)$ μοναδικό ώστε $E(x_0)=5$ $\Rightarrow (\pi+4)x_0^2-64x_0+256 = 80\pi \Rightarrow (\pi+4)x_0^2-64x_0+256-80\pi = 0$.

Θεωρώ την $f(x) = (\pi+4)x^2-64x+256-80\pi$ στο $[0,8]$

$f'(x) = 2(\pi+4)\chi-64$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{32}{\pi+4}$

- Η f συνεχής ως πολυωνυμική στο $[0,8]$ **Ύπαρξη**
- $f(0) = 256 - 80\pi > 0$

διότι $256 > 80\pi \Rightarrow \pi < \dfrac{256}{80} \Rightarrow \pi < \dfrac{16}{5} \Rightarrow \pi < 3{,}2$ αληθές

$f(8) = (\pi+4)\,64-512+256-80\pi = 64\pi+\cancel{256-512}+\cancel{256}-80\pi = -14\pi < 0$

άρα $f(0)\cdot f(8) < 0$

Οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0 \in (0,8) : f(x_0)= 0$

Άρα υπάρχει $x_0 \in (0,8)$: $E(x_0) = 5m^2$

Μοναδικότητα

Θεωρώ $A_1 = \left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right)$

$$f(A_1) \overset{\downarrow}{=} \left(f\left(\frac{32}{\pi+4}\right), f(0)\right) = \left(\underbrace{\frac{(-4-5\pi)16\pi}{\pi+4}}_{-}, \underbrace{256-80}_{+}\right)$$

$$f\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = (\cancel{\pi+4})\frac{32^2}{(\pi+4)^{\cancel{2}}} - 64\cdot\frac{32}{\pi+4} + 256 - 80\pi =$$

$$= \frac{32^2}{\pi+4} - \frac{64\cdot 32}{\pi+4} + \frac{16\cdot(16-5\pi)(\pi+4)}{\pi+4} = \frac{16(\cancel{64}-\cancel{128}+16\pi-5\pi^2+\cancel{64}-20\pi)}{\pi+4} =$$

$$= \frac{16\pi(-4-5\pi)}{\pi+4} < 0$$

Αφού $O \in f(A_1)$ άρα υπάρχει 1 τουλάχιστον $x \in A_1 : f(x_0)= 0$ και είναι μοναδικό αφού η f $\downarrow$ άρα και "1-1".

Θεωρώ $A_2 = \left[\dfrac{32}{\pi+4}, 8\right)$

$$f(A_2) \overset{\nearrow}{=} \left[f\left(\frac{32}{\pi+4}\right), f(8)\right) = \left[\frac{(-4-5\pi)16\pi}{\pi+4}, -16\pi\right)$$

Αφού $0 \notin f(A_2)$ άρα η f στο A_2 δεν έχει ρίζα.

Άρα η x_0 είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων $2e^{x-\alpha}, x^2$

$f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x,\ x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2,\ x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 = 0 \Rightarrow 2e^{x-\alpha} = 2 \Rightarrow e^{x-\alpha} = 1 \Rightarrow e^{x-\alpha} = e^0 \Rightarrow \chi - \alpha = 0 \Rightarrow \chi = \alpha.$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$		Σ.Κ.	

Για $\chi \in (-\infty, \alpha]$ η f είναι κοίλη.
Για $\chi \in [\alpha, +\infty)$ η f είναι κυρτή.
Για $\chi = \alpha$ η f έχει σημείο καμπής.
$f(\alpha) = 2e^{\alpha-\alpha} - \alpha^2 = 2 - \alpha^2$

Δ2. Μελετούμε την $f'(x)$ ως προς την μονοτονία της.

Για $\chi \in (-\infty, \alpha]$ η $f' \searrow$
Για $\chi \in [\alpha, +\infty)$ η $f' \nearrow$
Για x=α η f΄ έχει ολικό ελάχιστο $f'(\alpha) = 2e^{\alpha-\alpha} - 2^{\alpha} = 2(1-\alpha) < 0$ αφού α>1

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(2e^{x-\alpha} - 2x\right) = 2\cdot 0 - (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2e^{x-\alpha} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[e^{x-\alpha}\left(2 - \frac{2x}{e^{x-\alpha}}\right)\right] = +\infty\cdot(2-0) = +\infty$$

Αφού $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{x-\alpha}} \underset{\text{DE L' HOSPITAL}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{(e^{x-\alpha})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{x-\alpha}} = 0$

$$f'(A_1) = f'\left((-\infty, \alpha]\right) \underset{f'\searrow}{=} \left[2(1-\alpha), +\infty\right)$$

$$f'(A_2) = f'\left([\alpha, +\infty)\right) \underset{f'\nearrow}{=} \left[2(1-\alpha), +\infty\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \in f'(A_1) \\ \text{η } f' \searrow \text{ και συνεχής} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \text{ ακριβώς ρίζα } x_1 \text{ άρα } f'(x_1) = 0$$

$$x < x_1 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_1) \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$x > x_1 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_1) \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \in f'(A_2) \\ \text{η } f' \nearrow \text{ και συνεχής} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \text{ ακριβώς ρίζα } x_2 \quad f'(x_2) = 0$$

$$x < x_2 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_2) \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$x > x_2 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_2) \Rightarrow f'(x) > 0$$

Τελικά από πίνακα προσήμου έχω:

x	$-\infty$		x_1		α		x_2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τ. Μ.				Τ.Ε.		

Δ3.

$$f\left((\alpha,x_2)\right)\overset{\searrow}{=}\left(f(x_2),f(\alpha)\right)$$

$f(1) \notin (f(x_2), f(\alpha))$ άρα $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη διότι $f'(x) = 2e^{x-\alpha}-2x$, $x\in\mathbb{R}$

$f'(1) = 2e^{1-\alpha}-2$ και $\alpha>1 \Rightarrow 1-\alpha <0 \Rightarrow e^{1-\alpha} < e^0 \Rightarrow 2e^{1-\alpha}-2 < 0$

$f'(1) < 0$ επομένως $1 \in (\chi_1,\chi_2)$ αφού $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\chi_1,\chi_2)$

και η διάταξή τους είναι $x_1 < 1 < \alpha < \chi_2$.

Δ4. Η f κυρτή στο $[2, +\infty)$ άρα $f(x) \geq$ εφαπτομένη στο $x_0 = 2$.

$f(x) = 2e^{x-2}-x^2$, $\quad f(2) = 2e^0-4 = 2-4 = -2$

$f'(x) = 2e^{x-2}-2x$, $\quad f'(2) = 2e^0-4 = -2$

εφ: $y-f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y+2= -2 (x-2) \Leftrightarrow y=-2\chi+4-2 \Leftrightarrow$ **$y=-2x+2$**

άρα $f(x) \geq -2x+2 \ \forall x\in [2,+\infty)$

Το = ισχύει μόνο για x=2

$$f(x)\cdot\sqrt{x-2} \geq (-2x+2)\sqrt{x-2}$$

$$\Rightarrow \int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}dx > \underbrace{\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}dx}_{(I_1)}$$

I_1: θέτω **$u=x-2$** $\Rightarrow du=dx$ **$x=u+2$**

$u_1=0$, $u_2=1$

$$I_1 = \int_0^1 (-2(u+2)+2)\sqrt{u}du = \int_0^1 (-2u-4+2)\sqrt{u}du =$$

$$= \int_0^1 (-2u-2)\sqrt{u}du = \int_0^1 (-2u-2)u^{1/2}du =$$

$$= \int_0^1 \left(-2u^{3/2}-2u^{1/2}\right)du = \left[-2\cdot\frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}}-2\cdot\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \left[-2\cdot u^{5/2}\cdot\frac{2}{5}-2\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^1 = -\frac{4}{5}\cdot 1-\frac{4}{3}\cdot 1 =$$

$$= \frac{-12-20}{15} = -\frac{32}{15}$$

Άρα $\displaystyle\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > -\frac{32}{15}$