

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 19 Απριλίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 186
A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 141
A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 33
A4.

- (α) Σωστό
(β) Σωστό
(γ) Λάθος
(δ) Σωστό
(ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

- B1. Η f παραγωγίσιμη στο $A_f = \mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1 επομένως αντιστρέφεται.
Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_f = \mathbb{R}$ άρα:

$$f(A_f) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-1, +\infty)$$

Διότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = 0 - 1 = -1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty$$

Άρα

$$f(A_f) = (-1, +\infty)$$

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f επομένως

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

$$f(A_f) = A_{f^{-1}} = (-1, +\infty)$$

Για τον τύπο της f^{-1} έχουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow e^x - 1 = y \Leftrightarrow e^x = y + 1 \Leftrightarrow x = \ln(y + 1)$$

Άρα

$$f^{-1}(x) = \ln(x + 1), x > -1$$

B2. Η f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = e^x$ και $f''(x) = e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως η f κυρτή στο \mathbb{R}

Η f^{-1} παραγωγίσιμη στο $A_{f^{-1}} = (-1, +\infty)$ με $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x+1}$ και

$(f^{-1})''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$ για κάθε $x > -1$ άρα η f^{-1} κοίλη στο $A_{f^{-1}} = (-1, +\infty)$

Η ευθεία με εξίσωση $y = x$ είναι ο άξονας συμμετρίας των $C_f, C_{f^{-1}}$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο $O(0,0)$ είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = 1 \cdot x \Leftrightarrow y = x$$

Εφόσον $f(0) = e^0 = 1$ και $f'(0) = e^0 = 1$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της f^{-1} στο $O(0,0)$ είναι:

$$y - f^{-1}(0) = (f^{-1})'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x$$

Εφόσον $f^{-1}(0) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$ και $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} έχουν κοινή εφαπτομένη στο $O(0,0)$ την ευθεία $y = x$

B3. (i) Επειδή η f κυρτή στο \mathbb{R} τότε η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης σε κάθε σημείο βρίσκεται <<πάνω>> από την γραφική της παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Οπότε: $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 0$

όμως η f^{-1} είναι κοίλη στο $(-1, +\infty)$ άρα η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης σε κάθε σημείο βρίσκεται <<κάτω>> από την γραφική της παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Οπότε: $f^{-1}(x) \leq x$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 0$

Οπότε για κάθε $x \in A_f \cap A_{f^{-1}} = (-1, +\infty)$ ισχύει: $f(x) \geq f^{-1}(x)$

(ii) Η εξίσωση για κάθε $x > 0$ γράφεται:

$$f(x) + f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x) + \eta\mu x \Leftrightarrow f(x) + x = f^{-1}(x) + \eta\mu x \quad (1)$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

Δείξουμε στο **B3(i)** ότι $f(x) \geq f^{-1}(x)$ για κάθε $x \geq -1$ και το **ισόν** ισχύει μόνο για $x = 0$ οπότε για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(x) > f^{-1}(x) \quad (2)$$

Επίσης: $|\eta\mu x| < |x|$ για κάθε $x \neq 0$ άρα για $x > 0$ γίνεται:

$$|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x$$

$$\text{Άρα } x > \eta\mu x \quad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2), (3) παίρνουμε:

$$f(x) + x > f^{-1}(x) + \eta\mu x \text{ για κάθε } x > 0$$

Επομένως η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο $(0, +\infty)$

B4. Εφόσον η G μια παράγουσα της g στο διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$ τότε ισχύει:

$$G'(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Η G ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[\alpha, \beta]$ επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$G'(\xi) = \frac{G(\beta) - G(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad (4)$$

Επομένως: $G'(x) = g(x) \Leftrightarrow G'(x) = f(x) + f^{-1}(x) \Leftrightarrow G'(x) = e^x - 1 + \ln(x+1)$

Η G' παραγωγίσιμη στο $\Delta = (0, +\infty)$ με:

$$G''(x) = e^x + \frac{1}{x+1} > 0 \text{ για κάθε } x \in \Delta \text{ δηλαδή η } G' \text{ γνησίως αύξουσα στο } \Delta$$

Επομένως:

$$\alpha < \xi < \beta \Rightarrow G'(\alpha) < G'(\xi) < G'(\beta) \stackrel{(4)}{\Rightarrow} g(\alpha) < \frac{G(\beta) - G(\alpha)}{\beta - \alpha} < g(\beta)$$

$$\Rightarrow g(\alpha)(\beta - \alpha) < G(\beta) - G(\alpha) < g(\beta)(\beta - \alpha)$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εφόσον η f σε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της παρουσιάζει ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό τότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει:

$$f'(2) = 0 \Leftrightarrow k - \frac{2}{2^2} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

Για $k = 1$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$$

Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε

$$f(x) = x + \frac{2}{x} - \ln x + c$$

Όμως

$$f(2) = 1 - \ln 2 \Leftrightarrow 2 + 1 - \ln 2 + c = 1 - \ln 2 \Leftrightarrow c = -2$$

Επομένως $f(x) = x + \frac{2}{x} - \ln x - 2$

Γ2. Η εξίσωση $x^2 + 2 = x(\alpha + \ln x + 2)$ για $x > 0$ γίνεται

$$x + \frac{2}{x} = \alpha + \ln x + 2 \Leftrightarrow x + \frac{2}{x} - \ln x - 2 = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$$

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της f

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x^2}$$

$$\bullet f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x > 0 \\ x+1 > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\bullet f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x > 0 \\ x+1 > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

$$\bullet f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} < 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x > 0 \\ x+1 > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f		↘	↗

Στο διάστημα $(0, 2]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα ενώ στο διάστημα $[2, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

Για $x = 2$ παρουσιάζει ελάχιστο με τιμή $f(2) = 1 - \ln 2$

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (0, 2]$

άρα

$$f(A_1) = \left[f(2), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [1 - \ln 2, +\infty)$$

διότι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{2}{x} - \ln x - 2 \right) = +\infty$$

$$\text{εφόσον } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 2) = -2, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [2, +\infty)$ άρα

$$f(A_2) = \left[f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1 - \ln 2, +\infty)$$

διότι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{2}{x} - \ln x - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x} \right) \right] = (+\infty) \cdot 1 = +\infty$$

$$\text{εφόσον } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x} \right) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Επομένως

$$f(A) = [1 - \ln 2, +\infty)$$

Για την εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχουμε:

• Αν $\alpha < 1 - \ln 2$ τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ είναι αδύνατη εφόσον $\alpha \notin f(A)$

• Αν $\alpha > 1 - \ln 2$ τότε:

$\alpha \in f(A_1)$ οπότε υπάρχει $x_1 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = \alpha$ το x_1 μοναδικό διότι

η f γνησίως φθίνουσα στο A_1 και $\alpha \in f(A_2)$ οπότε υπάρχει $x_2 \in (2, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = \alpha$ το x_2 μοναδικό διότι η f γνησίως αύξουσα στο A_2

Επομένως η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει δύο ακριβώς ρίζες

• Αν $\alpha = 1 - \ln 2$ τότε η εξίσωση $f(x) = 1 - \ln 2$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 2$ διότι στο $x_0 = 2$ η f παρουσιάζει ελάχιστο.

Γ3.

(i) $f''(x) = \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ επομένως η f κυρτή στο πεδίο ορισμού της.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(1, f(1))$ είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 3$$

(ii) Η δοσμένη ανίσωση για $x > 0$ γίνεται:

$$e^{3x^2 - 5x + 2} > x^x \Leftrightarrow \ln(e^{3x^2 - 5x + 2}) > \ln x^x \Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 2 > x \ln x \Leftrightarrow 3x - 5 + \frac{2}{x} > \ln x$$

$$\Leftrightarrow 2x + x - 2 - 3 + \frac{2}{x} > \ln x \Leftrightarrow x - 2 + \frac{2}{x} - \ln x > -2x + 3 \Leftrightarrow f(x) > -2x + 3$$

Εφόσον η f κυρτή στο $A = (0, +\infty)$ η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης σε κάθε σημείο του A βρίσκεται << κάτω >> από την γραφική της παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή ισχύει $f(x) \geq -2x + 3$ για κάθε $x > 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$ επομένως:

Η ανίσωση $f(x) > -2x + 3$ αληθεύει για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

Γ4. Ο τύπος της συνάρτησης g είναι:

$$g(x) = f(x) + \ln x + 2 \Leftrightarrow g(x) = x + \frac{2}{x} - \ln x - 2 + \ln x + 2 \Leftrightarrow g(x) = x + \frac{2}{x}, x > 0$$

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{2}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2} \right) = 1$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{2}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Οπότε η $y = x$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = \int_1^e |g(x) - x| dx = \int_1^e \left| \frac{2}{x} \right| dx = \int_1^e \frac{2}{x} dx = [2 \ln x]_1^e = 2 \ln e - 2 \ln 1 = 2\tau.μ$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Παραγωγίζοντας τη σχέση: $f(f^2(x)) + f^2(x) = f(x) + x$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(f^2(x)) \cdot 2f(x)f'(x) + 2f(x)f'(x) &= f'(x) + 1 \\ \Leftrightarrow f'(f^2(x)) \cdot 2f(x)f'(x) + 2f(x)f'(x) - f'(x) &= 1 \\ \Leftrightarrow f'(x)(f'(f^2(x)) \cdot 2f(x) + 2f(x) - 1) &= 1 \quad (1) \end{aligned}$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, και επειδή η f' είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο στο $(0, +\infty)$

Για $x=1$ η σχέση (1) γίνεται:

$$f'(1)(f'(f^2(1)) \cdot 2f(1) + 2f(1) - 1) = 1 \Leftrightarrow f'(1)(2f'(1) + 1) = 1 \Leftrightarrow 2(f'(1))^2 + f'(1) - 1 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει λύσεις το -1 και το $\frac{1}{2}$, όμως $f'(1) \neq -1$ άρα $f'(1) = \frac{1}{2}$

Η f' διατηρεί πρόσημο στο $A \equiv (0, +\infty)$ και $f'(1) = \frac{1}{2} > 0$

Άρα: $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ2. Για το ολοκλήρωμα $\int_2^3 f(t-1)dx$ θέτουμε $u=t-1$ οπότε $du=dt$ και για $t=2$

έχουμε $u=1$ ενώ για $t=3$ έχουμε $u=2$ άρα: $\int_2^3 f(t-1)dx = \int_1^2 f(u)du$ άρα η g γίνεται:

$$g(x) = \begin{cases} \left(\int_1^2 f(t)dt \right) \cdot x^3, & x \geq 0 \\ \left(\int_1^2 f(t)dt \right) \cdot x^2, & x < 0 \end{cases}$$

και θέτοντας για λόγους απλότητας $\int_1^2 f(t)dt = k$ γίνεται:

$$g(x) = \begin{cases} k \cdot x^3, & x \geq 0 \\ k \cdot x^2, & x < 0 \end{cases}$$

- $g(-1) = k \cdot (-1)^2 = k$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

• $g(1) = k \cdot 1^3 = k$

Οπότε: $g(-1) = g(1)$

Η g παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με $g'(x) = 2kx$ και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = 3kx^2$.

Για το $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{kx^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} kx = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{kx^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} kx^2 = 0$$

Άρα η g παραγωγίσιμη και στο μηδέν με $g'(0) = 0$ επομένως θα είναι και συνεχής στο $x_0 = 0$

Επομένως για τη συνάρτηση g ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$ εφόσον είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και $g(-1) = g(1)$

Δ3. Η συνάρτηση $h(x) = f(x^2 + 1), x > 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$ διότι:

$$h'(x) = f'(x^2 + 1) \cdot 2x > 0, \text{ για κάθε } x > 0$$

A-τρόπος

Για το ολοκλήρωμα $\int_1^2 h(x) dx$ θέτουμε $x = u - 1$ οπότε $du = dx$ και για $x = 1$

$$\text{έχουμε } u = 2 \text{ ενώ για } x = 2 \text{ έχουμε } u = 3 \text{ άρα: } \int_1^2 h(x) dx = \int_2^3 h(u - 1) du$$

$$\text{Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι: } \int_2^3 h(x) dx > \int_2^3 h(x - 1) dx$$

$$\text{Για κάθε } x > 0 \text{ ισχύει: } x - 1 < x \Rightarrow h(x - 1) < h(x) \Rightarrow \int_2^3 h(x - 1) dx < \int_2^3 h(x) dx$$

B-τρόπος

Αν F παράγουσα της $h(x) = f(x^2 + 1)$ τότε η (2) γίνεται

$$\int_2^3 h(x) dx > \int_1^2 h(x) dx \Leftrightarrow F(3) - F(2) > F(2) - F(1)$$

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ στα $[1, 2], [2, 3]$

υπάρχουν $x_1 \in (1,2)$, $x_2 \in (2,3)$ ώστε

$$F'(x_1) = \frac{F(2) - F(1)}{2 - 1} \Leftrightarrow F'(x_1) = F(2) - F(1)$$

$$F'(x_2) = \frac{F(3) - F(2)}{3 - 2} \Leftrightarrow F'(x_2) = F(3) - F(2)$$

$$x_1 < x_2 \stackrel{F'=h!}{\Rightarrow} F'(x_1) < F'(x_2) \Leftrightarrow F(2) - F(1) < F(3) - F(2)$$

Δ4. Η εξίσωση

$$\left(\int_2^3 h(t) \cdot \int_2^3 h(u) du \right) dt \cdot (x-2) + f(x) \left(\int_1^2 h(t) dt \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 h(u) du \cdot \int_2^3 h(t) dt \cdot (x-2) + f(x) \left(\int_1^2 h(t) dt \right)^2 = 0$$

Θέτουμε: $\int_2^3 h(t) dt = \int_2^3 h(u) du = \alpha$ και $\int_1^2 h(t) dt = \beta$

Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$\alpha^2(x-2) + f(x) \cdot \beta^2 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = \alpha^2(x-2) + f(x) \cdot \beta^2, x \in [1,2]$$

Η φ συνεχής στο $[1, 2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\varphi(1) = \alpha^2(1-2) + f(1) \cdot \beta^2 \Leftrightarrow g(1) = -\alpha^2 + \beta^2 = (\beta - \alpha) \cdot (\beta + \alpha) < 0$$

Διότι από το Δ3 ισχύει $\beta < \alpha \Leftrightarrow \int_1^2 h(t) dt < \int_2^3 h(t) dt$ και λόγω μονοτονίας

$$h(x) \geq h(1) > 0 \text{ άρα } \alpha > 0, \beta > 0$$

$$\varphi(2) = \alpha^2(2-2) + f(2) \cdot \beta^2 \Leftrightarrow g(2) = f(2) \cdot \beta^2 > 0$$

Διότι: $2 > 1 \stackrel{f'}{\Rightarrow} f(2) > f(1) \Rightarrow f(2) > 1$ και $\beta^2 = \left(\int_1^2 h(t) dt \right)^2 > 0$

Επομένως $\varphi(1) \cdot \varphi(2) < 0$ άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$

Η φ παραγωγίσιμη στο $A_\varphi = (0, +\infty)$ με $\varphi'(x) = \alpha^2 + \beta^2 f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ επομένως η φ γνησίως αύξουσα στο $A_\varphi = (0, +\infty)$ οπότε η ρίζα είναι μοναδική.