# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017

**Β ΦΑΣΗ**

**Ε_3.Μλ2Θ(α)**

**ΤΑΞΗ:** **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

**ΜΑΘΗΜΑ:** **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**Ημερομηνία: Σάββατο 8 Απριλίου 2017**

**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

---

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελίδα 83

**Α2.** **α)** Σωστό

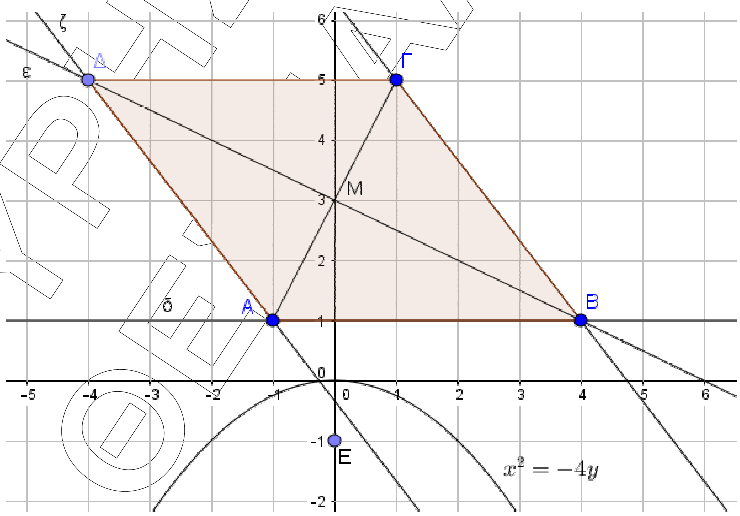
**β)** Λάθος

**γ)** Σωστό

**δ)** Λάθος

**ε)** Λάθος

### ΘΕΜΑ Β




**Β1.** Το Μ είναι το μέσον της ΑΓ. Επομένως έχει συντεταγμένες

$$M\left(\frac{x_{A}+x_{\Gamma}}{2}, \frac{y_A+y_\Gamma}{2}\right) \text{ ή } M\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{1+5}{2}\right) \text{ ή } M\,(0,3).$$

Αφού $x_B \neq x_M$ ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης $\lambda_{BM}$ της ΒΜ (ε) και είναι

$$\lambda_{BM} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B} = \frac{3-1}{0-4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Με χρήση των συντεταγμένων του Μ έχουμε

$$\varepsilon:\ y-3 = -\frac{1}{2}(x-0) \Leftrightarrow y-3 = -\frac{1}{2}x \Leftrightarrow 2y-6 = -x \Leftrightarrow x+2y=6$$

**Β2.** **i.** Οι συντεταγμένες του σημείου Δ προκύπτουν ως λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών ε και ζ:

$$\left\{\begin{matrix} x+2y=6 \\ 4x+3y=-1 \end{matrix}\right\} \overset{\cdot(-4)}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{matrix} -4x-8y=-24 \\ 4x+3y=-1 \end{matrix}\right\} \overset{+}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{matrix} -5y=-25 \\ x+2y=6 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} y=5 \\ x=6-2\cdot 5 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y=5 \\ x=-4 \end{matrix}\right\} \qquad \text{Άρα } \Delta\ (-4,5)$$

**ii.** **α΄ τρόπος:**

Από την υπόθεση έχουμε ότι ζ // ΒΓ, που σημαίνει ότι ΑΔ//ΒΓ.

Αρκεί επομένως να δείξουμε ότι είναι και ΑΒ//ΔΓ.

Αφού $x_A \neq x_B$ και $x_\Delta \neq x_\Gamma$ ορίζονται οι συντελεστές διεύθυνσης των ΑΒ και ΔΓ και είναι:

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-1}{4-(-1)} = 0$$

$$\lambda_{\Delta\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_\Delta}{x_\Gamma - x_\Delta} = \frac{5-5}{1-(-4)} = 0.$$

Επομένως $\lambda_{AB} = \lambda_{\Delta\Gamma}$ οπότε ΑΒ // ΔΓ

**β΄ τρόπος:**

Οι συντεταγμένες του μέσου της ΒΔ είναι $\left(\frac{x_B + x_\Delta}{2}, \frac{y_B + y_\Delta}{2}\right)$ ή $\left(\frac{4+(-4)}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = (0,3)$. Επομένως το μέσο της ΒΔ είναι το σημείο Μ(0,3).

Άρα οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ διχοτομούνται.

Επομένως αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

**γ΄ τρόπος:**

(Για την παραλληλία των ΑΒ, ΔΓ)

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A) = (4-(-1)\ ,\ 1-1) = (5,0)$$

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (x_\Gamma - x_\Delta\ ,\ y_\Gamma - y_\Delta) = (1-(-4)\ ,\ 5-5) = (5,0)$$

Άρα $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ απ' όπου έπεται ότι ΑΒ//ΔΓ.

**Β.3.** Έχουμε $\lambda_{AB}=0$ (Β2,ii α΄ τρόπος). Επομένως η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα Α(–1,1) και Β(4,1) είναι η y=1, που αποτελεί την διευθετούσα της C. Γνωρίζουμε ότι (σχολικό βιβλίο σχήμα σελίδας 91) η διευθετούσα παραβολής C με τύπο $x^2=2py$ είναι η $y=-\frac{p}{2}$

Άρα έχουμε $-\frac{p}{2}=1 \Leftrightarrow p=-2$.

Επίσης η εστία της Ε είναι $E\left(0,\frac{p}{2}\right)$. Άρα $E\,(0,-1)$

## ΘΕΜΑ Γ

Αρχικά έχουμε: $|\vec{\beta}-2\vec{\alpha}| \in \mathbb{R}$ ως μέτρο γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων. Επίσης $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \in \mathbb{R}$ ως εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. Επομένως η εξίσωση (1) είναι της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$ με $A=|\vec{\beta}-2\vec{\alpha}|$, $B=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και $\Gamma=-8$.

Έστω ότι $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\omega$ με $0°\le\omega\le180°$. Τότε έχουμε:

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\omega=2\cdot 4\sigma\upsilon\nu\omega=8\sigma\upsilon\nu\omega\,(2)$
- $|\vec{\beta}-2\vec{\alpha}|^2=(\vec{\beta}-2\vec{\alpha})^2=|\vec{\beta}|^2-4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+4|\vec{\alpha}|^2$ (από υπόθεση και λόγω της (2) )

$=16-32\sigma\upsilon\nu\omega+16=32-32\sigma\upsilon\nu\omega=32(1-\sigma\upsilon\nu\omega)$

Είναι πάντοτε $\sigma\upsilon\nu\omega\le1\Leftrightarrow1-\sigma\upsilon\nu\omega\ge0$ και το μέτρο διανύσματος μη αρνητικός αριθμός. Επομένως $|\vec{\beta}-2\vec{\alpha}|=\sqrt{32(1-\sigma\upsilon\nu\omega)}=4\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\omega}$ (3)

**Γ1.** **α΄ τρόπος**

Για να παριστάνει η (1) ευθεία πρέπει και αρκεί $|\vec{\beta}-2\vec{\alpha}|\ne0$ ή $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\ne0$. Ισοδύναμα θα πρέπει οι αριθμοί $|\vec{\beta}-2\vec{\alpha}|$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ να μην είναι ταυτοχρόνως μηδέν.

Όμως:

- $|\vec{\beta}-2\vec{\alpha}|=0\underset{(3)}{\Leftrightarrow}\sigma\upsilon\nu\omega=1\Leftrightarrow\omega=0°\Leftrightarrow\vec{\alpha}\nearrow\nearrow\vec{\beta}$
- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$

Παρατηρούμε ότι για να είναι οι δύο αυτοί αριθμοί ταυτοχρόνως μηδέν θα πρέπει τα μη μηδενικά διανύσματα (αφού έχουν μη μηδενικά μέτρα) $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να είναι ταυτοχρόνως ομόρροπα και κάθετα. Αφού αυτό αποκλείεται έπεται ότι οι δύο αριθμοί δεν μπορούν να είναι ταυτοχρόνως μηδέν, επομένως η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.

**β΄ τρόπος**

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $|\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}| \neq 0$ τότε η (1) παριστάνει ευθεία ανεξάρτητα από την τιμή του $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.
- Αν $|\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}| = 0$ τότε από (3) $\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = 1$.

Τότε από (2) είναι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 8 \neq 0$. Αρά και σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία. (Επίσης είναι $|\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}| = 0$ αν και μόνο αν $\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}$. Τότε όμως $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2|\vec{\alpha}|^2 = 8 \neq 0$ )

**γ΄ τρόπος**

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \neq 0$ τότε η (1) παριστάνει ευθεία ανεξάρτητα από την τιμή του $|\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}|$.
- Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ τότε από (2) $\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = 0$.

Τότε από (3) είναι: $|\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}| = 4\sqrt{2} \neq 0$. Αρά και σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία

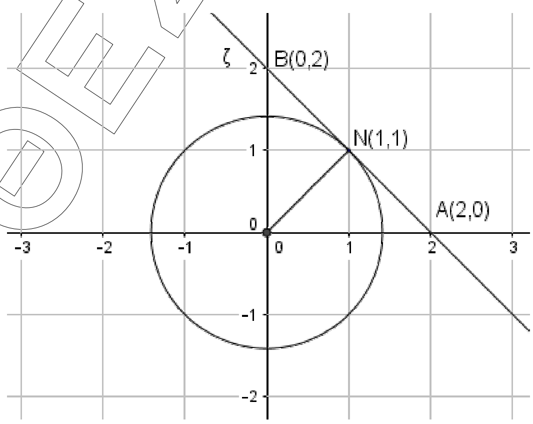
**Γ2.** Αν είναι $\omega = 60°$ τότε $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{2}$ οπότε από (3) έχουμε:

$$|\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}| = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 4$$

Επίσης από (2) έχουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 8\frac{1}{2} = 4$

Τότε η (1) γίνεται 4x+4y-8=0 ή ζ: x+y-2=0

**Γ3.**




**α΄ τρόπος**

**α)** Αφού η ευθεία ζ εφάπτεται στον κύκλο $C$ στο σημείο $N$ η ευθεία $ON$ που διέρχεται από το κέντρο $O$ του κύκλου και το σημείο $N$ θα είναι κάθετη στην ζ. Άρα για τους συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_\zeta$ και $\lambda_{ON}$ των παραπάνω ευθειών αντιστοίχως θα ισχύει: $\lambda_\zeta \cdot \lambda_{ON} = -1$. Όμως $\lambda_\zeta = -1$, άρα $-1 \cdot \lambda_{ON} = -1$ ή $\lambda_{ON} = 1$. Αφού η ευθεία $ON$ διέρχεται από το $O(0,0)$ θα έχει εξίσωση: $y - 0 = 1(x - 0)$ ή $y = x$. Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών ζ και $ON$ έχουμε τις συντεταγμένες του $N, N(1,1)$

**β)** Ο κύκλος $C$ έχει κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = |\overrightarrow{ON}|$. Όμως $\overrightarrow{ON} = (1-0, 1-0) = (1,1)$ και άρα $|\overrightarrow{ON}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Έτσι τελικά είναι $C: x^2 + y^2 = \sqrt{2}^2$ ή $x^2 + y^2 = 2$. Η ακτίνα $\rho$ του κύκλου $C$ μπορεί να βρεθεί και ως η απόσταση του $O(0,0)$ από την ευθεία ζ:

$$\rho = d(O, \zeta) = \frac{|0 + 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

**β΄ τρόπος**

Έστω $\rho > 0$ η ακτίνα του κύκλου. Αφού το κέντρο του κύκλου είναι το $O(0,0)$ η εξίσωση του θα είναι $x^2 + y^2 = \rho^2$ (4).

Η ευθεία ζ εφάπτεται σε αυτόν. Επομένως οι $C$ και ζ έχουν μοναδικό κοινό σημείο και άρα το σύστημα των εξισώσεων (4) και της ζ έχει μοναδική λύση.

Από την εξίσωση της ζ έχουμε y=-x+2

Επομένως (4) $\Rightarrow x^2 + (-x + 2)^2 = \rho^2 \Rightarrow$

$x^2 + x^2 - 4x + 4 - \rho^2 = 0$ ή $2x^2 - 4x + 4 - \rho^2 = 0$ (5)

Για να έχει η εξίσωση αυτή μία διπλή ρίζα απαιτούμε η διακρίνουσα να είναι μηδέν.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (4 - \rho^2) = 0 \Rightarrow 16 - 32 + 8\rho^2 = 0 \Rightarrow 8\rho^2 = 16$ ή $\rho^2 = 2 \underset{\rho > 0}{\Longrightarrow} \rho = \sqrt{2}$.

Επομένως η εξίσωση του κύκλου είναι $x^2 + y^2 = 2$

Για $\rho^2 = 2$ έχουμε (5) $\Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0$ ή $x^2 - 2x + 1 = 0$

ή $(x-1)^2 = 0$ οπότε x=1 που είναι η τετμημένη του σημείου N.

Για $x = 1$ η εξίσωση της ευθείας ζ δίνει $y = 1$. Επομένως $N(1,1)$

**γ΄ τρόπος**

Έστω $N(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής του κύκλου $C$ με την ευθεία ζ. Ο κύκλος $C$ με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho$ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$. Επομένως η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο $N$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$. Αυτή σύμφωνα με την υπόθεση ταυτίζεται με την $x + y = 2$.

Επομένως ισχύει: $\frac{x_1}{1} = \frac{y_1}{1} = \frac{\rho^2}{2}$. Από αυτήν προκύπτει ότι ( $y_1 = x_1$ και $\rho^2 = 2x_1$) (6). Αφού το $N$ ανήκει και στον κύκλο $C$ οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωσή του. Επομένως:

$$x_1^2 + {y_1}^2 = \rho^2 \underset{(6)}{\Rightarrow} x_1^2 + x_1^2 = 2x_1 \Rightarrow 2x_1^2 - 2x_1 = 0 \text{ ή } x_1(x_1 - 1) = 0.$$

Άρα $x_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ ή $x_1 = 0$ που απορρίπτεται αφού στην περίπτωση αυτή από την (6) θα ήταν $y_1 = 0$ οπότε $N(0,0)$ που δεν ανήκει στην ευθεία ζ. (Επίσης στην περίπτωση αυτή ο κύκλος εκφυλίζεται σε σημείο)
Για $x_1 = 1$ είναι $(6) \Rightarrow y_1 = 1 \; και \; \rho^2 = 2$.
Επομένως είναι $N(1,1)$ και $C: x^2 + y^2 = 2$

**δ΄ τρόπος**

Η ευθεία $\zeta: x + y - 2 = 0$, τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $A(2,0)$ και $B(0,2)$ αντίστοιχα όπως προκύπτει από την εξίσωση της $\zeta$ για $y = 0$ και $x = 0$ αντίστοιχα. Επομένως το τρίγωνο $OAB$ είναι ισοσκελές με $OA = OB = 2$ και υποτείνουσα την $AB$. Έτσι η διάμεσος προς την υποτείνουσα είναι και ύψος. (7). Αφού η ευθεία $\zeta$ εφάπτεται στον κύκλο $C$ στο σημείο $N$ η ακτίνα $ON$ είναι κάθετη στη ζ. Έτσι το $ON$ είναι το ύψος του τριγώνου $OAB$ προς την υποτείνουσα $AB$. Λόγω της (7) θα είναι και διάμεσος. Επομένως το $N$ είναι το μέσο του $AB$. Άρα $N = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$ ή $N(1,1)$.
Η ακτίνα $\rho$ του κύκλου είναι η απόσταση των σημείων $O(0,0)$ και $N(1,1)$.
Άρα $\rho = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$
Επομένως $C: x^2 + y^2 = 2$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1. α)**

- Οι $KM$, $KP$ είναι ακτίνες του κυκλικού σύρματος, επομένως $|\overrightarrow{KM}| = |\overrightarrow{KP}| = 1$. Έτσι έχουμε: $\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KP} = |\overrightarrow{KM}| \cdot |\overrightarrow{KP}| \cdot συν(\widehat{\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KP}})$ ή $\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \cdot 1 \cdot συν(M\widehat{K}P)$ από όπου προκύπτει ότι $M\widehat{K}P = 45°$ (είναι $0° \leq M\widehat{K}P \leq 180°$ ως γωνία διανυσμάτων ).
- Το σημείο $M$ είναι το μοναδικό κοινό σημείο του κύκλου με την $\varepsilon$. Άρα η $\varepsilon$ είναι εφαπτομένη αυτού του κύκλου. Επομένως $K\widehat{M}\Lambda = 90°$. Έτσι το τρίγωνο $KM\Lambda$ είναι ορθογώνιο και έχει μία οξεία γωνία την $M\widehat{K}P = 45°$. Άρα θα είναι και $K\widehat{\Lambda}M = 45°$ ( Άθροισμα γωνιών τριγώνου $180°$ ).
- Είναι $\overrightarrow{KP} // Ox$, άρα $K\Lambda // Ox$ επομένως θα είναι $O\widehat{A}z = K\widehat{\Lambda}M = 45°$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παράλληλων ευθειών $K\Lambda$, $Ox$ που τέμνονται από την Az.

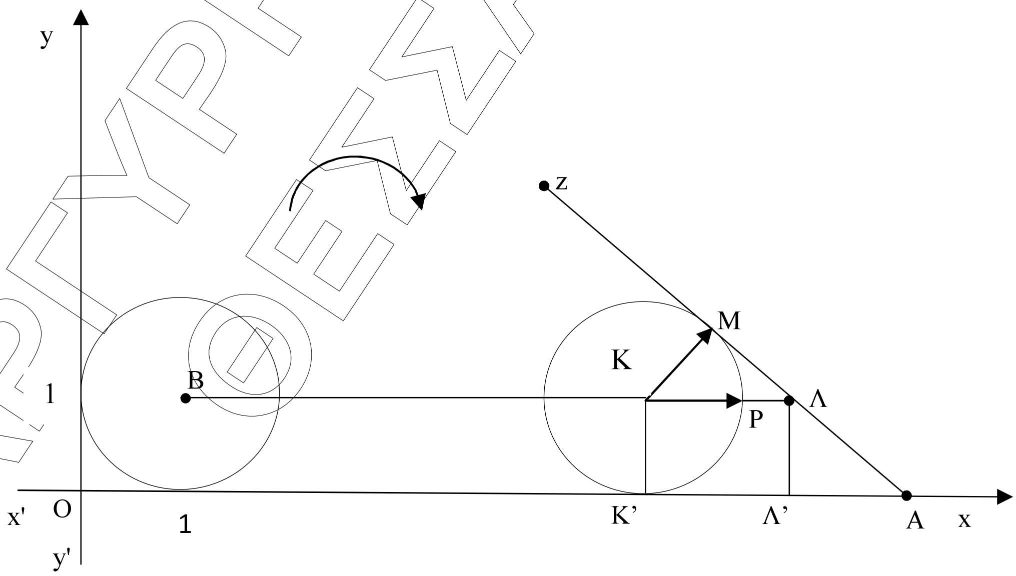
**β)** Η ευθεία $\varepsilon$ διέρχεται από το σημείο $A$ που έχει τετμημένη $9 + \sqrt{2}$ και τεταγμένη 0 αφού είναι σημείο του ημιάξονα $Ox$. Άρα είναι $A(9 + \sqrt{2}, 0)$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης $\lambda$ της $\varepsilon$ είναι $\lambda = \varepsilon\varphi(z\hat{A}x) = \varepsilon\varphi 135° = -1$, αφού $z\hat{A}x = 135°$ ως παραπληρωματική της $O\hat{A}z = 45°$.
Έτσι η εξίσωση της $\varepsilon$ είναι: $y - 0 = -1 \cdot (x - 9 - \sqrt{2})$ ή
$y = -x + 9 + \sqrt{2}$ ή $x + y - 9 - \sqrt{2} = 0$

**γ) α΄ τρόπος**

Καθώς το κυκλικό σύρμα κυλιέται, το κέντρο του απέχει διαρκώς από τον $Ox$ όσο η ακτίνα του, δηλαδή 1 μονάδα. Ο $Ox$ εφάπτεται σε κάθε κύκλο της οικογένειας. Έτσι το κέντρο του κυκλικού σύρματος διατρέχει το ευθύγραμμο $BK$ που ανήκει στην ευθεία $y = 1$ (1). Άρα η τεταγμένη του $K$ είναι 1. Έστω $x_K$ η τετμημένη του. Δηλαδή $K(x_K, 1)$. Αφού η $\varepsilon$ εφάπτεται στο κυκλικό σύρμα στην τελική του θέση έχουμε:
$d(K,\varepsilon) = \rho$ ή $\frac{|x_K + 1 - 9 - \sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 1 \Leftrightarrow |x_K - 8 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} \Leftrightarrow x_K - 8 - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ ή $x_K - 8 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x_K = 8 + 2\sqrt{2}$ ή $x_K = 8$
Η πρώτη τιμή απορρίπτεται γιατί σημαίνει θέση του κυκλικού σύρματος μετά το κεκλιμένο επίπεδο $Az$. (Είναι $8 + 2\sqrt{2} > 9 + \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} > 1$ ή
$2 > 1$ αληθής, που σημαίνει ότι το $K$ βρίσκεται δεξιότερα του $A$ και αυτό αποκλείεται). Άρα είναι $K(8, 1)$.

**β΄ τρόπος**
(Ευκλείδια Γεωμετρία)




Γνωρίζουμε ότι το τρίγωνο $KM\Lambda$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.(Δ1,α)
Άρα $M\Lambda = KM = 1$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$K\Lambda^2 = KM^2 + M\Lambda^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$

Άρα $ΚΛ = \sqrt{2}$. Έστω $Κ'$, $Λ'$ οι προβολές των $Κ$, $Λ$ στον ημιάξονα $Ox$. Τότε λόγω του ορθογώνιου παραλληλογράμμου $ΚΛΛ'Κ'$ είναι: $Κ'Λ' = ΚΛ = \sqrt{2}$. Επίσης το τρίγωνο $ΛΛ'Α$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές αφού $Λ' = 90°$ και $Ο\hat{Α}z = 45°$ άρα και $Α\hat{Λ}Λ' = 45°$. Έτσι είναι $Λ'Α = ΛΛ' = ΚΚ' = 1$
(Από το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΚΛΛ'Κ'$ είναι $ΛΛ' = ΚΚ' = \rho = 1$)
Επομένως $Κ'Α = Κ'Λ' + Λ'Α = \sqrt{2} + 1$. Έτσι τελικά έχουμε: $x_Κ = x_{Κ'} = ΟΚ' = ΟΑ - Κ'Α = (9 + \sqrt{2}) - (\sqrt{2} + 1) = 8$

**Δ2.** Η τετμημένη του σημείου $Β$ είναι 1 αφού στην αρχική του θέση το κυκλικό σύρμα εφάπτεται στον ημιάξονα $Oy$. Η τετμημένη του σημείου $Κ$ είναι 8 όπως δείξαμε στο Δ1. γ) Σύμφωνα με την παρατήρηση (1) (Δ1,γ,α΄ τρόπος), για τις συντεταγμένες των κέντρων των κύκλων αυτής της οικογένειας που είναι $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ ισχύουν:

**α)** Για την τεταγμένη: $-\frac{B}{2} = 1 \Leftrightarrow B = -2$

**β)** Για την τετμημένη: $1 \leq -\frac{A}{2} \leq 8 \Leftrightarrow 2 \leq -A \leq 16$
(Επειδή είναι όλοι θετικοί) $\Leftrightarrow 4 \leq A^2 \leq 256$ (2)
Ακόμα έχουμε: $2 \leq -A \Leftrightarrow A \leq -2 < 0$. Άρα $A < 0$ (3)
Επίσης για την ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4Γ}}{2}$, όλων των κύκλων της οικογένειας ισχύει: $\rho = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{A^2+B^2-4Γ}}{2} = 1 \underset{(α)}{\Leftrightarrow} \sqrt{A^2 + 4 - 4Γ} = 2$
Επομένως $A^2 + 4 - 4Γ = 4$ ή $A^2 - 4Γ = 0 \Leftrightarrow A^2 = 4Γ$ (4) με $4Γ > 0$, αφού ισούται με τετράγωνο μη μηδενικού αριθμού όπως φαίνεται από την (3) και έτσι τελικά είναι και $Γ > 0$. Έτσι από την (4) έχουμε: $|A| = \sqrt{4Γ} \underset{(3)}{\Leftrightarrow} -A = 2\sqrt{Γ}$ ή $A = -2\sqrt{Γ}$

**γ)** Τέλος η (2) λόγω της (4) δίνει: $4 \leq 4Γ \leq 256 \Leftrightarrow 1 \leq Γ \leq 64$