

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

## ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .

Μονάδες 7

A2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: «Κάθε συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής στο  $x_0$ , είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, b]$ ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

β) Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A, B$  αντίστοιχα, τότε η  $g \circ f$  ορίζεται αν  $f(A) \cap B \neq \emptyset$ .

γ) Για κάθε συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

δ) Αν  $0 < \alpha < 1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$ .

ε) Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

Μονάδες 10

## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln x, x > 0$  και  $g(x) = \frac{x}{1-x}, x \neq 1$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$ .

Μονάδες 5

B2. Αν  $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right), x \in (0, 1)$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

B3. Αν  $\varphi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}$ , να μελετήσετε τη συνάρτηση  $\varphi$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

Μονάδες 7

**B4.** Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $\varphi$  και να τη σχεδιάσετε.  
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

Μονάδες 7

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -\eta\mu x$ ,  $x \in [0, \pi]$  και το σημείο  $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες  $(\epsilon_1)$ ,  $(\epsilon_2)$  της γραφικής παράστασης της  $f$  που άγονται από το  $A$ , τις οποίες και να βρείτε.

Μονάδες 8

**Γ2.** Αν  $(\epsilon_1) : y = -x$  και  $(\epsilon_2) : y = x - \pi$  είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1**, τότε να σχεδιάσετε τις  $(\epsilon_1)$ ,  $(\epsilon_2)$ , και τη γραφική παράσταση της  $f$ , και να αποδείξετε ότι  $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$ , όπου:

- $E_1$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  και τις ευθείες  $(\epsilon_1)$ ,  $(\epsilon_2)$ , και
- $E_2$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  και τον άξονα  $x'x$ .

Μονάδες 6

**Γ3.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi}$

Μονάδες 4

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι  $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi$

Μονάδες 7

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \eta\mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$

**Δ1.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[-1, \pi]$ , και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 5

**Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

**Δ3.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τη γραφική παράσταση της  $g$ , με  $g(x) = e^{5x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , τον άξονα  $y'y$  και την ευθεία  $x = \pi$ .

Μονάδες 6

**Δ4.** Να λύσετε την εξίσωση  $16e^{\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{\frac{3\pi}{4}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$

Μονάδες 8