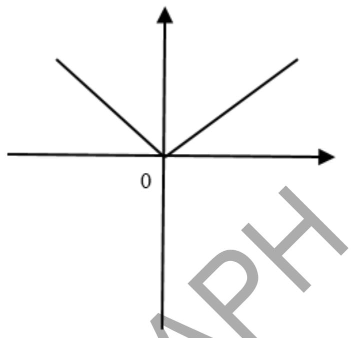
Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχ. Βιβλίο σελ. 253

Α2. **α)** → Ψ



β) Είναι ψευδής γιατί π.χ. $f(x)=|x|=\begin{cases} x, x\geq 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$

Είναι συνεχής στο $x_0=0$ αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$

Όμως: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-0}{x}=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Δηλαδή f συνεχής στο x=0 $\not\Rightarrow$ f παρ/μη στο x=0.

Μονάδες 4

Α3. Ορισμός σχ.βιβλίο σελ. 191.

Α4.

α) → Λ β) → Σ γ) → Λ

δ) → Σ ε) → Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $Df\circ g=\begin{cases} x\in Dg \\ \text{και} \\ g(x)\in Df \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ \text{και} \\ \dfrac{x}{1-x}>0 \end{cases}$ δηλ. x . (1-x) >0 $\Leftrightarrow$ $x\in(0,1)$

$-\infty$		0		1		$+\infty$
	-	0	+	0	-	

οπότε $Df\circ g=(0,1)$

$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=\ell n\big(g(x)\big)=\ell n\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$

Μονάδες 6

Β2. • $h(x)=\ell n\left(\dfrac{x}{1-x}\right), x\in(0,1)$

$\forall x_1\cdot x_2\in(0,1)$ με $h(x_1)=h(x_2)\Rightarrow$

$\Rightarrow \ell n\dfrac{x_1}{1-x_1}=\ell n\dfrac{x_2}{1-x_2}$

$\Rightarrow \dfrac{x_1}{1-x_1}=\dfrac{x_2}{1-x_2}$

$\Rightarrow x_1-\cancel{x_1\cdot x_2}=x_2-\cancel{x_1\cdot x_2}$

$\Rightarrow x_1=x_2$

άρα h 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

• $y=h(x)\Leftrightarrow y=\ell n\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$

$$\Leftrightarrow e^y = \frac{x}{1-x}$$
$$\Leftrightarrow e^y - x\cdot e^y = x$$
$$\Leftrightarrow e^y = x + xe^y$$
$$\Leftrightarrow e^y = x\left(1+e^y\right)$$
$$\underset{\Leftrightarrow}{1+e^y>0} \quad x = \frac{e^y}{1+e^y}, \quad \text{όμως } 0 < \frac{e^y}{1+e^y} < 1 \Leftrightarrow 0 < e^y < 1+e^y \text{ ισχύει } \forall\ y \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{e^y}{1+e^y}, y \in \mathbb{R}$$

$$\Delta\eta\lambda.\, f^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, x \in \mathbb{R}$$

Β΄ ΤΡΟΠΟΣ

- $h'(x) = \ldots\ldots = \dfrac{1}{x\cdot(1-x)} > 0$

  Δηλ. h $\nearrow$ άρα 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

- y= h(x) $\Leftrightarrow$ … ομοίως….

Μονάδες 9

Β3. $\varphi(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}, x \in \mathbb{R}$

Η φ συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών

Οπότε $\varphi'(x) = \dfrac{e^x\left(e^x+1\right) - e^x\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = \dfrac{\cancel{e^{2x}} + e^x \cancel{-e^{2x}}}{\left(e^x+1\right)^2} > 0$, $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 7

άρα η φ $\nearrow$ $\mathbb{R}$ οπότε, δεν έχει ακρότατα.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
φ''		+	0	-	
φ		$\cup$		$\cap$	
			σ.κ.		

$$\varphi''(x) = \frac{e^x\left(e^x+1\right)^2 - e^x\cdot 2\left(e^x+1\right)\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^4}$$
$$= \frac{e^x\left(e^x+1\right)^2 - 2e^{2x}\left(e^x+1\right)}{\left(e^x+1\right)^4} =$$
$$= \frac{e^x\cancel{\left(e^x+1\right)}\cdot\left(e^x+1-2\cdot e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^{\cancel{4}3}} = \frac{e^x\cdot\left(-e^x+1\right)}{\left(e^x+1\right)^3}$$

$\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow -e^x+1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

- $\varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow -e^x+1 > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

η φ $\cup$ στο $(-\infty, 0]$ φ $\cap$ στο $[0, +\infty)$

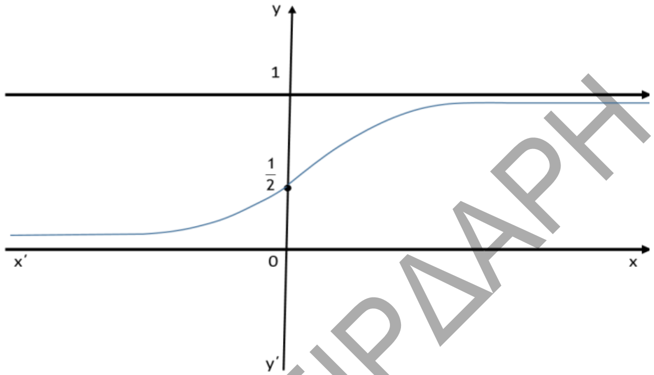
έχει σημείο καμπής στο x=0 το $A\left(0,\varphi(0)\right) = \left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ Δηλ. $A\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

Β4.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{0}{0+1}=0$ άρα ε: y=0 οριζόντια ασύμπτωτη στο -∞.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$ άρα ε: y=1 οριζόντια ασύμπτωτη στο +∞.

	- ∞	0	+ ∞
φ΄	+		+
φ΄΄	+	0	-
φ	0 ↗	σ.κ.	↗



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

f(x)=-ημx, f΄(x)= -συνx

Έστω Μ(x_0,f(x_0)) σημείο της Cf στο οποίο φέρω εφαπτομένη (ε)

(ε):

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)\overset{A\in\varepsilon}{\Rightarrow}-\pi/2+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)$$

$$\Rightarrow-\pi/2+\eta\mu x_0+\sigma\upsilon\nu x_0\left(\pi/2-x_0\right)=0\ (1)$$

Η (1) έχει προφανείς ρίζες την x=0, x=π

Θεωρώ την h(x)= $-\pi/2+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\left(\pi/2-x\right)$ στο [0,π]

Έχει προφανείς ρίζες τις x=0, x=π δηλαδή h(0) = h(π)=0

$h'(x)$ = συνx - ημx$\left(\pi/2 - x\right)$ + συνx(-1) = -ημx$\left(\pi/2 - x\right)$

h΄(x) = 0 ⇒ -ημx=0 ή $\pi/2-x=0$

x=0,x=π x=$\pi/2$

$$h\left(\pi/2\right)=-\pi/2+1=\frac{-\pi+2}{2}<0$$

- $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ η h ↘

  $\forall x\ge 0\Rightarrow h(x)\le h(0)\Rightarrow h(x)\le 0$

- $\forall x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ η h ↗

  $\forall x\le \pi\Rightarrow h(x)\le h(\pi)\Rightarrow h(x)\le 0$

  οπότε

  $\forall x\in(0,\pi)\Rightarrow h(x)<0$

	0		$\frac{\pi}{2}$		π
-ημx		-		-	
$\frac{\pi}{2}$ -x		+		-	
h΄(x)		-	0	+	
h(x)	0	↘	Ο.Ε.	↗	0

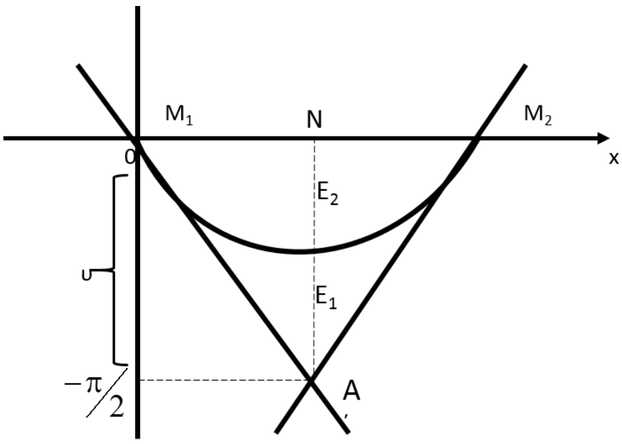
Άρα ∀x∈ (0,π) h(x) < 0

Άρα ρίζες x=0, x=π είναι μοναδικές.

ε_1:M_1 (0, f(0)) = M_1 (0,0) y= 0 = f΄(0) · (x-0) ⇒ y = -x

ε_2:M_2 (π, f(π)) = M_2 (π,0) y= 0 = f΄(π) · (x-π) ⇒ y = x-π

Γ2.



$$E_2=\int_0^{\pi}|f(x)|dx=\int_0^{\pi}+\eta\mu x dx=\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}$$
$$=-\left(\sigma\upsilon\nu\pi-\sigma\upsilon\nu 0\right)=-(-1-1)=+2\tau.\mu.$$
$$E_1=\left(A\overset{\Delta}{M_1}M_2\right)-E_2=\frac{\beta\cdot\upsilon}{2}-E_2=\frac{\left(M_1M_2\right)\cdot\left(AN\right)}{2}-E_2=$$
$$=\frac{\pi\cdot\frac{\pi}{2}}{2}-E_2=\frac{\pi^2}{4}-E_2$$
Άρα $\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{\pi^2/4-E_2}{E_2}=\dfrac{\pi^2/4}{E_2}-\dfrac{E_2}{E_2}=\dfrac{\pi^2/4}{2}-1=\dfrac{\pi^2}{8}-1$

Γ3.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{-\eta\mu x-\pi}{-\eta\mu x-x+\pi}=\lim_{x\to\pi}\left[\left(-\eta\mu x+\pi\right)\frac{1}{-\eta\mu x-x+\pi}\right]=+\infty$$

διότι $\lim\limits_{x\to\pi}\left(-\eta\mu x+\pi\right)=0+\pi>0$ και f΄΄(x)= ημ (x) ≥ 0 $\forall x\in$ [0,π]

Αφού η f είναι κυρτή στο [0,π] από σχόλιο του βιβλίου η f βρίσκεται γραφικά πάνω από την ε_2:

Δηλαδή $f(x)\geq x-\pi\Rightarrow-\eta\mu x\geq x-\pi\Rightarrow-\eta\mu x+x+\pi\geq 0$

Επομένως $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\pi}\left(-\eta\mu x-x+\pi\right)=0\\-\eta\mu x-x+\pi\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{-\eta\mu x-x+\pi}=+\infty$

Γ4.

Ομοίως $f(x)\geq x-\pi\overset{x>0}{\Rightarrow}\dfrac{f(x)}{x}\geq 1-\dfrac{\pi}{x}$

Το ίσον ισχύει μόνο στο x=π

$$\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx\Rightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>\left[x-\pi\ell nx\right]_1^e$$
$$\Rightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>\left(e-\pi\ell ne\right)-\left(1-\pi\ell n1\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>e-\pi-1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f συνεχής στο [-1,0) ως ρίζα συνεχούς. Η f συνεχής στο (0,π] ως γινόμενο συνεχών

$\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x^4}=0$ $\qquad\lim\limits_{x\to 0^+}e^x\cdot\eta\mu x=1.0=0=f(0)$

Άρα f συνεχής και στο x=0 οπότε η f, συνεχής στο [-1,π]

- Αν $x\in$ [-1,0)

  f παρ/μη $\qquad$ f(x)= $\sqrt[3]{x^4}=|x|^{4/3}=\begin{cases}x^{4/3}, & x\geq 0\\(-x)^{4/3}, & x<0\end{cases}$

  αφού $x\in$[-1,0) άρα f(x)=(-x) $^{4/3}$

  $f'(x)=\dfrac{4}{3}(-x)^{1/3}\cdot(-1)=-\dfrac{4}{3}\cdot(-x)^{1/3}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}(-x)^{1/3}=0 \Leftrightarrow x=0 \notin [-1,0)$

- Αν $x \in (0,\pi]$

  $f'(x)= e^x ημx + e^x \cdot συνx = e^x(ημx+συνx)$

  $f'(x)=0 \Leftrightarrow ημx+συνx = 0 \Leftrightarrow συνx= ημ(-x) \Leftrightarrow συνx=συν\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

  $\Leftrightarrow x = 2κ\pi + \frac{\pi}{2} + x$ ή $x= 2κ\pi-\frac{\pi}{2}-x$

  αδύνατη $\quad 2x=2κ\pi-\frac{\pi}{2}$

  $x= κ\pi-\frac{\pi}{4}$, $κ\in z$

  όμως $x \in(0,\pi]$ άρα $κ=1$ οπότε $x= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

  ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ:

  Στο 1ο και 2ο τεταρτημόριο ημ και συν είναι αντίθετα στο $\frac{3\pi}{4}$

- $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{4/3}}{x} \overset{0/0}{=} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{4}{3}(-x)^{1/3}}{1} = 0$
- $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x\cdot ημx}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(e^x\cdot\frac{ημx}{x}\right) = 1\cdot 1 = 1$

  άρα η f όχι παρ/μη στο x=0

  Τελικά τα κρίσιμα σημεία είναι το $x_1 = \frac{3\pi}{4}$, $x_2 = 0$

Δ2.

- $\forall\, x \in [-1,0)$ $f'(x)=-\frac{4}{3}\cdot(-x)^{1/3} = -\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x} < 0$ f ↘
- $\forall\, x \in (0,\pi]$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}$ μον.ρίζα

x	-1		0		$\frac{3\pi}{4}$		π
f′		-	‖	+		-	
f	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε. 0	↗	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.

Άρα στα διαστήματα $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ διατηρεί σταθερό πρόσημο αφού είναι συνεχής,

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2}\left(ημ\frac{\pi}{2}+συν\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2} > 0$….άρα $f'(x)>0$

οπότε

$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = e^{5\pi/6}\left(ημ\frac{5\pi}{6}+συν\frac{5\pi}{6}\right) = e^{5\pi/6}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0$….άρα $f'(x)<0$

Η f στο [-1,0] ↘ στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ ↗ στο $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ ↘

Παρουσιάζει Τ.Μ. στο x= -1 με τιμή f(-1) = 1

Τ.Ε. στο x=0 με τιμή f(0)=0

Τ.Μ. στο $x = \frac{3\pi}{4}$ με τιμή $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{\frac{3\pi}{4}}ημ\frac{3\pi}{4} = e^{3\pi/4}\frac{\sqrt{2}}{2}$

Τ.Ε. στο x=π με τιμή f(π)=0

• $A_1=\left[-1,0\right]$ f ↘

$f(A_1)=\left[f(0),f(-1)\right]=[0,1]$

• $A_2=\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ ↗

$$f(A_2)=\left[f(0),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[0,e^{3\pi/4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

• $A_3=\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ ↘

$$f(A_3)=\left[f(\pi),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[0,e^{3\pi/4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

Άρα $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)=\left[0,e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Γιατί

$$e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}>1\Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\sqrt{2}>2$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{2}}\cdot 2>4$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{2}}>2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{e^{3\pi}}>2$$

$$\Leftrightarrow e^{3\pi}>4 \quad \text{ισχύει!}$$

Οπότε το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ είναι ΟΛΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ.

Δ3. Α΄ ΤΡΟΠΟΣ

Ε(Ω) από Cf, Cg, x=0, x=π

$f(x)-g(x) = e^x ημx-e^{5x}=e^x(ημx-e^{4x})$

$e^x>0$ και ημx $\in[0,1]$ επίσης $\forall\ x\geq 0$

$4x\geq 0$

$e^{4x}\geq e^0$

$e^{4x}\geq 1$ άρα $e^{4x}\geq$ ημx οπότε $e^x(ημx-e^{4x})\leq 0$

Β΄ ΤΡΟΠΟΣ

$f(x)-g(x) = e^x ημx-e^{5x} = e^x(ημx-e^{4x})$

θεωρώ $h(x) = ημx-e^{4x}$

$h'(x)= συνx- 4e^{4x}$

$h''(x)= -ημx- 16\cdot e^{4x} < 0$

h' ↘ $\forall\ x\geq 0\Rightarrow h'(x)\leq h'(0) =-3\Rightarrow h'(x)<0$ h ↘

$\forall\ x\geq 0\Rightarrow h(x)\leq h(0) = -1 < 0$

$$E(\Omega)=-\int_0^{\pi}\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

$$= -\int_0^{\pi}\left(e^x ημx-e^{5x}\right)dx=-\int_0^{\pi}e^x ημx dx+\int_0^{\pi}e^{5x}dx$$

• $I=\int_0^{\pi} e^x \eta\mu x dx = \left[e^x \eta\mu x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sigma\upsilon\nu x dx$

$\Leftrightarrow I = -\left[e^x \sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \left(-\eta\mu x\right) dx$

$\Leftrightarrow I = -\left(e^{\pi}\sigma\upsilon\nu\pi - e^0 \sigma\upsilon\nu 0\right) - I$

$\Leftrightarrow 2I = -\left(-e^{\pi} - 1\right) \Leftrightarrow 2I = e^{\pi} + 1 \Leftrightarrow I = \dfrac{e^{\pi}+1}{2}$

•$\int_0^{\pi} e^{5x} dx = \left[\dfrac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\pi} = \dfrac{e^{5\pi}-1}{5}$

Οπότε $E(\Omega) = \dfrac{-e^{\pi}-1}{2} + \dfrac{e^{5\pi}-1}{5} = \dfrac{2e^{5\pi}-5e^{\pi}-7}{10}$ τ.μ.

Δ4.

$16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} \cdot \left(4x-3\pi\right)^2 = 8\sqrt{2} \Rightarrow$ δια $\left(16^{-\frac{3\pi}{4}}\right)$

$f(x) - \left(\dfrac{4x-3\pi}{4}\right)^2 = \dfrac{8\sqrt{2}}{16 \cdot e^{-\frac{3\pi}{4}}} \Rightarrow$

$f(x) - \left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right)^2 = \dfrac{e^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$f(x) - \left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right)^2 - f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 0$ προφανής ρίζα $x = \dfrac{3\pi}{4}$

Λόγω του ΟΛΙΚΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ:

$f(x) \le f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ και $\left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right)^2 \ge 0$

$f(x) - f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) \le 0$ και $-\left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right)^2 \le 0$

Άρα $f(x) - f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) - \left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right)^2 \le 0$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \dfrac{3\pi}{4}$ οπότε η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα $x = \dfrac{3\pi}{4}$