ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 27 Απριλίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β),με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0,στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$,να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

(Μονάδες 9)

Α2. Πότε η ευθεία $y=l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

(Μονάδες 3)

Α3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.
Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

(Μονάδες 3)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι Σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$.

(Μονάδες 2)

β) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 2)

γ) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$.

(Μονάδες 2)

δ) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 2)

ε) Τα κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ είναι μόνο τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγός της είναι ίση με 0.

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$,
- $g(x)=(x-2)\cdot e^{x-1}+1,\ x\in\mathbb{R}$

Β1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

(Μονάδες 5)

Β2. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο $A(1, f(1))$.

(Μονάδες 6)

Β3. Να δείξετε ότι $g(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

Β4. Να δείξετε ότι $\int_{2015}^{2016} g(x)dx>0$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

- $f(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0,\ x\in\mathbb{R}$.
- $f(x)\geq -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $f(0)=\sqrt{3}$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f'(0)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(Μονάδες 5)

Γ2. Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{2e^{-x}+1},\ x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

Γ3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}.

(Μονάδες 5)

Γ4. Να υπολογίσετε το $\displaystyle\int_{\ln(e-2)}^{0}\frac{e^x+1}{f^2(x)}dx$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f και η $g(x)=\ln x+x,\ x>0$ για τις οποίες ισχύει $f(g(x))=f(x)+e^x(x-1)+\ln x$, για κάθε $x>0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ακριβώς ένα σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $e^{x-x_0}=\dfrac{x_0}{x}$.

(Μονάδες 6)

Δ2. i) Έστω $0<\alpha<1$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης g και τις ευθείες $y=x,\ x=a,\ x=1$ είναι $\mathrm{E}(\alpha)=\alpha\ln\alpha-\alpha+1$ τ.μ.

(Μονάδες 3)

ii) Η κατακόρυφη ευθεία $x = a$ του προηγούμενου ερωτήματος μετατοπίζεται οριζόντια με τη θέση του αριθμού $\alpha = \alpha(t), t \geq 0$ στον άξονα $x'x$ να μεταβάλλεται με ρυθμό 1 cm/sec.
Αν για $t = 0$ ισχύει $0 < \alpha < x_0$, να αποδείξετε ότι την χρονική στιγμή στην οποία $\alpha = x_0$ cm, ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(a)$ είναι ίσος με $-x_0$ cm²/sec, όπου x_0 η τετμημένη του ερωτήματος Δ1.

(Μονάδες 5)

Δ3. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

(Μονάδες 5)

Δ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ υπάρχουν $\xi_1 > 1$ και $\xi_2 > 1$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = e^{\xi_2} + 1$.

(Μονάδες 6)