

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2Θ(α)

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Κυριακή 17 Απριλίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Σχολικό βιβλίο σελ. 45.
 A2. α) Λάθος
 β) Σωστό
 γ) Λάθος
 δ) Σωστό
 ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. $\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{b} = 3(-1, 2) - 2(0, -3) = (-3, 6) + (0, 6) = (-3, 12)$.
 $\gamma = (-3, 12) \cdot (-1, 2) + 4(-1, 2) \cdot (0, -3) = (3 + 24) + 4(0 - 6) = 27 - 24 = 3$.

B2. $AB \perp \vec{v} \Leftrightarrow \lambda_{AB} \cdot \lambda_v = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AB} = \frac{-1}{\lambda_v} = \frac{-1}{\frac{12}{-3}} = \frac{1}{4}$

Άρα $AB: y - 3 = \frac{1}{4}(x - 3) \Leftrightarrow 4y - 12 = x - 3 \Leftrightarrow x - 4y + 9 = 0$

και $B\Gamma: y = 3x - 2$ αφού $\gamma = \vec{v}\vec{a} + 4\vec{a}\vec{b} = 3$

Για την εύρεση της κορυφής Β λύνω το σύστημα:

$$\begin{cases} x - 4y = -9 \\ y = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 12x + 8 = -9 \\ y = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow (-11x = -17) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{11} \\ y = \frac{29}{11} \end{cases}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2Θ(α)

B3.
$$\begin{pmatrix} x_M = \lambda - 1 \\ y_M = 2\lambda + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda = x_M + 1 \\ y_M = 2x_M + 2 + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda = x_M + 1 \\ 2x_M - y_M + 4 = 0 \end{pmatrix}$$

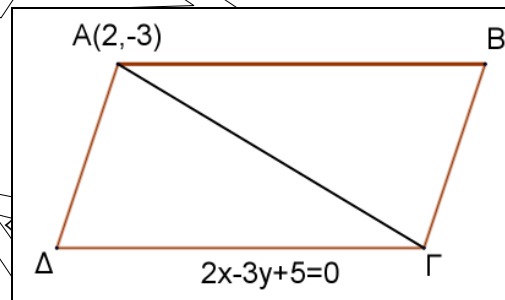
 Άρα το Μ κινείται στην ευθεία $2x - y + 4 = 0$

B4. Είναι $ΑΓ : 2x - y + 4 = 0$.

$$(B\Lambda) = d(B, ΑΓ) = \frac{\left| 2 \cdot \frac{17}{11} - \frac{29}{11} + 4 \right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{49}{\sqrt{5}} = \frac{49\sqrt{5}}{11 \cdot 5} = \frac{49\sqrt{5}}{55}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η $(\varepsilon) : x + y = 0$ δεν διέρχεται από το $A(2, -3)$ αφού οι συντεταγμένες του δεν την επαληθεύουν και δεν είναι παράλληλη στην $\Delta\Gamma$ γιατί $\lambda_\varepsilon = -1 \neq \lambda_{\Delta\Gamma}$. Άρα είναι η $(B\Gamma)$.



Για το Γ λύνουμε το

$$(\Sigma_1) \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 3y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 2x + 3x + 5 = 0 \end{cases}$$

δηλαδή $\Gamma(-1, 1)$, άρα

$$K\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{1-3}{2}\right) \text{ ή } K\left(\frac{1}{2}, -1\right)$$

Γ2. Για την AB : $(\Delta\Gamma) \parallel (AB) \Leftrightarrow \lambda_{\Delta\Gamma} = \lambda_{AB} = \frac{2}{3}$ και διέρχεται από το $A(2, -3)$

$$\text{άρα } y - (-3) = \frac{2}{3}(x - 2) \Leftrightarrow 2x - 3y - 13 = 0.$$

Για το σημείο B:

$$(\Sigma_2) \begin{cases} 2x - 3y - 13 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3x = 13 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{5} \\ y = -\frac{13}{5} \end{cases} \text{ Άρα } B\left(\frac{13}{5}, -\frac{13}{5}\right)$$

$$\text{δηλ. } \overline{A\Gamma} = (-3, 4) \text{ και } \overline{AB} = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

$$\text{δηλ. } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 2 \\ \frac{13}{5} & -\frac{13}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left| -\frac{6}{5} - \frac{12}{5} \right| = \frac{9}{5} \text{ τ.μ.}$$

$$\text{άρα } (AB\Gamma\Delta) = 2(AB\Gamma) = \frac{18}{5} \text{ τ.μ.}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2Θ(α)

Γ3. Η παραβολή είναι της μορφής

$C: y^2 = 2px$ και διέρχεται από το σημείο $K\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ άρα:

$$1 = 2p \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow p = 1 \text{ δηλαδή } C: y^2 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y^2.$$

Γ4. Η εφαπτόμενη στο σημείο $K\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ θα είναι:

$$(\eta): -y = 1 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 2x + 2y + 1 = 0 \text{ με } \lambda_\epsilon = -1.$$

Η διχοτόμος της γωνίας $EK\Theta$ είναι κάθετη στην παραπάνω εφαπτόμενη
 $\delta \perp \eta \Leftrightarrow \lambda_\delta \cdot \lambda_\eta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = 1$ (από την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η εξίσωση $(\epsilon): ax + by = 0$ παριστάνει ευθεία, άρα $a \neq 0$ ή $b \neq 0$.

Η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4ax - 4by = 0$ **(1)** είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$
 με: $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16a^2 + 16b^2 = 16(a^2 + b^2) > 0$ αφού $a \neq 0$ ή $b \neq 0$.

Άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(2a, 2b)$ και ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{16(a^2 + b^2)}}{2} = 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

Δ2. $d(K, \epsilon) = \frac{|2a^2 + 2b^2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{a^2 + b^2} = \rho$ δηλαδή η ευθεία είναι εφαπτόμενη του κύκλου.

Δ3. Αν $K(x_K, y_K)$ τότε: $\begin{cases} x_K = 2a \\ y_K = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x_K}{2} \\ b = \frac{y_K}{2} \end{cases}$.

$$\text{Όμως } 3a^2 + 4b^2 = 3 \Leftrightarrow 3 \frac{x_K^2}{4} + 4 \frac{y_K^2}{4} = 3 \Leftrightarrow$$

$$3x_K^2 + 4y_K^2 = 12 \text{ ή } \frac{x_K^2}{4} + \frac{y_K^2}{3} = 1$$

δηλαδή κινείται το K σε έλλειψη με $a^2 = 4$ και $b^2 = 3$.

Άρα $a = 2$ και $b = \sqrt{3}$ οπότε θα είναι:

Μεγάλος άξονας: $(AA') = 2a = 4$, μικρός άξονας: $(BB') = 2\sqrt{3}$ και

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2Θ(α)

$$\gamma^2 = 4 - 3 = 1 \text{ δηλαδή εκκεντρότητα } \varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{2}.$$

Δ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $N(x_1, y_1)$ είναι: $3x_1 \cdot x + 4y_1 \cdot y = 12$, η οποία διέρχεται από το $Z(-2, 3)$ άρα:

$$-6x_1 + 12y_1 = 12 \Leftrightarrow x_1 - 2y_1 = -2 \quad (1) \text{ και το } N(x_1, y_1) \text{ είναι σημείο της έλλειψης,} \\ \text{οπότε: } 3x_1^2 + 4y_1^2 = 12 \quad (2)$$

Για την εύρεση της $N(x_1, y_1)$ λύνω το σύστημα των (1) και (2):

$$(\Sigma) \quad \left. \begin{array}{l} x_1 - 2y_1 = -2 \\ 3x_1^2 + 4y_1^2 = 12 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2y_1 - 2 \\ 3 \cdot (2y_1 - 2)^2 + 4y_1^2 = 12 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{12} (y_1^2 - 2y_1 + 1) + 4y_1^2 = \cancel{12} \Leftrightarrow 3y_1^2 - 6y_1 + 3 + y_1^2 - 3 = 0$$

$$4y_1^2 - 6y_1 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 0 \text{ ή } y_1 = \frac{3}{2} \text{ δηλαδή } N\left(1, \frac{3}{2}\right). \text{ Άρα η εξίσωση της} \\ \text{εφαπτόμενης}$$

$$\text{είναι } 3 \cdot 1 \cdot x + 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot y = 12 \Leftrightarrow 3x + 6y = 12 \Leftrightarrow x + 2y = 4 \Leftrightarrow x + 2y - 4 = 0$$

$$\text{Είναι } A'(-2, 0), N\left(1, \frac{3}{2}\right) \text{ οπότε το μέσο } M \text{ του } NA' \text{ είναι } M\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right).$$

Έχω και $Z(-2, 3), O(0, 0)$

$$\text{Άρα } \overline{OM} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \text{ και } \overline{OZ} = (-2, 3).$$

$$\text{Οπότε } \det(\overline{OM}, \overline{OZ}) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} + \frac{6}{4} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

Δηλαδή $\overline{OM} \parallel \overline{OZ}$ οπότε O, M, Z συνευθειακά.