ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Κυριακή 17 Απριλίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. (Σχολικό βιβλίο, σελίδα 62).

Α2. **α** → Λάθος **β** → Σωστό **γ** → Λάθος **δ** → Σωστό **ε** → Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. **i.** Έχουμε $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-6)=1+24=25>0$, άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες: $x_{1,2}=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{25}}{2\cdot1}=\dfrac{1\pm5}{2}$, άρα $x_1=-2,\ x_2=3$

ii. Ισχύει $(x-1)^2=|x-1|^2$. Θέτουμε $|x-1|=y$ με $y\geq0$ οπότε έχουμε την εξίσωση $y^2-y-6=0$ με $y\geq0$. Επομένως (από i) είναι $y=-2$ που απορρίπτεται ή $y=3$ που είναι δεκτή.
Άρα $|x-1|=3\Leftrightarrow(x-1=3 \text{ ή } x-1=-3)\Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=-2$

Β2. **i.** Λύνουμε την εξίσωση $-x^2+x+6=0$ η οποία είναι ισοδύναμη με την (i) του ερωτήματος Β1. Άρα $x_1=-2,\ x_2=3$.
Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$-x^2+x+6$		-	0	+	0	-	

Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης $-x^2+x+6<0$ είναι τα $x\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$

ii. Για να είναι η εξίσωση $x^2+2x+\frac{\lambda^2}{4}=0$ αδύνατη στο $\mathbb{R}$ θα πρέπει η διακρίνουσά της να είναι αρνητική. Δηλαδή $\Delta<0 \Leftrightarrow 2^2-4\cdot 1\cdot\frac{\lambda^2}{4}<0 \Leftrightarrow$

$$4-4\cdot\frac{\lambda^2}{4}<0 \Leftrightarrow 4-\lambda^2<0 \Leftrightarrow \lambda^2>4 \Leftrightarrow |\lambda|>2 \Leftrightarrow \lambda>2 \text{ ή } \lambda<-2$$

Οι παραπάνω λύσεις προκύπτουν και από τον κανόνα προσήμου τριωνύμου: Ζητάμε τις τιμές του λ για τις οποίες είναι $4-\lambda^2<0$. Δηλαδή τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο του πρώτου μέλους είναι ομόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου. Σύμφωνα με τον κανόνα προσήμου τριωνύμου, πρέπει ο λ να βρίσκεται εκτός του διαστήματος των ριζών του τριωνύμου $4-\lambda^2$, οι οποίες είναι -2 και 2. Έτσι τελικά πρέπει $\lambda>2$ ή $\lambda<-2$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για να ορίζεται η f πρέπει

$$3-|1-x|\geq 0 \Leftrightarrow |1-x|\leq 3 \Leftrightarrow -3\leq 1-x\leq 3 \Leftrightarrow -4\leq -x\leq 2 \Leftrightarrow -2\leq x\leq 4.$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=[-2,4]$.

Γ2. Για να ανήκει το σημείο $M(-1,1)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν τον τύπο της. Δηλαδή πρέπει

$$f(-1)=1 \Leftrightarrow \sqrt{3-|1-(-1)|}+|\kappa^3+1|=1 \Leftrightarrow \sqrt{3-|2|}+|\kappa^3+1|=1 \Leftrightarrow$$
$$1+|\kappa^3+1|=1 \Leftrightarrow |\kappa^3+1|=0 \Leftrightarrow \kappa^3+1=0 \Leftrightarrow \kappa^3=-1 \Leftrightarrow \kappa=-\sqrt[3]{|-1|} \Leftrightarrow \kappa=-1.$$

Γ3. Από τη φράση ΄΄παίρνουμε τυχαία ένα στοιχείο ω του Ω΄΄ συμπεραίνουμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα. Επομένως ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας. Το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι το πλήθος των στοιχείων του Ω, δηλαδή $N(\Omega)=10$. Αν θεωρήσουμε Ε το ενδεχόμενο «το $f(\omega)$ έχει νόημα» τότε το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι $N(E)$. Από τους αριθμούς που βρίσκονται στο Ω παρατηρούμε ότι μόνο οι αριθμοί 1,2,3,4, βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της f που είναι το $A=[-2,4]$ όπως γνωρίζουμε από το Γ1. Άρα $E=\{1,2,3,4\}$ με $N(E)=4$. Έτσι έχουμε τελικά σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας

$$P(E)=\frac{N(E)}{N(\Omega)}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε την εξίσωση $x^2-4x+2=0$. Η διακρίνουσα είναι $\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot2=16-8=8$. Αφού $\Delta>0$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.

Δ2. Αρχικά έχουμε

$f(0)=0^2-4\cdot0+2=2$ και $f(-1)=(-1)^2-4(-1)+2=1+4+2=7$

Άρα

$$A=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7-2}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{7-2}}{\sqrt{7-2}+\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)+\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{\cancel{\sqrt{10}}+\sqrt{4}+\sqrt{25}-\cancel{\sqrt{10}}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{2}^2}=\frac{2+5}{5-2}=\frac{7}{3}$$

- Από τους τύπους Vieta έχουμε $S=x_1+x_2=-\frac{-4}{1}=4$ και $P=x_1\cdot x_2=\frac{2}{1}=2$

  Έτσι είναι $B=x_1^3x_2+x_1x_2^3=x_1\cdot x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)$. Όμως από την ταυτότητα $(x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$ προκύπτει $x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2$. Έτσι $B=x_1\cdot x_2\cdot[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]=P(S^2-2P)$ ή

  $B=2(4^2-2\cdot2)=2(16-4)=2\cdot12=24$

- Επίσης είναι, $\Gamma=\sqrt{x_1^2}\cdot|x_2|=|x_1|\cdot|x_2|=|x_1x_2|=|P|=|2|=2.$

Δ3. **i.** Για $A=\frac{7}{3}$, Β=24 και Γ=2 είναι

$$(\varepsilon): y = 2x + \frac{24-10}{\frac{7}{3}} \text{ ή } y = 2x + \frac{14\cdot 3}{7} \text{ ή } y = 2x+6.$$

Για x=0 είναι y=6. Για y=0 είναι $x=-3$. Επομένως χαράζουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(0,6) και Β(-3,0).

ii. Το τρίγωνο ΒΟΑ είναι ορθογώνιο με μήκη κάθετων πλευρών $|OA|=|6|=6$ μονάδες και $|OB|=|-3|=3$ μονάδες.
Επομένως θα έχει εμβαδόν
$(BOA)=\frac{1}{2}|OB|\cdot|OA|=$
$=\frac{1}{2}3\cdot 6=9$
τετραγωνικές μονάδες.