## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

**Α1:** Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 262

**Α2:** Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ. 141

**Α3:** Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ. 246-247

**Α4:** α – λάθος, β – σωστό, γ – λάθος, δ – σωστό, ε – σωστό

### ΘΕΜΑ Β

**Β1:** Η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathfrak{R}$ ως ρητή

$$f'(x)=\frac{2x\,(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$

$\forall x\in(-\infty,0]$ η f ↘

$\forall x\in[0,\infty)$ η f ↗

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f′ | | - | 0 | + | |
| f | | ↘ | Ο. Ε. 0 | ↗ | |

Στο $x_0=0$ η f παρουσιάζει Ο.Ε. με τιμή f(0) = 0

**Β2:**

$$f''(x)=\frac{2(x^2+1)^2-2x\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{(x^2+1)\cdot[2(x^2+1)-8x^2]}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3}$$

$\cdot\, f''(x)=0 \Leftrightarrow -6x^2+2=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cdot\, f''(x)>0 \Leftrightarrow -6x^2+2>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

| x | $-\infty$ | | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′′ | | - | 0 | + | 0 | - | |
| f | | ∩ | | ∪ | | ∩ | |
| | | | 6.Κ. | | 6.Κ. | | |

Η f στο $(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}]$ και στο $[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$ είναι ∩ κοίλη

Η f στο $[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$ είναι ∪ κυρτή

Στα σημεία $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, f(-\frac{\sqrt{3}}{3})\right) = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4})$

και $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, f(\frac{\sqrt{3}}{3})\right) = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4})$ έχει καμπή.

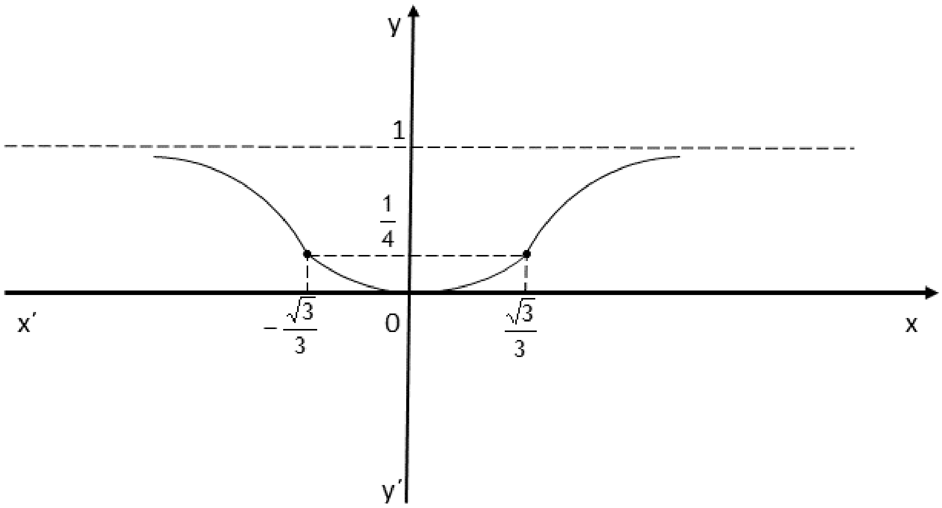
**B3:** Η f συνεχής στο $\Re$ ως ρητή άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$

Άρα η ε: y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.
Ομοίως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ άρα y=1 Ο.Α. στο $-\infty$.

**B4:**

| | $-\infty$ | | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | $0$ | | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | - | | - | 0 | + | | + | |
| $f''$ | | - | 0 | + | | + | 0 | - | |
| $f$ | 1 | | $\frac{1}{4}$ σ.κ. | | Ο Ε 0 | | $\frac{1}{4}$ σ.κ. | | 1 |



## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1 :** $g(x) = e^x - x - 1$ , $x \in \Re$
$g'(x) = e^x - 1$ , $x \in \Re$
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 = e^0 \Leftrightarrow x = 0$
$g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| g′ | | - | 0 | + | |
| g | | | Ο. Ε. | | |

g(0)=0

$\forall x \in \Re$ ισχύει $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 0$ το "=" ισχύει μόνο στο x=0
Δηλαδή $\forall x \in \Re - \{0\}$ $g(x) > 0$
Οπότε η g(x) = 0 έχει μοναδική λύση $\boxed{x=0}$
Η εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow g(x^2) = g(0) \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$

**<u>Β΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>**

Έστω $\varphi(x) = e^{x^2} - x^2 - 1 = 0, x \in \Re$
$\varphi'(x) = 2xe^{x^2} - 2x, x \in \Re$
$\varphi'(x) = 2x\left(e^{x^2} - 1\right), x \in \Re$
$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ έχω $x^2 \geq 0 \Rightarrow e^{x^2} \geq e^0 \Rightarrow e^{x^2} - 1 \geq 0$

| X | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2x | | - | 0 | + | |
| $e^{x^2}-1$ | | + | 0 | + | |
| φ΄(x) | | - | 0 | + | |
| φ(x) | | ↘ | | ↗ | |

Ο.Ε.
Φ (0) = 0

$\forall x \in \Re$ $\varphi(x) \geq \varphi(0) \Rightarrow \varphi(x) \geq 0$. Το ίσον ισχύει μόνο για x=0.

**Γ2:** Λύνω την εξίσωση $f(x) = 0 \Rightarrow f^2(x) = 0 \Rightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ λόγω του Γ1 x=0 είναι μοναδική ρίζα:
Η f συνεχής $\forall x \in (-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$
και $f(x) \neq 0$ αφού έχει μοναδική ρίζα το x=0.
Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα υποσύνολα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$

**1η** $f(x) > 0, x \in (-\infty,0)$
$f(x) > 0, x \in (0, +\infty)$
άρα $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, \quad x \in \Re$

**2η** $f(x) < 0, x \in (-\infty,0)$
$f(x) < 0, x \in (0, +\infty)$
άρα $f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right), \quad x \in \Re$

**3η** $f(x) < 0, x \in (-\infty,0)$
$f(x) > 0, x \in (0, +\infty)$
άρα $f(x) = \begin{cases} -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right), & x \in (-\infty,0) \\ e^{x^2} - x^2 - 1, & x \in [0,+\infty) \end{cases}$

**4η** $f(x) > 0, x \in (-\infty,0)$
$f(x) < 0, x \in (0, +\infty)$
άρα $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x \in (-\infty,0) \\ -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right), & x \in [0,+\infty) \end{cases}$

**Γ3:** $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1,\ x \in \Re$

Η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\Re$ ως πράξεις συναρτήσεων

$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x - 2x,\ x \in \Re$

$f''(x) = e^{x^2} \cdot 2x \cdot 2x + e^{x^2} \cdot 2 - 2$

$f''(x) = e^{x^2} \cdot 4x^2 + 2\, e^{x^2} - 2,\ x \in \Re$

Υπολογίζω και την $3^η$ παράγωγο

$f^{(3)}(x) = e^{x^2} \cdot 2x \cdot 4x^2 + e^{x^2} \cdot 8x + 2\, e^{x^2} \cdot 2x$

$f^{(3)}(x) = e^{x^2} \cdot 8x^3 + e^{x^2}\, 12x$

$f^{(3)}(x) = e^{x^2}\ (8x^3 + 12x),\ x \in \Re$

$f^{(3)}(x) = 0 \Rightarrow e^{x^2}\ (8x^3+12x) = 0 \Rightarrow e^{x^2} \cdot x \cdot (8x^2+12) = 0$

$x = 0,\quad e^{x^2} > 0 \quad \text{και} \quad 8x^2+12 > 0$

άρα έχουμε:

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f^{(3)}(x)$ | | - | 0 | + | |
| $f''(x)$ | | ↘ + | 0 | ↗ + | |
| f(x) | | | | | |

Για x=0 η $f''(x)$ έχει ολικό ελάχιστο άρα

$f''(0) = e^0 \cdot 0 + 2e^0 - 2 = 0$

$f''(0) = 0$

άρα $f''(x) \geq f''(0),\ \forall x \in \Re$

$f''(x) \geq 0$ άρα η f κυρτή για κάθε $x \in \Re$

**Β΄ ΤΡΟΠΟΣ**

$f''(x) = e^{x^2} \cdot 4x^2 + 2e^{x^2} - 2,\ x \in \Re$

$= 2x \cdot 2x \cdot e^{x^2} + 2\,(e^{x^2} - 1)$

$= 2\,(2x^2 e^{x^2} + e^{x^2} - 1)$ επειδή $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$

$= 2\,(2x^2 e^{x^2} + f(x) + x^2)$

$f'(x) = 2x \cdot e^{x^2} - 2x = 2x\,(e^{x^2} - 1)$

| X | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2x | | - | 0 | + | |
| $e^{x^2} - 1$ | | + | 0 | + | |
| f΄ | | - | | + | |
| f | | ↘ | Ο.Ε. f(0)=0 | ↗ | |

$f''(x) \geq 0$ γιατί: $2x^2 e^{x^2} \geq 0,\quad f(x) \geq 0,\ x^2 \geq 0$

άρα η f κυρτή για κάθε $x \in \Re$

**Γ4:** $f(|ημx|+3)-f(|ημx|)=f(x+3)-f(x)$

Θέτω $h(x) = f(x+3) - f(x)$ , $x \geq 0$

$h'(x) = f'(x+3) - f'(x)$ , $x \geq 0$

$x+3>x \Rightarrow f'(x+3)>f'(x)$ γιατί $x \geq 0$ και $f' \nearrow$

οπότε $f'(x+3) - f'(x) > 0$

άρα $h'(x) > 0$, $\forall x \geq 0$

άρα η $h \nearrow$ για $x \in [0,+\infty)$ άρα η h "1-1"

$f(|ημx|+3)-f(|ημx|)=f(x+3)-f(x)$

$h(|ημx|)=h(x)$ επειδή $x \in [0,+\infty)$

$h(|ημx|)=h(|x|)$ γιατί h είναι 1-1

$|ημx|=|x|$

x=0, γιατί στη σχέση $|ημx| \leq |x| = x$ $\forall \in \Re$ το ίσον ισχύει μόνο για το 0.

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1:** $\int_0^\pi (f(x)+f''(x))ημx\,dx = π \Rightarrow \int_0^\pi f(x)ημx\,dx + \int_0^\pi f''(x)ημx\,dx = π$

$\Rightarrow \int_0^\pi f(x)(-συνx)'\,dx + \int_0^\pi (f'(x))'ημx\,dx = π \Rightarrow$

$\Rightarrow [-f(x)συνx]_0^\pi + \cancel{\int_0^\pi f'(x)συνx\,dx} + [f'(x)ημx]_0^\pi - \cancel{\int_0^\pi f'(x)συνx\,dx} = π$

$-f(π) \cdot συνπ + f(0)\,συν0 + f'(π) \cdot ημπ - f'(0) \cdot ημ0 = π$

$\Rightarrow$ **<u>+ f(π) + f(0) = π</u>** **(1)**

Θέτω $g(x)=\dfrac{f(x)}{ημx}$, όπου $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$

οπότε $g(x)ημx=f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}[g(x)ημx]$

με $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$ αφού η f συνεχής στο 0 : $f(0)=1\cdot ημ0 \Rightarrow f(0)=0$

Άρα η (1) $\Rightarrow$ f(π) + 0 = π $\Rightarrow$ **<u>f(π) = π</u>**

και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)\cdot ημx}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[g(x)\dfrac{ημx}{x}\right] = 1\cdot 1 = 1 \in \Re$, άρα $f'(0)=1$

**<u>Β΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>**

$\int_0^\pi (f(x)+f''(x))ημx\,dx \Rightarrow \int_0^\pi f(x)ημx\,dx + \int_0^\pi f''(x)ημx\,dx = π$

$\int_0^\pi f(x)ημx\,dx + [f'(x)ημx]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)συνx\,dx = π \Rightarrow$

$\int_0^\pi f(x)ημx\,dx + [f'(x)ημx]_0^\pi - [f(x)συνx]_0^\pi + \int_0^\pi f(x)(-ημx)\,dx = π$

0+f(π) + f(0) = π σχέση (1) **<u>f(π) + f(0) = π</u> …**

**Δ2:** Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0$
Αφού η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\Re$ από θεώρημα Fermat ισχύει $f'(x_o)=0$

$e^{f(x)}$ και f (f(x)) παραγωγίσιμες ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x \Rightarrow e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 = f'(f(x)) \cdot f'(x) + e^x$$

Για $x=x_0$: $e^{f(x_0)} \cdot f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) + e^{x_0}$

$$\Rightarrow e^{f(x_0)} \cdot 0 + 1 = f'(f(x_0)) \cdot 0 + e^{x_0} \Rightarrow e^{x_0} = 1 \Rightarrow e^{x_0} = e^0 \Rightarrow \mathbf{x_0 = 0}$$

Άρα $f'(0)=0$ **άτοπο** αφού $f'(0) = 1$ από Δ1.
Άρα η $f'$ δεν έχει ρίζα άρα δεν μπορεί να παρουσιάζει ακρότατο.

β) Αφού :

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) \neq 0 \ \forall x \in \Re \\ f' \text{ συνεχής, γιατί η } f \\ \text{είναι 2 φορές παραγωγίσιμη} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f' \text{ διατηρεί πρόσημο } \forall x \in \Re \\ \text{όμως } f(0) = 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \ \ \forall x \in \Re$ άρα η f ↗ $\Re$

**Δ3:** $f(\Re) = \Re \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} \left( \lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

**Στην περιοχή του + ∞**

Είναι $|\eta\mu x| \leq 1 \Rightarrow \dfrac{|\eta\mu x|}{|f(x)|} < \dfrac{1}{|f(x)|} \Rightarrow \left|\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}\right| \leq \dfrac{1}{|f(x)|} \Rightarrow -\dfrac{1}{|f(x)|} \leq \dfrac{\eta\mu x}{f(x)} \leq \dfrac{1}{|f(x)|}$

Αφού $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ άρα $\lim\limits_{x \to +\infty} \left( -\dfrac{1}{|f(x)|} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{|f(x)|} = 0$

και από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\eta\mu x}{f(x)} = 0$

ομοίως $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$ άρα $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left( \dfrac{\eta\mu x}{f(x)} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \right) = 0$

**Δ4:** $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^\pi f(u)du$ γιατί έθεσα: u=lnx, $du = \dfrac{1}{x}dx$, $u_1=\ln 1=0$, $u_2=\ln e^\pi=\pi$

Όποτε θέλω ν.δ.ο. $\displaystyle 0 < \int_0^\pi f(u)du < \pi$

**<u>Α΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>**

Είναι $0 \leq u \leq \pi \overset{\uparrow}{\Rightarrow} f(0) \leq f(u) \leq f(\pi) \Rightarrow 0 < f(u) < \pi$ γιατί η ισότητα ισχύει μόνο για u=0 και u=π.

$$\Rightarrow \int_0^\pi 0du < \int_0^\pi f(u)du < \int_0^\pi \pi du \Rightarrow 0 < \int_0^\pi f(u)du < [\pi \cdot u]_0^\pi$$

$$\Rightarrow 0 < \int_0^\pi f(u)du < \pi^2 \Rightarrow 0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$$

**<u>Β΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>**

$f(0)=0$ και $f(\pi)=\pi$

$f(x) \geq 0$ δεν μηδενίζεται παντού στο $[0, \pi]$

άρα $\int_0^\pi f(x)dx > 0$ (1)

και $f(x) - \pi \leq 0$ δεν μηδενίζεται παντού στο $[0,\pi]$

άρα

$$\int_0^\pi (f(x) - \pi)dx < 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)dx - \int_0^\pi \pi dx < 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)dx < \int_0^\pi \pi dx \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)dx < [\pi x]_0^\pi$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)dx < \pi^2 \qquad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο: $0 < \int_0^\pi f(x)dx < \pi^2$