18ο

18ο **ΘΕΜΑ Β** ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

B1. Για κάθε $x \in (0,1)$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{(\ell nx)'(1-x) - \ell nx(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{\frac{1-x}{x} + \ell nx}{(1-x)^2} = \frac{x\ell nx - x + 1}{x(1-x)^2} =$$

$$= \frac{h(x)}{x(1-x)^2},$$

όπου

$$h(x) = x\ell nx - x + 1,\ x \in (0,\ 1).$$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με

$$h'(x) = (x)'\ell nx + x(\ell nx)' - 1 = \ell nx + x\frac{1}{x} - 1 =$$

$$= \ell nx + 1 - 1 = \ell nx < 0 \text{ για κάθε } x \in (0,\ 1),$$

οπότε, η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$.

Είναι,

$$\lim_{x\to 0^+}(x\,\ell nx) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ell nx}{\frac{1}{x}} \underset{(D.L.H)}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ell nx)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+}(x\ell nx - x + 1) = 0 - 0 + 1 = 1,$$

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-}(x\ell nx - x + 1) = 0.$$

Επειδή, η συνάρτηση h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$, έπεται ότι:

$$h((0,1)) = \left(\lim_{x\to 1^-} h(x),\ \lim_{x\to 0^+} h(x)\right) = (0,\ 1)$$

Επομένως, για κάθε $x \in (0,\ 1)$ ισχύει:

$$h(x) \in h\big((0,\ 1)\big) = (0,1) \Rightarrow 0 < h(x) < 1.$$

Έτσι, για κάθε $x \in (0,\ 1)$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{h(x)}{x(1-x)^2} > 0,$$

οπότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0,1)$.

B2. Είναι,

$$g'(x) = \left[\ell nx\, \ell n(1-x)\right]' = (\ell nx)'\, \ell n(1-x) + \ell nx\, \left(\ell n(1-x)\right)' =$$

$$= \frac{1}{x}\ell n(1-x) + (\ell nx)\frac{1}{1-x}(1-x)' = \frac{\ell n(1-x)}{1-(1-x)} - \frac{\ell nx}{1-x} =$$

$$= f(1-x) - f(x),\ x \in (0,\ 1).$$

Έχουμε:

$$\begin{cases} g'(x) > 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1-x) - f(x) > 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1-x) > f(x) \\ 0 < x < 1 \end{cases} \overset{(\text{f γνησίως αύξουσα})}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x > x \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{1}{2} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$$

Όμοια,

$$\begin{cases} g'(x) < 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 1$$

$$\begin{cases} g'(x) = 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

x	0		1/2		1
g΄(x)		+	0	−	
g(x)		↗	max	↘	

Από το πρόσημο της $g'(x)$, που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει ότι η g είναι:

γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $\left[\frac{1}{2},\ 1\right)$.

B3. Έχει αποδειχθεί ότι: $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\,\ell nx)=0$.

Επίσης είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ell n(1-x)}{x}\underset{(D.L.H)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\ell n(1-x)\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{1-x}}{1}=-1.$$

Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}g(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\ell nx\,\ell n(1-x)\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left((x\,\ell nx\,)\frac{\ell n(1-x)}{x}\right)=0\cdot(-1)=0\quad :(1),$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\ell n\left(\frac{1}{2}\right)\ell n\left(1-\frac{1}{2}\right)=\left(\ell n\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=(-\ell n2)^2=(\ell n2)^2$$

Επειδή η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$,

έπεται ότι:

$$g\left(\left(0,\ \frac{1}{2}\right]\right)=\left(\lim_{x\to 0^+}g(x),\ g\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\left(0,\ (\ell n2)^2\right]$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 1^-}g(x)\overset{(u=1-x\Leftrightarrow x=1-u)}{=}\lim_{u\to 0^+}g(1-u)=$$

$$=\lim_{u\to 0^+}\left(\ell n(1-(1-u))\,\ell n(1-u)\right)=$$

$$=\lim_{u\to 0^+}\left(\ell nu\,\ell n(1-u)\right)=\lim_{u\to 0^+}g(u)\overset{(1)}{=}0.$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=(\ell n2)^2$$

Επειδή η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2},\ 1\right)$,

έπεται ότι:

$$g\left(\left[\frac{1}{2},\ 1\right)\right)=\left(\lim_{x\to1^-} g(x),\ g\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\left(0,\ (\ell n2)^2\right].$$

Επομένως, το **σύνολο τιμών** της g είναι:

$$\boxed{\mathbf{g((0,1))=g\left(\left(0,\frac{1}{2}\right]\right)\cup g\left(\left[\frac{1}{2},1\right)\right)=\left(0,(\ell n2)^2\right]}}.$$

B4. Για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει:

$$g(1-x)=\ell n(1-x)\,\ell n(1-(1-x))=\ell n(1-x)\,\ell nx=$$

$$=\ln x\ln(1-x)=g(x)$$

Επομένως για κάθε $x\in(0,\ 1)$ ισχύει :

$$g(1-x)=g(x)\ :(\Sigma)$$

Έτσι είναι:

$$g\left(\frac{3}{5}\right)\overset{(\Sigma)}{=}g\left(1-\frac{3}{5}\right)=g\left(\frac{2}{5}\right).$$

Έχουμε,

$$0<\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}\ \overset{\left(g:\ \text{γνησίως αύξουσα στο}\left(0,\frac{1}{2}\right]\right)}{\Longrightarrow}\ g\left(\frac{1}{3}\right)<g\left(\frac{2}{5}\right)$$

και επειδή,

$$g\left(\frac{2}{5}\right)=g\left(\frac{3}{5}\right),\ \text{έπεται ότι:}$$

$$\boxed{\mathbf{g\left(\frac{1}{3}\right)<g\left(\frac{3}{5}\right)}}.$$

18ο **Θ Ε Μ Α Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Γ1. $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}},\ x>0$.

Είναι

$$f'(x)=\frac{(\ln x)'\sqrt{x}-\ln x\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}\ ,\ x>0\,.$$

Έχουμε:

- $\begin{cases} f'(x)>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\ln x>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x<2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x<\ln\left(e^2\right) \\ x>0 \end{cases}$

  $\Leftrightarrow 0<x<e^2$

- $\begin{cases} f'(x)<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow x>e^2\,.$

- $\begin{cases} f'(x)=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=e^2\,.$

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Από το πρόσημο της $f'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα προκύπτει ότι η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\left(0,e^2\right]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $\left[e^2,+\infty\right)$.

Η f παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** μόνο στο $x_0=e^2$, το οποίο είναι το

$$\boxed{\mathbf{f_{max}=f\left(e^2\right)=\frac{\ln\left(e^2\right)}{\sqrt{e^2}}=\frac{2}{e}}}$$

Είναι

$$f''(x)=\left(\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{2-\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}\right)'=\frac{1}{2}\,\frac{(2-\ln x)'\cdot x^{\frac{3}{2}}-(2-\ln x)\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'}{\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2}=$$

$$=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^{\frac{3}{2}}-(2-\ln x)\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{2x^3}=\frac{x^{\frac{1}{2}}\left[-1-(2-\ln x)\frac{3}{2}\right]}{2x^3}=\frac{3\ln x-8}{4x^{\frac{5}{2}}}\ ,\ x>0\,.$$

Έχουμε:

- $\begin{cases} f''(x) > 0 \Leftrightarrow ...... \Leftrightarrow x > e^{\frac{8}{3}} \\ x > 0 \end{cases}$.

- $\begin{cases} f''(x) < 0 \Leftrightarrow ...... \Leftrightarrow 0 < x < e^{\frac{8}{3}} \\ x > 0 \end{cases}$.

- $\begin{cases} f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{8}{3}} \\ x > 0 \end{cases}$.

x	0		$e^{\frac{8}{3}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$	Σ.Κ.	$\smile$	

Από το πρόσημο της $f''(x)$ που φαίνεται στον πίνακα προκύπτει ότι

η f είναι **κοίλη** στο $\left(0, e^{8/3}\right]$ και **κυρτή** στο $\left[e^{8/3}, +\infty\right)$.

Η f παρουσιάζει **καμπή** στο $x_1 = e^{8/3}$.

Είναι

$$f\left(e^{8/3}\right) = \frac{\ln\left(e^{8/3}\right)}{e^{4/3}} = \frac{\frac{8}{3}}{e^{4/3}} = \frac{8}{3e\sqrt[3]{e}} = \frac{8}{3}e^{-4/3},$$

οπότε το σημείο καμπής της C_f είναι το

$$\boxed{\mathbf{M}\left(e^{\frac{8}{3}}, \frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}\right)}.$$

Γ2. Έχουμε

$$e^2 \le \alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) > f(\beta), \left(f \text{ γν. αύξ } \left[e^2, +\infty\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\ln\alpha}{\sqrt{\alpha}} > \frac{\ln\beta}{\sqrt{\beta}} \Rightarrow \sqrt{\beta}\ln\alpha > \sqrt{\alpha}\ln\beta \Rightarrow \ln\left(\alpha^{\sqrt{\beta}}\right) > \ln\left(\beta^{\sqrt{\alpha}}\right)$$

.

$$\boxed{\overset{(\ln x\gamma.\alpha\acute{\upsilon}\xi)}{\Rightarrow} \boldsymbol{\alpha^{\sqrt{\beta}} > \beta^{\sqrt{\alpha}}}}$$

Γ3. Η f έχει ολικό μέγιστο στο $f_{max} = f\left(e^2\right) = \dfrac{2}{e}$, οπότε για κάθε $x > 0$ ισχύει :

$$f\left(x\right) \le f_{max} \Rightarrow \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \le \frac{2}{e} \Rightarrow e\ln x \le 2\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \ln(x^e) \le \ln\left(e^{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Rightarrow e^{2\sqrt{x}} \ge x^e}}$$

Γ4. Έχουμε:

$$x^2 = 4^{\sqrt{x}},\ x > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(x^2\right) = \ln\left(4^{\sqrt{x}}\right),\ x > 0$$

$$\Leftrightarrow 2\ln x = \sqrt{x}\ln 4,\ x > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\ln 4}{2},\ x > 0$$

$$\Leftrightarrow f\left(x\right) = \frac{\ln 4}{2},\ x > 0$$

Για $x \in \left(0, e^2\right]$ έχουμε:

$$f\left(x\right) = \frac{\ln 4}{2},\ x \in \left(0, e^2\right]$$

$$\Leftrightarrow f\left(x\right) = \frac{\ln 4}{\sqrt{4}},\ x \in \left(0, e^2\right]$$

$$\Leftrightarrow f\left(x\right) = f\left(4\right),\ x \in \left(0, e^2\right]$$

$\Leftrightarrow x = 4$, (αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο $\left(0, e^2\right]$ και $x = 4 \in \left(0, e^2\right]$)

Για $x \in \left(e^2, +\infty\right)$ έχουμε:

$$f\left(x\right) = \frac{\ln 4}{2},\ x \in \left(e^2, +\infty\right)$$

$$\Leftrightarrow f\left(x\right) = \frac{2\ln 4}{4},\ x \in \left(e^2, +\infty\right)$$

$$\Leftrightarrow f\left(x\right) = \frac{\ln\left(16\right)}{\sqrt{16}},\ x \in \left(e^2, +\infty\right)$$

$$\Leftrightarrow f\left(x\right) = f\left(16\right),\ x \in \left(e^2, +\infty\right)$$

$$\Leftrightarrow x = 16,$$

(αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο $\left(e^2, +\infty\right)$ και $x = 16 \in \left(e^2, +\infty\right)$)

Επομένως η εξίσωση $x^2 = 4^{4\sqrt{x}}$, $x > 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(0, +\infty)$, τους αριθμούς

$$\boxed{\mathbf{x_1 = 4}},\ \boxed{\mathbf{x_2 = 16}}.$$

Γ5. Κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

Έτσι η **μόνη πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f είναι η ευθεία **δ:** $x = 0$.

Είναι:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x\right) \overset{((+\infty)(-\infty))}{=} -\infty,$$

οπότε

η ευθεία δ: $\mathbf{x = 0}$ είναι μοναδική κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Πλάγιες – Οριζόντιες ασύμπτωτες.

Επειδή το πεδίο ορισμού της f είναι το $D_f = (0, +\infty)$, αναζητούμε **πλάγια – οριζόντια ασύμπτωτη** μόνο στο $+\infty$.

Είναι:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(\sqrt{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \to +\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty}\frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \in \mathbb{R}.$$

Επομένως η ευθεία **ε:** $y = 0$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

Έτσι η C_f έχει τελικά δύο ασύμπτωτες τις ευθείες

$$\boxed{\mathbf{\delta:\ x = 0,\quad \varepsilon:\ y = 0}}$$

Γ6. Έχουμε:

$$\kappa^{\lambda}\cdot\lambda^{2\sqrt{\kappa}}=e^{\frac{4\lambda\sqrt{\kappa}}{e}}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\kappa^{\lambda}\cdot\lambda^{2\sqrt{\kappa}}\right)=\ln\left(e^{\frac{4\lambda\sqrt{\kappa}}{e}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\kappa^{\lambda}\right)+\ln\left(\lambda^{2\sqrt{\kappa}}\right)=\frac{4\lambda\sqrt{\kappa}}{e}$$

$$\Leftrightarrow \lambda\ln\kappa+2\sqrt{\kappa}\ln\lambda=\frac{4\lambda\sqrt{\kappa}}{e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\kappa}{\sqrt{\kappa}}+\frac{2\ln\lambda}{\lambda}=\frac{4}{e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\kappa}{\sqrt{\kappa}}+\frac{\ln\left(\lambda^2\right)}{\sqrt{\lambda^2}}=\frac{4}{e}$$

$$\Leftrightarrow f(\kappa)+f\left(\lambda^2\right)=\frac{4}{e}\ :(\Sigma).$$

Από το (1^{o}) ερώτημα έχουμε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο στο $x_0=e^2$, το οποίο είναι το $f_{max}=f\left(e^2\right)=\dfrac{2}{e}$,

οπότε για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)\le\dfrac{2}{e}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=e^2$.

Έτσι είναι

$f(\kappa)\le\dfrac{2}{e}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $k=e^2$ και

$f\left(\lambda^2\right)\le\dfrac{2}{e}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\lambda^2=e^2\overset{(\lambda>0)}{\Leftrightarrow}\lambda=e$.

Άρα είναι

$f(\kappa)+f\left(\lambda^2\right)\le\dfrac{4}{e}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $k=e^2$ και $\lambda=e$.

Έτσι για να ισχύει η (Σ) πρέπει και αρκεί να είναι $k=e^2$ και $\lambda=e$.

Επομένως οι ζητούμενες τιμές είναι

$$\boxed{\mathbf{k=e^2,\ \ \lambda=e}}$$

Δ1. Είναι $f(x)e^{f(x)}=ex \quad :(1) \quad (x\geq 0)$.

Από την (1) έχουμε:

$$f(x)=\frac{ex}{e^{f(x)}}, \text{ (αφού } e^{f(x)}>0 \text{ για κάθε } x\geq 0\text{)}.$$

Είναι $f(0)=\dfrac{e\cdot 0}{e^{f(0)}}=0$ και για κάθε $x>0$ είναι $f(x)=\dfrac{ex}{e^{f(x)}}>0$

(αφού $ex>0$ και $e^{f(x)}>0$ για κάθε $x>0$).

Από την (1) για $x=1$ έχουμε:

$$f(1)e^{f(1)}=e \Leftrightarrow g\left(f(1)\right)=g(1), \text{ όπου } g(x)=xe^x,\ x\geq 0.$$

Είναι

$$g'(x)=\left(xe^x\right)'=(x)'e^x+x\left(e^x\right)'=e^x+xe^x=(x+1)e^x>0 \text{ για κάθε } x\geq 0,$$

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και ως γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της είναι και συνάρτηση $1-1$.

Έτσι έχουμε

$$g\left(f(1)\right)=g(1) \overset{(g\ 1-1)}{\Leftrightarrow} f(1)=1.$$

Άρα είναι :

$$\boxed{\mathbf{f(0)=0}},\quad \boxed{\mathbf{f(1)=1}} \text{ και } \boxed{\mathbf{f(x)>0}} \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

Δ2. Από την (1) παραγωγίζοντας τα μέλη της ως προς x έχουμε:

$$\left(f(x)e^{f(x)}\right)'=(ex)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)e^{f(x)}+f(x)e^{f(x)}f'(x)=e$$

$$\Rightarrow f'(x)\left(e^{f(x)}+f(x)e^{f(x)}\right)=e$$

$$\overset{\left(f(x)e^{f(x)}=ex\right)}{\Rightarrow} f'(x)\left(e^{f(x)}+ex\right)=e$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{e}{e^{f(x)}+ex}>0 \text{ για κάθε } x\geq 0,$$

αφού $e^{f(x)}+ex>0$ για κάθε $x\geq 0$.

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[0,+\infty)$.

Από την ισότητα $f'(x)=\dfrac{e}{e^{f(x)}+ex}$ προκύπτει ότι η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f''(x)=\left(\frac{e}{e^{f(x)}+ex}\right)'=-e\frac{\left(e^{f(x)}+ex\right)'}{\left(e^{f(x)}+ex\right)^2}=$$

$$=-e\frac{e^{f(x)}f'(x)+e}{\left(e^{f(x)}+ex\right)^2}<0 \text{ για κάθε } x\geq 0,$$

αφού $e^{f(x)}>0$, $f'(x)>0$, $e^{f(x)}f'(x)+e>0$ και $\left(e^{f(x)}+ex\right)^2>0$ για κάθε $x\geq 0$.

Άρα η f είναι **κοίλη** στο $[0,+\infty)$.

Δ3. Έστω $x\in(0,1)$.

Επειδή η f είναι **παραγωγίσιμη** στο $[0,+\infty)$ έπεται ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ** σε καθένα από τα διαστήματα $[0,x]$ και $[x,1]$,

οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(0,x)$ και $\xi_2\in(x,1)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)-0}{x}=\frac{f(x)}{x} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(x)}{1-x}=\frac{1-f(x)}{1-x}.$$

Επειδή ισχύει $\mathbf{f''(x)<0}$ για κάθε $x\geq 0$ έπεται ότι η f' είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $[0,+\infty)$, οπότε έχουμε:

$$0<\xi_1<x<\xi_2<1\Rightarrow$$

$$\overset{(f'\text{ γν.φθίνουσα})}{\Rightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} > \frac{1-f(x)}{1-x}$$

$$\underset{(1-x>0)}{\overset{(x>0)}{\Rightarrow}} (1-x)f(x) > x(1-f(x))$$

$$\Rightarrow (1-x)f(x) + xf(x) > x$$

$$\Rightarrow f(x) > x$$

Άρα για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει :

$$\boxed{\mathbf{f(x) > x}}.$$

ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ : Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$,ώστε $f(x_0) \le x_0$,τότε θα έχουμε :

$$f(x_0) \le x_0 \overset{(e^x \uparrow)}{\Rightarrow} \begin{cases} e^{f(x_0)} \le e^{x_0} \\ f(x_0) \le x_0 \end{cases} \overset{(\text{θετικά μέλη})}{\Rightarrow} f(x_0)e^{f(x_0)} \le x_0 e^{x_0} \overset{(1)}{\Rightarrow} ex_0 \le x_0 e^{x_0}$$

$$\overset{(x_0>0)}{\Rightarrow} e^{x_0} \ge e^1 \overset{(e^x\uparrow)}{\Rightarrow} x_0 \ge 1$$

ΑΤΟΠΟ , αφού $x_0 \in (0,1)$.

Επομένως ισχύει

$$\boxed{\mathbf{f(x) > x}}, \text{ για κάθε } x \in (0,1).$$

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = f(x+1) - f(x),\ x \ge 0.$$

Είναι

$$\varphi'(x) = f'(x+1)(x+1)' - f'(x) = f'(x+1) - f'(x),\ x \ge 0.$$

Έχουμε:

$$0 \le x < x+1 \overset{(f'\text{ γν.φθίνουσα})}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x+1) - f'(x) < 0 \Rightarrow \varphi'(x) < 0$$

Άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Έτσι έχουμε:

$$0\le\alpha<\beta\overset{(\varphi\ \text{γν.φθίνουσα})}{\Rightarrow}\varphi(\alpha)>\varphi(\beta)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\alpha+1)-f(\alpha)>f(\beta+1)-f(\beta)$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{f(\alpha)+f(\beta+1)<f(\beta)+f(\alpha+1)}}$$

Δ5. Έχουμε:

$$f(x)e^{f(x)}=ex\Rightarrow$$

$$f(x)e^{f(x)}f'(x)=exf'(x)\Rightarrow$$

$$\overset{\left(f(x),\,e^{f(x)},f'(x):\ \text{συνεχείς}\right)}{\Rightarrow}\int_0^1 f(x)e^{f(x)}f'(x)dx=\int_0^1 exf'(x)dx$$

$$\Rightarrow\int_0^1 f(x)\left(e^{f(x)}\right)'dx=\left[exf(x)\right]_0^1-\int_0^1(ex)'f(x)dx$$

$$\Rightarrow\left[f(x)e^{f(x)}\right]_0^1-\int_0^1 f'(x)e^{f(x)}dx=ef(1)-0\cdot f(0)-e\int_0^1 f(x)dx$$

$$\Rightarrow\left(f(1)e^{f(1)}-f(0)e^{f(0)}\right)-\int_0^1\left(e^{f(x)}\right)'dx=ef(1)-e\int_0^1 f(x)dx$$

$$\Rightarrow 1\cdot e^1-0\cdot e^0-\left[e^{f(x)}\right]_0^1=e\cdot 1-e\int_0^1 f(x)dx$$

$$\Rightarrow e-\left(e^{f(1)}-e^{f(0)}\right)=e-e\int_0^1 f(x)dx$$

$$\Rightarrow -\left(e^1-e^0\right)=-e\int_0^1 f(x)dx$$

$$\Rightarrow e\int_0^1 f(x)dx=e-1$$

$$\boxed{\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = 1 - \frac{1}{e}}$$

19ο

19ο

ΘΕΜΑ Β

B1. Το πεδίο ορισμού της f αποτελείται από όλους εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει :

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{2-x} > 0 \\ 2-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x+2)(2-x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2\ ,\ 2)\,.$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το :

$$\boxed{D_f = (-2,\ 2)}.$$

B2. Για οποιαδήποτε $x_1,\ x_2 \in D_f$ με $f(x_1) = f(x_2)$ έχουμε :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \ln\frac{x_1+2}{2-x_1} = \ln\frac{x_2+2}{2-x_2} \overset{(\ln x:1-1)}{\Rightarrow} \frac{x_1+2}{2-x_1} = \frac{x_2+2}{2-x_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1+2)(2-x_2) = (x_2+2)(2-x_1)$$

$$\Rightarrow 2x_1 - x_1x_2 + 4 - 2x_2 = 2x_2 - x_1x_2 + 4 - 2x_1 \Rightarrow 4x_1 = 4x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι **1-1** και συνεπώς **αντιστρέφεται**.

Θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = y\,,\, y \in \mathbb{R}$ και την λύνουμε ως προς x ,αναζητώντας τις τιμές του y για τις οποίες η εξίσωση αυτή έχει λύση στο $D_f = (-2\ ,\ 2)$

Έχουμε :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \ln\frac{x+2}{2-x} \Leftrightarrow e^y = \frac{x+2}{2-x} \Leftrightarrow x + 2 = 2e^y - xe^y \Leftrightarrow x + xe^y = 2e^y - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(1+e^y) = 2(e^y - 1) \Leftrightarrow x = \frac{2(e^y-1)}{1+e^y}$$

Για να ανήκει ο $x = \dfrac{2(e^y-1)}{1+e^y}$, $y \in \mathbb{R}$ στο $D_f = (-2\ ,\ 2)$

πρέπει και αρκεί να ισχύει :

$$-2<\frac{2(e^y-1)}{1+e^y}<2 \Leftrightarrow \begin{cases}-2\left(1+e^y\right)<2(e^y-1)\\ 2(e^y-1)<2\left(1+e^y\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2e^y<2e^y\\ -2<2\end{cases},$$

που ισχύουν για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

Επομένως είναι

$$f\left((-2,2)\right)=\mathbb{R} \text{ και } f^{-1}(y)=\frac{2(e^y-1)}{1+e^y}.$$

Άρα η **αντίστροφη** συνάρτηση της f ορίζεται ως εξής :

$$\boxed{\mathbf{f^{-1}:R\to R \quad με \quad f^{-1}(x)=\frac{2(e^x-1)}{1+e^x}}}$$

B3. Για κάθε $x\in D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$, ισχύει $-x\in D_{f^{-1}}$ και

$$f^{-1}(-x)=\frac{2(e^{-x}-1)}{1+e^{-x}}=\frac{2(\frac{1}{e^x}-1)}{1+\frac{1}{e^x}}=\frac{2\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{e^x+1}{e^x}}=\frac{2(1-e^x)}{e^x+1}=-\frac{2(e^x-1)}{e^x+1}=-f^{-1}(x)$$

Άρα η f^{-1} είναι **περιττή**.

B4. Είναι

$$D_{f^{-1}\circ g}=\left\{x\in D_g \,/\, g(x)\in D_{f^{-1}}\right\}=\left\{x>0\,/\,-\ln x\in\mathbb{R}\right\}=\left(0,\ +\infty\right) \text{ και}$$

$$\left(f^{-1}\circ g\right)(x)=f^{-1}\left(g(x)\right)=f^{-1}(-\ln x)\overset{(f^{-1}:\ \text{περιττή})}{=}-f^{-1}(\ln x)=-\frac{2(e^{\ln x}-1)}{1+e^{\ln x}}=\frac{2(1-x)}{1+x}$$

Άρα

$$\left(f^{-1}\circ g\right)(x)=\frac{2(1-x)}{1+x},\quad x>0.$$

Η γραφική παράσταση της $f^{-1}\circ g$ βρίσκεται **κάτω** από τον άξονα x'x για εκείνες τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει :

$$\begin{cases}\left(f^{-1}\circ g\right)(x)<0\\ x\in D_{f^{-1}\circ g}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2(1-x)}{1+x}<0\\ x>0\end{cases}\overset{(x>0\Rightarrow 1+x>0)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}2(1-x)<0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x>1$$

Άρα

η $C_{f^{-1}\circ g}$ βρίσκεται **κάτω** από τον άξονα x'x στο διάστημα $\left(1,+\infty\right)$.

19ο **ΘΕΜΑ Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Γ1. Επειδή ισχύει $f(x) \geq f(-1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

έπεται ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ ολικό ελάχιστο.

Επειδή η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο $x_0 = -1$ του $\mathbb{R}$ τοπικό ακρότατο

έπεται, σύμφωνα με το **Θ.Fermat ,** ότι ισχύει :

$$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow \kappa - e^{-(-1)^3} = 0 \Leftrightarrow \kappa - e = 0$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \kappa = e}$$

Γ2. Είναι

$$f'(x) = \kappa - e^{-x^3} = e - e^{-x^3}.$$

Έχουμε:

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e - e^{-x^3} > 0 \Leftrightarrow e^{-x^3} < e^1 \overset{(e^x \uparrow \mathbb{R})}{\Leftrightarrow} -x^3 < 1 \Leftrightarrow$

  $$\Leftrightarrow x^3 > -1 \Leftrightarrow x^3 > (-1)^3 \Leftrightarrow x > -1$$

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

Από το πρόσημο της $f'(x)$ που φαίνεται στο πίνακα προκύπτει ότι η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty, -1]$ και **γνησίως αύξουσα** στο $[-1, +\infty)$.

Είναι

$$f''(x) = \left(e - e^{-x^3}\right)' = 3x^2 e^{-x^3} \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$, οπότε η f' είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$. Επομένως η f είναι **κυρτή** στο $\mathbb{R}$.

Είναι

$$f'(0) = e - e^{-0^3} = e - 1,$$

οπότε η εξίσωση της **εφαπτομένης** (ε) της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$ είναι

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-f(0)=(e-1)x\Leftrightarrow y=(e-1)x+f(0)\ .$$

Επειδή η f είναι **κυρτή** στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι η C_f βρίσκεται **πάνω** από την **εφαπτομένη (ε)** σ' όλο το $\mathbb{R}$ με **εξαίρεση** το **κοινό** σημείο επαφής τους $M(0,f(0))$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{\mathbf{f(x)\geq(e-1)x+f(0)}}\ \mathbf{:(1)}$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $x=0$.

Γ3. Επειδή η f είναι **παραγωγίσιμη** στο $\mathbb{R}$ προκύπτει ότι η f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του **Θ.Μ.Τ** στο $[x,x+1]$, $x\in\mathbb{R}$,

οπότε υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow f'(\xi)=f(x+1)-f(x)\ \mathbf{:(2)}.$$

Έχουμε:

$$x<\xi<x+1\Leftrightarrow f'(x)<f'(\xi)<f'(x+1),\ (f'\ \gamma.\alpha\acute{\upsilon}\xi\ \mathbb{R})$$

$$\boxed{\overset{(2)}{\Rightarrow}\mathbf{f'(x)<f(x+1)-f(x)<f'(x+1)}}\quad \mathbf{(3)}\ .$$

Γ4. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e-e^{-x^3}\right)=e-0=e$$

$$\left(\lim_{x\to+\infty}e^{-x^3}\ \underset{\left(\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3)=-\infty\right)}{\overset{(u=-x^3)}{=}}\ \lim_{u\to-\infty}e^u=0\right)\quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x+1)\ \overset{\left(\substack{\omega=x+1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty}\right)}{=}\ \lim_{\omega\to+\infty}f'(\omega)=e\,,$$

οπότε, λόγω της **(3)**, προκύπτει ότι **(κριτήριο παρεμβολής)**

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\mathbf{\left(f(x+1)-f(x)\right)=e}}$$

Γ5. Από το **(2)** ερώτημα έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x)\geq(e-1)x+f(0)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

Έτσι ισχύουν:

- $$f(\alpha+1) \geq (e-1)(\alpha+1)+f(0)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν

$$\alpha+1=0 \Leftrightarrow \alpha=-1 .$$

- $$f(\beta-1) \geq (e-1)(\beta-1)+f(0)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν

$$\beta-1=0 \Leftrightarrow \beta=1 .$$

Έτσι ισχύει :

$$f(\alpha+1)+f(\beta-1) \geq (e-1)(\alpha+1)+f(0)+(e-1)(\beta-1)+f(0)$$
$$\Leftrightarrow f(\alpha+1)+f(\beta-1) \geq (e-1)(\alpha+\beta)+2f(0)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο αν

$$\alpha=-1 \text{ και } \beta=1 .$$

Επομένως για να ισχύει

$$f(\alpha+1)+f(\beta-1)=(e-1)(\alpha+\beta)+2f(0)$$

πρέπει και αρκεί να είναι

$$\alpha=-1 \text{ και } \beta=1 .$$

Άρα

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha=-1,\ \beta=1}}$$

είναι οι ζητούμενες τιμές.

19ο **Θ Ε Μ Α Δ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Δ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^2(x)=x^2(2f(x)+1)$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)-2x^2f(x)+x^4=x^4+x^2$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)-x^2\right)^2=x^4+x^2$$

$$\Leftrightarrow \left|f(x)-x^2\right|=|x|\sqrt{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow |g(x)|=|x|\sqrt{x^2+1} \quad :(1),$$

όπου $g(x)=f(x)-x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Είναι

$$|g(0)|=|0|\sqrt{0^2+1}=0 \Leftrightarrow g(0)=0 \Leftrightarrow f(0)-0^2=0 \Leftrightarrow f(0)=0.$$

Για κάθε $x \neq 0$ είναι:

$$|g(x)|=|x|\sqrt{x^2+1}>0 \Rightarrow |g(x)|>0 \Rightarrow g(x)\neq 0.$$

- Επειδή η g είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ και είναι $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$, έπεται ότι η g διατηρεί **σταθερό πρόσημο** στο $(-\infty,0)$ και επειδή είναι $g(-1)=f(-1)-(-1)^2=f(-1)-1<0$ (αφού $f(-1)<1$) έπεται ότι είναι $g(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

  Έτσι από την (1) προκύπτει ότι για κάθε $x\in(-\infty,0)$ είναι:

$$-g(x)=-x\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow g(x)=x\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)-x^2=x\sqrt{x^2+1}$$
$$\Leftrightarrow f(x)=x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

- Επειδή η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και είναι $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, έπεται ότι η g διατηρεί **σταθερό πρόσημο** στο $(0,+\infty)$ και επειδή είναι $g(1)=f(1)-1^2=f(1)-1>0$ (αφού $f(1)>1$) συμπεραίνουμε ότι είναι

$$g(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

  Έτσι από την (1) προκύπτει ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$g(x)=x\sqrt{x^2+1}$$
$$\Leftrightarrow f(x)-x^2=x\sqrt{x^2+1}$$
$$\Leftrightarrow f(x)=x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$f(x)=x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \text{ για κάθε } x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty) \text{ και } f(0)=0.$$

Επομένως είναι

$$\boxed{\mathbf{f(x)=x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Είναι,

$$f'(x)=(x)'\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'$$

$$=x+\sqrt{x^2+1}+x\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'\right)$$

$$=x+\sqrt{x^2+1}+x\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=x+\sqrt{x^2+1}+x\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}+x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$x^2+1>x^2\Rightarrow\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}$$

$$\Rightarrow|x|<\sqrt{x^2+1}$$

$$\Rightarrow-\sqrt{x^2+1}<x<\sqrt{x^2+1}$$

$$\Rightarrow x+\sqrt{x^2+1}>0$$

Έτσι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$f'(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}>0,$$

οπότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Για τις **ασύμπτωτες** της C_f έχουμε :

- Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \neq \pm\infty$$

Επομένως η C_f **δεν** έχει **κατακόρυφη** ασύμπτωτη.

- Είναι $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = +\infty$,

οπότε η C_f **δεν** έχει **ασύμπτωτη** στο **$+\infty$**.

- Είναι:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left[x\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$\overset{(x<0)}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(x^2+1-x^2\right)}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1} = \frac{1}{-\sqrt{1+0}-1} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R},$$

οπότε η C_f έχει στο $-\infty$ **ασύμπτωτη** την ευθεία με εξίσωση

$$\boxed{(\varepsilon): y = -\frac{1}{2}}$$ (**οριζόντια** ασύμπτωτη)

Δ4. Έχουμε

$$4x^4 + 2x^3\sqrt{4x^2+1} = 1 + \sqrt{x^2+1} : (E).$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $x_1 = 0$ δεν αποτελεί λύση της εξίσωσης (E).

Με $x \neq 0$ έχουμε:

$$(E) \overset{(:x^2)}{\Leftrightarrow} 4x^2 + 2x\sqrt{4x^2+1} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x\left(2x+\sqrt{(2x)^2+1}\right)=\frac{1}{|x|}\left(\frac{1}{|x|}+\sqrt{\left(\frac{1}{|x|}\right)^2+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(2x)=f\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{1}{|x|} \text{ (η } f\text{, ως γνησίως μονότονη στο } \mathbb{R}\text{, είναι } 1-1\text{)}$$

$$\Leftrightarrow 2x|x|=1\ (>0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 2x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\frac{1}{2} \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα η εξίσωση (E) έχει **μία μονο λύση**, τον αριθμό $\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Δ5. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_0^1 |f(x)|dx .$$

Είναι όμως

$$f(x)=x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\geq 0 \text{ για κάθε } x\in[0,1],$$

οπότε:

$$\mathbf{E}=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=\int_0^1\left(x^2+x\sqrt{x^2+1}\right)dx$$

$$=\int_0^1 x^2dx+\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)'dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}(1-0)+\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

$$\boxed{\mathbf{=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ \text{τ.μ.}}}$$

20ο

20ο | ΘΕΜΑ Β | ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

B1. Έχουμε:

$$2f(1)+f(5)<2f(2)+f(3)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ f(5)-f(3)<2f(2)-2f(1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{f(5)-f(3)}{2}<f(2)-f(1)\quad :(1).$$

Επειδή η f είναι δύο φορές **παραγωγίσιμη** στο R, έπεται ότι, ικανοποιεί (η f) τις προϋποθέσεις του **θεωρήματος μέσης τιμής** σε καθένα από τα διαστήματα $[1,\ 2]$ και $[3,\ 5]$,

οπότε,

υπάρχουν, $\xi_1\in(1,\ 2)$ και $\xi_2\in(3,\ 5)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1),$$
$$f'(\xi_2)=\frac{f(5)-f(3)}{5-3}=\frac{f(5)-f(3)}{2}.$$

Από την σχέση (1) λαμβάνουμε: $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$ και είναι $\xi_1<\xi_2$.

Επομένως υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in R$ με $\xi_1<\xi_2$ και

$$\boxed{f'(\xi_1)>f'(\xi_2)}.$$

B2. Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, έπεται ότι,

η f' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **θεωρήματος μέσης τιμής** στο $[\xi_1,\ \xi_2]$,

οπότε,

υπάρχει $x_0\in(\xi_1,\ \xi_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f''(x_0)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}.$$

Έχουμε όμως,

$$\begin{cases} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \\ \xi_2 > \xi_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(\xi_2) - f'(\xi_1) < 0 \\ \xi_2 - \xi_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0 \Rightarrow f''(x_0) < 0.$$

Επειδή,

η f'' είναι συνεχής στο R

και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$,

έπεται ότι,

η f'' διατηρεί **πρόσημο** στο R

και επειδή $f''(x_0) < 0$, συμπεραίνουμε ότι,

$f''(x) < 0$ για κάθε $x \in R$,

άρα,

η f είναι **κοίλη** στο R.

B3. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\varphi(x) = f(x) + f(\alpha + \beta - x) - 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right), \ x \in R.$$

Είναι

$$\varphi'(x) = f'(x) + f'(\alpha + \beta - x)(\alpha + \beta - x)' =$$

$$= f'(x) - f'(\alpha + \beta - x), \ x \in R.$$

Επειδή η f είναι **κοίλη** στο R, έπεται ότι η f' είναι **γνησίως φθίνουσα** στο R.

Έχουμε:

$$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(\alpha + \beta - x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) > f'(\alpha + \beta - x) \overset{(f' \text{ γνήσίως φθίνουσα στο } \mathbb{R})}{\Leftrightarrow} x < \alpha + \beta - x \Leftrightarrow x < \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

$$\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(\alpha + \beta - x) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) < f'(\alpha + \beta - x) \overset{(f' \text{ γνήσίως φθίνουσα στο } \mathbb{R})}{\Leftrightarrow} x > \alpha + \beta - x \Leftrightarrow x > \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(\alpha + \beta - x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ f'(x)=f'(\alpha+\beta-x)\overset{(f'\ «1-1»)}{\Leftrightarrow}\ x=\alpha+\beta-x\Leftrightarrow x=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Από το πρόσημο της φ' προκύπτει ότι η φ:

- είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\left(-\infty,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$,
- είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\ +\infty\right)$,
- παρουσιάζει στο $\mathbf{x_0=\frac{\alpha+\beta}{2}}$ **ολικό μέγιστο**,

το οποίο είναι:

$$\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+f\left(\alpha+\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+f\left(\frac{2\alpha+2\beta-\alpha-\beta}{2}\right)-2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0.$$

Επομένως, για κάθε $x\in R$ και $\alpha,\beta\in R$, ισχύει:

$$\varphi(x)\le\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow f(x)+f(\alpha+\beta-x)-2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \boxed{\mathbf{f(x)+f(\alpha+\beta-x)\le 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}}$$

B4. Έστω (ε) ευθεία του επιπέδου.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. Αν $(\varepsilon)//y'y$, τότε η (ε) θα έχει με την C_f ακριβώς ένα κοινό σημείο, αφού η f είναι συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το R.

2. Έστω ότι η (ε) δεν είναι παράλληλη με τον άξονα $y'y$ και $\lambda\in R$ ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε).

Υποθέτουμε ότι η C_f έχει με την (ε) τρία τουλάχιστον κοινά σημεία,

$$A(x_1,\ f(x_1)),\ \ B(x_2,\ f(x_2)),\ \Gamma(x_3,\ f(x_3))\ \text{με}\ x_1<x_2<x_3,$$

τότε θα ισχύει,

$$\lambda_{AB}=\lambda_{B\Gamma}=\lambda \Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=\lambda .$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο R, ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ** σε καθένα από τα διαστήματα $[x_1,\ x_2]$, $[x_2,\ x_3]$,

οπότε υπάρχουν $\theta_1 \in (x_1,\ x_2)$, $\theta_2 \in (x_2,\ x_3)$ ώστε:

$$f'(\theta_1)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\lambda \quad \text{και} \quad f'(\theta_2)=\frac{f(x_3)-f(x_3)}{x_3-x_2}=\lambda .$$

Έχουμε όμως,

$$x_1<\theta_1<x_2<\theta_2<x_3 \Rightarrow \theta_1<\theta_2 \overset{(f' \text{ γνησίως φθίνουσα στο } R)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f'(\theta_1)>f'(\theta_2) \Rightarrow \lambda>\lambda \text{, άτοπο.}$$

Επομένως η (ε) έχει το **πολύ δυο κοινά** σημεία με την C_f.

Άρα κάθε ευθεία του επιπέδου έχει με την C_f, το πολύ δυο κοινά σημεία.

20ο **ΘΕΜΑ Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Γ1. Είναι

$$f'(x)=\frac{(e^x)'(x^2+x+2)-e^x(x^2+x+2)'}{(x^2+x+2)^2}=$$

$$=\frac{e^x(x^2+x+2)-e^x(2x+1)}{(x^2+x+2)^2}=\frac{e^x(x^2-x+1)}{(x^2+x+2)^2}>0 ,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

Τα τριώνυμα $\varphi_1(x)=x^2-x+1$, $\varphi_2(x)=x^2+x+2$ έχουν αρνητικές διακρίνουσες

$$(\Delta_1=-3 \ ,\ \Delta_2=-7)$$

και οι συντελεστές του x^2 είναι θετικοί αριθμοί

$$(\alpha_1=1>0 \text{ και } \alpha_2=1>0),$$

οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$x^2-x+1>0 \text{ και } x^2+x+2>0 .$$

Γ2. Έχουμε:

$$e^{x^2-x} < \frac{x^4+x^2+2}{x^2+x+2} \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{e^x} < \frac{x^4+x^2+2}{x^2+x+2} \Leftrightarrow$$

$$\overset{\left(e^x>0\,,\,x^4+x^2+2>0\right)}{\Leftrightarrow} \frac{e^{x^2}}{\left(x^2\right)^2+x^2+2} < \frac{e^x}{x^2+x+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(x^2\right) < f\left(x\right) \overset{\left(f\uparrow\mathbb{R}\right)}{\Leftrightarrow} x^2 < x \Leftrightarrow x\left(x-1\right) < 0$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \mathbf{x \in (0,1)}}$$

Γ3. i. Η f , ως γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, είναι συνάρτηση ***1-1*** .
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$e^{g'(x)-2x} = \frac{\left(g'(x)\right)^2+g'(x)+2}{4x^2+2x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{g'(x)}}{e^{2x}} = \frac{\left(g'(x)\right)^2+g'(x)+2}{4x^2+2x+2} \Leftrightarrow$$

$$\underset{\left(\left(g'(x)\right)^2+g'(x)+2>0\right)}{\overset{\left(e^{2x}>0\right)}{\Leftrightarrow}} \frac{e^{g'(x)}}{\left(g'(x)\right)^2+g'(x)+2} = \frac{e^{2x}}{(2x)^2+2x+2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(g'(x)\right) = f\left(2x\right) \Leftrightarrow g'(x) = 2x$$

$$\Leftrightarrow \left(g(x)\right)' = \left(x^2\right)' \Leftrightarrow g(x) = x^2 + c\,,\,\left(c\in\mathbb{R}\right)$$

Είναι

$$g(0)=1 \Leftrightarrow 0^2+c=1 \Leftrightarrow c=1.$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{g(x)=x^2+1,\quad x\in\mathbb{R}}}$$

ii. Είναι

$g(x)=x^2+1$ και $g'(x)=2x$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης **(ε)** την C_g στο σημείο της $M\left(x_0,g\left(x_0\right)\right)$ είναι

$y-g\left(x_0\right)=g'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right) \Leftrightarrow y-\left(x_0{}^2+1\right)=2x_0\cdot\left(x-x_0\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=2x_0\cdot x+1-x_0{}^2.$

και ο συντελεστής διεύθυνσης της **(ε) είναι** $\lambda_\varepsilon=2x_0$ **.**

Για να διέρχεται η ευθεία **(ε)** από το σημείο $N(\alpha,\beta)$ πρέπει και αρκεί να ισχύει :

$\beta=(2x_0)\cdot\alpha+1-x_0{}^2 \Leftrightarrow x_0{}^2-2\alpha x_0+\beta-1=0:(1)$

Έτσι για να διέρχονται από το σημείο $N(\alpha,\beta)$ δύο κάθετες εφαπτόμενες

(ε_1) και (ε_2) της C_g πρέπει και αρκεί η εξίσωση

$x^2-2\alpha x+\beta-1=0:(E)$ να έχει δύο διαφορετικές λύσεις $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (οι διαφορετικές λύσεις $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ αντιστοιχούν σε διαφορετικές εφαπτόμενες της C_g, αφού η $g'(x)=2x$ είναι 1-1) και να ισχύει $\lambda_{\varepsilon_1}.\lambda_{\varepsilon_2}=-1$,δηλαδή να ισχύουν :

$$\begin{cases}\Delta>0\\ \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(-2\alpha)^2-4(\beta-1)>0\\ (2x_1)(2x_2)=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4\alpha^2>4(\beta-1)\\ x_1x_2=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

$$\overset{(\text{Vieta})}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\alpha^2>\beta-1\\ \dfrac{\beta-1}{1}=-\dfrac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=\dfrac{3}{4}\\ \alpha^2>\dfrac{3}{4}-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\beta=\dfrac{3}{4}\\ \alpha^2>-\dfrac{1}{4}\ \text{(ισχύει για κάθε } \alpha\in\mathbb{R})\end{cases} \Leftrightarrow \beta=\frac{3}{4}$$

Επομένως τα σημεία του επιπέδου από τα οποία άγονται κάθετες εφαπτόμενες της C_g είναι όλα τα σημεία της ευθείας $(\delta): y=\dfrac{3}{4}$ και μόνο αυτά.

20ο **Θ Ε Μ Α Δ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Δ1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x)f(-x)=f(x)f'(-x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)f(-x)-f(x)f'(-x)=0$$

$$\Leftrightarrow (f(x))' f(-x) + f(x)(f(-x))' = 0$$

$$\Leftrightarrow (f(x)f(-x))' = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x)f(-x) = c.$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$f(0)f(-0) = c \Leftrightarrow f^2(0) = c \Leftrightarrow c = f^2(0) = 1^2 = 1.$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{\mathbf{f(x)f(-x) = 1 \quad :(1)}}.$$

Δ2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x)f(-x) = 1 \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$.

Η f, ως **παραγωγίσιμη**, είναι και **συνεχής** στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \neq 0$, οπότε η f διατηρεί στο $\mathbb{R}$ **σταθερό πρόσημο** και επειδή είναι $f(0) = 1 > 0$ έπεται ότι ισχύει

$$\boxed{\mathbf{f(x) > 0}} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ3. Έχουμε

$$xf'(x) + yf'(y) > xf'(y) + yf'(x) \quad :(2) \quad (x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y).$$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Λόγω της (2) έχουμε:

$$x_1 f'(x_1) + x_2 f'(x_2) > x_1 f'(x_2) + x_2 f'(x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 f'(x_1) + x_2 f'(x_2) - x_1 f'(x_2) - x_2 f'(x_1) > 0$$

$$\Rightarrow x_1 (f'(x_1) - f'(x_2)) - x_2 (f'(x_1) - f'(x_2)) > 0$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(f'(x_1) - f'(x_2)) > 0 \quad :(3)$$

Είναι όμως $x_1 < x_2$, οπότε έχουμε

$$x_1 - x_2 < 0 \quad :(4).$$

Από την (3) και λόγω της (4), προκύπτει ότι

$$f'(x_1)-f'(x_2)<0\text{, οπότε } f'(x_1)<f'(x_2).$$

Έτσι, για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f'(x_1)<f'(x_2)$.

Επομένως η f' είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

Επειδή η f' είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι η f είναι **κυρτή** στο $\mathbb{R}$.

Δ4. Για το ολοκλήρωμα $I=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{1+f(x)}dx$,

θέτουμε $u=-x$, οπότε είναι $x=-u$ και $dx=(-1)du$.

- Για $x=-\alpha$ έχουμε $u=\alpha$
- Για $x=\alpha$ έχουμε $u=-\alpha$.

Άρα

$$I=\int_{\alpha}^{-\alpha}\frac{1}{1+f(-u)}(-1)du=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{1+f(-u)}du=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{1+f(-x)}dx.$$

Είναι όμως $f(x)f(-x)=1\Rightarrow f(-x)=\frac{1}{f(x)}$, οπότε:

$$I=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{1+\frac{1}{f(x)}}dx=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)}{f(x)+1}dx.$$

Άρα

$$I=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{1+f(x)}dx=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)}{1+f(x)}dx.$$

Είναι:

$$2I=I+I=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{1+f(x)}dx+\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)}{1+f(x)}dx=$$

$$=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\frac{1}{1+f(x)}+\frac{f(x)}{1+f(x)}\right)dx$$

$$=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\frac{1+f(x)}{1+f(x)}\right)dx$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} 1dx = [x]_{-\alpha}^{\alpha} = \alpha - (-\alpha) = 2\alpha,$$

οπότε $2I = 2\alpha \Leftrightarrow I = \alpha$.

Επομένως είναι

$$\boxed{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{1+f(x)}dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{1+f(x)}dx = \alpha}$$

Δ5. Η συνάρτηση $\varphi(t) = \dfrac{f(t)-1}{t}$, $t > 0$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, οπότε

η $G(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)-1}{t}dt$ είναι παράγουσα της $\varphi(x) = \dfrac{e^{f(x)}-1}{x}$ στο $(0,+\infty)$.

Επομένως η $G(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$G'(x) = \frac{f(x)-1}{x},\ x > 0 .$$

Η συνάρτηση $G'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$G''(x) = \left(\frac{f(x)-1}{x}\right)' =$$

$$= \frac{(f(x)-1)'x - (f(x)-1)(x)'}{x^2}$$

$$= \frac{xf'(x) - (f(x)-1)}{x^2},\ x > 0$$

Για $x > 0$ η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ** στο $[0,x]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (0,x)$ με

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)-1}{x} \Rightarrow f(x)-1 = xf'(\xi).$$

Έτσι έχουμε

$$G''(x)=\frac{xf'(x)-xf'(\xi)}{x^2}=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x}.$$

Έχουμε:

$$0<\xi<x \overset{(f'\ \text{γν.αύξουσα})}{\Rightarrow} f'(\xi)<f'(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)-f'(\xi)>0$$

$$\overset{(x>0)}{\Rightarrow} \frac{f'(x)-f'(\xi)}{x}>0$$

$$\Rightarrow G''(x)>0.$$

Άρα για κάθε $x>0$ είναι $G''(x)>0$, οπότε η G είναι **κυρτή** στο $(0,+\infty)$.

Δ6. Είναι

$$G(1)=\int_1^1\frac{f(t)-1}{t}dt=0 \text{ και } G'(1)=\frac{f(1)-1}{1}=f(1)-1.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_G στο σημείο της $M(1,G(1))$ είναι:

$$y-G(1)=G'(1)(x-1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y-0=(f(1)-1)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow y=(f(1)-1)(x-1).$$

Επειδή η G είναι **κυρτή** στο $(0,+\infty)$ έπεται ότι η C_G βρίσκεται ***πάνω*** από την εφαπτομένη της ευθεία (ε) σ'όλο το $(0,+\infty)$ με **εξαίρεση** το κοινό σημείο επαφής $M(1,G(1))$.

Επομένως για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$G(x)\ge(f(1)-1)(x-1)\Rightarrow\int_1^x\frac{f(t)-1}{t}dx\ge(f(1)-1)(x-1)\ :(\Sigma_1)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Από τη (Σ_1) θέτοντας όπου x το x^2 έχουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$\int_1^{x^2}\frac{f(t)-1}{t}dx \ge (f(1)-1)(x^2-1) \quad :(\Sigma_2)$$

Από (Σ_1) και (Σ_2) με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$\boxed{\int_1^{x}\frac{f(t)-1}{t}dx+\int_1^{x^2}\frac{f(t)-1}{t}dx \ge (f(1)-1)(x^2+x-2)}$$

21ο

21ο **Θ Ε Μ Α Β** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

B1. Είναι,

$$f'(x)=\left(2x-\ln(e^x+1)\right)'=$$

$$=2-\frac{1}{e^x+1}(e^x+1)'=2-\frac{e^x}{e^x+1}=$$

$$=\frac{2e^x+2-e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+2}{e^x+1}>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

οπότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

- Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-\ln(e^x+1)\right)\overset{((-\infty)-0)}{=}-\infty$,

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln(e^x+1)\right)\underset{\left(\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1)=1\right)}{\overset{(u=e^x+1)}{=}}\lim\limits_{u\to1}(\ln u)=\ln1=0$.

- Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\ln(e^x+1)\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\ln\left[e^x(1+e^{-x})\right]\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\ln(e^x)-\ln(1+e^{-x})\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-x-\ln(1+e^{-x})\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln(1+e^{-x})\right)\overset{((+\infty)-0)}{=}+\infty,$$

αφού $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+e^{-x}\right)\right) \underset{\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+e^{-x}\right)=1\right)}{\overset{\left(w=1+e^{-x}\right)}{=}} \lim_{w\to1}(\ln w) = \ln 1 = 0$.

Επειδή η f είναι **συνεχής** και **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι

$$\boxed{\mathbf{f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}}}.$$

B2. Είναι

$$f(0)=2\cdot0-\ln\left(e^0+1\right)=-\ln2<0 \text{ και}$$

$$f(1)=2\cdot1-\ln\left(e^1+1\right)=2-\ln(e+1)=\ln e^2-\ln(e+1)=\ln\left(\frac{e^2}{e+1}\right)>0$$

(αφού $e^2=e\cdot e>2e=e+e>e+1 \Rightarrow e^2>e+1 \Rightarrow$

$\frac{e^2}{e+1}>1 \overset{\left(\substack{\ln x:\\ \text{γν.αύξουσα}}\right)}{\Rightarrow} \ln\left(\frac{e^2}{e+1}\right)>\ln1 \Rightarrow \ln\left(\frac{e^2}{e+1}\right)>0$).

Οπότε

$$f(0)f(1)<0.$$

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ισχύει $f(0)f(1)<0$,

οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano**

υπάρχει $x_0\in(0,1)$, ώστε

$$\mathbf{f(x_0)=0}.$$

Το x_0 είναι **μοναδικό** στο $\mathbb{R}$, αφού η f είναι **γνησίως μονότονη** στο $\mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει **μοναδική** ρίζα x_0 στο $\mathbb{R}$, η οποία μάλιστα ανήκει στο διάστημα $\mathbf{(0,1)}$.

B3. i. Από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$|g(x)-1|\le(f(x))^2 \quad :(1).$$

Από την (1) για $x=x_0$ έχουμε

$$|g(x_0)-1|\le(f(x_0))^2 \Rightarrow |g(x_0)-1|\le0^2=0.$$

Είναι όμως και

$$|g(x_0)-1|\ge0. \text{ Οπότε } |g(x_0)-1|=0 \Rightarrow g(x_0)-1=0 \Rightarrow \boxed{g(x_0)=1}.$$

Από την (1) και επειδή είναι $g(x_0)=1$, έχουμε ότι για κάθε $x \neq x_0$ ισχύει:

$$|g(x)-g(x_0)| \leq (f(x))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|g(x)-g(x_0)|}{|x-x_0|} \leq \frac{(f(x))^2}{|x-x_0|}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right| \leq \frac{(f(x))^2}{|x-x_0|}$$

$$\Rightarrow -\frac{(f(x))^2}{|x-x_0|} \leq \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{(f(x))^2}{|x-x_0|} \quad :(2).$$

Είναι,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f(x))^2}{|x-x_0|} = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{(f(x))^2}{|x-x_0|^2}|x-x_0|\right) =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(\left(\frac{f(x)}{x-x_0}\right)^2 |x-x_0|\right)$$

$$\overset{(f(x_0)=0)}{=} \lim_{x\to x_0}\left(\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)^2 |x-x_0|\right)$$

$$= f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

και

$$\lim_{x\to x_0}\left(-\frac{(f(x))^2}{|x-x_0|}\right) = -\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x))^2}{|x-x_0|} = -0 = 0$$

,

οπότε λόγω της (2) και του **κριτηρίου παρεμβολής**, προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = 0.$$

Επομένως η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0, με $g'(x_0)=0$.

Επειδή ισχύει $g(x_0)=1$ και $g'(x_0)=0$ έπεται ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο της $M(x_0,g(x_0))$ είναι:

$$y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-1=0\cdot(x-x_0)\Leftrightarrow y=1.$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon): y=1$ είναι εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $M(x_0,1)$.

ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει :

$$1<f'(x)=\frac{e^x+2}{e^x+1}<2.$$

Πράγματι

$$1<\frac{e^x+2}{e^x+1}<2\Leftrightarrow e^x+1<e^x+2<2e^x+2\Leftrightarrow 1<2<e^x+2,$$

που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $h(x)=f(f(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x)=f'(f(x))f'(x).$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν:

$$1<f'(x)<2 \text{ και } 1<f'(f(x))<2,$$

οπότε, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$1<f'(f(x))f'(x)<4\Rightarrow \boxed{1<h'(x)<4}$$

Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$. Η συνάρτηση $h(x)=f(f(x))$, ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **θεωρήματος μέσης τιμής** στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με:

$$h'(\xi)=\frac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}\Rightarrow\frac{f(f(\beta))-f(f(\alpha))}{\beta-\alpha}=h'(\xi)\quad:(3).$$

Είναι όμως

$$1<h'(\xi)<4\overset{(3)}{\Rightarrow}1<\frac{f(f(\beta))-f(f(\alpha))}{\beta-\alpha}<4$$

$$\boxed{\overset{(\beta-\alpha>0)}{\Rightarrow}\ \boldsymbol{\beta-\alpha<f(f(\beta))-f(f(\alpha))<4(\beta-\alpha)}}$$

Επειδή η ευθεία $\varepsilon_1 : y = 2x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και η ευθεία $\varepsilon_2 : y = -3x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ έπεται ότι ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 2, \quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - 2x\right) = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -3 \text{ και } \lim_{x\to-\infty}\left(f(x) + 3x\right) = 0.$$

Επειδή η ευθεία $\varepsilon_3 : y = 1$ εφάπτεται τη C_f στο σημείο $M(0,1)$, ισχύουν:

$$f(0) = 1 \text{ και } f'(0) = 0\left(= \lambda_{\varepsilon_3}\right).$$

Γ1. Για κάθε $x \neq 0$ είναι

$$f(x) = \frac{f(x)}{x}\cdot x,$$

οπότε:

$$\boxed{L_1 = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\cdot x\right) \overset{((-3)(-\infty))}{=} +\infty}$$

$$\left(\text{αφού } \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -3 < 0 \text{ και } \lim_{x\to-\infty} x = -\infty\right)$$

και

$$\boxed{L_2 = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\cdot x\right) \overset{(2\cdot(+\infty))}{=} +\infty}$$

$$\left(\text{αφού } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 2 > 0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty} x = +\infty\right)$$

Γ2. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$x > 0 \overset{(f'\uparrow\mathbb{R})}{\Rightarrow} f'(x) > f'(0) \overset{(f'(0)=0)}{\Rightarrow} f'(x) > 0$$

$$x < 0 \overset{(f'\uparrow\mathbb{R})}{\Rightarrow} f'(x) < f'(0) \overset{(f'(0)=0)}{\Rightarrow} f'(x) < 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

Από το πρόσημο της $f'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα προκύπτει ότι η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty,0]$ και **γνησίως αύξουσα** στο $[0,+\infty)$, οπότε η f παρουσιάζει στο $x_0=0$ **ολικό ελάχιστο**, το οποίο είναι το

$$\boxed{\min f(x)=f(0)=1}$$

Γ3. Επειδή η f είναι **συνεχής** και **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty,0]$ έπεται ότι

$$f\left((-\infty,0]\right)=\left[f(0),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=[1,+\infty).$$

Επειδή η f είναι **συνεχής** και **γνησίως αύξουσα** στο $[0,+\infty)$ έπεται ότι

$$f\left([0,+\infty)\right)=\left[f(0),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=[1,+\infty)$$

Επομένως το **σύνολο τιμών** της f είναι το

$$\boxed{f(\mathbb{R})=f\left((-\infty,0]\right)\cup f\left([0,+\infty)\right)=[1,+\infty)\cup[1,+\infty)=[1,+\infty).}$$

Γ4. Είναι:

$$f(x+1)-f(x)=\left(f(x+1)-2(x+1)\right)-\left(f(x)-2x\right)+2$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-2(x+1)\right)\overset{\left(\substack{\omega=x+1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(f(\omega)-2\omega\right)=0$$

(θέσαμε $\omega=x+1$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ οπότε, όταν $x\to+\infty$ έχουμε $\omega\to+\infty$)

οπότε είναι :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{M_1} &= \lim_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(f(x+1)-2(x+1)\right)-\left(f(x)-2x\right)+2\right] \\ &= 0-0+2=2 \end{aligned}}.$$

Είναι:

$$f(2x)-2f(x)=\left(f(2x)-2(2x)\right)-2\left(f(x)-2x\right)$$

Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(2x)-2(2x)\right) \overset{\left(\substack{y=2x \\ \lim_{x\to+\infty}(2x)=+\infty}\right)}{=} \lim_{y\to+\infty}\left(f(y)-2y\right)=0$$

(θέσαμε $y=2x$. Είναι $\lim_{x\to+\infty}(2x)=+\infty$, οπότε, όταν $x\to+\infty$ έχουμε $y\to+\infty$)

οπότε είναι:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{M_2} &= \lim_{x\to+\infty}\left(f(2x)-2f(x)\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(f(2x)-2(2x)\right)-2\left(f(x)-2x\right)\right] \\ &= 0-2\cdot 0=0 \end{aligned}}$$

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \ ,$$

οπότε υπάρχει $\kappa>0$ ώστε να ισχύει

$$f(x)>0,\ \forall x\in(\kappa,+\infty).$$

Έτσι για κάθε $\mathbf{x\in(\kappa,+\infty)}$ ισχύει

$$\frac{(f o f)(x)}{x}=\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}.$$

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{f(x)} \overset{(u=f(x))}{=} \lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}=2.$$

(θέσαμε $u=f(x)$. Είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,οπότε, όταν $x\to+\infty$. έχουμε $u\to+\infty$)

οπότε έχουμε:

$$\boxed{M_3=\lim_{x\to+\infty}\frac{(f\circ f)(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}\right)=2\cdot 2=4}.$$

Γ5. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι για οποιοδήποτε $x\in\mathbb{R}$, η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ** σε καθένα από τα διαστήματα

$$[x-1,x]\text{ και }[x,x+1],$$

οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(x-1,x)$ και $\xi_2\in(x,x+1)$, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}=f(x)-f(x-1):\ (\alpha)\text{ και}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=f(x+1)-f(x):\ (\beta)$$

Έχουμε:

$$\boxed{\begin{aligned}&x-1<\xi_1<x<\xi_2<x+1\Rightarrow\\ &\overset{(f'\ \gamma.\alpha\acute{\upsilon}\xi\ \mathbb{R})}{\Rightarrow}\ f'(\xi_1)<f'(x)<f'(\xi_2)\Rightarrow\\ &\Rightarrow\ f(x)-f(x-1)<f'(x)<f(x+1)-f(x).\end{aligned}}$$

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=2\ \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-f(x-1))\ \underset{(x\,=\,\omega+1)}{\overset{\left(\substack{\omega\,=\,x-1\\ \lim_{x\to+\infty}(x-1)\,=\,+\infty}\right)}{=}}\ \lim_{\omega\to+\infty}(f(\omega+1)-f(\omega))=2.$$

(θέσαμε $\omega=x-1$. Είναι $\lim_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$, οπότε όταν $x\to+\infty$ έχουμε $\omega\to+\infty$), οπότε, λόγω της (Σ), προκύπτει ότι

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f'(x)=2}.\ \text{(κριτήριο παρεμβολής)}$$

21ο **ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. i Από την δοθείσα σχέση για $x=y=0$ έχουμε :

$$f(0+0)=e^0f(0)+e^0f(0)+2.0.0.e^{0+0}\Leftrightarrow f(0)=f(0)+f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$$

ii. Για κάθε $x\in IR$ και $h\neq 0$ έχουμε

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{e^x f(h)+e^h f(x)+2xhe^{x+h}-f(x)}{h}=$$

$$=\frac{e^x f(h)+\left(e^h-1\right)f(x)}{h}+\frac{2xhe^{x+h}}{h}=e^x\frac{f(h)}{h}+\frac{e^h-1}{h}f(x)+2xe^{x+h}=$$

$$\overset{(f(0)=0)}{=}\ e^x\frac{f(h)-f(0)}{h}+\frac{e^h-1}{h}f(x)+2xe^{x+h}$$

Είναι όμως

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)=0 \quad \text{και} \quad \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\ \underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\ \lim_{h\to 0}\frac{\left(e^h-1\right)'}{(h)'}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h}{1}=1\,,$$

οπότε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{x\to 0}\left(e^x\frac{f(h)-f(0)}{h}+\frac{e^h-1}{h}f(x)+2xe^{x+h}\right)=$$

$$=e^x\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+f(x)\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}+\lim_{h\to 0}\left(2xe^{x+h}\right)=$$

$$=e^x\cdot f'(0)+f(x).1+2xe^{x+0}=e^x\cdot 0+f(x)+2xe^x=\left(f(x)+2xe^x\right)\in\mathbb{R}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$f'(x)=f(x)+2xe^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Για κάθε $x\in IR$ έχουμε :

$$g'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)-2x\overset{(\Delta1.\,(i))}{=}-e^{-x}f(x)+e^{-x}\left(f(x)+2xe^x\right)-2x=$$

$$=-e^{-x}f(x)+\left(e^{-x}f(x)+2x\right)-2x=0$$

Άρα η συνάρτηση $\mathbf{g(x)=e^{-x}f(x)-x^2}$ είναι **σταθερή** στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Λόγω **Δ.2.** έχουμε ότι για κάθε $x\in IR$ ισχύει :

$$g(x)=c\Leftrightarrow e^{-x}f(x)-x^2=c\Leftrightarrow f(x)-e^x x^2=ce^x\Leftrightarrow f(x)=x^2e^x+ce^x$$

Είναι όμως

$$f(0)=0\Leftrightarrow 0^2e^0+ce^0=0\Leftrightarrow c=0$$

άρα

$$\boxed{\mathbf{f(x)=x^2e^x\,,\quad x\in IR}}\quad \text{(ικανοποιεί την υπόθεση)}$$

Δ4. Είναι

$$f(x)=x^2e^x\geq 0 \text{ για κάθε } x\in IR$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

♦ Αν **t < 0** τότε το **εμβαδόν** που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ (δηλαδή την ευθεία $x = 0$) και την ευθεία $x=t$, είναι

$$E(t) = \int_t^0 f(x)dx = \int_t^0 x^2 e^x dx = \int_t^0 x^2 (e^x)' dx = \left[x^2 e^x\right]_t^0 - \int_t^0 2x e^x dx =$$

$$= 0 - t^2 e^t - 2\int_t^0 x(e^x)' dx = -t^2 e^t - 2\left[x e^x\right]_t^0 + 2\int_t^0 e^x dx =$$

$$= -t^2 e^t - 2(0 - te^t) + 2\left[e^x\right]_t^0 = -t^2 e^t + 2te^t + 2(1 - e^t) =$$

$$= -t^2 e^t + 2te^t - 2e^t + 2 \text{ τ.μ.}$$

♦ Αν **t > 0** τότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$\boxed{\mathbf{E(t) = \int_0^t f(x)dx = -\int_t^0 f(x)dx = t^2 e^t - 2te^t + 2e^t - 2 \text{ τ.μ}}}$$

Δ5. Είναι :

- $\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$

- $\lim\limits_{t \to -\infty} (-t^2 e^t) \overset{((-\infty)\cdot 0)}{=} \lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{-t^2}{e^{-t}} \underset{\text{D.L'H.}}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{\left(-t^2\right)'}{\left(e^{-t}\right)'} =$

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{-2t}{-e^{-t}} = \lim_{t \to -\infty} \frac{2t}{e^{-t}} \underset{\text{D.L'H.}}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \frac{(2t)'}{\left(e^{-t}\right)'} = \lim_{t \to -\infty} \frac{2}{-e^{-t}} = \lim_{t \to -\infty} (-2e^t) = 0$$

$$\lim_{t \to -\infty} (2te^t) = \lim_{t \to -\infty} \frac{2t}{e^{-t}} \underset{\text{D.L'H.}}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{t \to -\infty} \frac{(2t)'}{\left(e^{-t}\right)'} = \lim_{t \to -\infty} \frac{2}{-e^{-t}} = \lim_{t \to -\infty} (-2e^t) = 0$$

Οπότε

$$\boxed{\mathbf{\lim_{t \to -\infty} E(t) = \lim_{t \to -\infty} (-t^2 e^t + 2te^t - 2e^t + 2) = 0 + 0 - 0 + 2 = 2 \text{ τ.μ}}}$$

ii. Έχουμε :

$$E(t) = t^2 e^t - 2t e^t + 2e^t - 2 = e^t \left(t^2 - 2t + 2 - \frac{2}{e^t} \right)$$

Είναι

- $\lim\limits_{t\to+\infty} e^t = +\infty$
- $\lim\limits_{t\to+\infty} (t^2 - 2t + 2) = \lim\limits_{t\to+\infty} t^2 = +\infty$
- • $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{2}{e^t} = 0$.

Οπότε

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \left(t^2 - 2t + 2 - \frac{2}{e^t} \right) = +\infty} \quad \text{και} \quad \boxed{\lim_{t\to+\infty} E(t) \overset{((+\infty)(+\infty))}{=} +\infty} \quad \text{τ.μ.}$$

22ο

22ο **Θ Ε Μ Α Β** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

B1. Έχουμε:

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = \frac{4x}{x^2-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2f(x)} - \frac{4x}{x^2-1} e^{f(x)} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)e^{2f(x)} - 4xe^{f(x)} - (x^2-1) = 0 \,,\; x \in (-1\,,1)$$

Θέτουμε $w = e^{f(x)}$, οπότε έχουμε,

$$(x^2-1)w^2 - 4xw - (x^2-1) = 0 .$$

Είναι:

$$\Delta = 16x^2 + 4(x^2-1)^2 =$$

$$= 4(4x^2 + x^4 - 2x^2 + 1)$$

$$= 4(x^4 + 2x^2 + 1) = 4(x^2+1)^2 > 0 .$$

Οπότε,

$$w=\frac{4x\pm 2\left(x^2+1\right)}{2\left(x^2-1\right)}=\begin{cases}\dfrac{2x+x^2+1}{x^2-1}\\ ή\\ \dfrac{2x-x^2-1}{x^2-1}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)}\\ ή\\ \dfrac{-\left(x^2-2x+1\right)}{(x-1)(x+1)}\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}\\ ή\\ \dfrac{-(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}<0\ ,(\text{αφού } x\in(-1,1))\\ ή\\ \dfrac{1-x}{x+1}>0\ ,(\text{αφού } x\in(-1,1))\end{cases}$$

Πρέπει όμως $w>0$ (αφού $w=e^{f(x)}>0$).

Οπότε είναι

$$w=\frac{1-x}{1+x}\Leftrightarrow e^{f(x)}=\frac{1-x}{1+x}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \mathbf{f(x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right),\ x\in(-1,1)}}.$$

B2. Για κάθε $x\in D_f=(-1,1)$ ισχύει $-x\in D_f$ και

$$f(-x)=\ln\left(\frac{1-(-x)}{1+(-x)}\right)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln\left[\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}\right]=(-1)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=-\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=-f(x)$$

οπότε η f είναι **περιττή**.

B3. Είναι:

$$f'(x)=\left(\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right)'=\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'=$$

$$=\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{(-1)\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2}$$

$$=\frac{-2}{(1-x)(1+x)}<0,\ \text{για κάθε } x\in(-1,1).$$

Επομένως η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-1,1)$.

Άρα η f είναι **$1-1$**, οπότε η f έχει **αντίστροφη** συνάρτηση και το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών $f\left((-1,1)\right)$ της f.

Έστω $y \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = y$ με άγνωστο το x.

Έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = y \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} = e^y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-x = e^y + xe^y \Leftrightarrow x\left(1+e^y\right) = 1-e^y$$

$$\overset{(1+e^y>0)}{\Leftrightarrow} \quad x = \frac{1-e^y}{1+e^y}$$

Για να ανήκει ο $x = \dfrac{1-e^y}{1+e^y}$ στο $D_f = (-1,1)$ πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$-1 < \frac{1-e^y}{1+e^y} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-e^y > -1-e^y \\ 1-e^y < 1+e^y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > -1 \\ 2e^y > 0 \end{cases}, \text{ που ισχύουν για κάθε } y \in \mathbb{R}.$$

Επομένως είναι

$$f\left((-1,1)\right) = \mathbb{R} \text{ και } f^{-1}(y) = \frac{1-e^y}{1+e^y}.$$

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της f ορίζεται ως εξής: $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\boxed{\mathbf{f^{-1}(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}}}.$$

B4. Πρέπει αρχικά να ισχύουν:

$$x, (3x-1), (4x-1) \in D_f = (-1,1)$$

Δηλαδή,

$$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ -1 < 3x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ -1 < 4x-1 < 1 \end{cases}$$

Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} f^2(x)+f(3x-1)f(4x-1)<f(x)\big(f(3x-1)+f(4x-1)\big) \\ x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x)-f(x)f(3x-1)+f(3x-1)f(4x-1)-f(x)f(4x-1)<0 \\ x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\big(f(x)-f(3x-1)\big)-f(4x-1)\big(f(x)-f(3x-1)\big)<0 \\ x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \big(f(x)-f(4x-1)\big)\big(f(x)-f(3x-1)\big)<0 \\ x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} f(x)-f(4x-1)>0 \ \text{ και } \ f(x)-f(3x-1)<0 \\ \text{ή} \\ f(x)-f(4x-1)<0 \ \text{ και } \ f(x)-f(3x-1)>0 \end{pmatrix} \\ x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} f(4x-1)<f(x)<f(3x-1) \\ \text{ή} \\ f(3x-1)<f(x)<f(4x-1) \end{pmatrix} \\ x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\overset{(f:\gamma\nu.\varphi\theta\text{ίνουσα})}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \begin{pmatrix} 4x-1>x>3x-1 \\ \text{ή} \\ 3x-1>x>4x-1 \end{pmatrix} \\ x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\begin{array}{l} \left(x > \frac{1}{3} \text{ και } x < \frac{1}{2} \right) \\ \qquad ή \\ \left(x > \frac{1}{2} \text{ και } x < \frac{1}{3} \right) (\text{αδύνατη}) \end{array} \right) \\ x \in \left(0, \frac{1}{2} \right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right)$$

Επομένως το σύνολο λύσεων της δοθείσας ανίσωσης είναι το διάστημα

$$\boxed{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right)}$$

22ο **Θ Ε Μ Α Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Γ1. Για κάθε $x \neq 0$ είναι:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{x} \right)' =$$

$$= \ldots = \frac{x \cdot (e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2},$$

όπου

$$g(x) = x \cdot (e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}), \; x \in \mathbb{R}.$$

Είναι:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x)' \cdot (e^x + e^{-x}) + x \cdot (e^x + e^{-x})' - (e^x - e^{-x})' \\ &= (e^x + e^{-x}) + x \cdot (e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x}) \\ &= x \cdot (e^x - e^{-x}). \end{aligned}$$

Για κάθε $x > 0$ είναι :

$$x > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -x \end{cases} \overset{(e^x \text{ γ.αύξ } \mathbb{R})}{\Rightarrow} \begin{cases} x > 0 \\ e^x > e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ e^x - e^{-x} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(e^x - e^{-x}) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0.$$

Για κάθε $x < 0$ είναι:

$$x<0 \Rightarrow \begin{cases} x<0 \\ x<-x \end{cases} \overset{(e^x \ \gamma.\alpha\acute{\upsilon}\xi \ \mathbb{R})}{\Rightarrow} \begin{cases} x<0 \\ e^x<e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \\ e^x-e^{-x}<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot\left(e^x-e^{-x}\right)>0 \Rightarrow g'(x)>0.$$

Ακόμη είναι $g'(0)=0$.

Έτσι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g'(x)\geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

Επομένως η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

Έτσι

- για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$g(x)>g(0) \overset{(g(0)=0)}{\Rightarrow} g(x)>0 \Rightarrow \frac{g(x)}{x^2}>0 \Rightarrow f'(x)>0.$$

- για κάθε $x<0$ ισχύει:

$$g(x)<g(0) \overset{(g(0)=0)}{\Rightarrow} g(x)<0 \Rightarrow \frac{g(x)}{x^2}<0 \Rightarrow f'(x)<0.$$

Εξετάζουμε αν η f είναι **συνεχής** στο $x_0=0$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{1}=2$$

Άρα ισχύει

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)(=2).$$

Επομένως η f είναι **συνεχής** στο $x_0=0$.

Επειδή ισχύει

- $f'(x)>0$ για κάθε $x>0$,
- $f'(x)<0$ για κάθε $x<0$

και η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, έπεται ότι η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty,0]$ και **γνησίως αύξουσα** στο $[0,+\infty)$ και η f παρουσιάζει στο $x_0=0$ **ολικό ελάχιστο**, το

$$\boxed{\min f(x)=f(0)=2}$$

Γ2. **i.** Η συνάρτηση $h(x)=e^x$ είναι **παραγωγίσιμη** στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x)=\left(e^x\right)'=e^x,$$

οπότε για $\alpha<\beta$ η h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ** στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$h'(\xi)=\frac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}\Rightarrow e^{\xi}=\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{e^{\xi}}=\beta-\alpha$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Rightarrow e^{\beta-\xi}-e^{\alpha-\xi}=\beta-\alpha}}$$

ii. Έχουμε:

$$e^{\xi}=\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}\Rightarrow\frac{e^{\xi}}{e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}=\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\xi-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{e^{\frac{\beta-\alpha}{2}}-e^{-\frac{\beta-\alpha}{2}}}{\beta-\alpha}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2e^{\xi-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{e^{\frac{\beta-\alpha}{2}}-e^{-\frac{\beta-\alpha}{2}}}{\frac{\beta-\alpha}{2}}=f\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$$

Έχουμε:

$$\frac{\beta-\alpha}{2}>0\overset{(f\ \gamma.\alpha\acute{\upsilon}\xi\ [0,+\infty))}{\Rightarrow}f\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)>f(0)$$

$$\Rightarrow 2e^{\xi-\frac{\alpha+\beta}{2}}>2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\xi-\frac{\alpha+\beta}{2}}>1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\xi-\frac{\alpha+\beta}{2}}>e^{0}\overset{(e^x\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi\ \mathbb{R})}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\xi-\frac{\alpha+\beta}{2}>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\xi>\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Επειδή ισχύει $\boldsymbol{\xi>\frac{\alpha+\beta}{2}}$ έπεται ότι το $\boldsymbol{\xi}$ είναι πλησιέστερα στο $\boldsymbol{\beta}$ απ' ότι στο α.

22ο **ΘΕΜΑ Δ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Δ1. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$\sqrt{x}f(x)+2x\sqrt{x}f'(x)=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}f(x)+2x\sqrt{x}f'(x)}{2x}=\frac{2}{2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}f(x)+\sqrt{x}f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)'f(x)+\sqrt{x}f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$\overset{(x>0)}{\Leftrightarrow}\left(\sqrt{x}f(x)\right)'=(\ln x)'$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}f(x)=\ln x+c \ ,\ (c\in\mathbb{R},\ \text{σταθερά})$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{\ln x+c}{\sqrt{x}}$$

Είναι

$$f(1)=0\Leftrightarrow \frac{\ln 1+c}{\sqrt{1}}=0\Leftrightarrow c=0.$$

Άρα

$$\boxed{f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\ ,\ \ x>0}.$$

Δ2. Είναι:

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{(\ln x)'\sqrt{x}-\ln x\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x}-\ln x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$$

Έχουμε:

- $\begin{cases} f'(x)>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\ln x>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x<2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x<\ln e^2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<e^2$

- $\begin{cases} f'(x)<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\ln x<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x>2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x>\ln e^2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>e^2$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e^2$

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Από το πρόσημο της $f'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει ότι η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\left(0,e^2\right]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $\left[e^2,+\infty\right)$.

Η f παρουσιάζει μόνο στο $x_0=e^2$ **(ολικό) μέγιστο** , το

$$\boxed{\max f(x)=f\left(e^2\right)=\frac{2}{e}}.$$

Δ3. Για $x=0$ ισχύει $e^{\kappa\sqrt{x}}=e^{\kappa\sqrt{0}}=1>0=x$, οπότε για $x=0$ ισχύει $e^{\kappa\sqrt{x}}>x$.

Επομένως για να ισχύει $e^{\kappa\sqrt{x}}\geq x$, για κάθε $x\geq 0$, πρέπει και αρκεί να ισχύει

$$e^{\kappa\sqrt{x}}\geq x \text{ για κάθε } x>0.$$

Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$e^{\kappa\sqrt{x}}\geq x \Leftrightarrow \ln\left(e^{\kappa\sqrt{x}}\right)\geq \ln x$$

$$\Leftrightarrow \kappa\sqrt{x}\geq \ln x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\leq \kappa$$

$$\Leftrightarrow f(x) \le \kappa$$

Επειδή η f έχει ολικό μέγιστο, έπεται ότι για να ισχύει $f(x) \le \kappa$ για κάθε $x > 0$, πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$\max f(x) \le \kappa \Leftrightarrow \kappa \ge \frac{2}{e}$$

Επομένως για να ισχύει $e^{\kappa\sqrt{x}} \ge x$ για κάθε $x \ge 0$ πρέπει και αρκεί

$$\boxed{\boldsymbol{\kappa \ge \frac{2}{e}}}.$$

Δ4. Έχουμε:

$$\alpha^{\sqrt{\beta}}\beta^{\sqrt{\alpha}} = e^{\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{e}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\alpha^{\sqrt{\beta}}\beta^{\sqrt{\alpha}}\right) = \ln\left(e^{\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{e}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\alpha^{\sqrt{\beta}}\right) + \ln\left(\beta^{\sqrt{\alpha}}\right) = \frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{e}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\beta}\ln\alpha + \sqrt{\alpha}\ln\beta = \frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{\beta}\ln\alpha + \sqrt{\alpha}\ln\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{4}{e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\alpha}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\ln\beta}{\sqrt{\beta}} = \frac{4}{e}$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha) + f(\beta) = \frac{4}{e} \quad :(1)$$

Επειδή η f παρουσιάζει μόνο στο $x_0 = e^2$ (ολικό) μέγιστο, το $\max f(x) = \frac{2}{e}$, έπεται ότι ισχύουν:

- $f(\alpha) \le \frac{2}{e}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\alpha = e^2$.
- $f(\beta) \le \frac{2}{e}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\beta = e^2$.

Επομένως είναι $f(\alpha) + f(\beta) \le \frac{4}{e}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $\alpha = e^2$ και $\beta = e^2$.

Έτσι για να ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) = \frac{4}{e}$ πρέπει και αρκεί να είναι

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha = \beta = e^2}}$$

Δ5. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ είναι συνεχής στο $\left[1, e^2\right]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και για κάθε $x \in \left[1, e^2\right]$ ισχύει $f(x) \ge 0$, αφού:

$$1 \le x \le e^2 \overset{(\ln x: \text{γν.αύξουσα})}{\Rightarrow} \begin{cases} \ln x \ge \ln 1 = 0 \\ \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \ge 0 \Rightarrow f(x) \ge 0$$

Οπότε το **εμβαδόν** του χωρίου Ω είναι:

$$\mathbf{E} = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{e^2} \left(2\sqrt{x}\right)' \ln x dx$$

$$= \left[2\sqrt{x} \ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 2\sqrt{x} (\ln x)' dx$$

$$= \left(2\sqrt{e^2} \ln\left(e^2\right) - 0\right) - \int_1^{e^2} 2\sqrt{x} \frac{1}{x} dx$$

$$= 4e - 2\int_1^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= 4e - 2\left[2\sqrt{x}\right]_1^{e^2} = 4e - 4(e - 1)$$

$$\boxed{\mathbf{= 4\ \tau.\mu}}$$