13ο

13ο **ΘΕΜΑ Β** ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

1. $f(f(x))+2f(x)=4-x \quad :(1)$ $\qquad f(2)=0 \quad :(2)$

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$$f(x_1)=f(x_2).$$

Έχουμε

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\begin{cases}f(f(x_1))=f(f(x_2))\\2f(x_1)=2f(x_2)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow}f(f(x_1))+2f(x_1)=f(f(x_2))+2f(x_2)\Rightarrow$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow}4-x_1=4-x_2\Rightarrow -x_1=-x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι συνάρτηση **1−1**.

Β2. Επειδή η f είναι **γνησίως μονότονη** στο $\mathbb{R}$,

έπεται ότι **ή**

η f θα είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$

ή

η f θα είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.

Υποθέτουμε ότι η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$,

τότε για

$$x_1,x_2\in\mathbb{R}\text{ με } x_1<x_2$$

έχουμε

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}f(f(x_1))<f(f(x_2))\\2f(x_1)<2f(x_2)\end{cases}\text{(αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο }\mathbb{R}\text{)}$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow}f(f(x_1))+2f(x_1)<f(f(x_2))+2f(x_2)\overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 4-x_1<4-x_2 \Rightarrow -x_1<-x_2 \Rightarrow x_1>x_2$$

ΑΤΟΠΟ, αφού είναι $x_1<x_2$.

Επομένως, η f δεν είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$ και επειδή η f είναι **γνησίως μονότονη** στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.

Β3. **i.** Από την (1) για $x=2$ έχουμε:

$$f(f(2))+2f(2)=4-2 \overset{(f(2)=0)}{\Rightarrow} f(0)+2\cdot 0=2 \Rightarrow f(0)=2$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=f(x)-x.$$

Η g είναι συνεχής στο $[0,2]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Ακόμη, είναι

$$g(0)=f(0)-0=f(0)=2>0 \text{ και } g(2)=f(2)-2=0-2=-2<0,$$

οπότε είναι

$$g(0)g(2)<0.$$

Άρα η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θεωρήματος Bolzano** στο $[0,2]$, οπότε υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε

$$g(x_0)=0$$
$$\Leftrightarrow f(x_0)-x_0=0$$
$$\Leftrightarrow f(x_0)=x_0$$

ii. Από την (1) για $x=x_0$ έχουμε

$$f(f(x_0))+2f(x_0)=4-x_0$$
$$\Rightarrow f(x_0)+2x_0=4-x_0,\ (\text{αφού } f(x_0)=x_0)$$
$$\Rightarrow x_0+2x_0=4-x_0,\ (\text{αφού } f(x_0)=x_0)$$
$$\Rightarrow 4x_0=4 \Rightarrow x_0=1$$

Επειδή είναι $f(x_0)=x_0$ και $x_0=1$, έπεται ότι

$$\boxed{\mathbf{f(1)=1}}.$$

Β4. Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_0^2 |f(x)|dx \ .$$

Για κάθε $x\in[0,2]$ έχουμε :

$$0\le x\le 2 \overset{(f\downarrow\mathbb{R})}{\Rightarrow} f(0)\ge f(x)\ge f(2)\Rightarrow 2\ge f(x)\ge 0\Rightarrow f(x)\ge 0 \ ,$$

οπότε είναι

$$E=\int_0^2 f(x)dx \, .$$

Για κάθε $x\in[0,2]$ έχουμε:

$$f(f(x))+2f(x)=4-x \Rightarrow (f(f(x))+2f(x))f'(x)=(4-x)f'(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^2 (f(f(x))f'(x)+2f(x)f'(x))dx=\int_0^2 (4-x)f'(x)\,dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(f(x))f'(x)dx+\int_0^2 2f(x)f'(x)dx=\int_0^2 (4-x)f'(x)dx:(3)$$

Είναι

$$\int_0^2 (4-x)f'(x)dx \ =[(4-x)f(x)]_0^2-\int_0^2 (4-x)'\,f(x)dx=$$

$$=2f(2)-4f(0)+\int_0^2 f(x)dx=2\cdot 0-4\cdot 2+E=E-8 \ :(4)$$

$$\int_0^2 2f(x)f'(x)dx=[(f(x))^2]_0^2=(f(2))^2-(f(0))^2=0^2-2^2=-4 \ : \ (5)$$

$$\int_0^2 f(f(x))f'(x)dx \ \underset{\substack{u_1=f(0)=2\\ u_2=f(2)=0}}{\overset{\substack{u=f(x)\\ du=f'(x)dx}}{=}} \ \int_2^0 f(u)du=-\int_0^2 f(x)dx=-E: \ (6)$$

Από την (3) ,λόγω των (4) ,(5) και (6) έχουμε :

$$\boxed{\mathbf{-E-4=E-8\Leftrightarrow 2E=4\Leftrightarrow E=2\,\tau.\mu.}} \ ,$$

το ζητούμενο εμβαδό.

13ο **Θ Ε Μ Α Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Γ1. Είναι

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x},x>0.$$

Έχουμε :

- $\left|\begin{array}{l} f'(x)>0 \\ x>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 0<x<e$
- $\left|\begin{array}{l} f'(x)<0 \\ x>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x>e$
- $\left|\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ x>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=e$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	max	↘	

η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0,e]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $[e,+\infty)$.
Η f παρουσιάζει στο $x_0=e$ **ολικό μέγιστο**, το

$$\boxed{\mathbf{f_{max}=f(e)=\frac{1}{e}}}.$$

Γ2. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to=\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Ακόμη:

$$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{x}\ln x\right)\overset{(+\infty)(-\infty)}{=}-\infty$$

Επειδή η f είναι **συνεχής** και **γνησίως αύξουσα** στο $(0,e]$ έπεται ότι

$$f((0,e])=\left(\lim_{x\to0^+} f(x),f(e)\right]=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$$

Επειδή η f είναι **συνεχής** και **γνησίως φθίνουσα** στο $[e,+\infty)$ έπεται ότι

$$f\left([e,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x), f(e)\right]=\left(0,\frac{1}{e}\right]$$

Επομένως το **σύνολο τιμών** της f είναι το

$$\boxed{\mathbf{f\left((0,+\infty)\right)=f\left((0,e]\right)\cup f\left([e,+\infty)\right)=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]\cup\left(0,\frac{1}{e}\right]=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]}}$$

Γ3. Για κάθε $x\le 0$ είναι φανερό ότι ισχύει $e^{\kappa x}>0\ge x$,οπότε για κάθε

$x\le 0$ ισχύει : $e^{\kappa x}>x$.

Επομένως για να ισχύει $e^{\kappa x}\ge x$ για κάθε $x\in R$ πρέπει και αρκεί να ισχύει

$e^{\kappa x}\ge x$ για κάθε $x>0$.

Για $x>0$ ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$\begin{aligned} e^{\kappa x}\ge x &\Leftrightarrow \ln\left(e^{\kappa x}\right)\ge \ln x \\ &\Leftrightarrow \kappa x\ge \ln x \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}\le \kappa \\ &\Leftrightarrow f(x)\le \kappa \end{aligned}$$

Επειδή η $f(x)=\frac{\ln x}{x}, x>0$ έχει ολικό μέγιστο έπεται ότι για να ισχύει $f(x)\le\kappa$

για κάθε $x>0$ πρέπει και αρκεί να είναι $f_{max}\le\kappa$.

Επομένως, η μικρότερη τιμή του κ για την οποία ισχύει $e^{\kappa x}\ge x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$\boxed{\boldsymbol{\kappa_{min}=f_{max}=\frac{1}{e}}}.$$

Γ4. Από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\alpha^x+\beta^x+\gamma^x-\frac{3}{e}(x+1)\ge\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}:(1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\alpha^x+\beta^x+\gamma^x-\frac{3}{e}(x+1), x\in\mathbb{R}$$

Η g είναι **παραγωγίσιμη** στο R με

$$g'(x)=\alpha^x\ln\alpha+\beta^x\ln\beta+\gamma^x\ln\gamma-\frac{3}{e}$$

Παρατηρούμε ότι

$$g(-1)=\alpha^{-1}+\beta^{-1}+\gamma^{-1}-\frac{3}{e}(-1+1)=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$$

Έτσι από την (1) προκύπτει ότι ισχύει

$$g(x)\geq g(-1),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Επομένως η g παρουσιάζει **ελάχιστο** στο $x_0=-1$,(εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$), οπότε σύμφωνα με το **Θεώρημα Fermat** ισχύει :

$$g'(-1)=0\Leftrightarrow \alpha^{-1}.\ln\alpha+\beta^{-1}.\ln\beta+\gamma^{-1}.\ln\gamma-\frac{3}{e}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\alpha}{\alpha}+\frac{\ln\beta}{\beta}+\frac{\ln\gamma}{\gamma}=\frac{3}{e}$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)=\frac{3}{e}:(\Sigma)$$

Επειδή η f παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** μόνο στο $x_0=e$, το $f_{max}=f(e)=\frac{1}{e}$.

έπεται ότι ισχύει $f(x)\leq\frac{1}{e}$ για κάθε $x>0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x=e$.

Έτσι, ισχύουν :

$$f(\alpha)\leq\frac{1}{e}\ \text{, με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν } \alpha=e$$

$$f(\beta)\leq\frac{1}{e}\ \text{, με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν } \beta=e$$

και

$$f(\gamma)\leq\frac{1}{e}\ \text{, με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν } \gamma=e.$$

Επομένως είναι

$$f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)\leq\frac{3}{e}\ ,$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $\alpha=\beta=\gamma=e$.

Έτσι για να ισχύει η (Σ) πρέπει και αρκεί να είναι $\alpha=\beta=\gamma=e$.

Επομένως είναι

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha=\beta=\gamma=e}}$$

13ο **Θ Ε Μ Α Δ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Δ1. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$\int_{f(x)}^{2f(x)} e^{t-f(x)}dt = \frac{x}{2+f^2(x)}-1$$

$$\Leftrightarrow \int_{f(x)}^{2f(x)} e^{-f(x)}e^{t}dt = \frac{x}{2+f^2(x)}-1$$

$$\Leftrightarrow e^{-f(x)}\int_{f(x)}^{2f(x)} e^{t}dt = \frac{x}{2+f^2(x)}-1$$

$$\Leftrightarrow e^{-f(x)}\left[e^{t}\right]_{f(x)}^{2f(x)} = \frac{x}{2+f^2(x)}-1$$

$$\Leftrightarrow e^{-f(x)}\left(e^{2f(x)}-e^{f(x)}\right) = \frac{x}{2+f^2(x)}-1$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)}-1 = \frac{x}{2+f^2(x)}-1$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{x}{2+f^2(x)}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \left(2+f^2(x)\right)e^{f(x)} = x \quad :(1)}$$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\left(2+x^2\right)e^{x}\ ,\ x\in\mathbb{R}.$$

Είναι:

$$g'(x)=\left(2+x^2\right)'e^{x}+\left(2+x^2\right)\left(e^{x}\right)'$$

$$=2xe^{x}+\left(2+x^2\right)e^{x}$$

$$=\left(x^2+2x+2\right)e^{x}$$

$$=\left[(x+1)^2+1\right]e^{x}>0,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Επομένως η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

Η σχέση (1) με τη βοήθεια της g γράφεται $g(f(x))=x\ :(2)$ (για κάθε $x>0$).

Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$.

Έχουμε:

$$x_1<x_2\overset{(2)}{\Rightarrow}g(f(x_1))<g(f(x_2))\Rightarrow f(x_1)<f(x_2),$$

αφού η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

Επομένως για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ ισχύει

$$f(x_1)<f(x_2),$$

οπότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0,+\infty)$.

iii. Η g, ως **γνησίως μονότονη** στο $D_g=\mathbb{R}$, είναι $1-1$.

Έστω $y\in\mathbb{R}$.

Θεωρούμε την εξίσωση $f(x)=y$ με άγνωστο το x.

Έχουμε :

$$f(x)=y\overset{(g\,:1-1)}{\Leftrightarrow}g(f(x))=g(y)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}x=g(y)$$

$$\Leftrightarrow x=(y^2+2)e^y\in D_f=(0,+\infty)\text{ (για κάθε } y\in\mathbb{R}\text{).}$$

Επομένως για κάθε $y\in\mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x)=y$ έχει λύση (ως προς x) στο

$$D_f=(0,+\infty)\text{ η οποία είναι } x=(y^2+2)e^y,$$

οπότε είναι $f((0,+\infty))\supseteq\mathbb{R}$ και

επειδή είναι και $f((0,+\infty))\subseteq\mathbb{R}$, προκύπτει ότι

$$\boxed{\mathbf{f((0,+\infty))=\mathbb{R}}}.$$

Δ2. Επειδή η f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** στο $(0,+\infty)$, έπεται ότι

$$f((0,+\infty))=\left(\lim_{x\to0^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right).$$

Είναι όμως και $f((0,+\infty))=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$,

οπότε ισχύει

$$\left(\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty).$$

Επομένως είναι:

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty} \text{ και } \boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}.$$

Δ3. Η f ως **γνησίως μονότονη** στο $D_f = (0, +\infty)$ είναι συνάρτηση **$1-1$**, οπότε η f έχει **αντίστροφη** συνάρτηση και το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το **σύνολο τιμών** $f\left((0, +\infty)\right) = \mathbb{R}$ της f.

Ακόμη ,επειδή ισχύει η ισοδυναμία :

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = \left(y^2 + 2\right)e^y,$$

έχουμε ότι

$$f^{-1}(y) = \left(y^2 + 2\right)e^y, \ y \in \mathbb{R}.$$

Επομένως η **αντίστροφη** συνάρτηση της f ορίζεται ως εξής:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ με } \boxed{f^{-1}(x) = \left(x^2 + 2\right)e^x}.$$

Δ4. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2, 3e]$, οπότε το ζητούμενο **εμβαδό** είναι

$$E = \int_2^{3e} |f(x)| dx.$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_2^{3e} |f(x)| dx$ θέτουμε $u = f(x)$, οπότε είναι

$$x = f^{-1}(u) = \left(u^2 + 2\right)e^u \text{ και } dx = \left(u^2 + 2u + 2\right)e^u du.$$

- Για $x = 2$ έχουμε $u = f(2) \overset{\left(2 = f^{-1}(0)\right)}{=} f\left(f^{-1}(0)\right) = 0$.
- Για $x = 3e$ έχουμε $u = f(3e) \overset{\left(3e = f^{-1}(1)\right)}{=} f\left(f^{-1}(1)\right) = 1$.

Έτσι έχουμε

$$E = \int_0^1 |u| \left(u^2 + 2u + 2\right)e^u du = \int_0^1 \left(u^3 + 2u^2 + 2u\right)e^u du.$$

Είναι :

$$\left(u^3 + 2u^2 + 2u\right)e^u =$$

$$=\left(u^3+2u^2+2u\right)e^u+\left(3u^2+4u+2\right)e^u-\left(3u^2+4u+2\right)e^u-$$
$$-\left(6u+4\right)e^u+\left(6u+4\right)e^u+6e^u-6e^u$$

$$=\left(\left(u^3+2u^2+2u\right)e^u\right)'-\left(\left(3u^2+4u+2\right)e^u\right)'+\left(\left(6u+4\right)e^u\right)'-\left(6e^u\right)'$$

$$=\left[\left(u^3+2u^2+2u-3u^2-4u-2+6u+4-6\right)e^u\right]'$$

$$=\left(\left(u^3-u^2+4u-4\right)e^u\right)'$$

Άρα,

$$E=\int_0^1\left(\left(u^3-u^2+4u-4\right)e^u\right)'du$$
$$=\left[\left(u^3-u^2+4u-4\right)e^u\right]_0^1$$
$$=0-(-4)=4 \text{ τ.μ.}$$

Δ5. Για το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^x f(t)dt$ θέτουμε $u=f(t)$, οπότε είναι

$$t=f^{-1}(u) \text{ και } dt=\left(f^{-1}\right)'(u)du.$$

- Για $t=\alpha$ είναι $u=f(\alpha)$.
- Για $t=x$ είναι $u=f(x)$.

Άρα

$$\int_\alpha^x f(t)dt=\int_{f(\alpha)}^{f(x)}u\left(f^{-1}\right)'(u)du=\int_{f(\alpha)}^{f(x)}t\left(f^{-1}\right)'(t)dt.$$

Έτσι έχουμε:

$$\int_{f(\alpha)}^{f(x)}f^{-1}(t)dt+\int_\alpha^x f(t)dt=\int_{f(\alpha)}^{f(x)}f^{-1}(t)dt+\int_{f(\alpha)}^{f(x)}t\left(f^{-1}\right)'(t)dt=$$

$$=\int_{f(\alpha)}^{f(x)}\left((t)'f^{-1}(t)+t\left(f^{-1}\right)'(t)\right)dt=\int_{f(\alpha)}^{f(x)}\left(tf^{-1}(t)\right)'dt=$$

$$=\left[tf^{-1}(t)\right]_{f(\alpha)}^{f(x)}=f(x)f^{-1}(f(x))-f(\alpha)f^{-1}(f(\alpha))=xf(x)-\alpha f(\alpha)$$

Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει:

$$\int_{f(\alpha)}^{f(x)} f^{-1}(t)dt+\int_{\alpha}^{x} f(t)dt = xf(x)-\alpha f(\alpha).$$

14ο

14ο **ΘΕΜΑ Β** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

B1. Είναι $f(\varepsilon\varphi x)=2x\ :(1)$.

Από την (1) παραγωγίζοντας τα μέλη της ως προς x, έχουμε ότι για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$\left(f(\varepsilon\varphi x)\right)'=(2x)'$$

$$\Rightarrow f'(\varepsilon\varphi x)(\varepsilon\varphi x)'=2$$

$$\Rightarrow f'(\varepsilon\varphi x)\left(1+\varepsilon\varphi^2 x\right)=2$$

$$\Rightarrow f'(\varepsilon\varphi x)=\frac{2}{1+\varepsilon\varphi^2 x}\ :(2)$$

Έστω α ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Επειδή το **σύνολο τιμών** της $\varphi(x)=\varepsilon\varphi x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι το $\mathbb{R}$,

έπεται ότι υπάρχει $x_0\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, ώστε

$$\varepsilon\varphi x_0=\alpha.$$

Από την (2) για $x=x_0$ έχουμε:

$$f'(\varepsilon\varphi x_0)=\frac{2}{1+\varepsilon\varphi^2 x_0}\Rightarrow f'(\alpha)=\frac{2}{1+\alpha^2},\ \text{για οποιοδήποτε } \alpha\in\mathbb{R}.$$

Επομένως είναι

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}\ \text{γαι κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Δηλαδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}>0$$

και συνεπώς η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

B2. Επειδή η f είναι **συνεχής** στο $\mathbb{R}$ (ως **παραγωγίσιμη** στο $\mathbb{R}$) και **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$ (από το 1^o ερώτημα),

έπεται ότι

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right).$$

Από την (1) και επειδή υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{x\to-\infty}f(x) \text{ και } \lim_{x\to+\infty}f(x)$$

έχουμε:

- $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(\varepsilon\varphi x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(2x)\underset{\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\varepsilon\varphi x=+\infty\right)}{\overset{(w=\varepsilon\varphi x)}{\Rightarrow}}\lim_{w\to+\infty}f(w)=\pi.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\pi.$$

- $$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}f(\varepsilon\varphi x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}(2x)\underset{\left(\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\varepsilon\varphi x=-\infty\right)}{\overset{(u=\varepsilon\varphi x)}{\Rightarrow}}\lim_{u\to-\infty}f(u)=-\pi.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\pi.$$

Επομένως είναι

$$\boxed{\mathbf{f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\pi,\pi)}}.$$

B3. Η f , ως **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$, είναι συνάρτηση $\mathbf{1-1}$ και συνεπώς **αντιστρέφεται.**

Από την (1) έχουμε ότι για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$f^{-1}(f(\varepsilon\varphi x))=f^{-1}(2x)\Rightarrow\varepsilon\varphi x=f^{-1}(2x)\quad:(3).$$

Από την (3) θέτοντας όπου x το $\frac{f(x)}{2}$ ($\frac{f(x)}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$),

έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{f(x)}{2}\right)=f^{-1}\left(2\frac{f(x)}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\left(\frac{f(x)}{2}\right)=f^{-1}(f(x))$$

$$\boxed{\Rightarrow \varepsilon\varphi\left(\frac{f(x)}{2}\right)=x}$$

B4. Έχουμε

$$|f(\alpha)-f(\beta)|\le 2|\alpha-\beta| \ :(4).$$

Διακρίνουμε:

α. Αν $\alpha=\beta$, τότε η (4) ισχύει ως ισότητα.

β. Αν $\alpha<\beta$, τότε η συνάρτηση f, ως **παραγωγίσιμη** στο $\mathbb{R}$, ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **θεωρήματος μέσης τιμής** στο $[\alpha,\beta]$,

οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}\right|=|f'(\xi)|=\left|\frac{2}{1+\xi^2}\right|=\frac{2}{1+\xi^2}\le 2$$

$$\Rightarrow\frac{|f(\alpha)-f(\beta)|}{|\alpha-\beta|}\le 2$$

$$\Rightarrow|f(\alpha)-f(\beta)|\le 2|\alpha-\beta|$$

γ. Αν $\alpha<\beta$, τότε εργαζόμενοι ομοίως καταλήγουμε ότι και πάλι ισχύει :

$$|f(\alpha)-f(\beta)|\le 2|\alpha-\beta|.$$

Επομένως για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει :

$$\boxed{|f(\alpha)-f(\beta)|\le 2|\alpha-\beta|}.$$

14ο **ΘΕΜΑ Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=(e^x-x)f(x),\ x\in\mathbb{R}.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$(e^x-x)f(x)+e^y\ge(e^y-y)f(y)+e^x$$

$$\Leftrightarrow g(x)+e^y\ge g(y)+e^x \quad :(1)$$

Από την (1) με εναλλαγή των γραμμάτων x και y έχουμε ότι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$g(y)+e^x\ge g(x)+e^y \quad :(2).$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$g(x)+e^y=g(y)+e^x \quad :(4).$$

Από την (4) για $y=0$ έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$g(x)+e^0=g(0)+e^x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(e^x-x)f(x)+1=(e^0-0)f(0)+e^x$$

$$\overset{(f(0)=1)}{\Leftrightarrow}(e^x-x)f(x)+1=1+e^x$$

$$\Leftrightarrow(e^x-x)f(x)=e^x \quad :(5)$$

Για κάθε $x>0$ ισχύει: $\ln x\le x-1 :(\alpha)$.

Από την (α) θέτοντας όπου x το e^x (είναι $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$) έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\ln(e^x)\le e^x-1\Rightarrow x\le e^x-1\Rightarrow e^x\ge x+1>x\Rightarrow e^x>x\Rightarrow\boxed{e^x-x>0}.$$

Έτσι από την (5) προκύπτει ότι

$$\boxed{\mathbf{f(x)=\frac{e^x}{e^x-x},\ x\in\mathbb{R}}}.$$

Γ2. Είναι

$$f'(x)=\frac{(e^x)'(e^x-x)-e^x(e^x-x)'}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x(e^x-x)-e^x(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$$

Έχουμε:

- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}>0 \Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}<0 \Leftrightarrow 1-x<0 \Leftrightarrow x>1$ και
- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	max	↘	

Από το πρόσημο της $f'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα προκύπτει ότι η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty,1]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $[1,+\infty)$, οπότε η f παρουσιάζει στο $x_0=1$ **ολικό μέγιστο**, το οποίο είναι

$$\max f(x)=f(1)=\frac{e}{e-1}.$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x-x}=0$ (αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-x)=+\infty$)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{e^x}}=\dfrac{1}{1-0}=1$

$$\left(\text{αφού } \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}\overset{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=}=0\right).$$

Επειδή η f είναι συνεχής και **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty,1]$ έπεται ότι

$$f((-\infty,1])=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right]=\left(0,\frac{e}{e-1}\right].$$

Επειδή η f είναι συνεχής και **γνησίως φθίνουσα** στο $[1,+\infty)$ έπεται ότι

$$f([1,+\infty))=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right]=\left(1,\frac{e}{e-1}\right].$$

Επομένως το **σύνολο τιμών** της f είναι

$$\boxed{\mathbf{f(\mathbb{R})=f((-\infty,1])\cup f([1,+\infty))=\left(0,\frac{e}{e-1}\right]\cup\left(1,\frac{e}{e-1}\right]=\left(0,\frac{e}{e-1}\right]}}.$$

Γ3. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$(\kappa-1)e^x\ge\kappa x\Leftrightarrow \kappa e^x-e^x\ge\kappa x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\kappa\left(e^x-x\right)\ge e^x\overset{(e^x-x>0)}{\Leftrightarrow}\frac{e^x}{e^x-x}\le\kappa\Leftrightarrow f(x)\le\kappa$$

Επειδή η f έχει **ολικό μέγιστο**, έπεται ότι για να ισχύει $f(x)\le\kappa$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί να ισχύει

$$\max f(x)\le\kappa\Leftrightarrow\frac{e}{e-1}\le\kappa.$$

Επομένως η μικρότερη τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$(\kappa-1)e^x\ge\kappa x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

είναι το

$$\boxed{\boldsymbol{\kappa_0=\frac{e}{e-1}}}$$

Γ4. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x)\le\max f(x)$$

$$\Leftrightarrow\frac{e^x}{e^x-x}\le\frac{e}{e-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e\left(e^x-x\right)\ge(e-1)e^x$$

$$\Rightarrow e^x-x\ge(e-1)e^{x-1}\ :(\beta)$$

Λόγω της (β) ισχύουν:

$$\left.\begin{cases} e^{\alpha_1}-\alpha_1 \geq (e-1)e^{\alpha_1-1} \\ e^{\alpha_2}-\alpha_2 \geq (e-1)e^{\alpha_2-1} \\ \qquad \dots \\ e^{\alpha_{2016}}-\alpha_{2016} \geq (e-1)e^{\alpha_{2016}-1} \end{cases}\right. \overset{(\text{θετικά μέλη})}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \left(e^{\alpha_1}-\alpha_1\right)\cdot\left(e^{\alpha_2}-\alpha_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(e^{\alpha_{2016}}-\alpha_{2016}\right) \geq (e-1)^{2016} e^{(\alpha_1-1)+(\alpha_2-1)+\ldots+(\alpha_{2016}-1)}$$

$$\Rightarrow \left(e^{\alpha_1}-\alpha_1\right)\cdot\left(e^{\alpha_2}-\alpha_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(e^{\alpha_{2016}}-\alpha_{2016}\right) \geq (e-1)^{2016} e^{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2016})-2016} =$$

$$=(e-1)^{2016} e^{2016-2016} = (e-1)^{2016} e^0 = (e-1)^{2016}\cdot 1 = (e-1)^{2016}$$

Άρα ισχύει

$$\boxed{\left(e^{\alpha_1}-\alpha_1\right)\cdot\left(e^{\alpha_2}-\alpha_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(e^{\alpha_{2016}}-\alpha_{2016}\right) \geq (e-1)^{2016}}$$

Γ5. Έχουμε:

$$\frac{1}{e^x-x}+\frac{x}{xe^x-x-\ln x}=\frac{2e^{1-x}}{e-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x-x}+\frac{xe^x}{xe^x-\left(\ln\left(e^x\right)+\ln x\right)}=\frac{2e}{e-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x-x}+\frac{e^{\ln\left(xe^x\right)}}{e^{\ln\left(xe^x\right)}-\ln\left(xe^x\right)}=\frac{2e}{e-1}$$

$$\Leftrightarrow f(x)+f\left(\ln\left(xe^x\right)\right)=\frac{2e}{e-1} \quad :(E) \qquad , \quad (x>0).$$

Επειδή η f παρουσιάζει μόνο στο $x_0=1$ **ολικό μέγιστο**, το

$$\max f(x)=f(1)=\frac{e}{e-1},$$

έπεται ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x)\leq\frac{e}{e-1},$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Έτσι ισχύουν:

$$f(x)\leq\frac{e}{e-1}$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$ και

$$f\left(\ln\left(xe^{x}\right)\right)\le\frac{e}{e-1}$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $\ln\left(xe^{x}\right)=1$.

Επομένως για κάθε $x>0$ ισχύει

$$f(x)+f\left(\ln\left(xe^{x}\right)\right)\le\frac{2e}{e-1}$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο αν:

$$\begin{cases} x=1 \\ \text{και} \\ \ln\left(xe^{x}\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{και} \\ \ln\left(1\cdot e^{1}\right)=1 \ (\text{ισχύει}) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x=1}$$

Έτσι για να ισχύει

$$f(x)+f\left(\ln\left(xe^{x}\right)\right)=\frac{2e}{e-1}$$

πρέπει και αρκεί $x=1$,

οπότε η εξίσωση (E) έχει μοναδική λύση το $x_1=1$, που σημαίνει ότι και

η δοθείσα εξίσωση έχει **μοναδική λύση** το $x_1=1$.

14ο **Θ Ε Μ Α Δ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Δ1. Επειδή,

η f είναι **παραγωγίσιμη** στο $(0,+\infty)$, έπεται ότι για κάθε $x>0$ η f

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ** στο $[x,2x]$,

οπότε υπάρχει $\xi\in(x,2x)$, ώστε να ισχύει :

$$f'(\xi)=\frac{f(2x)-f(x)}{2x-x}\Leftrightarrow xf'(\xi)=f(2x)-f(x)$$

οπότε

$$\boxed{\mathbf{f(2x)=f(x)+xf'(\xi):(1)}}$$

Δ2. Είναι

$$g'(x)=\left(\frac{f(2x)-f(x)}{x}\right)'=$$

$$=\frac{\left(2f'(2x)-f'(x)\right)x-\left(f(2x)-f(x)\right).1}{x^2}$$

$$\overset{(1)}{=}\frac{2xf'(2x)-xf'(x)-\left[\left(f(x)+xf'(\xi)\right)-f(x)\right]}{x^2}$$

$$=\frac{x\left(2f'(2x)-f'(x)-f'(\xi)\right)}{x^2}$$

$$=\frac{2f'(2x)-f'(x)-f'(\xi)}{x}$$

Έχουμε όμως:

$$0<x<\xi<2x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f'(\xi)<f'(2x)\\ f'(x)<f'(2x)\end{cases}\left(\begin{array}{l}\text{η } f' \text{ είναι γν.αύξουσα στο } (0,+\infty),\\ \text{αφού η f είναι κυρτή στο } (0,+\infty)\end{array}\right)$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow}f'(\xi)+f'(x)<2f'(2x)$$

$$\Rightarrow 2f'(2x)-f'(x)-f'(\xi)>0$$

$$\overset{(x>0)}{\Rightarrow}\frac{2f'(2x)-f'(x)-f'(\xi)}{x}>0$$

$$\Rightarrow g'(x)>0$$

Επειδή είναι $g'(x)>0$ για κάθε $x>0$, έπεται ότι

η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0,+\infty)$.

Δ3. Για κάθε $x>0$ και για κάθε $t\in[x,2x]$

έχουμε

$$0<x\le t\le 2x\Rightarrow g(x)\le g(t)\le g(2x),\ \left(g\uparrow(0,+\infty)\right)$$

$$\overset{(x>0)}{\Rightarrow}\frac{g(x)}{x}\le\frac{g(t)}{x}\le\frac{g(2x)}{x}$$

$$\Rightarrow\int_x^{2x}\frac{g(x)}{x}dt\le\int_x^{2x}\frac{g(t)}{x}dt\le\int_x^{2x}\frac{g(2x)}{x}dt$$

$$\Rightarrow\frac{g(x)}{x}(2x-x)\le\int_x^{2x}\frac{g(t)}{x}dt\le\frac{g(2x)}{x}(2x-x)$$

$$\Rightarrow g(x)\le\int_x^{2x}\frac{g(t)}{x}dt\le g(2x):(\Sigma)$$

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(2x)-f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{f(2x)}{2x}-\frac{f(x)}{x}\right)$$

$$= 2\cdot(2016)-2016 = 2016$$

(για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{2x}$ θέτουμε $u=2x$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty$,

οπότε, όταν $x\to+\infty$ έχουμε $u\to+\infty$. Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{2x}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}=2016$).

και

$$\lim_{x\to+\infty} g(2x) \overset{\left(\substack{w=2x \\ \lim_{x\to+\infty}(2x)=+\infty}\right)}{=} \lim_{w\to+\infty} g(w) = 2016 \text{,}$$

οπότε λόγω της (Σ) και του **κριτηρίου παρεμβολής**, προκύπτει ότι

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{g(t)}{x}dt = 2016}$$

Δ4. Έχουμε:

$$0<x<2x \Rightarrow g(x)<g(2x) \quad ,\left(g\uparrow(0,+\infty)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{f(2x)-f(x)}{x} < \frac{f(2(2x))-f(2x)}{2x}$$

$$\overset{(2x>0)}{\Rightarrow} 2.\left(f(2x)-f(x)\right) < f(4x)-f(2x)$$

$$\Rightarrow 2f(2x)-2f(x) < f(4x)-f(2x)$$

$$\Rightarrow f(4x)+2f(x) > 3f(2x)$$

Άρα για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$\boxed{f(4x)+2f(x)>3f(2x)}$$

15ο

B1. $4f(x)+2f(-x)=e^{x}-e^{-x}\quad :(1)$.

Από την (1) θέτοντας όπου x το $-x$

έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$4f(-x)+2f(x)=e^{-x}-e^{x}\quad :(2).$$

Οι σχέσεις (1) και (2) σχηματίζουν το σύστημα

$$\begin{cases}4f(x)+2f(-x)=e^{x}-e^{-x}\\2f(x)+4f(-x)=e^{-x}-e^{x}\end{cases}$$

Είναι

$$D=\begin{vmatrix}4&2\\2&4\end{vmatrix}=12\neq 0 \text{ και}$$

$$D_{f(x)}=\begin{vmatrix}e^{x}-e^{-x}&2\\e^{-x}-e^{x}&4\end{vmatrix}=4\left(e^{x}-e^{-x}\right)-2\left(e^{-x}-e^{x}\right)=6\left(e^{x}-e^{-x}\right)$$

οπότε

$$\boxed{\mathbf{f(x)=\frac{D_{f(x)}}{D}=\frac{6\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{12}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}}}$$

B2. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$x^{2}+1>x^{2}\Rightarrow\sqrt{x^{2}+1}>\sqrt{x^{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|x|<\sqrt{x^{2}+1}\Rightarrow-\sqrt{x^{2}+1}<x<\sqrt{x^{2}+1}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{x^{2}+1}<x\\x<\sqrt{x^{2}+1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+\sqrt{x^{2}+1}>0\\x-\sqrt{x^{2}+1}<0\end{cases}$$

B3. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνάρτηση $1-1$.

Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι **γνησίως μονότονη** στο $D_f=\mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}>0,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}\ ,$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως η f, ως **γνησίως μονότονη** στο πεδίο ορισμού της, είναι συνάρτηση $1-1$.

Άρα η f έχει **αντίστροφη** συνάρτηση και το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $f(\mathbb{R})$.

- **Εύρεση του $f(\mathbb{R})$ και του τύπου της f^{-1}.**

Θεωρούμε την εξίσωση $f(x)=y$ και την λύνουμε ως προς x.

Έχουμε

$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{e^x-e^{-x}}{2}=y$$

$$\Leftrightarrow e^x-\frac{1}{e^x}=2y \Leftrightarrow e^{2x}-1=2ye^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^x\right)^2-2ye^x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x=y-\sqrt{y^2+1}<0 \ (\alpha\pi o\rho.) \\ e^x=y+\sqrt{y^2+1}>0 \ (\delta\varepsilon\kappa\tau\eta) \end{cases} . \left(\begin{array}{l} \ldots\ \omega=e^x \\ \omega^2-2y\cdot\omega-1=0 \\ \Delta=(-2y)^2+4\ =4\left(y^2+1\right)>0 \\ \omega_{1,2}=\dfrac{2y\pm2\sqrt{y^2+1}}{2}=y\pm\sqrt{y^2+1} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow e^x=y+\sqrt{y^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right)=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\in D_f=\mathbb{R}$$

(για κάθε $y\in\mathbb{R}$, αφού $y+\sqrt{y^2+1}>0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$)

Επομένως το **σύνολο τιμών** της f είναι το $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και είναι

$$f^{-1}(y)=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right).$$

Άρα η **αντίστροφη** συνάρτηση της f ορίζεται ως εξής :

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \ \mu\varepsilon \ \boxed{\mathbf{f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}}.$$

B4. Θέτουμε $\omega=x+\sqrt{x^2+1}$.

Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+(-x)}\overset{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=}0.$$

Και είναι $x+\sqrt{x^2+1}>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

Έτσι, όταν $x\to-\infty$ έχουμε $\omega\to 0^+$,
οπότε είναι

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f^{-1}(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]=\lim_{\omega\to 0^+}(\ln\omega)=-\infty}.$$

15ο **ΘΕΜΑ Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Γ1. Έχουμε

$$\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h^2+3h}=\frac{f(x+2h)-f(x)-f(x-h)+f(x)}{h(h+3)}$$

$$=2\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\cdot\frac{1}{h+3}+\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\cdot\frac{1}{h+3}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $h\in\mathbb{R}-\{0,-3\}$

Είναι:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\overset{\left(\substack{h_1=2h\\ \lim_{h\to0}(2h)=0}\right)}{=}\lim_{h_1\to0}\frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1}=f'(x)$$

και

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\overset{\left(\substack{h_2=-h\\ \lim_{h\to0}(-h)=0}\right)}{=}\lim_{h_2\to0}\frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}=f'(x)$$

Έτσι έχουμε:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h^2+3h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\left[2\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\cdot\frac{1}{h+3}+\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\cdot\frac{1}{h+3}\right]$$

$$=2f'(x)\cdot\frac{1}{0+3}+f'(x)\cdot\frac{1}{0+3}=\frac{2}{3}f'(x)+\frac{1}{3}f'(x)=f'(x)$$

Είναι όμως

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h^2+3h}=\frac{2x}{x^2+1}f(x)$$

οπότε ισχύει

$$\boxed{\mathbf{f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}f(x)}},$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ2. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}f(x)$$

$$\Leftrightarrow f'(x)(x^2+1)=2xf(x)$$

$$\Leftrightarrow f'(x)(x^2+1)-f(x)2x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)(x^2+1)-f(x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2+1}\right)'=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2+1}=c\,,\,(c\in\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow f(x)=c(x^2+1)$$

Έχουμε , όμως

$$f(0)=1\Leftrightarrow c(0^2+1)=1\Leftrightarrow c=1$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{f(x)=x^2+1,\ x\in\mathbb{R}}}$$

Γ3. Η συνάρτηση $f(x)=x^2+1$ είναι **παραγωγίσιμη** στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x)=2x.$$

Η εξίσωση της **εφαπτομένης** (ε) της C_f στο σημείο της $M(x_0,f(x_0))$ είναι

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

$$\Leftrightarrow y-(x_0^2+1)=2x_0(x-x_0)$$

$$\Leftrightarrow y=(2x_0)\cdot x+1-x_0^2$$

Για να διέρχεται η (ε) από το $O(0,0)$ πρέπει και αρκεί να είναι

$$0=(2x_0)\cdot 0+1-x_0^2\Leftrightarrow x_0^2=1\Leftrightarrow x_0=\pm1$$

Για $x_0=1$ η εξίσωση της (ε) γίνεται $y=2x$.

Για $x_0=-1$ η εξίσωση (ε) της γίνεται $y=-2x$.

Άρα οι **εφαπτόμενες** της C_f που διέρχονται από την **αρχή** των αξόνων είναι οι ευθείες

$$\varepsilon_1: y=2x,\ \varepsilon_2: y=-2x$$

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\frac{f(x)}{e^x}=(x^2+1)e^{-x},\ x\geq 0$$

Είναι

$$g'(x)=...=2xe^{-x}+(x^2+1)(-e^{-x})=-(x^2+1-2x)e^{-x}=-(x-1)^2e^{-x},\ x\geq 0$$

Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ ισχύει $g'(x)<0$ και η g είναι **συνεχής** στο $x_0=1$, οπότε η g είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $[0,+\infty)$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$		↘		↘	

Επειδή η g είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $[0,+\infty)$,

έπεται ότι για κάθε $x\geq 0$ ισχύει

$$g(x)\leq g(0)\Leftrightarrow\frac{f(x)}{e^x}\leq\frac{f(0)}{e^0}=\frac{1}{1}=1\Rightarrow$$

$$\boxed{f(x)\leq e^x}$$

15ο **ΘΕΜΑ Δ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Δ1. Έχουμε

$$x^2f'(x)+y^2f'(y)>x^2f'(y)+y^2f'(x):(1).$$

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$.

Λόγω της (1) έχουμε ότι ισχύει :

$$x_1^2f'(x_1)+x_2^2f'(x_2)>x_1^2f'(x_2)+x_2^2f'(x_1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 f'(x_1) - x_1^2 f'(x_2) + x_2^2 f'(x_2) - x_2^2 f'(x_1) > 0$$

$$\Rightarrow x_1^2\left(f'(x_1) - f'(x_2)\right) - x_2^2\left(f'(x_1) - f'(x_2)\right) > 0$$

$$\Rightarrow \left(x_1^2 - x_2^2\right)\left(f'(x_1) - f'(x_2)\right) > 0 \ :(2)$$

Διακρίνουμε:

1. $0 \le x_1 < x_2$, τότε θα έχουμε :

$$0 \le x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 < 0 \ :(\alpha)$$

Από την (2), λόγω της (α), έχουμε:

$$f'(x_1) - f'(x_2) < 0, \text{ οπότε } f'(x_1) < f'(x_2).$$

Επομένως η f' είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[0,+\infty)$.

2. $x_1 < x_2 \le 0$, τότε θα έχουμε:

$$x_1 < x_2 \le 0 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 > 0 \ :(\beta)$$

Από (2) και (β) προκύπτει ότι

$$f'(x_1) - f'(x_2) > 0,$$

οπότε

$$f'(x_1) > f'(x_2).$$

Επομένως η f' είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty,0]$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι f είναι **κοίλη** στο $(-\infty,0]$ και **κυρτή** στο $[0,+\infty)$.

Δ2. Επειδή

η f' είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty,0]$ και **γνησίως αύξουσα** στο $[0,+\infty)$,

έπεται ότι η f' παρουσιάζει μόνο στο $x_0 = 0$ **ολικό ελάχιστο**, το

$$\min f'(x) = f'(0) = 0.$$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x) \ge \min f'(x) = f'(0) = 0$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$, οπότε

η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Έχουμε:

$$f\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)=x^3 \ :(3)$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_0 \neq 0$ ώστε $f(x_0) \neq x_0{}^3$.

Τότε θα είναι

$$f(x_0) > x_0{}^3 \text{ ή } f(x_0) < x_0{}^3.$$

Έστω $f(x_0) > x_0{}^3$, τότε θα έχουμε:

$$f(x_0) > x_0{}^3 \overset{\binom{x_0 \neq 0}{x_0{}^2 > 0}}{\Rightarrow} \frac{f(x_0)}{x_0{}^2} > x_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{f(x_0)}{x_0{}^2}\right) > f(x_0) \ , \text{(αφού η είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}\text{)}$$

$\overset{(3)}{\Rightarrow} x_0{}^3 > f(x_0) \Rightarrow f(x_0) < x_0{}^3$, **ΑΤΟΠΟ**!!,αφού υποθέσαμε ότι

$$f(x_0) > x_0{}^3.$$

Ομοίως σε άτοπο καταλήγουμε αν υποθέσουμε ότι

$$f(x_0) < x_0{}^3.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για κάθε $x \neq 0$, ισχύει $f(x)=x^3$.

Μένει να βρούμε το $f(0)$.

Η f είναι **συνεχής** στο $x_0=0$,ως **παραγωγίσιμη** ,οπότε ισχύει :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

Άρα

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^3 = 0 \ .$$

Έτσι είναι

$$f(x)=x^3, \text{ για κάθε } x \neq 0 \text{ και } f(0)=0,$$

οπότε είναι

$$\boxed{\mathbf{f(x)=x^3}}, x \in \mathbb{R} \text{ (ικανοποιεί την υπόθεση)}$$

Δ4. **i.** Το πλήθος των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία $(\varepsilon): x+y=\lambda$ ισούται με το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=-x+\lambda$, οι (πραγματικές) ρίζες της οποίας είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και (ε).

Έχουμε

$$f(x)=-x+\lambda \Leftrightarrow x^3+x-\lambda=0 \Leftrightarrow g(x)=0,$$

όπου

$$g(x)=x^3+x-\lambda, x\in\mathbb{R}.$$

Έτσι η εξίσωση $f(x)=-x+\lambda$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $g(x)=0$.

- Η συνάρτηση g είναι **παραγωγίσιμη** στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x)=3x^2+1>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

οπότε η g είναι **γνήσια αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

- Η g ως πολυωνυμική είναι **συνεχής** στο $[0,\lambda]$, με $\lambda>0$.

Ακόμη είναι

$$g(0)=-\lambda<0 \quad \text{και } g(\lambda)=\lambda^3>0$$

Δηλαδή

$$g(0)g(\lambda)<0.$$

Άρα η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θεωρήματος Bolzano** στο $[0,\lambda]$, οπότε υπάρχει $x_0\in(0,\lambda)$, ώστε:

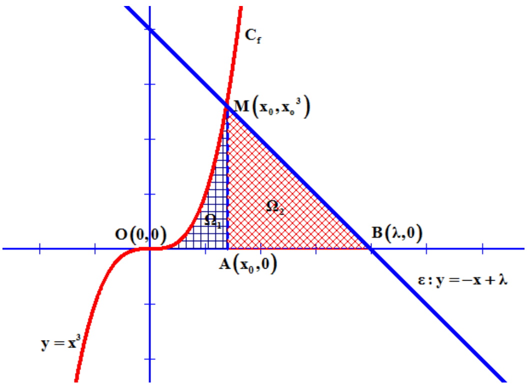
$$g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)+x_0-\lambda=0 \Leftrightarrow f(x_0)=-x_0+\lambda.$$

Το x_0 είναι **μοναδικό** στο $\mathbb{R}$, αφού η g είναι **γνησίως μονότονη** στο $\mathbb{R}$.

Επομένως η C_f και η ευθεία (ε) έχουν **ακριβώς ένα κοινό σημείο**.

Το σημείο αυτό έχει τετμημένη $x_0>0$, αφού $x_0\in(0,\lambda)$.

ii. Η ευθεία $(\varepsilon): y=-x+\lambda$ τέμνει τη C_f στο σημείο $M(x_0,x_0{}^3)$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(\lambda,0)$.



Το **εμβαδόν** του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f ,τον άξονα $x'x$ και την ευθεία (ε), είναι

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2),$$

όπου $E(\Omega_1)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω_1 που περικλείεται από

τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=x_0$ και

$E(\Omega_2)$ το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $AB M$, όπου

$$A(x_0,0),\ B(\lambda,0) \text{ και } M(x_0,x_0^3).$$

Είναι:

- $E(\Omega_1)=\int_0^{x_0} f(x)dx=\int_0^{x_0} x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{x_0}=\frac{x_0^4}{4}-\frac{0^4}{4}=\frac{1}{4}x_0^4$ τ.μ. και
- $E(\Omega_2)=\frac{1}{2}(AB)(AM)=\frac{1}{2}(\lambda-x_0)x_0^3$ τ.μ. (αφού $0<x_0<\lambda$)

Επομένως είναι:

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)=\frac{1}{4}x_0^4+\frac{1}{2}(\lambda-x_0)x_0^3$$

Είναι όμως:

$$f(x_0)=-x_0+\lambda$$

$$\Leftrightarrow x_0^3=-x_0+\lambda$$

$$\Leftrightarrow \lambda=x_0^3+x_0$$

Οπότε:

$$E(\Omega)=\frac{1}{4}x_0^4+\frac{1}{2}\left(x_0^3+x_0-x_0\right)x_0^3=\frac{1}{2}x_0^6+\frac{1}{4}x_0^4 \text{ τ.μ.}$$

Έχουμε:

$$E(\Omega)=36$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x_0^6+\frac{1}{4}x_0^4=36$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^6+x_0^4=144$$

$$\Leftrightarrow h(x_0)=h(2)$$

Όπου

$$h(x)=2x^6+x^4,\ x>0.$$

Είναι

$$h'(x)=12x^5+4x^3>0,\ \text{για κάθε}\ x>0.$$

Επομένως η h είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0,+\infty)$, οπότε η h είναι $\mathbf{1-1}$.

Έτσι έχουμε,

$$h(x_0)=h(2)\Leftrightarrow x_0=2.$$

Άρα

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda=x_0^{\ 3}+x_0=2^3+2=10}},$$

είναι η ζητούμενη τιμή.

16ο

16ο **ΘΕΜΑ Β** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

B1.

- Είναι $f'(x)=(x+\ln x)'=1+\dfrac{1}{x}>0$ για κάθε $x>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επειδή η f είναι **γνησίως μονότονη** στο πεδίο ορισμού της, είναι συνάρτηση $1-1$, οπότε η f είναι **αντιστρέψιμη** και το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $f\left(\mathbb{R}_+^*\right)$.

- Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\ln x)\overset{((+\infty)+(+\infty))}{=}+\infty$ και

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}(x+\ln x)\overset{(0+(-\infty))}{=}-\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και **γνησίως αύξουσα** στο $(0,+\infty)$ έπεται ότι:

$$f((0,+\infty))=\left(\lim_{x\to0^+} f(x),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}.$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το

$$\boxed{\mathbf{f}\left(\mathbb{R}_+^*\right)=\mathbb{R}}.$$

Β2. Υποθέτουμε ότι η f^{-1} δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $f\left(\mathbb{R}_+^*\right)=\mathbb{R}$.

Τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$x_1 < x_2 \text{ και } f^{-1}(x_1) \geq f^{-1}(x_2).$$

Έχουμε όμως:

$$f^{-1}(x_1) \geq f^{-1}(x_2) \overset{\left(\substack{f \text{ γν.αύξουσα} \\ \text{στο } (0,+\infty)}\right)}{\Rightarrow} f\left(f^{-1}(x_1)\right) \geq f\left(f^{-1}(x_2)\right) \Rightarrow x_1 \geq x_2, \text{ άτοπο},$$

$$\text{αφού } x_1 < x_2.$$

Επομένως

η f^{-1} είναι **γνησίως αύξουσα** στο $f\left(\mathbb{R}_+^*\right)=\mathbb{R}$.

Β3. Επειδή η f^{-1} είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $f\left((0,+\infty)\right)=\mathbb{R}$ έπεται ότι:

$$f^{-1}(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty} f^{-1}(x), \lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x)\right).$$

Είναι όμως

$$f^{-1}(\mathbb{R})=D_f=(0,+\infty),$$

οπότε

$$\lim_{x\to-\infty} f^{-1}(x)=0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=+\infty.$$

Ακόμη ισχύει

$$f^{-1}(x)\in D_f=(0,+\infty) \text{ για κάθε } x\in f\left(\mathbb{R}_+^*\right)=\mathbb{R}.$$

Δηλαδή ισχύει $f^{-1}(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i.

- Για το $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln\left(f^{-1}(x)\right)}{x}$ θέτουμε $u=f^{-1}(x)$, οπότε είναι $x=f(u)$. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x)=0$ και $f^{-1}(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έπεται ότι όταν $x\to-\infty$ έχουμε $u\to 0^+$.

Άρα:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(f^{-1}(x)\right)}{x}=\lim_{u\to0^+}\frac{\ln u}{f(u)}=\lim_{u\to0^+}\frac{\ln u}{u+\ln u}\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{u\to0^+}\frac{(\ln u)'}{(u+\ln u)'}=\lim_{u\to0^+}\frac{\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}}=\lim_{u\to0^+}\frac{1}{u+1}=1}$$

- Για το $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xf^{-1}(x)\right)$ θέτουμε $u=f^{-1}(x)$, οπότε είναι $x=f(u)$.

Ομοίως, όταν $x\to-\infty$ έχουμε $u\to0^+$.
Άρα:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(xf^{-1}(x)\right)}=\lim_{u\to0^+}\left(f(u)u\right)=\lim_{u\to0^+}\left(u(u+\ln u)\right)=$$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{u+\ln u}{\frac{1}{u}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{u\to0^+}\frac{(u+\ln u)'}{\left(\frac{1}{u}\right)'}=\lim_{u\to0^+}\frac{1+\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}=$$

$$\boxed{=\lim_{u\to0^+}\left(-u^2-u\right)=0}.$$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=f(x)-\eta\mu x=x+\ln x-\eta\mu x\ ,\ x>0.$$

Η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ (ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων), οπότε η g είναι συνεχής στο $\left[e^{-3},1\right]$.

Ακόμη είναι:

- $g\left(e^{-3}\right)=e^{-3}+\ln\left(e^{-3}\right)-\eta\mu\left(e^{-3}\right)=\frac{1}{e^3}-3-\eta\mu\left(\frac{1}{e^3}\right)=-\left(\frac{e^3-1}{e^3}+2+\eta\mu\left(\frac{1}{e^3}\right)\right)<0$

  και
- $g(1)=1+\ln1-\eta\mu(1)=1-\eta\mu1>0$, (αφού $\eta\mu1<1$).

Οπότε

$$g\left(e^{-3}\right)g(1)<0.$$

Άρα η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θεωρήματος Bolzano** στο $\left[e^{-3},1\right]$, οπότε υπάρχει $x_0 \in \left(e^{-3},1\right) \subseteq (0,1)$ ώστε:

$$g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-\eta\mu x_0=0 \Leftrightarrow f(x_0)=\eta\mu x_0 \Leftrightarrow f^{-1}(\eta\mu x_0)=x_0.$$

Άρα υπάρχει $x_0 \in (0,1)$, ώστε

$$\boxed{\mathbf{f^{-1}(\eta\mu x_0)=x_0}}.$$

16ο **ΘΕΜΑ Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Γ1. $f(x)+f(2-x)=2x^2+\kappa x+4 \ (1)$

Από τη σχέση (1) για $x=0$ έχουμε:

$$f(0)+f(2)=4:(\alpha)$$

Από τη σχέση (1) για $x=2$ έχουμε:

$$f(2)+f(0)=12+2\kappa:(\beta)$$

Από (α) και (β) προκύπτει ότι

$$12+2\kappa=4 \Leftrightarrow 2\kappa=-8 \Leftrightarrow \kappa=-4$$

Γ2. Από την (1) και επειδή είναι $\kappa=-4$ έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x)+f(2-x)=2x^2-4x+4:(2)$$

Από τη (2) παραγωγίζοντας τα μέλη της ως προς x έχουμε:

$$\left(f(x)+f(2-x)\right)'=\left(2x^2-4x+4\right)'$$

$$\Leftrightarrow f'(x)+f'(2-x)(2-x)'=4x-4$$

$$\Leftrightarrow f'(x)-f'(2-x)=4x-4: \ (3)$$

Από την (3) για $x=0$ έχουμε

$$f'(0)-f'(2)=-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(0)-f'(2)<0 \Rightarrow f'(0)<f'(2)$$

Επειδή για $0<2$ ισχύει $f'(0)<f'(2)$ και η f' δόθηκε ότι είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι

η f' είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Από τη (2) για $x=0$ έχουμε

$$f(0)+f(2)=4$$

$$\Leftrightarrow 0+f(2)=4 \quad (\text{αφού } f(0)=0)$$

$$\Leftrightarrow f(2)=4$$

Επειδή ισχύει

$f(0)=0<2<4=f(2)$ και η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ (ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$).

προκύπτει , σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών,** ότι υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ τέτοιος, ώστε

$$\boxed{\mathbf{f(x_0)=2}}.$$

Γ4. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** σε καθένα από τα διαστήματα $[0,x_0]$ και $[x_0,2]$, οπότε υπάρχουν

$$x_1 \in (0,x_0) \text{ και } x_2 \in (x_0,2)$$

τέτοιοι, ώστε

$$f'(x_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{2-0}{x_0}=\frac{2}{x_0} \quad \text{και} \quad f'(x_2)=\frac{f(2)-f(x_0)}{2-x_0}=\frac{4-2}{2-x_0}=\frac{2}{2-x_0}$$

Έχουμε

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=\frac{1}{\frac{2}{x_0}}+\frac{1}{\frac{2}{2-x_0}}=$$

$$=\frac{x_0}{2}+\frac{2-x_0}{2}=\frac{x_0+(2-x_0)}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Άρα υπάρχουν $x_1,x_2 \in (0,2)$ τέτοιοι, ώστε

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=1$$

Γ5. Έχουμε :

$$0<x_1<x_0<x_2<2 \Rightarrow x_1<x_2 \overset{(f'\uparrow \mathbb{R})}{\Rightarrow} f'(x_1)<f'(x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x_0}<\frac{2}{2-x_0} \overset{\left(\substack{x_0>0 \\ 2-x_0>0}\right)}{\Rightarrow} 2(2-x_0)<2x_0 \Rightarrow 4-2x_0<2x_0 \Rightarrow 4x_0>4 \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{x_0>1}}$$

16ο **Θ Ε Μ Α Δ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\ln^2 x-\left(x+\frac{1}{x}-2\right),\ x>0.$$

Είναι

$$g'(x)=2\frac{\ln x}{x}-1+\frac{1}{x^2}=\frac{2x\ln x-x^2+1}{x^2}=\frac{h(x)}{x^2},$$

όπου

$$h(x)=2x\ln x-x^2+1,\ x>0.$$

Είναι

$$h'(x)=2\ln x+2-2x=2(\ln x-x+1).$$

Είναι γνωστό ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln x\le x-1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Έτσι για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$\ln x\le x-1\Rightarrow$$

$$\ln x-x+1\le 0\Rightarrow$$

$2(\ln x-x+1)\le 0\Rightarrow h'(x)\le 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Επομένως η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Έτσι, έχουμε:

- $x>1 \overset{(h\,:\,\text{γν.φθίνουσα})}{\Rightarrow} h(x)<h(1) \overset{(h(1)=0)}{\Rightarrow} h(x)<0 \overset{(x>0)}{\Rightarrow} \dfrac{h(x)}{x}<0\Rightarrow g'(x)<0$
- $0<x<1 \overset{(h\,:\,\text{γν.φθίνουσα})}{\Rightarrow} h(x)>h(1) \overset{(h(1)=0)}{\Rightarrow} h(x)>0 \overset{(x>0)}{\Rightarrow} \dfrac{h(x)}{x}>0\Rightarrow g'(x)>0$
- $g'(1)=\dfrac{h(1)}{1^2}=\dfrac{0}{1}=0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Από το πρόσημο της $g'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει ότι

η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0,1]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $[1,+\infty)$,

οπότε η g παρουσιάζει (μόνο) στο $x_0=1$ ολικό μέγιστο, το:

$$\max g(x)=g(1)=\ln^2 1-\left(1+\frac{1}{1}-2\right)=0$$

.

Επομένως για κάθε $x>0$ ισχύει

$$g(x)\le \max g(x)\Rightarrow \ln^2(x)-\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\le 0\Rightarrow$$

$$\boxed{\ln^2 x\le x+\frac{1}{x}-2},$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Δ2. **i.** Είναι:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x\right)'$$

$$=-\frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^2}-1$$

$$=-\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^2}-1$$

$$=\frac{1}{x(x+1)\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^2}-1$$

Από το **Δ1.** ερώτημα έχουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$(\ln x)^2\le x+\frac{1}{x}-2$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Επομένως για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^2<\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}-2,$$

αφού για κάθε $x>0$ είναι $1+\frac{1}{x}>1$

Οπότε:

$$\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^2<\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^2<\frac{1}{x}+\frac{x}{x+1}-1=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}\Rightarrow$$

$$\overset{(x(x+1)>0)}{\Rightarrow}\quad x(x+1)\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^2<1\Rightarrow$$

$$\underset{\text{μέλη}}{\overset{\text{θετικά}}{\Rightarrow}}\frac{1}{x(x+1)\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^2}>1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x(x+1)\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^2}-1>0\Rightarrow f'(x)>0$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}_+^*$.

ii. Είναι:

- $$\lim_{x\to0^+}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{\left(\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)=+\infty\right)}{\overset{\left(w=1+\frac{1}{x}\right)}{=}}\lim_{w\to+\infty}(\ln w)=+\infty$$, οπότε:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\overset{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=}0.$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - x\right) = 0 - 0 = 0$$

- Ακόμη είναι:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - x\right) \underset{\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{x}>0,\forall x>0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\end{smallmatrix}\right)}{\overset{\left(u=\frac{1}{x}\right)}{=}}$$

$$= \lim_{u\to 0^+}\left(\frac{1}{\ln(1+u)} - \frac{1}{u}\right)$$

$$= \lim_{u\to 0^+}\frac{u-\ln(1+u)}{u\ln(1+u)} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$= \lim_{u\to 0^+}\frac{\left(u-\ln(1+u)\right)'}{\left(u\ln(1+u)\right)'}$$

$$= \lim_{u\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{1+u}(1+u)'}{\ln(1+u)+u\frac{1}{1+u}(1+u)'}$$

$$= \lim_{u\to 0^+}\frac{\frac{u}{u+1}}{\ln(1+u)+\frac{u}{u+1}}$$

$$= \lim_{u\to 0^+}\frac{u}{(u+1)\ln(u+1)+u}$$

$$\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{u\to 0^+}\frac{(u)'}{\left((u+1)\ln(u+1)+u\right)'}$$

$$= \lim_{u\to 0^+}\frac{1}{\ln(1+u)+2} = \frac{1}{2}.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ έπεται ότι:

$$\boxed{f\left(\left(0,+\infty\right)\right)=\left(\lim_{x\to 0^+} f\left(x\right), \lim_{x\to +\infty} f\left(x\right)\right)=\left(0,\frac{1}{2}\right)}.$$

iii. Για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f\left(x\right)\in f\left(\left(0,+\infty\right)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(x\right)\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\Rightarrow 0<f\left(x\right)<\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0<\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x<\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x<\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}<x+\frac{1}{2}$$

$$\overset{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>0,\forall x>0\right)}{\Rightarrow}\begin{cases} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<1 \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]<\ln e \\ \ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}\right]>\ln e\end{cases}$$

$$\underset{\text{γν.αύξουσα}}{\overset{\ln x}{\Rightarrow}}\begin{cases} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<e \\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}>e\end{cases}\Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}}$$

iv. Για κάθε $x>0$ ισχύει

$$\ln^2 x\le x+\frac{1}{x}-2\ ,$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$, οπότε για κάθε $x\in\left[2,3\right]$ ισχύει:

$$\ln^2 x < x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln^2 x < \frac{(x-1)^2}{x}$$

$$\overset{(\text{θετικά μέλη})}{\Rightarrow} \frac{1}{\ln^2 x} > \frac{x}{(x-1)^2} \quad :(\alpha)$$

Λόγω της (α) προκύπτει ότι

$$\int_2^3 \frac{1}{\ln^2 x} dx > \int_2^3 \frac{x}{(x-1)^2} dx \quad :(\beta).$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_2^3 \frac{x}{(x-1)^2} dx$

θέτουμε $w = x - 1$, οπότε είναι $x = w + 1$ και $dx = dw$.

- Για $x = 2$ είναι $w = 1$.
- Για $x = 3$ είναι $w = 2$.

Άρα:

$$\int_2^3 \frac{x}{(x-1)^2} dx = \int_1^2 \frac{w+1}{w^2} dw =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w^2} \right) dw$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{w} dw + \int_1^2 \frac{1}{w^2} dw$$

$$= [\ln w]_1^2 - \left[\frac{1}{w} \right]_1^2$$

$$= (\ln 2 - \ln 1) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1} \right)$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}$$

Έτσι από την (β) προκύπτει ότι

$$\boxed{\int_2^3 \frac{1}{\ln^2 x} dx > \ln 2 + \frac{1}{2}}$$

17ο

17ο **ΘΕΜΑ Β** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

B1. $f^3(x)+f(x)=8x+2 \quad :(1)$

Υποθέτουμε ότι η f **δεν είναι γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$,

τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$x_1 < x_2 \text{ και } f(x_1) \geq f(x_2).$$

Έχουμε:

$$f(x_1) \geq f(x_2) \overset{(f \uparrow \mathbb{R})}{\Rightarrow} \begin{cases} f(f(x_1)) \geq f(f(x_2)) \\ f(x_1) \geq f(x_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^3(x_1)+f(x_1) \geq f^3(x_2)+f(x_2) \overset{(1)}{\Rightarrow} 8x_1+2 \geq 8x_2+2 \Rightarrow 8x_1 \geq 8x_2 \Rightarrow x_1 \geq x_2,$$

ΑΤΟΠΟ, αφού είναι $x_1 < x_2$.

Επομένως, η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

B2. Από την (1) για $x=0$ έχουμε :

$$f^3(0)+f(0)=8\cdot 0+2$$

$$\Leftrightarrow \omega^3+\omega-2=0, \left(\omega=f(0)\right)$$

$$\Leftrightarrow (\omega-1)(\omega^2+\omega+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega-1=0 \\ \quad \text{ή} \\ \omega^2+\omega+2=0, \left(\text{Αδύνατη στο } \mathbb{R}, \text{ αφού } \Delta=-7<0\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \omega=1 \Leftrightarrow f(0)=1.$$

Από την (1) για $x=1$ έχουμε

$$f^3(1)+f(1)=8\cdot 1+2 \Leftrightarrow y^3+y-10=0, \left(y=f(1)\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-2=0 \\ \quad \text{ή} \\ y^2+2y+5=0, \left(\text{Αδύνατη στο } \mathbb{R}, \text{ αφού } \Delta=-16<0\right) \end{cases} \Leftrightarrow y=2 \Leftrightarrow f(1)=2$$

Επειδή η f είναι συνεχής και **γνησίως αύξουσα** στο $[0,1)$ έπεται ότι

$$f\left(\left[0,1\right)\right)=\left[f\left(0\right),\ \lim_{x\to1^-}f\left(x\right)\right)$$

Είναι, όμως,

$$f\left(0\right)=1 \text{ και } \lim_{x\to1^-}f\left(x\right)=f\left(1\right)=2 \ \text{(αφού η } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0=1\text{)}$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{f\left(\left[0,1\right)\right)=\left[1,2\right)}}.$$

B3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g\left(x\right)=f\left(x\right)-8x$$

Η g είναι **συνεχής** στο $\left[0,1\right]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Ακόμη, είναι

$$g\left(0\right)=f\left(0\right)-8\cdot0==f\left(0\right)=1>0 \text{ και } g\left(1\right)=f\left(1\right)-8\cdot1=$$
$$=2-8=-6<0,$$

οπότε

$$g\left(0\right)g\left(1\right)<0.$$

Άρα η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θεωρήματος Bolzano** στο $\left[0,1\right]$, οπότε υπάρχει $x_0\in\left(0,1\right)$ τέτοιο ,ώστε

$$g\left(x_0\right)=0\Leftrightarrow f\left(x_0\right)-8x_0=0$$

$$\boxed{\mathbf{\Leftrightarrow f\left(x_0\right)=8x_0}}.$$

B4. Από την $\left(1\right)$ για $x=x_0$ έχουμε :

$$\left(f\left(x_0\right)\right)^3+f\left(x_0\right)=8x_0+2\Leftrightarrow$$

$$\overset{\left(f\left(x_0\right)=8x_0\right)}{\Leftrightarrow}\left(8x_0\right)^3+8x_0=8x_0+2\Leftrightarrow\left(8x_0\right)^3=2\Leftrightarrow 8x_0=\sqrt[3]{2}\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{x_0=\frac{\sqrt[3]{2}}{8}}}$$

B5.Έστω $x_0\in\mathbb{R}$.

Λόγω της (1) ισχύουν :

$$\begin{cases}f^3\left(x\right)+f\left(x\right)=8x+2\\ f^3\left(x_0\right)+f\left(x_0\right)=8x_0+2\end{cases}\Rightarrow f^3\left(x\right)+f\left(x\right)-\left(f^3\left(x_0\right)+f\left(x_0\right)\right)=8x+2-\left(8x_0+2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(f^3(x)-f^3(x_0)\right)+\left(f(x)-f(x_0)\right)=8(x-x_0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(f(x)-f(x_0)\right)\left[\left(f(x)\right)^2+f(x)f(x_0)+\left(f(x_0)\right)^2+1\right]=8(x-x_0):(2)$$

Είναι

$$\lim_{x\to x_0}\left[\left(f(x)\right)^2+f(x)f(x_0)+\left(f(x_0)\right)^2+1\right]\overset{(f\text{ :συνεχής στο }\mathbb{R})}{=}3\left(f(x_0)\right)^2+1>0,$$

οπότε είναι

$$\left(f(x)\right)^2+f(x)f(x_0)+\left(f(x_0)\right)^2+1>0\ \text{ κοντά στο } x_0.$$

Έτσι από την (2) έχουμε ότι κοντά στο x_0 ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{8}{\left(f(x)\right)^2+f(x)f(x_0)+\left(f(x_0)\right)^2+1},$$

οπότε είναι

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{8}{\left(f(x)\right)^2+f(x)f(x_0)+\left(f(x_0)\right)^2+1}$$

$$\overset{(f\text{ :συνεχής στο }\mathbb{R})}{=}\frac{8}{3\left(f(x_0)\right)^2+1}\in\mathbb{R}$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0\in\mathbb{R}$ με

$$f'(x_0)=\frac{8}{3\left(f(x_0)\right)^2+1},\ \text{για κάθε } x_0\in\mathbb{R}.$$

Δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$\boxed{\mathbf{f'(x)=\frac{8}{3\left(f(x)\right)^2+1},\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.}}$$

17ο **Θ Ε Μ Α Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Γ1. $2f\left(e^x\right)+f\left(e^{-x}\right)=x$: **(1)**.

Από την **(1)** θέτοντας όπου x το $\ln x$ έχουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$2f\left(e^{\ln x}\right)+f\left(e^{-\ln x}\right)=\ln x\Leftrightarrow 2f(x)+f\left(\frac{1}{e^{\ln x}}\right)=\ln x\Leftrightarrow 2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\ln x : \mathbf{(2)}.$$

Από την : **(2)** θέτοντας όπου x το $\dfrac{1}{x}$ έχουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x \quad \textbf{: (3)}\ .$$

Οι σχέσεις **(2)** και **(3)** σχηματίζουν το σύστημα:

$$\begin{cases} 2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\ln x \\ f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x \end{cases} \quad \textbf{: (Σ)}$$

Είναι

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3\neq 0 \text{ και } D_{f(x)}=\begin{vmatrix} \ln x & 1 \\ -\ln x & 2 \end{vmatrix}=3\ln x \ , \text{ οπότε}$$

$$f(x)=\frac{D_{f(x)}}{D}=\frac{3\ln x}{3}=\ln x\ .$$

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η $f(x)=\ln x\ ,\ x>0$ ικανοποιεί την υπόθεση.

Άρα είναι

$$\boxed{\mathbf{f(x)=\ln x}}\ ,\ x>0\,.$$

Γ2. Είναι

$$f(x)=\ln x\,,\ f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}\ .$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης **(ε)** της C_f στο σημείο της $M(x_0,f(x_0))$, $(x_0>0)$ είναι :

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)\Leftrightarrow y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)\Leftrightarrow y=\frac{1}{x_0}x+\ln x_0-1\ .$$

Για να διέρχεται η ευθεία **(ε)** από το σημείο $\mathbf{N(-e^3,1)}$ πρέπει και αρκεί να ισχύει :

$$1=\frac{1}{x_0}\cdot(-e^3)+\ln x_0-1\Leftrightarrow \ln x_0-\frac{e^3}{x_0}=2\Leftrightarrow h(x_0)=2\ ,$$

όπου $h(x)=\ln x-\dfrac{e^3}{x},x>0$.

Είναι : $h'(x)=\left(\ln x-\dfrac{e^3}{x}\right)'=\dfrac{1}{x}+\dfrac{e^3}{x^2}>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Επομένως η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$,οπότε είναι 1-1.

Ακόμη είναι : $h(e^3)=\ln(e^3)-\dfrac{e^3}{e^3}=3-1=2$.

Έτσι έχουμε : $h(x_0)=2 \overset{(h(e^3)=2)}{\Leftrightarrow} h(x_0)=h(e^3) \overset{(h:1-1)}{\Leftrightarrow} x_0=e^3$

Για $x_0=e^3$ η εξίσωση της ευθείας **(ε)** γίνεται $y=\dfrac{1}{e^3}x+\ln(e^3)-1 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{e^3}x+2$.

Άρα **(ε) :** $y=\dfrac{1}{e^3}x+2$ είναι η ζητούμενη ευθεία.

Γ3. Η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, οπότε, για $0<\alpha<\beta<\gamma$,η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** σε καθένα από τα διαστήματα

$$[\alpha,\beta]\ ,\ [\beta,\gamma].$$

Επομένως, υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ και $\xi_2\in(\beta,\gamma)$, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow\frac{1}{\xi_1}=\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}\quad \textbf{: (4)}\ \text{και}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}\Leftrightarrow\frac{1}{\xi_2}=\frac{\ln\gamma-\ln\beta}{\gamma-\beta}\quad \textbf{: (5)}.$$

Έχουμε:

$$0<\alpha<\xi_1<\beta<\xi_2<\gamma\Rightarrow\frac{1}{\xi_1}>\frac{1}{\xi_2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}>\frac{\ln\gamma-\ln\beta}{\gamma-\beta}\underset{(\beta-\alpha>0)}{\overset{(\gamma-\beta>0)}{=}}(\gamma-\beta)\cdot\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)>(\beta-\alpha)\ln\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)$$

$$\Rightarrow\ln\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\gamma-\beta}\right]>\ln\left[\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\beta-\alpha}\right]\overset{(\ln x\uparrow(0,+\infty))}{\Rightarrow}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\gamma-\beta}>\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\beta-\alpha}$$

$$\Rightarrow\frac{\beta^{\gamma-\beta}}{\alpha^{\gamma-\beta}}>\frac{\gamma^{\beta-\alpha}}{\beta^{\beta-\alpha}}\Rightarrow\beta^{\gamma-\beta}\cdot\beta^{\beta-\alpha}>\gamma^{\beta-\alpha}\cdot\alpha^{\gamma-\beta}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\beta^{\gamma-\alpha}>\gamma^{\beta-\alpha}\cdot\alpha^{\gamma-\beta}\Rightarrow\frac{\beta^{\gamma}}{\beta^{\alpha}}>\frac{\gamma^{\beta}}{\gamma^{\alpha}}\cdot\frac{\alpha^{\gamma}}{\alpha^{\beta}}\Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \alpha^{\beta}\cdot\beta^{\gamma}\cdot\gamma^{\alpha} > \beta^{\alpha}\cdot\gamma^{\beta}\cdot\alpha^{\gamma}}$$

17ο **Θ Ε Μ Α Δ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Δ1. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$xf'(x)+\left(1-\frac{1}{x}\right)f^2(x)=f(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)-xf'(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)f^2(x)$$

$$\overset{(f(x)\neq 0)}{\Leftrightarrow} \frac{(x)'f(x)-xf'(x)}{(f(x))^2} = 1-\frac{1}{x}$$

$$\overset{(x>0)}{\Leftrightarrow}\left(\frac{x}{f(x)}\right)'=(x-\ln x)'$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{f(x)}=x-\ln x+c$$

Για $x=1$ έχουμε:

$$\frac{1}{f(1)}=1-\ln 1+c\Leftrightarrow \frac{1}{1}=1-0+c\Leftrightarrow c=0.$$

Άρα για κάθε $x>0$ ισχύει

$$\frac{x}{f(x)}=x-\ln x.$$

Είναι

$$\ln x\le x-1<x \text{ για κάθε } x>0,$$

οπότε

$$x-\ln x>0 \text{ για κάθε } x>0.$$

Έτσι έχουμε:

$$\frac{x}{f(x)}=x-\ln x\Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(x)=\frac{x}{x-\ln x},\ x>0}$$

Δ2. Είναι:

$$f'(x)=\left(\frac{x}{x-\ln x}\right)'=\frac{(x)'(x-\ln x)-x(x-\ln x)'}{(x-\ln x)^2}$$

$$=\frac{x-\ln x-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2}=\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$$

Έχουμε:

- $\begin{cases} f'(x)>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\ln x>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x<1=\ln e \\ x>0 \end{cases} \overset{(\ln x\uparrow(0,+\infty))}{\Leftrightarrow} 0<x<e$

- $\begin{cases} f'(x)<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\ln x<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x>1=\ln e \\ x>0 \end{cases} \overset{(\ln x\uparrow(0,+\infty))}{\Leftrightarrow} x>e$

- $\begin{cases} f'(x)=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\ln x=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x=1=\ln e \\ x>0 \end{cases} \overset{(\ln x:1-1)}{\Leftrightarrow} x=e$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	max	↘	

Από το πρόσημο της $f'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει ότι η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0,e]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $[e,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει στο $x_0=e$, **ολικό μέγιστο**, το

$$\boxed{\max f(x)=f(e)=\frac{e}{e-1}}.$$

Δ3. Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x-\ln x} = 0$$

(αφού $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ και $\lim_{x\to 0^+} (x-\ln x) = +\infty$)

- $$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x-\ln x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}} = \frac{1}{1-0} = 1$$

$$\left(\text{αφού είναι : } \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0\right)$$

Για το σύνολο τιμών της f έχουμε:

- Η f είναι **συνεχής** και **γνησίως αύξουσα** στο $(0,e]$, οπότε

$$f\left((0,e]\right) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), f(e)\right] = \left(0, \frac{e}{e-1}\right].$$

- Η f είναι **συνεχής** και **γνησίως φθίνουσα** στο $[e,+\infty)$, οπότε:

$$f\left([e,+\infty)\right) = \left(\lim_{x\to +\infty} f(x), f(e)\right] = \left(1, \frac{e}{e-1}\right].$$

Άρα το **σύνολο τιμών** της f είναι:

$$\boxed{\mathbf{f\left((0,+\infty)\right) = f\left((0,e]\right) \cup f\left([e,+\infty)\right) = \left(0, \frac{e}{e-1}\right] \cup \left(1, \frac{e}{e-1}\right] = \left(0, \frac{e}{e-1}\right]}}$$

Δ4. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$e^{(\kappa-1)x} \geq x^{\kappa} \Leftrightarrow \ln\left(e^{(\kappa-1)x}\right) \geq \ln\left(x^{\kappa}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\kappa-1)x \geq \kappa \ln x \Leftrightarrow \kappa x - x \geq \kappa \ln x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa(x-\ln x) \geq x \overset{(x-\ln x>0)}{\Leftrightarrow} \frac{x}{x-\ln x} \leq \kappa \Leftrightarrow f(x) \leq \kappa.$$

Επειδή η f έχει ολικό μέγιστο, έπεται ότι για να ισχύει $f(x) \leq \kappa$ για κάθε $x>0$ πρέπει και αρκεί να είναι:

$$\max f(x) \leq \kappa \Leftrightarrow \frac{e}{e-1} \leq \kappa \Leftrightarrow \kappa \geq \frac{e}{e-1}.$$

Επομένως για να ισχύει $\mathbf{e^{(\kappa-1)x} \geq x^{\kappa}}$ **για κάθε** $\mathbf{x>0}$, πρέπει και αρκεί

$$\boldsymbol{\kappa \geq \frac{e}{e-1}}.$$

Δ5. Για κάθε $x>e$ και για κάθε $t\in[x,x+1]$ έχουμε:

$$e<x\leq t\leq x+1 \Rightarrow$$

$$\underset{\text{στο }[e,+\infty)}{\overset{f\text{ γν.φθίνουσα}}{\Longrightarrow}} f(x)\geq f(t)\geq f(x+1)$$

$$\Rightarrow f(x+1)\leq f(t)\leq f(x)$$

$$\Rightarrow \int_x^{x+1} f(x+1)dt \leq \int_x^{x+1} f(t)dt \leq \int_x^{x+1} f(x)dt$$

$$\Rightarrow f(x+1)\big((x+1)-x\big)\leq \int_x^{x+1} f(t)dt \leq f(x)\big((x+1)-x\big)$$

$$\Rightarrow f(x+1)\leq \int_x^{x+1} f(t)dt \leq f(x) \quad :(\alpha)$$

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1 \text{ και } \lim_{x\to+\infty} f(x+1) \underset{\left(\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty\right)}{\overset{(u=x+1)}{=}} \lim_{u\to+\infty} f(u)=1,$$

οπότε, λόγω της (α) και του **κριτηρίου παρεμβολής** προκύπτει ότι

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)dt=1}.$$