ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

1ο. **ΓΕΝΙΚΟ ΘΕΜΑ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

1. $e^{f(x)}+f(x)=x \quad :(1)$

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$

$$\text{Έχουμε}: f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\begin{cases} e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)} \\ f(x_1)=f(x_2)\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}e^{f(x_1)}+f(x_1)=e^{f(x_2)}+f(x_2)\overset{(1)}{\Rightarrow}x_1=x_2$$

Άρα η f είναι συνάρτηση **1−1**.

2. **$1^{ος}$ τρόπος:** $(1)\Rightarrow\left(e^{f(x)}+f(x)\right)'=(x)'\Rightarrow e^{f(x)}f'(x)+f'(x)=1$

$$\left(e^{f(x)}+1\right)f'(x)=1\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{e^{f(x)}+1}>0, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$

$2^{ος}$ τρόπος: Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=e^x+x$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $g'(x)=e^x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η (1) γράφεται $g(f(x))=x \quad :(2)$

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Έχουμε

$$x_1<x_2\overset{(2)}{\Rightarrow}g(f(x_1))<g(f(x_1))\overset{(**)}{\Rightarrow}f(x_1)<f(x_2)$$

(* * αφού η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$)

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

$3^{ος}$ τρόπος: Απαγωγή σε άτοπο.

Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε θα υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$$x_1<x_2 \text{ και } f(x_1)\geq f(x_2).$$

Έχουμε:

$$f(x_1)\geq f(x_2)\Rightarrow g(f(x_1))\geq g(f(x_2)) \text{ (αφού η } g \text{ γν. αύξουσα στο } \mathbb{R}\text{)}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow}x_1\geq x_2 \text{ ,ΑΤΟΠΟ, αφού είναι } x_1<x_2.$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

3. Από την (1) για $x=1$ έχουμε:

$$e^{f(1)}+f(1)=1 \Leftrightarrow g(f(1))=g(0), \left(g(0)=e^{0}+0=1\right)$$

$$\Leftrightarrow f(1)=0$$

(γιατί η g, ως **γνησίως μονότονη** στο $\mathbb{R}$, είναι συνάρτηση **1−1**)

Έχουμε:

- $x>1 \Rightarrow f(x)>f(1), (f \text{ γν. αύξ } \mathbb{R})$
  $\Rightarrow f(x)>0$

- $x<1 \Rightarrow f(x)<f(1), (f \text{ γν.αύξ} \mathbb{R})$
  $\Rightarrow f(x)<0$

Άρα:

$$f(x)<0 \text{, για κάθε } x \in (-\infty,1)$$

$$f(x)>0 \text{, για κάθε } x \in (1,+\infty)$$

$$f(1)=0$$

4. Έστω $y \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την εξίσωση $f(x)=y$ με αγνωστο το x και αναζητούμε τις τιμές του y για τις οποίες η εξίσωση αυτή έχει μία τουλάχιστον λύση στο $D_f=\mathbb{R}$.Έχουμε :

- $f(x)=y \Leftrightarrow g(f(x))=g(y)$ (η g ως **γν. μονότονη** στο R είναι συνάρτηση **1−1**)
  $\overset{(2)}{\Leftrightarrow} x=g(y)$

Άρα για κάθε $y \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x)=y$ έχει λύση ως προς x στο $D_f=R$ η οποία είναι $x=g(y)=e^{y}+y$, οπότε $f(\mathbb{R}) \supseteq \mathbb{R}$ και επειδή είναι και $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, έπεται ότι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

5. Επειδή η συνάρτηση f είναι **συνεχής** και **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι:

$$\mathbf{f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)}$$

Όμως είναι: $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, οπότε:

$$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$$

Επομένως είναι:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty} \quad \text{και} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$$

6. Η f ως **γνησίως μονότονη** στο R είναι συνάρτηση $\mathbf{1-1}$, οπότε η f έχει αντίστροφη συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού είναι το $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και επειδή ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)=y \Leftrightarrow x=g(y)=e^y+y$$

έπεται ότι:

$$f^{-1}(y)=e^y+y.$$

Άρα η **αντίστροφη** συνάρτηση της f ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{\mathbf{f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \ \ \text{με} \ \ f^{-1}(x)=e^x+x}}$$

7. Για κάθε $x\in f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ ισχύει : $\boxed{\mathbf{f\left(f^{-1}(x)\right)=x \overset{\left(f^{-1}(x)=e^x+x\right)}{\Rightarrow} f\left(e^x+x\right)=x \quad :(3)}}$

8. Είναι:

$$f'(x)=\frac{1}{e^{f(x)}+1},$$

οπότε η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f''(x)=-\frac{\left(e^{f(x)}+1\right)'}{\left(e^{f(x)}+1\right)^2}=-\frac{1}{\left(e^{f(x)}+1\right)^2}\cdot e^{f(x)}f'(x)=$$

$$=-\frac{1}{\left(e^{f(x)}+1\right)^2}e^{f(x)}\cdot\frac{1}{e^{f(x)}+1}=-\frac{e^{f(x)}}{\left(e^{f(x)}+1\right)^3}<0, \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Άρα η f είναι **κοίλη** στο $\mathbb{R}$ και η C_f **δεν** έχει **σημείο καμπής**.

9. Έχουμε:

$$e^{f(x)}+f(x)=x \Rightarrow f(x)=x-e^{f(x)} \quad :(4)$$

Οπότε είναι :

$$f(x) > x-1 \overset{(4)}{\Leftrightarrow} x-e^{f(x)} > x-1 \Leftrightarrow e^{f(x)} < e^{0} \Leftrightarrow f(x) < 0, \left(e^{x} \text{ γν.αύξ } \mathbb{R}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(x) < f(1) \ , \quad \left(f(1)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow x < 1 \ , \ \left(f \text{ γν.αύξ } \mathbb{R}\right)$$

Άρα η δοθείσα **ανίσωση αληθεύει** για κάθε $x \in (-\infty, 1)$.

10. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(f(x)\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{f(x)}} \underset{\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\right)}{\overset{(u=f(x))}{=}} \lim_{u\to+\infty}\frac{1}{1+e^{u}} \overset{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=} 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(f(x)\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+e^{f(x)}} \underset{\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\right)}{\overset{(u=f(x))}{=}} \lim_{u\to-\infty}\frac{1}{1+e^{u}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

11. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $M(x_o, f(x_0))$ είναι:

$$y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$$

Για να διέρχεται η (ε) από το σημείο $O(0,0)$ πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$0 - f(x_o) = f'(x_o)(0 - x_o) \Leftrightarrow x_o f'(x_o) - f(x_o) = 0$$

Θα δείξουμε ότι η εξίσωση:

$$xf'(x) - f(x) = 0 : (E)$$

έχει **μοναδική λύση** στο $\mathbb{R}$.

Είναι:

$$f'(x) = \frac{1}{1+e^{f(x)}} \quad \text{και} \quad x = e^{f(x)} + f(x),$$

οπότε η εξίσωση (E) είναι ισοδύναμη με την:

$$\left(e^{f(x)}+f(x)\right)\frac{1}{1+e^{f(x)}}-f(x)=0$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)}+f(x)-f(x)-f(x)e^{f(x)}=0$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)}\left(1-f(x)\right)=0 \overset{\left(e^{f(x)}\neq 0\right)}{\Leftrightarrow} f(x)=1$$

Επειδή όμως $1\in f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ έπεται ότι η εξίσωση $f(x)=1$ έχει λύση στο $\mathbb{R}$ και μάλιστα **μοναδική**, αφού η f είναι **γνησίως μονότονη** στο $\mathbb{R}$.

Επομένως υπάρχει **μοναδική εφαπτομένη** της C_f η οποία **διέρχεται** από την **αρχή** των αξόνων.

Έχουμε : $x_o f'(x_o)-f(x_o)=0\Leftrightarrow f(x_o)=1\Leftrightarrow x_o=f^{-1}(1)=e^1+1=e+1$

Είναι : $f(x_o)=1$ και $f'(x_0)=\dfrac{1}{e^{f(x_0)}+1}=\dfrac{1}{e^1+1}=\dfrac{1}{e+1}$, οπότε η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης της C_f είναι :

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-1=\frac{1}{e+1}\left(x-(e+1)\right)\Leftrightarrow \boxed{y=\frac{1}{e+1}x}$$

12. Θεωρώ την συνάρτηση $\varphi(x)=2\int_1^x f(t)dt-(x-1)^2,\quad x\in\mathbb{R}$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση $L(x)=\int_1^x f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$ είναι μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$, οπότε η $L(x)=\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $L'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Έχουμε :

$$\varphi'(x)=2f(x)-2(x-1)(x-1)'=2\left(f(x)-x+1\right)\text{ , οπότε}$$

- $\varphi'(x)>0\Leftrightarrow f(x)>x-1$

$$\Leftrightarrow x-e^{f(x)}>x-1\Leftrightarrow e^{f(x)}<1=e^0$$

$$\Leftrightarrow f(x)<0,\left(e^x \text{ γν.αύξ } \mathbb{R}\right)$$

$$\overset{(f(1)=1)}{\Leftrightarrow} f(x)<f(1)\Leftrightarrow x<1,\left(f \text{ γν.αύξ } \mathbb{R}\right)$$

Ακόμη είναι :

- $\varphi'(x)<0\Leftrightarrow x>1$
- $\varphi'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Άρα η φ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty,1]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $[1,+\infty)$, οπότε η φ παρουσιάζει ολικό **μέγιστο** στο $x_o=1$, το οποίο είναι το:

$$\max\varphi(x)=\varphi(1)=0$$

Επομένως για κάθε $x\in R$ ισχύει

$$\boldsymbol{\varphi(x)\le \max\varphi(x)=0}\ .$$

Οπότε

$$\boxed{\boldsymbol{2\int_1^x f(t)dt-(x-1)^2\le 0 \Rightarrow 2\int_1^x f(t)dt\le (x-1)^2}}$$

13. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x)=f\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)-\frac{1}{2}\big(f(\alpha)+f(x)\big),\quad x\in\mathbb{R}$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x)=\frac{1}{2}\left(f'\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)-f'(x)\right)$$

Έχουμε:

- $h'(x)>0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow f'\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)>f'(x)\Leftrightarrow \frac{\alpha+x}{2}<x,\left(f'\ \mathbf{2}\ R, f\ (\text{κοίλη})\right)$
  $\Leftrightarrow x>\alpha$
- $h'(x)<0\Leftrightarrow x<\alpha$
- $h'(x)=0\Leftrightarrow x=\alpha$

Από το πρόσημο της $h'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα προκύπτει ότι

- η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty\ ,\alpha]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha\ ,+\infty)$.
- η συνάρτηση h παρουσιάζει στο α ολικό ελάχιστο ,το οποίο είναι το $\min h(x)=h(\alpha)=0$.Έτσι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

$$h(x)\ge \min h(x) \Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)-\frac{1}{2}\big(f(\alpha)+f(x)\big)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)\ge \frac{f(\alpha)+f(x)}{2}.$$

Επομένως:

$$\boxed{\mathbf{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\ge \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2},\quad \text{για κάθε}\ \ \alpha,\beta\in R}}$$

14. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης (η) της C_f στο σημείο της $N(\xi\,,f(\xi))$, είναι

$$\lambda_\eta = f'(\xi)\,.$$

Για να είναι η (η) παράλληλη (με την ευρεία σημασία) προς την ευθεία

$$(\delta): y=\frac{1}{2}x+2011,$$

πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$\lambda_\eta=\lambda_\delta$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{f(\xi)}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+e^{f(\xi)}=2\Leftrightarrow e^{f(\xi)}=1$$

$$\Leftrightarrow e^{f(\xi)}=e^0 \overset{(e^x\ '1-1')}{\Leftrightarrow} f(\xi)=0$$

$$\overset{(f(1)=0)}{\Leftrightarrow} f(\xi)=f(1)$$

$$\Leftrightarrow \xi=1\,,\ (\text{η } f \text{ είναι } 1-1\,,\ \text{ως γν. μονότονη στο πεδίο ορισμού της})$$

Είναι:

$$f(1)=0,\quad f'(1)=\frac{1}{1+e^{f(1)}}=\frac{1}{1+e^0}=\frac{1}{2}$$

και η εξίσωση της ζητούμενης **εφαπτομένης** είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-0=\frac{1}{2}(x-1)$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \mathbf{y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}}$$

15. Στο $+\infty$ έχουμε :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-0x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

Άρα , στο $+\infty$, η C_f δεν έχει ασύμπτωτη.

Στο $-\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

και

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-1\cdot x)=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=$$

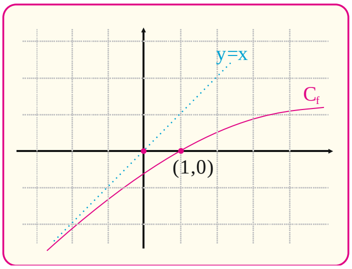
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\left(e^{f(x)}+f(x)\right)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-e^{f(x)}\right)\underset{\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\right)}{\overset{(u=f(x))}{=}}-\lim_{u\to-\infty}e^{u}=-0=0.$$

Άρα η ευθεία $(\zeta): y=x$ είναι **ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

16. Για τη συνάρτηση f ισχύουν τα ακόλουθα:

- Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$
- Η f είναι **κοίλη** στο $\mathbb{R}$
- Η ευθεία $y=x$ είναι **ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$
- $f(1)=0$

Έτσι μια **πρόχειρη γραφική παράσταση** της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



17. 1^{ος} τρόπος:

$$e^{f(x)}+f(x)=x\Rightarrow\left(e^{f(x)}+f(x)\right)f'(x)=xf'(x)$$

$$\Rightarrow e^{f(x)}f'(x)+f(x)f'(x)=xf'(x)$$

$$\overset{(f':\ \text{συνεχής})}{\Rightarrow}\int_0^1\left(e^{f(x)}f'(x)+f(x)f'(x)\right)dx=\int_0^1 xf'(x)dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^1\left(e^{f(x)}\right)'dx+\int_0^1 f(x)f'(x)dx=\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1(x)'f(x)dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[e^{f(x)}\right]_0^1+\int_0^1\left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)'dx=1\cdot f(1)-0\cdot f(0)-\int_0^1 f(x)dx$$

$$\Rightarrow e^{f(1)}-e^{f(0)}+\frac{1}{2}f^2(1)-\frac{1}{2}f^2(0)=0-0-\int_0^1 f(x)dx$$

$$\Rightarrow e^0-e^{f(0)}+\frac{1}{2}\cdot 0^2-\frac{1}{2}f^2(0)=-\int_0^1 f(x)dx$$

$$\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}f^2(0)+e^{f(0)}-1\overset{(*)}{=}\frac{1}{2}f^2(0)-f(0)-1$$

$$(*):\ \left(e^{f(x)}+f(x)=x,\forall x\in R\right)\overset{(x=0)}{\Rightarrow}e^{f(0)}+f(0)=0\Rightarrow e^{f(0)}=-f(0)$$

2^{ος} τρόπος :

Θέτουμε $u=f(x)$, οπότε είναι:

$$x=f^{-1}(u)=e^u+u\ \text{ και }\ dx=\left(e^u+1\right)du$$

Για $x=0$ είναι $u=f(0)$

Για $x=1$ είναι $u=f(1)=0$

Άρα:

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_{f(0)}^0 u\left(e^u+1\right)du=$$

$$=\int_{f(0)}^0 u\left(e^u+u\right)'du=\left[u\left(e^u+u\right)\right]_{f(0)}^0-\int_{f(0)}^0(u)'\left(e^u+u\right)du=$$

$$=0-f(0)\left(e^{f(0)}+f(0)\right)-\int_{f(0)}^{0}\left(e^{u}+u\right)du\overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=}-f(0)\cdot 0-\left[e^{u}+\frac{u^2}{2}\right]_{f(0)}^{0}=-\left(e^{0}+\frac{0^2}{2}\right)+\left(e^{f(0)}+\frac{f^2(0)}{2}\right)=$$

$$=e^{f(0)}+\frac{f^2(0)}{2}-1\overset{(*)}{=}\frac{1}{2}f^2(0)-f(0)-1$$

18. Είναι:

$$E=\int_{1}^{1+e}|f(x)-x|dx\overset{\left(f(x)-x=e^{f(x)}\right)}{=}\int_{1}^{1+e}\left|e^{f(x)}\right|dx\overset{\left(e^{f(x)}>0\right)}{=}\int_{1}^{1+e}e^{f(x)}dx$$

Θέτουμε $u=f(x)$, οπότε είναι

$$x=f^{-1}(u)=e^{u}+u \text{ και } dx=\left(e^{u}+1\right)du$$

Για $x=1$ έχουμε $u=f(1)=0$

Για $x=1+e$ έχουμε $u=f(1+e)=f\left(e^{1}+1\right)\overset{\left(f\left(e^{x}+x\right)=x\right)}{=}1$

Άρα:

$$E=\int_{0}^{1}e^{u}\left(e^{u}+1\right)du=\int_{0}^{1}\left(e^{2u}+e^{u}\right)du=$$

$$=\left[\frac{1}{2}e^{2u}+e^{u}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{2}e^{2}+e-\frac{3}{2}\ \text{τ.μ.}$$

19. Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$f(x)+e^{f(x)}=x\Rightarrow x-f(x)=e^{f(x)}>0$$

$$\Rightarrow x-f(x)>0$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{f(x)<x}}$$

20. Για κάθε $x>1$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** στο $[1,x]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(1,x)$, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{f(x)-0}{x-1}=\frac{f(x)}{x-1}:(\alpha)$$

Όμως, έχουμε:

$$1<\xi<x \Rightarrow f'(1)>f'(\xi)>f'(x):(\beta)$$

διότι f' **2** R, (αφού η f είναι **κοίλη** στο R).

Από τις (α),(β) προκύπτει:

$$\frac{1}{1+e^{f(1)}}>\frac{f(x)}{x-1}>f'(x)$$

$$\overset{(x-1>0)}{\Rightarrow}(x-1)f'(x)<f(x)<\frac{x-1}{1+e^{f(1)}}=\frac{x-1}{1+e^{0}}=\frac{x-1}{2}$$

$$\boxed{\Rightarrow (x-1)f'(x)<f(x)<\frac{x-1}{2},\quad (x>1)}$$

21. Για κάθε $x\in R$ ισχύει

$$f(x)<x \quad :(\Sigma)$$

Από την (Σ) θέτοντας όπου x το $f^{-1}(x)$ έχουμε ότι για κάθε $x\in f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ ισχύει :

$$f\left(f^{-1}(x)\right)<f^{-1}(x)\Rightarrow x<f^{-1}(x):(\Sigma_1).$$

Από τις (Σ) και (Σ_1) προκύπτει ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει

$$f(x)<x<f^{-1}(x)\Rightarrow f(x)\neq f^{-1}(x).$$

Επομένως οι C_f και $C_{f^{-1}}$ **δεν έχουν κοινό σημείο.**

2ο. **ΓΕΝΙΚΟ ΘΕΜΑ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Α.

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=f(x)-x\,,x\in\mathbb{R}.$$

Είναι $h'(x)=f'(x)-1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

οπότε η $h(x)$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

Επομένως:

- για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$h(x)>h(0)\Rightarrow f(x)-x>f(0)-0\overset{f(0)=0}{\Rightarrow}f(x)-x>0\Rightarrow f(x)>x.$$

- για κάθε $x<0$ ισχύει:

$$h(x)<h(0)\Rightarrow f(x)-x<f(0)-0\overset{f(0)=0}{\Rightarrow} f(x)-x<0\Rightarrow f(x)<x\,.$$

Άρα ισχύουν:

- $f(x)>x$ για κάθε $x>0$ και
- $f(x)<x$ για κάθε $x<0$.

2. Επειδή είναι $f'(x)>1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έπεται ότι είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι συνάρτηση $1-1$, οπότε η f **αντιστρέφεται** και το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών $f(\mathbb{R})$ της f.

Εύρεση του $f(\mathbb{R})$

- Για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f(x)>x>0\Rightarrow 0<\frac{1}{f(x)}<\frac{1}{x}\ :(\alpha)$$

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}0=0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

οπότε λόγω της (α) και του κριτηρίου παρεμβολής, προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0\,.$$

Επειδή είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0 \text{ και } \frac{1}{f(x)}>0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

έπεται ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}=+\infty,$$

δηλαδή

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\,.$$

- Για κάθε $x<0$ ισχύει:

$$f(x)<x<0\Rightarrow \frac{1}{x}<\frac{1}{f(x)}<0\ :(\beta)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} 0 = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, οπότε λόγω της (β) και του κριτηρίου παρεμβολής, προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Επειδή είναι

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ και } \frac{1}{f(x)} < 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0)$$

έπεται ότι

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} = -\infty,$$

δηλαδή

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι

$$\mathbf{f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}}.$$

Άρα το **πεδίο ορισμού** της f^{-1} είναι το

$$\boxed{\mathbf{f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}}}.$$

3. Θα δειχθεί ότι $|f(\alpha) - f(\beta)| \geq |\alpha - \beta| \ :(1)$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση $\boxed{\alpha = \beta}$

Για $\alpha = \beta$ η σχέση (1) **ισχύει ως ισότητα**.

2η περίπτωση $\boxed{\alpha < \beta}$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \right| = |f'(\xi)|$$

$$\overset{(f'(\xi)>1>0)}{\Rightarrow} \frac{|f(\beta)-f(\alpha)|}{|\beta-\alpha|}=f'(\xi)>1$$

$$\Rightarrow |f(\beta)-f(\alpha)|>|\beta-\alpha|$$

$$\Rightarrow |-(f(\alpha)-f(\beta))|>|-(\alpha-\beta)|$$

$$\boxed{\Rightarrow |\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})-\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta})|>|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|}$$

$3^η$ περίπτωση $\boxed{\beta<\alpha}$

Επειδή είναι $\beta<\alpha$, σύμφωνα με τη $2^η$ περίπτωση έχουμε ότι ισχύει:

$$|f(\beta)-f(\alpha)|>|\beta-\alpha|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |-(f(\alpha)-f(\beta))|>|-(\alpha-\beta)|$$

$$\boxed{\Rightarrow |\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})-\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta})|>|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{|\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})-\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta})|\geq|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}| \ :(\mathbf{1})}.$$

4. Έστω $x,y\in f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Από την (1) για $\alpha=f^{-1}(x)$ και $\beta=f^{-1}(y)$ έχουμε ότι ισχύει:

$$|f(f^{-1}(x))-f(f^{-1}(y))|\geq|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x-y|\geq|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)|$$

$$\Rightarrow |f^{-1}(x)-f^{-1}(y)|\leq|x-y|$$

Άρα για κάθε $x,y\in f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ ισχύει :

$$\boxed{|\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})-\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})|\leq|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \ :(\mathbf{2})}.$$

5. Έστω $x_1,x_2\in f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$.

Θα δειχθεί ότι

$$f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2).$$

Υποθέτουμε ότι $f^{-1}(x_1)\ge f^{-1}(x_2)$, τότε θα έχουμε:

$$f^{-1}(x_1)\ge f^{-1}(x_2)\overset{\left(\substack{\text{f γν.αύξουσα}\\ \text{στο } \mathbb{R}}\right)}{\Rightarrow} f\left(f^{-1}(x_1)\right)\ge f\left(f^{-1}(x_2)\right)\Rightarrow x_1\ge x_2,$$

άτοπο, αφού είναι $x_1<x_2$

Επομένως είναι

$$f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2).$$

Έτσι για κάθε $x_1,x_2\in f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει

$$f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2),$$

οπότε η f^{-1} είναι **γνησίως αύξουσα** στο $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

6. Έστω $x_0\in f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Λόγω της (2) έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\right|\le|x-x_0|\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -|x-x_0|\le f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\le|x-x_0|$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x_0)-|x-x_0|\le f^{-1}(x)\le f^{-1}(x_0)+|x-x_0| \quad :(3).$$

Είναι

$$\lim_{x\to x_0}\left(f^{-1}(x_0)-|x-x_0|\right)=f^{-1}(x_0) \quad \text{και}$$
$$\lim_{x\to x_0}\left(f^{-1}(x_0)+|x-x_0|\right)=f^{-1}(x_0),$$

οπότε, λόγω της (3) και του **κριτηρίου παρεμβολής**, προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to x_0}f^{-1}(x)=f^{-1}(x_0).$$

Άρα η f^{-1} είναι **συνεχής** στο x_0.

Επομένως η f^{-1} είναι **συνεχής** σε κάθε σημείο $x_0\in\mathbb{R}$,

οπότε

η f^{-1} είναι **συνεχής** στο $\mathbb{R}$.

7.

- Για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)>x \quad :(4)$.

Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$x>0 \overset{\left(\substack{f^{-1}\text{ γν.αύξουσα}\\ \text{στο }\mathbb{R}}\right)}{\Rightarrow} f^{-1}(x)>f^{-1}(0) \overset{(f(0)=0)}{\Rightarrow} f^{-1}(x)>f^{-1}(f(0)) \Rightarrow f^{-1}(x)>0$$

Από την (4) θέτοντας όπου x το $f^{-1}(x)$ (είναι $f^{-1}(x)>0$ για κάθε $x>0$) έχουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f\left(f^{-1}(x)\right)>f^{-1}(x) \Rightarrow x>f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(x)<x.$$

Άρα για **κάθε $x>0$** ισχύει

$$\boxed{0<f^{-1}(x)<x}.$$

- Για κάθε $x<0$ ισχύει $f(x)<x \quad :(5)$.

Για κάθε $x<0$ έχουμε:

$$x<0 \overset{\left(\substack{f^{-1}\text{ γν.αύξουσα}\\ \text{στο }\mathbb{R}}\right)}{\Rightarrow} f^{-1}(x)<f^{-1}(0) \overset{(f(0)=0)}{\Rightarrow} f^{-1}(x)<f^{-1}(f(0)) \Rightarrow f^{-1}(x)<0$$

Από την (5) θέτοντας όπου x το $f^{-1}(x)$ (είναι $f^{-1}(x)<0$ για κάθε $x<0$) έχουμε ότι για κάθε $x<0$ ισχύει:

$$f\left(f^{-1}(x)\right)<f^{-1}(x) \Rightarrow x<f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(x)>x.$$

Επομένως για **κάθε $x<0$** ισχύει

$$\boxed{x<f^{-1}(x)<0}$$

8. Έστω $x_0 \in f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Για το όριο

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)}{x-x_0}$$

θέτουμε $u=f^{-1}(x)$, οπότε είναι $x=f(u)$.

Επειδή η f^{-1} είναι συνεχής στο x_0 (αφού είναι συνεχής στο $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$), έπεται ότι

$$\lim_{x\to x_0} f^{-1}(x)=f^{-1}(x_0)=u_0.$$

Ακόμη, επειδή η f^{-1} είναι $1-1$, έπεται ότι είναι

$$f^{-1}(x)\neq f^{-1}(x_0) \text{ για κάθε } x\neq x_0.$$

Επομένως είναι $f^{-1}(x)\neq u_0=f^{-1}(x_0)$ κοντά στο x_0.

Άρα όταν $x \to x_0$ έχουμε $u \to u_0$.

Επομένως είναι:

$u = f^{-1}(x)$, $x = f(u)$, $u_0 = f^{-1}(x_0)$, $x_0 = f(u_0)$ και
όταν $x \to x_0$, έχουμε $u \to u_0 = f^{-1}(x_0)$.

οπότε έχουμε :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{u \to u_0} \frac{u - u_0}{f(x) - f(u_0)} =$$

$$= \lim_{u \to u_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(u_0)}{u - u_0}} = \frac{1}{\lim\limits_{u \to u_0} \frac{f(x) - f(u_0)}{u - u_0}}$$

$$= \frac{1}{f'(u_0)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x_0)\right)} \in \mathbb{R} \text{ (αφού } f'\left(f^{-1}(x_0)\right) > 1\text{).}$$

Άρα η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ με

$$\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x_0)\right)} \text{ για κάθε } x_0 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

Δηλαδή η f^{-1} είναι **παραγωγίσιμη** στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Είναι $f'(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'\left(f^{-1}(x)\right) > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} < 1$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{0} < \left(\mathbf{f}^{-1}\right)'(\mathbf{x}) < \mathbf{1}}$$

9. Για το $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x}$ θέτουμε $w = f^{-1}(x)$, οπότε είναι $x = f(w)$.

Επειδή η f^{-1} είναι **συνεχής** και **γνησίως αύξουσα** στο $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, έπεται ότι

$$f^{-1}(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \to -\infty} f^{-1}(x), \lim_{x \to +\infty} f^{-1}(x)\right).$$

Είναι όμως

$$f^{-1}(\mathbb{R})=D_f=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty),$$

οπότε

$$\lim_{x\to-\infty} f^{-1}(x)=-\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=+\infty$$

Επομένως όταν $x\to+\infty$ έχουμε $w\to+\infty$.

Άρα:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x}=\lim_{w\to+\infty}\frac{w}{f(w)}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{w\to+\infty}\frac{(w)'}{(f(w))'}=\lim_{w\to+\infty}\frac{1}{f'(w)}=\frac{1}{2}}$$

Β.

1. Έχουμε

$$\lim_{y\to+\infty}\left[y\left(G\left(\frac{xy+1}{y}\right)-G(x)\right)\right]=f(x)-x \quad :(6).$$

Είναι:

$$\lim_{y\to+\infty}\left[y\left(G\left(\frac{xy+1}{y}\right)-G(x)\right)\right]=\lim_{y\to+\infty}\frac{G\left(\frac{xy+1}{y}\right)-G(x)}{\frac{1}{y}}=$$

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{G\left(x+\frac{1}{y}\right)-G(x)}{\frac{1}{y}}\underset{\left(\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y}=0\right)}{\overset{\left(h=\frac{1}{y}\right)}{=}}\lim_{h\to0^+}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}=G'(x)$$

Έτσι η (6) γράφεται:

$$G'(x)=f(x)-x \quad :(7),\ (x\in\mathbb{R}).$$

Από την (7) προκύπτει ότι η G' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$G''(x)=f'(x)-1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (αφού $f'(x)>1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$).

Επομένως η G είναι **κυρτή** στο $\mathbb{R}$.

2. Είναι

$$G(0)=0 \quad \text{και} \quad G'(0)=f(0)-0=f(0)=0.$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_G στο σημείο της $M(0,G(0))$ είναι:

$$y-G(0)=G'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-0=0\cdot x\Leftrightarrow y=0$$

Δηλαδή $(\varepsilon): y=0$.

Επειδή η G είναι **κυρτή** στο $\mathbb{R}$, η C_G βρίσκεται **πάνω** από την εφαπτομένη της ευθεία $(\varepsilon): y=0$ σ'όλο το $\mathbb{R}$, με **εξαίρεση** το κοινό σημείο επαφής τους $M(0,G(0))$.

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{\mathbf{G(x)\geq 0}}$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

3. Η εξίσωση της εφαπτομένης (δ) της C_G στο σημείο της $N(1,G(1))$ είναι:

$$y-G(1)=G'(1)(x-1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y-G(1)=(f(1)-1)(x-1)$$
$$\overset{f(1)=2}{\Leftrightarrow} y-G(1)=(2-1)(x-1)$$
$$\Leftrightarrow y=x-1+G(1)$$

Άρα

$$(\delta): y=x-1+G(1).$$

Επειδή η G είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η C_G βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της ευθεία $(\delta): y=x-1+G(1)$ σ'όλο το $\mathbb{R}$, με εξαίρεση το κοινό σημείο επαφής τους $N(1,G(1))$.

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$G(x)\geq(x-1)+G(1)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Είναι όμως $G(1)>0$ (αφού ισχύει $G(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$), οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$G(x)\geq(x-1)+G(1)>x-1\Rightarrow G(x)>x-1 \ :(8)$$

Από την (8) προκύπτει ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν:

- $G\left(x^2+1\right)>\left(x^2+1\right)-1=x^2$ και
- $G\left(x^3+1\right)>\left(x^3+1\right)-1=x^3$

Επομένως για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ με $0<\alpha<\beta$ ισχύει:

$$\begin{cases} G\left(x^2+1\right)>x^2 \\ G\left(x^3+1\right)>x^3 \end{cases} \Rightarrow G\left(x^2+1\right)G\left(x^3+1\right)>x^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{G\left(x^2+1\right)G\left(x^3+1\right)}<\frac{1}{x^5}$$

$$\Rightarrow \frac{x^4}{G\left(x^2+1\right)G\left(x^3+1\right)}<\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}-\frac{x^4}{G\left(x^2+1\right)G\left(x^3+1\right)}>0$$

$$\overset{(\alpha<\beta)}{\Rightarrow} \int_\alpha^\beta \left(\frac{1}{x}-\frac{x^4}{G\left(x^2+1\right)G\left(x^3+1\right)}\right)>0$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta \frac{1}{x}dx-\int_\alpha^\beta \frac{x^4}{G\left(x^2+1\right)G\left(x^3+1\right)}dx>0$$

$$\boxed{\Rightarrow \int_\alpha^\beta \frac{x^4}{G\left(x^2+1\right)G\left(x^3+1\right)}dx<\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}$$

4. Επειδή η G είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι για οποιοδήποτε $x>1$ η G ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[0,1]$ και $[1,x]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(0,1)$ και $\xi_2\in(1,x)$ ώστε:

$$G'(\xi_1)=\frac{G(1)-G(0)}{1-0}=G(1)-0=G(1) \quad :(9) \text{ και}$$

$$G'(\xi_2)=\frac{G(x)-G(1)}{x-1} \quad :(10)$$

Έχουμε όμως:

$$0<\xi_1<1<\xi_2<x\Rightarrow \xi_1<\xi_2\Rightarrow$$

$$\overset{\left(\substack{G' \text{ γν.αύξουσα,} \\ \text{αφού η } G \text{ κυρτή}}\right)}{\Rightarrow} G'(\xi_1) < G'(\xi_2) \Rightarrow$$

$$\overset{(9),(10)}{\Rightarrow} G(1) < \frac{G(x)-G(1)}{x-1}$$

$$\overset{(x-1>0)}{\Rightarrow} G(x)-G(1) > (x-1)G(1)$$

$$\Rightarrow G(x)-G(1) > xG(1)-G(1)$$

$$\Rightarrow G(x) > xG(1)$$

Άρα για κάθε $x>1$ ισχύει

$$\boxed{\mathbf{G(x) > xG(1)}}.$$

5. Έστω $x \in (0,1)$.

Η G, ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **θεωρήματος μέσης τιμής** σε καθένα από τα διαστήματα $[0\,,\,x]$ και $[x,1]$,

οπότε υπάρχουν $x_1 \in (0,x)$ και $x_2 \in (x,1)$ ώστε:

$$G'(x_1) = \frac{G(x)-G(0)}{x-0} \overset{(G(0)=0)}{=} \frac{G(x)}{x} \quad :(11) \text{ και}$$

$$G'(x_2) = \frac{G(1)-G(x)}{1-x} \quad :(12)$$

Έχουμε:

$$0 < x_1 < x < x_2 < 1 \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow$$

$$\overset{(G' \text{ γν.αύξουσα})}{\Rightarrow} G'(x_1) < G'(x_2)$$

$$\overset{((11),(12))}{\Rightarrow} \frac{G(x)}{x} < \frac{G(1)-G(x)}{1-x}$$

$$\overset{\left(\substack{x>0 \\ x-1>0}\right)}{\Rightarrow} (1-x)G(x) < x\left(G(1)-G(x)\right)$$

$$\Rightarrow G(x) - \cancel{xG(x)} < xG(1) - \cancel{xG(x)}$$

$$\Rightarrow G(x) < xG(1)$$

Άρα για **κάθε $x \in (0,1)$** ισχύει

$$\boxed{G(x) < xG(1)}.$$

6. Έχουμε

$$H(x) = \begin{cases} \dfrac{G(x)}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Για κάθε $x \neq 0$ είναι

$$H'(x) = \left(\frac{G(x)}{x}\right)' = \frac{G'(x)x - G(x)}{x^2}.$$

- Έστω $x > 0$. Η G ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **θεωρήματος μέσης τιμής** στο διάστημα $[0, x]$,

οπότε υπάρχει $\theta \in (0, x)$ με:

$$G'(\theta) = \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} \overset{(G(0)=0)}{=} \frac{G(x) - 0}{x} \Rightarrow \boxed{G(x) = xG'(\theta)}$$

Έτσι έχουμε ότι για κάθε $x > 0$ είναι

$$H'(x) = \frac{G'(x)x - G(x)}{x^2} = \frac{G'(x)x - xG'(\theta)}{x^2} = \frac{G'(x) - G'(\theta)}{x}.$$

Έχουμε όμως:

$$0 < \theta < x \overset{\left(\substack{G' \text{ γν.αύξουσα} \\ \text{στο } \mathbb{R}}\right)}{\Rightarrow} G'(\theta) < G'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G'(x) - G'(\theta) > 0$$

$$\overset{(x>0)}{\Rightarrow} \frac{G'(x) - G'(\theta)}{x} > 0$$

$$\Rightarrow H'(x) > 0$$

- Έστω $x < 0$.

Εργαζόμενοι ομοίως στο διάστημα $[x, 0]$ καταλήγουμε ότι και πάλι ισχύει

$$H'(x) > 0.$$

Επομένως για κάθε $x \neq 0$ ισχύει

$$H'(x) > 0.$$

- Εξετάζουμε αν η H είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Είναι:

$$\lim_{x\to 0} H(x) = \lim_{x\to 0} \frac{G(x)}{x} \overset{(G(0)=0)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{G(x)-G(0)}{x-0} = G'(0) = f(0) - 0 = f(0) = 0$$

Ακόμη είναι $H(0) = 0$.

Άρα ισχύει

$$\lim_{x\to 0} H(x) = H(0),$$

οπότε η H είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Επειδή ισχύει $\mathbf{H'(x) > 0}$ για κάθε $x \neq 0$ και η H είναι **συνεχής** στο $x_0 = 0$, έπεται ότι η H είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.