Διαγωνίσματα

1ο

1ο **ΘΕΜΑ Β**

B1. Το πεδίο ορισμού της f αποτελείται από όλους εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει :

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{1-x} > 0 \\ 1-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x+1)(1-x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1\,,1)\ .$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το :

$$\boxed{\mathbf{D_f = (-1\,,1)}}.$$

B2. Για οποιαδήποτε $x_1,\ x_2 \in D_f$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έχουμε :

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \ln\frac{x_1+1}{1-x_1}=\ln\frac{x_2+1}{1-x_2} \overset{(\ln x:1-1)}{\Rightarrow} \frac{x_1+1}{1-x_1}=\frac{x_2+1}{1-x_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1+1)(1-x_2)=(x_2+1)(1-x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1-x_1x_2+1-x_2=x_2-x_1x_2+1-x_1 \Rightarrow 2x_1=2x_2 \Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι **1-1** και συνεπώς **αντιστρέφεται.**

Για την εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης της f, θεωρούμε την εξίσωση $f(x)=y$ και την λύνουμε ως προς x.

Έχουμε :

$$y=f(x) \Leftrightarrow y=\ln\frac{x+1}{1-x} \Leftrightarrow e^y=\frac{x+1}{1-x} \Leftrightarrow x+1=e^y-xe^y \Leftrightarrow x+xe^y=e^y-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(1+e^y)=e^y-1 \Leftrightarrow x=\frac{e^y-1}{1+e^y},\quad y\in\mathbb{R}$$

Πρέπει όμως η λύση αυτή να ανήκει στο $D_f = (-1\,,1)$ και για συμβαίνει αυτό πρέπει και αρκεί να ισχύει

$$\frac{e^y-1}{e^y+1}\in(-1,1) \Leftrightarrow -1<\frac{e^y-1}{e^y+1}<1 \Leftrightarrow -e^y-1< e^y-1 < e^y+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -e^y - 1 < e^y - 1 \\ e^y - 1 < e^y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e^y > 0 \\ -1 < 1 \end{cases},\ (\text{ που ισχύουν για κάθε } y \in \mathbb{R}\text{ }).$$

Επομένως είναι

$$\boxed{\mathbf{f\big((-1,1)\big)=\mathbb{R} \quad και \quad f^{-1}(y)=\frac{e^y-1}{e^y+1}}}.$$

Δηλαδή η αντίστροφη συνάρτηση της f ορίζεται ως εξής

$$\boxed{\mathbf{f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad με\ f^{-1}(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}}}$$

B3. Για κάθε $x \in D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ ισχύει :

- $-x \in D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ και
- $$f^{-1}(-x)=\frac{e^{-x}-1}{1+e^{-x}}=\frac{\frac{1}{e^x}-1}{1+\frac{1}{e^x}}=\frac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{e^x+1}{e^x}}=\frac{1-e^x}{e^x+1}=-\frac{e^x-1}{e^x+1}=-f^{-1}(x)$$

Άρα η $\mathbf{f^{-1}}$ είναι **περιττή**.

B4.

Είναι $D_{f^{-1}\circ g}=\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_{f^{-1}}\}=\{x>0\,/\,-\ln x\in\mathbb{R}\}=(0,\ +\infty)$

και για κάθε $x \in D_{f^{-1}\circ g}=(0,+\infty)$ είναι :

$$\big(f^{-1}\circ g\big)(x)=f^{-1}\big(g(x)\big)=f^{-1}(-\ln x)\overset{(f^{-1}:\ περιττή)}{=}-f^{-1}(\ln x)$$
$$=-\frac{e^{\ln x}-1}{1+e^{\ln x}}=-\frac{x-1}{1+x}=\frac{1-x}{1+x},\ x>0.$$

Άρα η $\mathbf{f^{-1}\circ g}$ ορίζεται ως εξής :

$$\boxed{\mathbf{f^{-1}\circ g:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ με\ \big(f^{-1}\circ g\big)(x)=\frac{1-x}{1+x},\ \ x>0}}.$$

Η γραφική παράσταση της $f^{-1}\circ g$ της βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ για εκείνες τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει :

$$\begin{cases}(f^{-1}\circ g)(x)<0\\ x\in D_{f^{-1}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1-x}{1+x}<0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-x<0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\ x>1$$

Επομένως η γραφική παράσταση της $f^{-1}\circ g$ της βρίσκεται **κάτω** από τον άξονα $x'x$ στο διάστημα $(1,+\infty)$

1ο **ΘΕΜΑ Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Γ1. Για κάθε $t>0$ και για κάθε $x\in[-1,1]$ είναι:

$$\sqrt{t^2+2f^2(x)t+4}-t=\frac{t^2+2f^2(x)t+4-t^2}{\sqrt{t^2+2f^2(x)t+4}+t}=$$

$$\overset{t>0}{=}\frac{2f^2(x)t+4}{t\sqrt{1+2f^2(x)\frac{1}{t}+\frac{4}{t^2}}+t}$$

$$=\frac{t\left(2f^2(x)+\frac{4}{t}\right)}{t\left(\sqrt{1+2f^2(x)\frac{1}{t}+\frac{4}{t^2}}+1\right)}$$

$$=\frac{2f^2(x)+\frac{4}{t}}{\sqrt{1+2f^2(x)\frac{1}{t}+\frac{4}{t^2}}+1}$$

Οπότε:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t^2+2f^2(x)t+4}-t\right)=$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{2f^2(x)+\frac{4}{t}}{\sqrt{1+2f^2(x)\frac{1}{t}+\frac{4}{t^2}}+1}=\frac{2f^2(x)+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=f^2(x)$$

Γ2. Από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $x\in[-1,1]$ ισχύει:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t^2+2f^2(x)t+4}-t\right)=2-2\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)=2-2\sqrt{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)=\left(\sqrt{1+x}\right)^2+\left(\sqrt{1-x}\right)^2-2\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)=\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow |f(x)|=\left|\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right| \ :(1)$$

Από την (1) για $x=0$ έχουμε $|f(0)|=\left|\sqrt{1+0}-\sqrt{1-0}\right|=0$, οπότε $f(0)=0$.

- Για κάθε $x\in[0,1]$ έχουμε:

$$0\le x\le 1\overset{f\ \text{γν.αύξουσα}}{\Rightarrow} f(0)\le f(x)\overset{f(0)=0}{\Rightarrow}\boxed{f(x)\ge 0}:(2)$$

Επίσης για κάθε $x\in[0,1]$ είναι

$$0\le x\le 1\Rightarrow 1+x\ge 1-x\Rightarrow\sqrt{1+x}\ge\sqrt{1-x}\Rightarrow\boxed{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\ge 0}:(3)$$

Από την (1), λόγω των (2) και (3), έχουμε ότι για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$.

- Για κάθε $x\in[-1,0]$ έχουμε:

$$-1\le x\le 0\overset{f\ \text{γν.αύξουσα}}{\Rightarrow} f(x)\le f(0)\overset{f(0)=0}{\Rightarrow}\boxed{f(x)\le 0}:(4)$$

Ακόμη για κάθε $x\in[-1,0]$ είναι

$$-1\le x\le 0\Rightarrow 1+x\le 1-x\Rightarrow\sqrt{1+x}\le\sqrt{1-x}\Rightarrow\boxed{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\le 0}:(5)$$

Από την (1), λόγω των (4) και (5), έχουμε ότι για κάθε $x \in [-1,0]$ ισχύει

$$-f(x) = -\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right) \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}.$$

Επομένως για κάθε $x \in [-1,1]$ είναι $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$.

Γ3. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$,

οπότε $f([-1,1]) = [f(-1), f(1)]$ και επειδή είναι $f(1) = \sqrt{1+1} - \sqrt{1-1} = \sqrt{2}$ και $f(-1) = \sqrt{1+(-1)} - \sqrt{1-(-1)} = -\sqrt{2}$ έχουμε $f([-1,1]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Γ4. Η f ως γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της είναι $1-1$, οπότε η f έχει αντίστροφη συνάρτηση και το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών

$$f([-1,1]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$ της f.

Θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = y$ με $x \in [-1,1]$ και $y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ και την λύνουμε ως προς x.

Έχουμε: $f(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x) = y^2 \\ f(x).y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x) = y^2 \\ xy \geq 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{επειδή είναι} \bullet f(x) > 0, \forall x \in (0,1] \\ \qquad\qquad\quad \bullet f(x) < 0, \forall x \in [-1,0) \\ \qquad\qquad\quad \bullet f(0) = 0\,, \\ \text{ισχύει η ισοδυναμία} : f(x).y \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq 0 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)^2 = y^2 \\ xy \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+x) + (1-x) - 2\sqrt{1+x}\sqrt{1-x} = y^2 \\ xy \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{1-x^2} = 2-y^2 \\ xy \geq 0 \end{cases}$$

$$\underset{\left(y\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]\right)}{\overset{\left(2-y^2\geq 0\right)}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} 4-4x^2 = 4-4y^2+y^4 \\ xy \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{4y^2-y^4}{4} = \dfrac{y^2\left(4-y^2\right)}{4} \\ xy \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| = \dfrac{1}{2}|y|\sqrt{4-y^2} \\ xy \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y\sqrt{4-y^2}$$

Επομένως είναι $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{2}y\sqrt{4-y^2}$, $y \in \left[-\sqrt{2}\,,\ \sqrt{2}\right]$.

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της f ορίζεται ως εξής:

$f^{-1}:\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right] \to \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}$.

1ο **ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. Για $y = x$ απο τη δοθείσα σχέση έχουμε :

$$2f(x)+f(1-x) = 3e^x+3 \ : \ (1)$$

Αν στη σχέση (1) θέσουμε όπου x το $1-x$ έχουμε :

$$2f(1-x)+f(x) = 3e^{1-x}+3 \ \ : (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2)

$$\begin{cases} 2f(x)+f(1-x)=3e^{x}+3 \\ 2f(1-x)+f(x)=3e^{1-x}+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4f(x)-2f(1-x)=-6e^{x}-6 \\ 2f(1-x)+f(x)=3e^{1-x}+3 \end{cases}$$

προσθέτοντας κατα μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε

$$-3f(x)=-6e^{x}+3e^{1-x}-3 \Leftrightarrow f(x)=2e^{x}-e^{1-x}+1$$

Για $y=0$ απο την αρχική σχέση έχουμε

$$2f(x)+f(1)+g(x)-g(0)=2e^{x}+4$$

$$\Leftrightarrow 4e^{x}-2e^{1-x}+2+f(1)+g(x)-g(0)=2e^{x}+4$$

Είναι $f(1)=2e=g(0)$ οπότε έχουμε

$$4e^{x}-2e^{1-x}+2+2e+g(x)-2e=2e^{x}+4 \Leftrightarrow g(x)=-2e^{x}+2e^{1-x}+2$$

Οι συναρτήσεις

$$\boxed{\mathbf{f(x)=2e^{x}-e^{1-x}+1, x\in\mathbb{R}}} \quad \text{και} \quad \boxed{\mathbf{g(x)=-2e^{x}+2e^{1-x}+2\ ,\ x\in\mathbb{R}}}$$

ικανοποιούν την υπόθεση , οπότε είναι οι ζητούμενες.

Δ2. Για κάθε $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι

$$\left.\begin{array}{l} x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \Rightarrow 2e^{x_1}<2e^{x_2} \\ x_1<x_2 \Rightarrow -x_1>-x_2 \Rightarrow 1-x_1>1-x_2 \Rightarrow e^{1-x_1}>e^{1-x_2} \Rightarrow -e^{1-x_1}<-e^{1-x_2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow} 2e^{x_1}-e^{1-x_1}<2e^{x_2}-e^{1-x_2}$$

$$\Rightarrow 2e^{x_1}-e^{1-x_1}+1<2e^{x_2}-e^{1-x_2}+1 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα.**

Για κάθε $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι

$$\left.\begin{array}{l} x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \Rightarrow -2e^{x_1}>-2e^{x_2} \\ x_1<x_2 \Rightarrow -x_1>-x_2 \Rightarrow 1-x_1>1-x_2 \Rightarrow e^{1-x_1}>e^{1-x_2} \Rightarrow 2e^{1-x_1}>2e^{1-x_2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow} -2e^{x_1}+2e^{1-x_1}>-2e^{x_2}+2e^{1-x_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2e^{x_1}+2e^{1-x_1}+2>-2e^{x_2}+2e^{1-x_2}+2 \Rightarrow g(x_1)>g(x_2)$$

Άρα η g είναι **γνησίως φθίνουσα.**

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(2e^{x}-e^{1-x}+1)-(-2e^{x}+2e^{1-x}+2)=4e^{x}-3e^{1-x}-1$$

Για κάθε $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι

$$\left.\begin{array}{l} x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow 4e^{x_1} < 4e^{x_2} \\ x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1-x_1 > 1-x_2 \Rightarrow e^{1-x_1} > e^{1-x_2} \Rightarrow -3e^{1-x_1} < -3e^{1-x_2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow} 4e^{x_1} - 3e^{1-x_1} < 4e^{x_2} - 3e^{1-x_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4e^{x_1} - 3e^{1-x_1} - 1 < 4e^{x_2} - 3e^{1-x_2} - 1 \Rightarrow (f-g)(x_1) < (f-g)(x_2)$$

Άρα η $f-g$ είναι **γνησίως αύξουσα**.

Δ3. Είναι

$$4e^{x^2-2x} < 4e^{x-2} + 3e^{-x^2+2x+1} - 3e^{-x+3} \Leftrightarrow 4e^{x^2-2x} - 3e^{-x^2+2x+1} < 4e^{x-2} - 3e^{-x+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4e^{x^2-2x} - 3e^{1-\left(x^2-2x\right)} - 1 < 4e^{x-2} - 3e^{1-(x-2)} - 1 \Leftrightarrow (f-g)(x^2-2x) < (f-g)(x-2)$$

$$\overset{(f-g\,:\text{γν. αύξουσα})}{\Leftrightarrow} x^2 - 2x < x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (1,2)$$

Δ4. Μία ρίζα της εξίσωσης

$$f(2^x) - g(5^x) = f(3^x) - g(7^x)$$

είναι ο αριθμός $x_0 = 0$, αφού ισχύει :

$$f(2^0) - g(5^0) = f(3^0) - g(7^0) \ \ (= f(1) - g(1))$$

- Για $x < 0$ έχουμε:

$$2 < 3 \Rightarrow \ln 2 < \ln 3 \overset{(x<0)}{\Rightarrow} x\ln 2 > x\ln 3 \Rightarrow \ln\left(2^x\right) > \ln\left(3^x\right) \Rightarrow$$

$$\overset{(\ln x\,\mathbf{1})}{\Rightarrow} 2^x > 3^x \overset{(f\ \text{γν. αύξουσα})}{\Rightarrow} f(2^x) > f(3^x) : (\alpha)$$

$$5 < 7 \Rightarrow \ln 5 < \ln 7 \overset{(x<0)}{\Rightarrow} x\ln 5 > x\ln 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(5^x\right) > \ln\left(7^x\right) \overset{(\ln x\,\mathbf{1})}{\Rightarrow} 5^x > 7^x \Rightarrow$$

$$\overset{(g\ \text{γν. φθίνουσα})}{\Rightarrow} g(5^x) < g(7^x) \Rightarrow -g(5^x) > -g(7^x) : (\beta)$$

Από τις (α) και (β) έχουμε :

$$\left\{\begin{array}{l} f(2^x) \ \ > f(3^x) \\ -g(5^x) > -g(7^x) \end{array}\right. \Rightarrow f(2^x) - g(5^x) > f(3^x) - g(7^x)$$

- Για $x > 0$ έχουμε

$$2<3 \Rightarrow \ln 2<\ln 3 \overset{(x>0)}{\Rightarrow} x\ln 2<x\ln 3 \Rightarrow \ln\left(2^x\right)<\ln\left(3^x\right) \Rightarrow$$

$$\overset{(\ln x \uparrow)}{\Rightarrow} 2^x<3^x \overset{(f \uparrow)}{\Rightarrow} f(2^x)<f(3^x):(\gamma)$$

$$5<7 \Rightarrow \ln 5<\ln 7 \overset{(x>0)}{\Rightarrow} x\ln 5<x\ln 7 \Rightarrow \ln\left(5^x\right)<\ln\left(7^x\right) \overset{(\ln x \uparrow)}{\Rightarrow} 5^x<7^x$$

$$\overset{(g\ \text{γν. φθίνουσα})}{\Rightarrow} g(5^x)>g(7^x) \Leftrightarrow -g(5^x)<-g(7^x):(\delta)$$

Από τις (γ) και (δ) έχουμε :

$$\begin{cases} f(2^x) < f(3^x) \\ -g(5^x)<-g(7^x) \end{cases} \Rightarrow f(2^x)-g(5^x)<f(3^x)-g(7^x)$$

Άρα ισχύει :

$$f(2^x)-g(5^x) \neq f(3^x)-g(7^x) \ \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εξίσωση

$$\boxed{\mathbf{f(2^x)-g(5^x)=f(3^x)-g(7^x)}}$$

έχει **μια μόνο ρίζα** στο $\mathbb{R}$, τον αριθμό $x_0=0$.

2ο

2ο

ΘΕΜΑ Β

B1. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$, ισχύει :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

Έχουμε :

- $\displaystyle \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha x+\eta\mu x}{2x-x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha+\frac{\eta\mu x}{x}}{2-x}=\frac{\alpha+1}{2}$, (αφού $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$)
- $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{4x^2+11x+49}-2x\right)=\sqrt{49}=7$
- $f(0)=\beta$

Άρα

$$\boxed{\begin{cases}\dfrac{\alpha+1}{2}=7\\ \beta=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+1=14\\ \beta=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=13\\ \beta=7\end{cases}}$$

Β2. ● Για κάθε $x<0$ έχουμε :

$$f(x)=\frac{13x+\eta\mu x}{2x-x^2}=\frac{1}{x}\,\frac{13+\dfrac{\eta\mu x}{x}}{\dfrac{2}{x}-1}$$

Ακόμη για κάθε $x<0$ έχουμε :

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\frac{1}{|x|}\Rightarrow\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}\Rightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{|x|}\overset{(x<0)}{\Rightarrow}\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le-\frac{1}{x}\ :(1)$$

Είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0,$$

οπότε ,λόγω της (1) και του **κριτηρίου παρεμβολής,** προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$$

Επομένως

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\,\frac{13+\dfrac{\eta\mu x}{x}}{\dfrac{2}{x}-1}=0\,\frac{13+0}{0-1}=0.(-13)=0}$$

● Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f(x)=\left(\sqrt{4x^2+11x+49}-2x\right)=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{4x^2+11x+49}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+11x+49}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+11x+49}+2x}=$$

$$=\frac{4x^2+11x+49-4x^2}{\sqrt{x^2\left(4+\dfrac{11}{x}+\dfrac{49}{x^2}\right)}+2x}=\frac{11x+49}{|x|\sqrt{4+\dfrac{11}{x}+\dfrac{49}{x^2}}+2x}=$$

$$=\frac{x\left(11+\frac{49}{x}\right)}{x\sqrt{4+\frac{11}{x}+\frac{49}{x^2}}+2x}=\frac{x\left(11+\frac{49}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{11}{x}+\frac{49}{x^2}}+2\right)}=\frac{11+\frac{49}{x}}{\sqrt{4+\frac{11}{x}+\frac{49}{x^2}}+2},$$

οπότε

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{11+\frac{49}{x}}{\sqrt{4+\frac{11}{x}+\frac{49}{x^2}}+2}=\frac{11+0}{\sqrt{4+0+0}+2}=\frac{11}{4}}$$

B3. Είναι

$$e^{\sqrt{4x^2+11x+49}}-e^{2x}=e^{2x}\left(\frac{e^{\sqrt{4x^2+11x+49}}}{e^{2x}}-1\right)=e^{2x}\left(e^{\sqrt{4x^2+11x+49}-2x}-1\right):(1)$$

Έχουμε

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}\overset{\left(\substack{u=2x\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{u\to+\infty} e^{u}=+\infty$
- Για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\sqrt{4x^2+11x+49}-2x}-1\right)$, θέτουμε $u=\sqrt{4x^2+11x+49}-2x$.

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+11x+49}-2x\right)\overset{(B2.)}{=}\frac{11}{4},$$

οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\sqrt{4x^2+11x+49}-2x}-1\right)=\lim_{u\to\frac{11}{4}}\left(e^{u}-1\right)=e^{\frac{11}{4}}-1>0$$

Επομένως

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\sqrt{4x^2+11x+49}}-e^{2x}\right)\overset{(1)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left[e^{2x}\left(e^{\sqrt{4x^2+11x+49}-2x}-1\right)\right]\overset{(+\infty)\left(e^{\frac{11}{4}}-1\right)}{=}+\infty}$$

B4. Η f είναι συνεχής στο $\Delta=[0,3]$, αφού προκύπτει από πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων, οπότε έχει στο $\Delta=[0,3]$

μια ελάχιστη τιμή m και μια μέγιστη τιμή M.

Άρα

$$m \le f(x) \le M \text{, για κάθε } x \in [1,3] : (2)$$

και f είναι:

$$f(\Delta) = \begin{cases} [m, M] & \text{, αν } m < M \\ \{m\} = \{M\} & \text{, αν } m = M \end{cases}$$

Λόγω της (2) έχουμε :

$$\begin{cases} m \le f(0) \le M \\ m \le f(1) \le M \\ m \le f(2) \le M \\ m \le f(3) \le M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \le 7 \le M \\ 2m \le 2f(1) \le 2M \\ 3m \le 3f(2) \le 3M \\ 4m \le 4f(3) \le 4M \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 10m \le 7 + 2f(1) + 3f(2) + 4f(3) \le 10M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \le \frac{7 + 2f(1) + 3f(2) + 4f(3)}{10} \le M \Rightarrow \frac{7 + 2f(1) + 3f(2) + 4f(3)}{10} \in f(\Delta)$$

οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \Delta = [0,3]$

τέτοιο , ώστε:

$$f(x_0) = \frac{7 + 2f(1) + 3f(2) + 4f(3)}{10} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{10f(x_0) = 7 + 2f(1) + 3f(2) + 4f(3)}}$$

2ο

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$: **(1)**, έχουμε $e^{x_1} < e^{x_2}$: **(2)**

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε

$$x_1 + e^{x_1} < x_2 + e^{x_2} \Rightarrow x_1 + e^{x_1} - 1 < x_2 + e^{x_2} - 1 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Επομένως η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)-x+2-4^x}{3^x-2^x+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x-1-x+2-4^x}{3^x-2^x+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1-4^x}{3^x-2^x+e^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x\left(\frac{e^x}{4^x}+\frac{1}{4^x}-1\right)}{3^x\left(1-\frac{2^x}{3^x}+\frac{e^x}{3^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{4}{3}\right)^x\frac{\left(\frac{e}{4}\right)^x+\frac{1}{4^x}-1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{e}{3}\right)^x}\right]=(+\infty)\cdot\frac{0+0-1}{1-0+0}$$

$$=(+\infty)\cdot(-1)=-\infty$$

γιατί • $\frac{4}{3}>1$ άρα $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^x=+\infty$

• $e<4\Leftrightarrow\frac{e}{4}<1$ άρα $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{4}\right)^x=0$

• $\lim_{x\to+\infty}4^x=+\infty$ άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4^x}=0$

• $2<3\Leftrightarrow\frac{2}{3}<1$ άρα $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0$

• $e<3\Leftrightarrow\frac{e}{3}<1$ άρα $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^x=0$

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=(x-2)g(e^\alpha-1)-(x-1)\left[g(\eta\mu\alpha)-g(\alpha)\right]-2016(x-1)(x-2),\quad x\in[1,\ 2]$$

- Η h είναι συνεχής στο $[1,\ 2]$ ως πολυωνυμική
- $h(1)=-g(e^\alpha-1)$

Είναι

$$\alpha>0\Rightarrow e^\alpha>e^0\Rightarrow e^\alpha>1\Rightarrow e^\alpha-1>0\overset{(g1)}{\Rightarrow}g(e^\alpha-1)>g(0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(e^\alpha-1)>0\Rightarrow -g(e^\alpha-1)<0\Rightarrow h(1)<0$$

- $h(2)=g(\alpha)-g(\eta\mu\alpha)$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x|\le|x|$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$,

οπότε για κάθε $\alpha>0$, θα ισχύει :

$$|\eta\mu\alpha|<\alpha\Rightarrow -\alpha<\eta\mu\alpha<\alpha\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \etaμα < α \overset{(g \text{ γν. αύξουσα})}{\Rightarrow} g(ημα) < g(α) \Rightarrow g(α) - g(ημα) > 0 \Rightarrow h(2) > 0$$

Άρα είναι $h(1)h(2) < 0$.

Επομένως η h ικανοποιεί τις προυποθέσεις του **Θεωρήματος Bolzano** στο $[1,2]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον $x_0 \in (1,2)$,

ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \frac{g(e^{α} - 1) - 1}{x_0 - 1} - \frac{g(ημα) - g(α)}{x_0 - 2} = 2016$$

Άρα η εξίσωση

$$\boxed{\frac{g(e^{α} - 1) - 1}{x - 1} - \frac{g(ημα) - g(α)}{x - 2} = 2016}$$

έχει **μια τουλάχιστον ρίζα** στο (1, 2)

Γ4. Για κάθε $x > 0$ έχουμε :

$$g(-\ln x) = e^{-\ln x} - \ln x - 1 = \frac{1}{e^{\ln x}} - \ln x - 1 = \frac{1}{x} - \ln x - 1$$

Οπότε

$$e^{f(x)} + f(x) = \frac{1}{x} - \ln x \Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) - 1 = \frac{1}{x} - \ln x - 1 \Leftrightarrow g(f(x)) = g(-\ln x)$$

Και επειδή η g είναι "1-1" , ως γνησίως μονότονη συνάρτηση, προκύπτει ότι

$$\boxed{f(x) = -\ln x, \quad x > 0}$$

Γ5. Είναι

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-\ln x) \overset{-(-\infty)}{=} +\infty$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = g(0) = 0$ αφού η g είναι συνεχής στο 0 ως άθροισμα συνεχών

συναρτήσεων και για κάθε $x > 0$ είναι

$$x > 0 \overset{(g1)}{\Rightarrow} g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > 0,$$

οπότε

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{g(x)} = +\infty$$

Επομένως

$$\boxed{\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{g(x)}f(x)\right]\overset{(+\infty)(+\infty)}{=}+\infty}$$

Γ6. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$g(x)-2\sigma\upsilon\nu 4x=f(x)\Leftrightarrow e^x+x-1-2\sigma\upsilon\nu 4x+\ln x=0$$

έχει μοναδική λύση στο $(0,\ 1)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\Phi(x)=e^x+x-1-2\sigma\upsilon\nu 4x+\ln x,\quad x\in(0,+\infty)$$

Είναι

$$\lim_{x\to0^+}\Phi(x)=\lim_{x\to0^+}(e^x+x-1-2\sigma\upsilon\nu 4x+\ln x)=-\infty,$$

αφού $\lim\limits_{x\to0^+}(e^x+x-1-2\sigma\upsilon\nu 4x)=1+0-1-2=-2$ και $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x)=-\infty$.

Επομένως είναι $\Phi(x)<0$ κοντά στο 0 με $x>0$.

Άρα υπάρχει $\kappa\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $\Phi(\kappa)<0$.

Είναι $\Phi(1)=e-2\sigma\upsilon\nu 4>0$ γιατί $\pi<4<\dfrac{3\pi}{2}$ οπότε $\sigma\upsilon\nu 4<0$

Οπότε $\Phi(\kappa)\Phi(1)<0$ και η Φ είναι συνεχής στο $[\kappa,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

Επομένως η Φ ικανοποιεί τις προυποθέσεις του **Θεωρήματος Bolzano** στο $[\kappa,1]$,οπότε υπάρχει τουλάχιστον $\xi\in(\kappa,1)\subseteq(0,1)$,ώστε

$$\Phi(\xi)=0\Leftrightarrow e^\xi+\xi-1-2\sigma\upsilon\nu 4\xi+\ln\xi=0\Leftrightarrow g(\xi)-2\sigma\upsilon\nu 4\xi=f(\xi).$$

2ο **ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. Για κάθε $x\in(0,\ 1]$, έχουμε :

$$f^2(x)-2f(x)\ln x=1-x-(\ln x)^2\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)\ln x+(\ln x)^2=1-x$$

$$\Leftrightarrow(f(x)-\ln x)^2=1-x$$

Θέτουμε

$$g(x)=f(x)-\ln x,\ \ x\in(0,\ 1],$$

οπότε για κάθε $x\in(0,\ 1]$ είναι

$$g^2(x)=1-x$$

Είναι :

$$g(x)=0 \Leftrightarrow g^2(x)=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Επομένως η g έχει μοναδική ρίζα την $x=1$ και συνεπώς

- $g(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(0,\ 1)$
- η g είναι συνεχής στο $(0,\ 1)$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

Επομένως η g **διατηρεί σταθερό πρόσημο** στο $(0,\ 1)$.

Είναι

$$g\left(\frac{1}{e}\right)=f\left(\frac{1}{e}\right)-\ln\frac{1}{e}=f\left(\frac{1}{e}\right)-(\ln 1-\ln e)=f\left(\frac{1}{e}\right)+1.$$

Αλλά

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\left(f\left(\frac{1}{e}\right)+1\right)x^3+5x-2016\right]=+\infty.$$

- Αν $f\left(\frac{1}{e}\right)+1=0$ τότε

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\left(f\left(\frac{1}{e}\right)+1\right)x^3+5x-2016\right]=\lim_{x\to-\infty}(5x-2016)=\lim_{x\to-\infty}(5x)=-\infty,$$

άτοπο.

- Αν $f\left(\frac{1}{e}\right)+1>0$ τότε

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\left(f\left(\frac{1}{e}\right)+1\right)x^3+5x-2016\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(f\left(\frac{1}{e}\right)+1\right)x^3\right]\overset{\left(f\left(\frac{1}{e}\right)+1\right)(-\infty)}{=}-\infty,$$

άτοπο.

Άρα

$$f\left(\frac{1}{e}\right)+1<0 \Leftrightarrow g\left(\frac{1}{e}\right)<0.$$

Οπότε $g(x)<0$, για κάθε $x\in(0,\ 1)$ και συνεπώς από την σχέση $g^2(x)=1-x$, παίρνουμε:

$$g(x)=-\sqrt{1-x},\quad x\in(0,\ 1)$$

και επειδή $g(1)=0$, είναι :

$$g(x) = -\sqrt{1-x}, \quad x \in (0,\ 1].$$

Άρα

$$f(x) - \ln x = -\sqrt{1-x}$$

και επομένως

$$\boxed{\mathbf{f(x) = \ln x - \sqrt{1-x}, \quad x \in A = (0,\ 1]}}$$

Δ2. Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,\ 1]$ με $x_1 < x_2$, έχουμε :

$$\ln x_1 < \ln x_2 \quad : \mathbf{(1)}$$

και

$$-x_1 > -x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Rightarrow \sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-x_2} \Rightarrow -\sqrt{1-x_1} < -\sqrt{1-x_2} \quad : \mathbf{(2)}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε

$$\ln x_1 - \sqrt{1-x_1} < \ln x_2 - \sqrt{1-x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα , οπότε είναι και συνάρτηση $1-1$ και συνεπώς αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f.

Έχουμε :

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\ln x - \sqrt{1-x}\right) \overset{(-\infty)+(-1)}{=} -\infty$
- $f(1) = 0$

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{A = (0,\ 1]}$, έχουμε :

$$f(A) = \left(\lim_{x \to 0^+} f(x),\ f(1)\right] = (-\infty,\ 0].$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{D_{f^{-1}} = (-\infty,\ 0]}}$$

Δ3. Η εξίσωση

$$\ln x - \sqrt{1-x} = 1 - \lambda + e^{2-\lambda} \quad : (E)$$

γράφεται

$$f(x) = 1 - \lambda + e^{2-\lambda}, \text{ με } x \in (0,\ 1].$$

Για να έχει η εξίσωση (Ε) λύση στο $(0,\ 1]$, πρέπει και αρκεί να ισχύει : $1-\lambda+e^{2-\lambda}\in f(A)=(-\infty,\ 0]$, δηλαδή $\boxed{1-\lambda+e^{2-\lambda}\le 0}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=1-x+e^{2-x},\ x\in\mathbb{R}$$

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, έχουμε :

$$x_1<x_2\Rightarrow -x_1>-x_2\Rightarrow 1-x_1>1-x_2 \quad \textbf{(3)}$$

και

$$x_1<x_2\Rightarrow -x_1>-x_2\Rightarrow 2-x_1>2-x_2\Rightarrow e^{2-x_1}>e^{2-x_2} \quad \textbf{(4)}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (3) και (4) παίρνουμε

$$1-x_1+e^{2-x_1}>1-x_2+e^{2-x_2}\Rightarrow h(x_1)>h(x_2)$$

Επομένως η h είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση οπότε έχουμε :

$$1-\lambda+e^{2-\lambda}\le 0\Leftrightarrow h(\lambda)\le 0\Leftrightarrow h(\lambda)\le h(2)\overset{(h\searrow)}{\Leftrightarrow}\lambda\ge 2$$

Αρα η **μικρότερη τιμή της παραμέτρου λ** ώστε η εξίσωση (Ε) να έχει λύση στο $\mathbf{(0,\ 1]}$, είναι

$$\boxed{\lambda=2}$$

Δ4. Το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της f, δηλαδή το διάστημα $(0,\ 1]$

Επομένως ισχύει :

$$0<f^{-1}(x)\le 1,\ \text{για κάθε}\ \ x\in D_{f^{-1}}=(-\infty,\ 0],$$

Οπότε για κάθε $x<0$ είναι :

$$0<f^{-1}(x)e^x\le e^x\ :(5)$$

Είναι

$$\lim_{x\to-\infty}0=0\ \text{και}\ \lim_{x\to-\infty}e^x=0\ ,$$

οπότε λόγω της (5) και του **κριτηρίου παρεμβολής,** προκύπτει ότι

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left[f^{-1}(x)e^x\right]=0.}$$

Δ5. Η εξίσωση με $x\in(-\infty,\ 0]$ είναι ισοδύναμη με την :

$$\left(f^{-1}(x)-1\right)+\left(\sigma\upsilon\nu x-1\right)=0\ :\ (5)$$

Επειδή το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το διάστημα $(0,\ 1]$,έπεται ότι για κάθε

$x \in D_{f^{-1}} = (-\infty,\ 0]$ ισχύει :

$$f^{-1}(x) \le 1 \Leftrightarrow f^{-1}(x) - 1 \le 0$$

Επίσης για κάθε $x \in (-\infty,\ 0]$ ισχύει :

$$\sigma\upsilon\nu x \le 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - 1 \le 0$$

Έτσι για να ισχύει η (5)πρέπει και αρκεί να είναι :

$$\begin{cases} f^{-1}(x) - 1 = 0 \\ \text{και} \\ \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = 1 \\ \text{και} \\ \sigma\upsilon\nu x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(1) \\ \text{και} \\ \sigma\upsilon\nu x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{και} \\ \sigma\upsilon\nu x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{και} \\ \sigma\upsilon\nu 0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Άρα $\mathbf{x_1 = 0}$, είναι **μοναδική λύση** της δοθείσας εξίσωσης.

3ο

3ο **ΘΕΜΑ Β** ΣΑΡΑΦΗΣ

Β1.Έχουμε

$$f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x - 2} \Rightarrow (x-2)f(x) = x^2 + \alpha x + \beta \Rightarrow \lim_{x\to 2}(x-2)f(x) = \lim_{x\to 2}(x^2 + \alpha x + \beta)$$
$$\Rightarrow 2\alpha + \beta + 4 = 0.$$

Για $x \ne 2$ $f(x) = \dfrac{x^2 + \alpha x - 2\alpha - 4}{x - 2} = \dfrac{(x-2)(x+2) + \alpha(x-2)}{x-2} = x + 2 + \alpha$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}(x + \alpha + 2) = 7 \Rightarrow \alpha = 3$,οπότε β=-10.

Β2. α.Πρέπει να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f^2(x) = x^4 + x^3 + 6x + 28$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο (0,1).Η εξίσωση γράφεται

$$(x+5)^2 = x^4 + x^3 + 6x + 28 \Leftrightarrow x^4 + x^3 - x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3 + 2x^2 + x - 3) = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3\ ,\ x \in [0,1]$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο [0,1].

$h(0)=-3$, $h(1)=1$ οπότε $h(0)\cdot h(1)<0$

Από το Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$ άρα και η εξίσωση $f^2(x)=x^4+x^3+6x+28$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο (0,1).

B2. β. Έχουμε $f(g(x))=\sqrt{x^2+1}-x+5$ και $f(x)=x+5$ οπότε

$$g(x)+5=\sqrt{x^2+1}-x+5\Rightarrow g(x)=\sqrt{x^2+1}-x.$$

B2. γ. Για x κοντά στο $+\infty$ έχουμε:

$$g(x+1)-g(x)=\sqrt{(x+1)^2+1}-x-1-\sqrt{x^2+1}+x=\sqrt{(x+1)^2+1}-\sqrt{x^2+1}-1$$

$$\sqrt{(x+1)^2+1}-\sqrt{x^2+1}=\frac{\left(\sqrt{(x+1)^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{(x+1)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{(x+1)^2+1}+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$\frac{(x+1)^2+1-x^2-1}{\sqrt{(x+1)^2+1}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(g(x+1)-g(x)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}-1\right)=1-1=0$$

3o **ΘΕΜΑ Γ** **ΣΑΡΑΦΗΣ**

Γ1. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$$g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow f(g(x_1))=f(g(x_2))\Rightarrow(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η g είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Η εξίσωση γράφεται $g\left(f(x)+x^3+x\right)=g\left(f(x)-\ln x+2\right)$ (g 1-1)

$$f(x)+x^3+x=f(x)-\ln x+2 \Leftrightarrow x^3+x+\ln x-2=0.$$

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=x^3+x+\ln x-2$, με x>0

Προφανής λύση για x=1 , $h(1)=1+1+\ln 1-2=0$

Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2 \Rightarrow x_1^3<x_2^3$ και $\ln x_1<\ln x_2$ οπότε

$x_1^3+x_1+\ln x_1-2<x_2^3+x_2+\ln x_2-2 \Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$

Δηλ. η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση για x=1.

Γ3. Η εξίσωση $\alpha\cdot e^{g(x)}=1$ γράφεται $e^{g(x)}=\frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow g(x)=\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Leftrightarrow g(x)=-\ln\alpha$

Αν 0<α<1 τότε $-\ln\alpha>0$ δηλ. ανήκει στο σύνολο τιμών οπότε η εξίσωση $g(x)=-\ln\alpha$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $\mathbb{R}$. Η g είναι 1-1 οπότε έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

Αν $\alpha\geq 1$ τότε $-\ln\alpha\leq 0$ δηλ. $-\ln\alpha\notin(0,+\infty)$ οπότε η εξίσωση δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

Γ4. Η g είναι 1-1 οπότε

$$g\left(f(\ln x)+1\right)=g(x+2) \Leftrightarrow f(\ln x)+1=x+2 \Leftrightarrow f(\ln x)=x+1$$

Θέτουμε $\omega=\ln x \Leftrightarrow x=e^{\omega}$.

Άρα $f(\omega)=e^{\omega}+1$

3ο **ΘΕΜΑ Δ** **ΣΑΡΑΦΗΣ**

Δ1. $e^{-x}\left(2f(x)+e^{-x}\right)=x-f^2(x) \Rightarrow \left(e^{-x}\right)^2+2e^{-x}f(x)+f^2(x)=x \Rightarrow$

$$\Rightarrow\left(f(x)+e^{-x}\right)^2=x$$

Θέτουμε $\varphi(x)=f(x)+e^{-x}$, $x\in[0,+\infty)$ οπότε $\varphi^2(x)=x$

Έστω ότι υπάρχει $x_0\in[0,+\infty)$ ώστε $\varphi(x_0)=0$

Για $x=x_0$ έχουμε $\varphi^2(x_0)=x_0\Rightarrow x_0=0$.Άρα $\varphi(x)\neq 0$ για κάθε x>0.

Η φ συνεχής στο $[0,+\infty)$ ως πράξη των συνεχών συναρτήσεων $f(x),e^{-x}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$.

Για x=2 $\varphi(2)=f(2)+e^{-2}=f(2)+\dfrac{1}{e^2}=\dfrac{e^2f(2)+1}{e^2}>0$.Άρα $\varphi(x)>0$ για κάθε x>0.

$$\left(f(x)+e^{-x}\right)^2=x\Rightarrow\left|f(x)+e^{-x}\right|=\sqrt{x}\Rightarrow f(x)+e^{-x}=\sqrt{x}\Rightarrow f(x)=\sqrt{x}-e^{-x}$$

$f(x)=\sqrt{x}-e^{-x}$ για κάθε $x\geq 0$

Δ2. α. Για κάθε $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2\Rightarrow -x_1>-x_2\Rightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2}\Rightarrow -e^{-x_1}<-e^{-x_2}$ και $\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}$ οπότε $\sqrt{x_1}-e^{-x_1}<\sqrt{x_2}-e^{-x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$,η f γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Δ2.β. Η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε $0<2016\Leftrightarrow f(0)<f(2016)$ και $1<2016\Leftrightarrow f(1)<f(2016)\Leftrightarrow 2015f(1)<2015f(2016)$.

Προσθέτουμε οπότε

$$f(0)+2015f(1)<2016f(2016)\Leftrightarrow f(2016)>\frac{f(0)+2015f(1)}{2016}$$

Δ2. γ. Η f συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα και στο [0,1].

$f(0)=-1$ και $f(1)=1-\dfrac{1}{e}>0$

Από το **Θ. Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ ώστε $f(\xi)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα,η λύση είναι μοναδική.

Δ3. i. Για να αντιστρέφεται η h θα πρέπει να είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$h(x_1)=h(x_2) \Rightarrow g(h(x_1))=g(h(x_2)) \Rightarrow 2f(x_1)+h(x_1)=2f(x_2)+h(x_2) \Rightarrow$$
$$2f(x_1)=2f(x_2) \Rightarrow f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2.$$

Άρα η h είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Δ3. ii. Η γραφική παράσταση της g για να έχει κοινό σημείο με την ευθεία y=x θα πρέπει η εξίσωση $g(x)=x$ να έχει τουλάχιστον μια λύση.

Θέτουμε όπου x την h(x) στην $g(x)=x$.

$g(h(x))=h(x) \Leftrightarrow 2f(x)+h(x)=h(x) \Leftrightarrow f(x)=0$.Από το ερώτημα Δ2γ η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική λύση στο (0,1).

Άρα η $g(x)=x$ έχει λύση την τιμή h(ξ) δηλ. τουλάχιστον ένα κοινό σημείο η C_g με την y=x.

4o

4o **ΘΕΜΑ Β** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

B1. i. Είναι

$$f(f(x))+x=2f(x),$$

οπότε

$$f(f(x))-2f(x)=-x \quad : (1)$$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$.

Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\begin{cases} f(f(x_1))=f(f(x_2)) \\ -2f(x_1)=-2f(x_2)\end{cases}$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow} f(f(x_1))-2f(x_1)=f(f(x_2))-2f(x_2)$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} -x_1=-x_2$$

$$\Rightarrow x_1=x_2$$

Επομένως η f είναι συνάρτηση **1−1**.

ii. Υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, τότε με $x_1<x_2$ έχουμε :

$$x_1<x_2 \overset{(f \searrow \mathbb{R})}{\Rightarrow} f(x_1)>f(x_2) \overset{(f \searrow \mathbb{R})}{\Rightarrow} \begin{cases} f(f(x_1))<f(f(x_2)) \\ -2f(x_1)<-2f(x_2)\end{cases}$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow} f(f(x_1))-2f(x_1)<f(f(x_2))-2f(x_2)$$

$$\Rightarrow -x_1<-x_2 \Rightarrow x_1>x_2, \text{ΑΤΟΠΟ!!!}(\text{αφού είναι } x_1<x_2)$$

Επομένως η **f** δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και επειδή δόθηκε ότι είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι η **f** είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

B2. Από την σχέση (1) για $x=0$ έχουμε:

$$f(f(0))-2f(0)=-0 \Leftrightarrow f(f(0))=2f(0) \qquad (2)$$

Είναι:

$$2f(x^2-3x+2)=f(f(0)) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2f(x^2-3x+2)=2(f(0))$$

$$\Leftrightarrow f(x^2-3x+2)=f(0) \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$$, (αφού η f είναι $1-1$)

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2$$

Επομένως οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x=1$ ή $x=2$.

B3. i. Για κάθε $x>0$ ισχύει

$$f(x)=\frac{f(x)}{x}\cdot x$$

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\ell\in\mathbb{R}_+^* \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to+\infty}x=+\infty,$$

οπότε

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\cdot x\right) = +\infty}$$

ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(f(x)) + x = 2f(x)$$

Επειδή

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

έπεται ότι υπάρχει $k>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in(k,+\infty)$ να ισχύει $f(x)>0$.

Έτσι για κάθε $x\in(k,+\infty)$ έχουμε:

$$f(f(x)) + x = 2f(x) \Rightarrow \frac{f(f(x))+x}{x} = \frac{2f(x)}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{f(f(x))}{x} + 1 = 2\frac{f(x)}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x} + 1 = 2\frac{f(x)}{x} \qquad (3)$$

Είναι

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}_+^*$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(f(x))}{f(x)} \overset{\left(\substack{\omega=f(x)\\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{f(\omega)}{\omega} = \ell$

Έτσι από την (3) έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}+1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(2\cdot\frac{f(x)}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ell\cdot\ell + 1 = 2\ell \Leftrightarrow \ell^2 - 2\ell + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\ell-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \ell - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\ell = 1}$$

Γ1. i. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x)=f(x)-2x \quad (1)$$

Από την υπόθεση είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=3.$$

Άρα από την (1) έχουμε

$$f(x)=g(x)+2x \quad (2).$$

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=3\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}(2x)=+\infty,$$

οπότε από την (2) έχουμε

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)+2x\right)=+\infty}.$$

ii. Έχουμε:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\overset{(2)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)+2x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}g(x)+2\right)=0\cdot 3+2=2}$$

Γ2. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$\frac{xf(2x)+f^2(3x)}{f^2(x)+x^2}=\frac{\dfrac{xf(2x)+f^2(3x)}{x^2}}{\dfrac{f^2(x)+x^2}{x^2}}=\frac{2\cdot\dfrac{f(2x)}{2x}+9\left(\dfrac{f(3x)}{3x}\right)^2}{\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2+1}$$

Είναι

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$$

και για $\alpha>0$ είναι

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(\alpha x)}{\alpha x}\overset{\left(\substack{\omega=\alpha x\\ \lim_{x\to+\infty}(\alpha x)=+\infty}\right)}{=}\lim_{\omega\to+\infty}\frac{f(\omega)}{\omega}=2$$

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf(2x)+f^2(3x)}{f^2(x)+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot\frac{f(2x)}{2x}+9\left(\frac{f(3x)}{3x}\right)^2}{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2+1}=\frac{2\cdot 2+9\cdot 2^2}{2^2+1}=\frac{40}{5}=8$$

Γ3. Επειδή η f είναι περιττή έπεται ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(-x)=-f(x)\quad(3).$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=3\quad(4)$$

Για να βρούμε όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-2x)$, θέτουμε

$u=-x$, οπότε είναι $x=-u$ και όταν $x\to-\infty$ έχουμε $u\to+\infty$.

Άρα

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-2x)=\lim_{u\to+\infty}(f(-u)-2(-u))\overset{(3)}{=}\lim_{u\to+\infty}(-f(u)+2u)$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\left[-(f(u)-2u)\right]=-\lim_{u\to+\infty}\left[f(u)-2u\right]\overset{(4)}{=}-3$$

Γ4. Για να βρούμε όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f^2(x)+4f(x)+5}-f(x)\right)$, θέτουμε $\omega=f(x)$. Όταν $x\to+\infty$ έχουμε $\omega\to+\infty$ (αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$)

Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f^2(x)+4f(x)+5}-f(x)\right)=\lim_{\omega\to+\infty}\left(\sqrt{\omega^2+4\omega+5}-\omega\right)=$$

$$=\lim_{\omega\to+\infty}\frac{(\omega^2+4\omega+5)-\omega^2}{\sqrt{\omega^2+4\omega+5}+\omega}\overset{(\omega>0)}{=}\lim_{\omega\to+\infty}\frac{4\omega+5}{\omega\sqrt{1+\frac{4}{\omega}+\frac{5}{\omega^2}}+\omega}=$$

$$=\lim_{\omega\to+\infty}\frac{\omega\left(4+\frac{5}{\omega}\right)}{\omega\left(\sqrt{1+\frac{4}{\omega}+\frac{5}{\omega^2}}+1\right)}=\lim_{\omega\to+\infty}\frac{4+\frac{5}{\omega}}{\sqrt{1+\frac{4}{\omega}+\frac{5}{\omega^2}}+1}=$$

$$=\frac{4+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=2$$

Δ1. Είναι

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad :(1).$$

Αν στην (1) θέσουμε $x=y=0$ έχουμε:

$$f(0+0)=f(0)+f(0) \Leftrightarrow f(0)=f(0)+f(0) \Leftrightarrow f(0)=0.$$

Από την (1) , για $y=-x$, έχουμε:

$$f(x+(-x))=f(x)+f(-x) \Leftrightarrow f(0)=f(x)+f(-x)$$

$$\overset{(f(0)=0)}{\Leftrightarrow} 0=f(x)+f(-x) \Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{\mathbf{f(-x)=-f(x) \quad :(2)}}$$

Δ2. Από την (1) θέτοντας όπου x το $x-y$ έχουμε

$$f((x-y)+y)=f(x-y)+f(y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=f(x-y)+f(y) \Leftrightarrow f(x-y)=f(x)-f(y)$$

Άρα για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{\mathbf{f(x-y)=f(x)-f(y) \quad :(3)}}$$

Δ3. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$.

Έχουμε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow x_2-x_1>0 \overset{\left(\substack{\text{για κάθε } x>0 \\ \text{ισχύει } f(x)<0}\right)}{\Rightarrow} f(x_2-x_1)<0$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} f(x_2)-f(x_1)<0$$

$$\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Άρα για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$,

οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$\mathbf{2f(x^2)-f(x+1)>0} \Leftrightarrow 2f(x^2)>f(x+1)$$

$$\Leftrightarrow f\left(x^2\right)+f\left(x^2\right)>f\left(x+1\right)$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f\left(x^2+x^2\right)>f\left(x+1\right)$$

$$\Leftrightarrow f\left(2x^2\right)>f\left(x+1\right)$$

$$\overset{(f \text{ γν. φθίν } \mathbb{R})}{\Leftrightarrow} \quad 2x^2<x+1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-x-1<0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,,\mathbf{1}\right).$$

Δ4. Η f είναι συνεχής στο α, άρα ισχύει:

$$\lim_{x\to\alpha} f\left(x\right)=f\left(\alpha\right) \;:(4).$$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τυχαίος, θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right).$$

Για το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$ θέτουμε $u=x-x_0+\alpha$, οπότε είναι $x=\left(x_0-\alpha\right)+u$

Είναι φανερό ότι : όταν $x\to x_0$,τότε $u\to\alpha$.

Άρα είναι

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=\lim_{u\to\alpha} f\left(\left(x_0-\alpha\right)+u\right)\overset{(1)}{=}\lim_{u\to\alpha}\left[f\left(x_0-\alpha\right)+f\left(u\right)\right]$$

$$=\lim_{u\to\alpha} f\left(x_0-\alpha\right)+\lim_{u\to\alpha} f\left(u\right)\overset{(4)}{=}f\left(x_0-\alpha\right)+f\left(\alpha\right)\overset{(1)}{=}$$

$$=f\left(\left(x_0-\alpha\right)+\alpha\right)=f\left(x_0\right)$$

Άρα για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)},$$

οπότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Διαφορετικά

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f\left(x\right)=f\left(\left(x-x_0+\alpha\right)+\left(x_0-\alpha\right)\right)= f\left(x-x_0+\alpha\right)+f\left(x_0-\alpha\right) \quad :(5)$$

Η συνάρτηση $\varphi\left(x\right)=x-x_0+\alpha$ είναι συνεχής στο x_0 και η f είναι συνεχής στο $\varphi\left(x_0\right)=\alpha$, οπότε η συνάρτηση

$$f_1(x)=f(x-x_0+\alpha)$$

είναι συνεχής στο x_0 ,ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων .

Ακόμη η $f(x_0-\alpha)$ είναι σταθερά .

Έτσι από την (5) προκύπτει ότι η f είναι συνεχής στο x_0 , ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Άρα η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0\in\mathbb{R}$,οπότε η f είναι **συνεχής** στο $\mathbb{R}$.

5ο

5ο **ΘΕΜΑ Β** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Β1. Είναι $xy\left(f(x)+f(y)\right)>x^2f(y)+y^2f(x)\quad :(1)\quad ,(x\neq y)$.

Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$.

Λόγω της (1) έχουμε:

$$x_1x_2\left(f(x_1)+f(x_2)\right)>x_1{}^2f(x_2)+x_2{}^2f(x_1)$$

$$\Rightarrow x_1x_2f(x_1)+x_1x_2f(x_2)-x_1{}^2f(x_2)-x_2{}^2f(x_1)>0$$

$$\Rightarrow x_1\left(x_2f(x_1)-x_1f(x_2)\right)-x_2\left(x_2f(x_1)-x_1f(x_2)\right)>0$$

$$\Rightarrow\left(x_2f(x_1)-x_1f(x_2)\right)\ (x_1-x_2)>0\quad (2)$$

Είναι $x_1-x_2<0$ (επειδή $x_1<x_2$), οπότε από τη (2) προκύπτει ότι

$$x_2f(x_1)-x_1f(x_2)<0$$

$$\Rightarrow x_2f(x_1)<x_1f(x_2)\overset{(x_1>0,x_2>0)}{\Rightarrow}\frac{f(x_1)}{x_1}<\frac{f(x_2)}{x_2}$$

$$\Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Β2. Πρέπει αρχικά να ισχύει : $\quad x,x^2\in D_f=(0,+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{x>0}$

Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} f\left(x^2\right) > xf\left(x\right) \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f\left(x^2\right)}{x^2} > \dfrac{f\left(x\right)}{x} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h\left(x^2\right) > h\left(x\right) \\ x > 0 \end{cases} \overset{\left(h\ \mathbf{1}\ \left(0,+\infty\right)\right)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2 > x \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x-1\right) > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

Άρα $x \in \left(1,+\infty\right)$.

B3. Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$x^2 f\left(f\left(x\right)\right) = f\left(x\right) f\left(x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f\left(f\left(x\right)\right)}{f\left(x\right)} = \frac{f\left(x^2\right)}{x^2} \Leftrightarrow h\left(f\left(x\right)\right) = h\left(x^2\right)$$

$$\overset{\left(h\ \ 1\text{–}1\ \text{ως γν. μονότονη}\right)}{\Leftrightarrow} f\left(x\right) = x^2$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{f\left(x\right) = x^2,\ x > 0}} \text{ (ικανοποιεί την υπόθεση).}$$

5ο **ΘΕΜΑ Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Γ1. Είναι $g'\left(x\right) = e^x + 2e^{-x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Διαφορετικά:

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \overset{\left(e^x\ \text{γν.αύξουσα}\right)}{\Rightarrow} \begin{cases} e^{x_1} < e^{x_2} \\ -x_1 > -x_2 \end{cases} \overset{\left(e^x\ \text{γν.αύξουσα}\right)}{\Rightarrow} \begin{cases} e^{x_1} < e^{x_2} \\ e^{-x_1} > e^{-x_2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{x_1} < e^{x_2} \\ -2e^{-x_1} < -2e^{-x_2} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} e^{x_1} - 2e^{-x_1} < e^{x_2} - 2e^{-x_2} \Rightarrow g\left(x_1\right) < g\left(x_2\right)$$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \underset{(g\nearrow\ \mathbb{R})}{\overset{(f\nearrow\ \mathbb{R})}{\Rightarrow}} \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ g(x_1) < g(x_2) \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2) \Rightarrow h(x_1) < h(x_2).$$

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

- $f(f(x)) = g(g(x)) \ :(\alpha)$
- $f(g(x)) = g(f(x)) \ :(\beta)$

Δείξαμε ότι η $h(x) = f(x) + g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η h είναι $1-1$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$h(f(x)) = f(f(x)) + g(f(x)) =$$

$$\overset{(\alpha),(\beta)}{=} g(g(x)) + f(g(x))$$

$$= f(g(x)) + g(g(x))$$

$$= h(g(x))$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $h(f(x)) = h(g(x))$ και επειδή η h είναι $1-1$, προκύπτει ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή οι συναρτήσεις f, g έχουν ίδιο πεδίο ορισμού, το $A = \mathbb{R}$ και ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι $f = g$.

Γ3. Είναι

$$f(x) = g(x) = e^x - 2e^{-x}, x \in \mathbb{R}.$$

Η f ως γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ είναι $1-1$, οπότε η f είναι αντιστρέψιμη και τι πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών $f\left(\mathbb{R}\right)$ της f.

Εύρεση του $f\left(\mathbb{R}\right)$ και του τύπου της f^{-1}.

Θεωρούμε την εξίσωση $f\left(x\right)=y$ και την λύνουμε ως προς x.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
&f\left(x\right)=y \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow e^{x}-2e^{-x}=y \\
&\Leftrightarrow e^{2x}-2=ye^{x} \\
&\Leftrightarrow e^{2x}-ye^{x}-2=0 \\
&\Leftrightarrow \omega^{2}-y\omega-2=0,\ \text{με } \omega=e^{y}>0.
\end{aligned}$$

Η διακρίνουσα της παραπάνω εξίσωσης είναι $\Delta=y^{2}+8>0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$, οπότε είναι:

$$\begin{aligned}
&\omega=\frac{y\pm\sqrt{y^{2}+8}}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow e^{x}=\frac{y\pm\sqrt{y^{2}+8}}{2} \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} e^{x}=\dfrac{y+\sqrt{y^{2}+8}}{2} & :\left(\gamma\right) \\ e^{x}=\dfrac{y-\sqrt{y^{2}+8}}{2} & :\left(\delta\right) \end{array}\right. \quad :\left(\Sigma\right)
\end{aligned}$$

Όμως για κάθε $y\in\mathbb{R}$ είναι:

$$y^{2}<y^{2}+8\Rightarrow\left|y\right|<\sqrt{y^{2}+8}\Rightarrow-\sqrt{y^{2}+8}<y<\sqrt{y^{2}+8}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+\sqrt{y^2+8}>0 \\ y-\sqrt{y^2+8}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y+\sqrt{y^2+8}}{2}>0 \\ \dfrac{y-\sqrt{y^2+8}}{2}<0 \end{cases}$$

Επομένως η (δ) είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$. Έτσι έχουμε:

$$(\Sigma) \Leftrightarrow e^x = \frac{y+\sqrt{y^2+8}}{2}>0 \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{y+\sqrt{y^2+8}}{2}\right)\in D_f=\mathbb{R}, \text{ για κάθε } y\in\mathbb{R}.$$

Άρα είναι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $f^{-1}(y)=\ln\left(\dfrac{y+\sqrt{y^2+8}}{2}\right)$.

Επομένως η αντίστροφη της f ορίζεται ως εξής:

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+8}}{2}\right).$$

5ο **ΘΕΜΑ Δ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Δ1. Είναι $|f(x)-f(y)+x-y|<|x-y| \quad :(1)\ (x\neq y)$

Έστω τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}$. Λόγω της (1) έχουμε ότι για κάθε $x\neq x_0$ ισχύει

$$|f(x)-f(x_0)+x-x_0|<|x-x_0|$$

$$\Rightarrow -|x-x_0|<f(x)-f(x_0)+x-x_0<|x-x_0|$$

$$\Rightarrow f(x_0)+x_0-x-|x-x_0|<f(x)<f(x_0)+x_0-x+|x-x_0| : (2)$$

Είναι

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x_0)+x_0-x-|x-x_0|\right)=f(x_0)$ και
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x_0)+x_0-x+|x-x_0|\right)=f(x_0)$,

οπότε, λόγω της (2) και του κριτηρίου παρεμβολής, προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Άρα για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),}$$

οπότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

Λόγω της (1) έχουμε

$$|f(x_1) - f(x_2) + x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$$

$$\overset{(x_1 - x_2 < 0)}{\Rightarrow} |f(x_1) - f(x_2) + x_1 - x_2| < x_2 - x_1$$

$$\Rightarrow -x_2 + x_1 < f(x_1) - f(x_2) + x_1 - x_2 < x_2 - x_1$$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) + x_1 - x_2 > x_1 - x_2$$

$$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Επομένως, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε:

$$\left| f(x) \text{συν} \frac{\pi}{x} \right| = |f(x)| \cdot \left| \text{συν} \frac{\pi}{x} \right| \leq |f(x)| \cdot 1 = |f(x)|$$

Έτσι για κάθε $x \neq 0$ έχουμε:

$$\left| f(x) \cdot \text{συν} \frac{\pi}{x} \right| \leq |f(x)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -|f(x)| \leq f(x) \text{συν} \frac{\pi}{x} \leq |f(x)| \ : \ ((3)$$

Είναι

- $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)| = \left| \lim\limits_{x \to 0} f(x) \right| \overset{\left(\substack{\text{η } f \text{ είναι συνεχής} \\ \text{συνεχής στο } x_1 = 0}\right)}{=} |f(0)| \overset{(f(0)=0)}{=} |0| = 0$ και
- $\lim\limits_{x \to 0} \left(-|f(x)| \right) = \ldots = -|f(0)| = -|0| = 0$,

οπότε, λόγω της (3) και του κριτηρίου παρεμβολής, προκύπτει ότι

$$\lim_{x \to 0} \left(f(x) \text{συν} \frac{\pi}{x} \right) = 0$$

Δ4. Έχουμε:

$$\begin{cases}0=0<3\\0<1<3\\0<2<3\\0<3=3\end{cases}\overset{(\text{f γν. φθίνουσα})}{\Rightarrow}\begin{cases}f(0)=f(0)>f(3)\\f(0)>f(1)>f(3)\\f(0)>f(2)>f(3)\\f(0)>f(3)=f(3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2f(0)=2f(0)>2f(3)\\3f(0)>3f(1)>3f(3)\\4f(0)>4f(2)>4f(3)\\5f(0)>5f(3)=5f(3)\end{cases}$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow}14f(0)>2f(0)+3f(1)+4f(2)+5f(3)>14f(3)$$

$$\Rightarrow f(3)<\frac{2f(0)+3f(1)+4f(2)+5f(3)}{14}<f(0)$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,3]$ και ισχύει

$$f(3)<\frac{2f(0)+3f(1)+4f(2)+5f(3)}{14}<f(0),$$

έπεται, λόγω του **Θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών**, ότι υπάρχει $x_0\in(0,3)$ τέτοιο ώστε

$$\boxed{f(x_0)=\frac{2f(0)+3f(1)+4f(2)+5f(3)}{14}}$$

Όμως η f είναι **γνησίως μονότονη** στο $\mathbb{R}$, οπότε το x_0 είναι **μοναδικό**.

6ο

6ο **ΘΕΜΑ Β** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Β1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^2(x)=4xf(x)+2x+1$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)-4xf(x)+4x^2=4x^2+2x+1$$

$$\Leftrightarrow (f(x)-2x)^2=4x^2+2x+1$$

$$\Leftrightarrow |f(x)-2x|=\sqrt{4x^2+2x+1}\quad :(1)$$

Θεωρούμε συνάρτηση

$$g(x)=f(x)-2x,\quad x\in\mathbb{R},$$

άρα η (1) γράφεται

$$|g(x)|=\sqrt{4x^2+2x+1}\ :\ (2)$$

Είναι όμως $4x^2+2x+1=3x^2+(x+1)^2>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$|g(x)|=\sqrt{4x^2+2x+1}=\sqrt{3x^2+(x+1)^2}>0$$

$$\Rightarrow|g(x)|>0\Rightarrow g(x)\neq 0$$

Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-2x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)\neq 0$,

οπότε η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Είναι όμως

$$g(1)=f(1)-2\cdot 1=f(1)-2>0$$

(επειδή $f(1)>2$) και επειδή η g διατηρεί στο $\mathbb{R}$ σταθερό πρόσημο έπεται ότι $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έτσι από την (2) προκύπτει ότι

$$g(x)=\sqrt{4x^2+2x+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)-2x=\sqrt{4x^2+4x+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{4x^2+2x+1}+2x$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{f(x)=\sqrt{4x^2+2x+1}+2x,\quad x\in\mathbb{R}}}$$

B2. Για κάθε $x\in D_f$, με $x<0$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{4x^2+2x+1}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+2x+1}-2x\right)}{\sqrt{4x^2+2x+1}-2x}=$$

$$\overset{(x<0)}{=}\frac{\left(4x^2+2x+1\right)-4x^2}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-2x}=\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-2\right)}=$$

$$=\frac{2+\frac{1}{x}}{-\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-2},$$

οπότε

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{-\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-2}=\frac{2+0}{-\sqrt{4+0+0}-2}=-\frac{1}{2}}$$

Β1. **i.** Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x+1}+2x}{x}=$$

$$\overset{(x>0)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{4+2\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)=$$

$$=\sqrt{4+0+0}+2=4$$

ii. Για το $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f^2(x)+f(x)+1}-f(x)\right)$ θέτουμε $\omega=f(x)$.

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+2x+1}+2x=+\infty$$

Έτσι, όταν $x\to+\infty$, έχουμε $\omega\to+\infty$,

οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f^2(x)+f(x)+1}-f(x)\right)=\lim_{\omega\to+\infty}\left(\sqrt{\omega^2+\omega+1}-\omega\right)=\lim_{\omega\to+\infty}\frac{(\omega^2+\omega+1)-\omega^2}{\sqrt{\omega^2+\omega+1}+\omega}=$$

$$\overset{(\omega>0)}{=}\lim_{\omega\to+\infty}\frac{\omega\left(1+\frac{1}{\omega}\right)}{\omega\left(\sqrt{1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}}+1\right)}=\lim_{\omega\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{\omega}}{\sqrt{1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}}+1}=$$

$$=\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{1}{2}$$

iii. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$\left|\frac{\eta\mu(f(x))}{x}\right|=\frac{|\eta\mu(f(x))|}{|x|}\leq\frac{1}{|x|}\overset{(x>0)}{=}\frac{1}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\frac{\eta\mu(f(x))}{x}\right|\leq\frac{1}{x}\Rightarrow-\frac{1}{x}\leq\frac{\eta\mu(f(x))}{x}\leq\frac{1}{x}\qquad(3)$$

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0\qquad\text{και}\qquad\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

οπότε, λόγω της (3) και του **κριτηρίου παρεμβολής**, προκύπτει ότι

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu(f(x))}{x}=0}$$

6ο **ΘΕΜΑ Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Γ1. Είναι

$$|f(x)-f(y)-x+y|<|x-y|\quad(1)\quad(x\neq y)$$

Έστω $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$.

Λόγω της (1) ισχύει

$$|f(x_1)-f(x_2)-x_1+x_2|<|x_1-x_2|\Rightarrow$$

$$\overset{(x_1-x_2<0)}{\Rightarrow}|f(x_1)-f(x_2)-x_1+x_2|<x_2-x_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-(x_2-x_1)<f(x_1)-f(x_2)-x_1+x_2<x_2-x_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(x_1)-f(x_2)-x_1+x_2>x_1-x_2\\ f(x_1)-f(x_2)-x_1+x_2<x_2-x_1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(x_1)-2x_1>f(x_2)-2x_2\\ f(x_1)<f(x_2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}g(x_1)>g(x_2)\\ f(x_1)<f(x_2)\end{cases}$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η $g(x)=f(x)-2x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Έχουμε:

$$f(x^2)-f(x+2)>2(x^2-x-2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x^2)-2\cdot x^2>f(x+2)-2(x+2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x^2)>g(x+2)\overset{(\text{g γν. φθίνουσα στο } \mathbb{R})}{\Leftrightarrow} x^2<x+2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-2<0\Leftrightarrow x\in(-1,2)$$

Γ3. Έστω $x_0\in\mathbb{R}$ τυχαίος.

Λόγω της (1), έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $x\neq x_0$ ισχύει

$$|f(x)-f(x_0)-x+x_0|<|x-x_0|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -|x-x_0|<f(x)-f(x_0)-x+x_0<|x-x_0|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0)+x-x_0-|x-x_0|<f(x)<f(x_0)+x-x_0+|x-x_0| \qquad (2)$$

Είναι

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x_0)+x-x_0-|x-x_0|\right)=f(x_0)$$

και

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x_0)+x-x_0+|x-x_0|\right)=f(x_0),$$

οπότε, λόγω της (2) και του **κριτηρίου παρεμβολής**, προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

Επομένως για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)}$$

οπότε η f είναι **συνεχής** στο $\mathbb{R}$.

6ο **ΘΕΜΑ Δ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Δ1. Είναι

$f(f(x))+2f(x)=8-x\ :\ (1)$ και $f(1)=3$.

Έστω $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$.

Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\begin{cases}f(f(x_1))=f(f(x_2))\\2f(x_1)=2f(x_2)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow}f(f(x_1))+2f(x_1)=f(f(x_2))+2f(x_2)$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow}8-x_1=8-x_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x_1=-x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

Επομένως η f είναι συνάρτηση **1−1**.

Δ2. Από την (1) για $x=1$ έχουμε:

$$f(f(1))+2f(1)=8-1\overset{(f(1)=3)}{\Leftrightarrow}f(3)+2\cdot 3=7\Leftrightarrow f(3)=1$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x)=f(x)-x.$$

- Η g είναι συνεχής στο $[1,3]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
- $g(1)=f(1)-1=3-1=2>0$ και $g(3)=f(3)-3=1-3=-2<0$, οπότε είναι $g(1)\cdot g(3)<0$.

Άρα η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θεωρήματος Bolzano** στο $[1,3]$, οπότε υπάρχει

$$x_0\in(1,3),\ g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-x_0=0\Leftrightarrow f(x_0)=x_0$$

Δ3. Από την (1) για $x=x_0$ έχουμε:

$$f(f(x_0))+2f(x_0)=8-x_0\Leftrightarrow$$

$$\overset{(\text{αφού } f(x_0)=x_0)}{\Leftrightarrow}f(x_0)+2x_0=8-x_0\overset{(\text{αφού } f(x_0)=x_0)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x_0+2x_0=8-x_0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x_0=8\Leftrightarrow x_0=2$$

Έτσι είναι

$$f(x_0)=x_0 \text{ και } x_0=2,$$

οπότε είναι $f(2)=2$.

Δ4. i. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\cdot x\right) \overset{\left(\substack{\ell\cdot(+\infty)\\ \ell<0}\right)}{=} -\infty\,,$$

αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}^*_- \text{ και } \lim_{x\to+\infty} x = +\infty\,.$$

Ακόμη

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\cdot x\right) \overset{\left(\substack{\ell\cdot(-\infty)\\ \ell<0}\right)}{=} +\infty\,,$$

αφού

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}^*_- \text{ και } \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

Έχουμε

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, οπότε είναι $f(x) < 0$ ‘’κοντά’’ στο $+\infty$

Έτσι, ‘’κοντά’’ στο $+\infty$ ισχύει:

$$\frac{f(f(x))}{x} = \frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}$$

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{f(x)} \overset{\left(\substack{\omega=f(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}\right)}{=} \lim_{\omega\to-\infty}\frac{f(\omega)}{\omega} = \ell \in \mathbb{R}^*_-$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}^*_-\,.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}\right) = \ell\cdot\ell = \ell^2\,.$$

ii. Από την (1), για κάθε $x > 0$, έχουμε:

$$\frac{f(f(x)) + 2f(x)}{x} = \frac{8-x}{x} \Rightarrow \frac{f(f(x))}{x} + 2\frac{f(x)}{x} = \frac{8}{x} - 1\,,$$

οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(f(x))}{x}+2\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{8}{x}-1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell^2+2\ell=0-1\Rightarrow \ell^2+2\ell+1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\ell+1)^2=0\Rightarrow \ell+1=0\Rightarrow \ell=-1.$$

Άρα είναι

$$\boxed{\ell=-1}$$

7ο

7ο **ΘΕΜΑ Β** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

B1. Η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,1)$,

άρα είναι

$$f(1)=2 \text{ και } f(2)=1.$$

Παρατηρούμε ότι ενώ είναι $1<2$ ισχύει $f(1)>f(2)$.

Επειδή δόθηκε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και για $1<2$ ισχύει $f(1)>f(2)$, έπεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

B2. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της,

έπεται ότι η f είναι συνάρτηση $1-1$, οπότε

η f έχει αντίστροφη συνάρτηση και μάλιστα το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f,

δηλαδή το

$$f(\mathbb{R})=\mathbb{R}.$$

Έχουμε:

$$f^{-1}\left(f\left(x^2+x\right)+1\right)>1\Leftrightarrow$$

$$x_1,x_2\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f\left(x^2+x\right)+1<2 \text{ , (αφού ισχύει } f\left(f^{-1}(w)\right)=w\text{)}$$

$$\Leftrightarrow f\left(x^2+x\right)<1\Leftrightarrow f\left(x^2+x\right)<f(2) \text{ , (αφού } f(2)=1\text{)}$$

$$\Leftrightarrow x^2+x>2 \text{ , (αφού η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}\text{)}$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-2>0$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty,-2) \cup (1,+\infty)$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

B3. Έχουμε:

$$f\left(f^{-1}(2x+5)-1\right)=2$$

$$\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(2x+5)-1\right)=f(1) \quad ,\ \left(\text{επειδή } f(1)=2\right)$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(2x+5)-1=1 \quad ,\ \left(\text{επειδή η } f \text{ είναι } 1-1\right)$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(2x+5)=2$$

$$\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(2x+5)\right)=f(2)$$

$$\Leftrightarrow 2x+5=1 \quad \left(\text{επειδή } f\left(f^{-1}(w)\right)=w \text{ και } f(2)=1\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x=-4 \Leftrightarrow x=-2$$

B4. Είναι

$$f(x)=2\ln(1-x)+5\,,\ \ x\in A=(-\infty,0].$$

Έστω $x_1,x_2 \in A$ με

$$f(x_1)=f(x_2).$$

Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 2\ln(1-x_1)+5=2\ln(1-x_2)+5$$

$$\Rightarrow 2\ln(1-x_1)=2\ln(1-x_2) \Rightarrow \ln(1-x_1)=\ln(1-x_2)$$

$$\overset{(\ln x:1-1)}{\Rightarrow} 1-x_1=1-x_2 \Rightarrow -x_1=-x_2 \Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι $1-1$, οπότε έχει αντίστροφη συνάρτηση και το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της $f(A)$ της f.

Για να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση της f, θεωρούμε την εξίσωση $f(x)=y$ και λύνουμε ως προς x.

Έχουμε:

$$f(x)=y \Leftrightarrow 2\ln(1-x)+5=y$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(1-x)=y-5 \Leftrightarrow \ln(1-x)=\frac{y-5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-x)=\ln\left(e^{\frac{y-5}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1-x=e^{\frac{y-5}{2}} \Leftrightarrow x=1-e^{\frac{y-5}{2}}$$

Για να ανήκει το $x=1-e^{\frac{y-5}{2}}$ στο $A=(-\infty,0]$, πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$1-e^{\frac{y-5}{2}}\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{y-5}{2}}\geq 1 \Leftrightarrow e^{\frac{y-5}{2}}\geq e^0 \Leftrightarrow \frac{y-5}{2}\geq 0$$

$$y-5\geq 0 \Leftrightarrow y\geq 5$$

Άρα είναι

$$f(A)=[5,+\infty) \quad \text{και} \quad f^{-1}(y)=1-e^{\frac{y-5}{2}}$$

Επομένως η **αντίστροφη** συνάρτηση της f είναι

$$\boxed{\mathbf{f^{-1}:[5,+\infty)\to\mathbb{R} \quad \text{με} \quad f^{-1}(x)=1-e^{\frac{x-5}{2}}}}.$$

7ο **ΘΕΜΑ Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Γ1. Το πεδίο ορισμού της $\mathbf{f}$ αποτελείται από όλους εκείνους τους πραγματικους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει :

$$\begin{cases}2x+4\geq 0\\ 9-x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -2\\ x\leq 9\end{cases} \Leftrightarrow -2\leq x\leq 9.$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=[-2,9]$.

Γ2. Έστω $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$.

Έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases}2x_1<2x_2\\-x_1>-x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x_1+4<2x_2+4\\9-x_1>9-x_2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2x_1+4}<\sqrt{2x_2+4}\\\sqrt{9-x_1}>\sqrt{9-x_2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2x_1+4}<\sqrt{2x_2+4}\\-\sqrt{9-x_1}<-\sqrt{9-x_2}\end{cases}$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow}\sqrt{2x_1+4}-\sqrt{9-x_1}<\sqrt{2x_2+4}-\sqrt{9-x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο A.

Η f ως γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της είναι $1-1$, οπότε η f έχει αντίστροφη συνάρτηση και το πεδίο ορισμού της $\mathbf{f^{-1}}$ είναι το σύνολο τιμών $f(A)$ της $\mathbf{f}$.

Γ3. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A=[-2,9]$, άρα παρουσιάζει στο $x_1=-2$ ελάχιστο με ελάχιστη τιμή

$$f_{min}=f(-2)=-\sqrt{11}$$

και στο $x_2=9$ μέγιστο με μέγιστη τιμή

$$f_{max}=f(9)=\sqrt{22}\ .$$

Γ4. • Παρατηρούμε ότι

$$f(0)=\sqrt{2\cdot0+4}-\sqrt{9-0}=\sqrt{4}-\sqrt{9}=2-3=-1$$

Άρα είναι

$$f(0)=-1,\text{ οπότε } f^{-1}(-1)=0.$$

• Έστω $x_1,x_2\in f(A)$ με $x_1<x_2$.

Θα αποδείξουμε ότι

$$f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2).$$

Υποθέτουμε ότι $f^{-1}(x_1)\geq f^{-1}(x_2)$, τότε θα έχουμε :

$$f^{-1}(x_1)\geq f^{-1}(x_2)\overset{(f\,\uparrow A)}{\Rightarrow} f\left(f^{-1}(x_1)\right)\geq f\left(f^{-1}(x_2)\right)\Rightarrow x_1\geq x_2,\text{ ΑΤΟΠΟ !!!},$$

Αφού είναι $x_1<x_2$.

Επομένως η $\mathbf{f^{-1}}$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $f(A)$.

Γ5. Έχουμε:

$$\sqrt{2x^2+4}+\sqrt{9-x}<\sqrt{2x+4}+\sqrt{9-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+4}-\sqrt{9-x^2}<\sqrt{2x+4}+\sqrt{9-x}$$

$$\Leftrightarrow f\left(x^2\right)<f\left(x\right)$$

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ!:

Πρέπει

$$\begin{cases} x^2 \in A \\ x \in A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \in [-2,9] \\ x \in [-2,9] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x^2 \le 9 \\ -2 \le x \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \le 9 \\ -2 \le x \le 9 \end{cases}$$, (αφού $x^2 > -2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| \le 3 \\ -2 \le x \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 3 \\ -2 \le x \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x \le 3$$

Επομένως για $x \in [-2,3]$ έχουμε:

$$\begin{cases} f\left(x^2\right)<f\left(x\right) \\ -2 \le x \le 3 \end{cases} \overset{(f\ \mathbf{1}\ A)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2 < x \\ -2 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x < 0 \\ -2 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x-1\right) < 0 \\ -2 \le x \le 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0,1) \\ -2 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0,1)$$

x	$-\infty$		**0**		**1**		$+\infty$
$x(x-1)$		+	0	−	0	+	

Άρα $x \in (0,1)$.

7ο **ΘΕΜΑ Δ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Δ1. Είναι

$$x^3 f\left(x\right)+y^3 f\left(y\right)<x^3 f\left(y\right)+y^3 f\left(x\right) \qquad (1) \qquad \left(x \ne y\right).$$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

Λόγω της (1) έχουμε:

$$\begin{aligned}
&x_1^3 f(x_1)+x_2^3 f(x_2)<x_1^3 f(x_2)+x_2^3 f(x_1)\\
&\Leftrightarrow x_1^3 f(x_1)+x_2^3 f(x_2)-x_1^3 f(x_2)-x_2^3 f(x_1)<0\\
&\Leftrightarrow x_1^3\big(f(x_1)-f(x_2)\big)-x_2^3\big(f(x_1)-f(x_2)\big)<0\\
&\Leftrightarrow \left(x_1^3-x_2^3\right)\big(f(x_1)-f(x_2)\big)<0 \quad :(2)
\end{aligned}$$

Έχουμε

$$x_1<x_2 \Rightarrow x_1^3<x_2^3 \Rightarrow x_1^3-x_2^3<0 \quad :(3)$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι $f(x_1)-f(x_2)>0$, οπότε είναι $f(x_1)>f(x_2)$.

Άρα για κάθε $x_1 x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$, οπότε

η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Η συνάρτηση fof ορίζεται ως εξής: $fof:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$(fof)(x)=f\big(f(x)\big)$$

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, με $x_1<x_2$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
&x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2), \text{(αφού η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R})\\
&\Rightarrow f\big(f(x_1)\big)<f\big(f(x_2)\big) \text{ , (αφού η είναι γνησίως φθίνουσα στο} \mathbb{R})\\
&\Rightarrow (fof)(x_1)<(fof)(x_2)
\end{aligned}$$

Άρα η fof είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Επειδή οι συναρτήσεις f,g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η fog ορίζεται ως εξής

$$fog:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ με } (fog)(x)=f\big(g(x)\big)$$

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$

Έχουμε $x_1<x_2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (fog)(x_1)<(fog)(x_2), \text{ (αφού η } fog \text{ είναι γνησίωςαύξουσα στο } \mathbb{R})\\
&\Rightarrow f\big(g(x_1)\big)<f\big(g(x_2)\big)\\
&\Rightarrow g(x_1)>g(x_2) \text{ , (γιατί η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$$x_1<x_2 \text{ ισχύει } g(x_1)>g(x_2),$$

οπότε η g είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.

Δ4. Έστω ότι δεν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) > x_0$, τότε θα είναι

$$f(x) \le x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Είναι

$$f(x) \le x \; :(4)$$

Από την (4) θέτοντας όπου x το $f(x)$ έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(f(x)) \le f(x) \quad :(5)$$

Από την (5) και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ προκύπτει ότι

$$f(x) \ge x \quad (6) \; (\text{για κάθε } \; x \in \mathbb{R})$$

Από (4) και (6) προκύπτει ότι

$$f(x) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ,ΑΤΟΠΟ!!!,}$$

αφού η $f(x) = x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ενώ

η f αποδείξαμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) > x_0.$$

8ο

8ο **ΘΕΜΑ Β** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Β1. Είναι

$$f^2(x) + 4xf(x) - 4x - 5 = 0 \;:(1)$$

Έχουμε

$$f^2(x) + 2f(x) \cdot (2x) + (2x)^2 = 4x^2 + 4x + 5$$

$$\Leftrightarrow (f(x) + 2x)^2 = 4x^2 + 4x + 5 \;:(2)$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$4x^2 + 4x + 5 = (2x+1)^2 + 4 > 0$$

Έτσι από τη (2) έχουμε:

$$|f(x) + 2x| = \sqrt{4x^2 + 4x + 5} \Leftrightarrow |g(x)| = \sqrt{4x^2 + 4x + 5} \quad :(3),$$

$$\text{όπου } g(x) = f(x) + 2x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Ακόμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\sqrt{4x^2 + 4x + 5} > 0,$$

άρα από την (3) έχουμε ότι

$$|g(x)| > 0 \Rightarrow g(x) \neq 0$$

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η g διατηρεί στο $\mathbb{R}$ σταθερό πρόσημο και επειδή είναι

$$g(-1) = f(-1) + 2(-1) = f(-1) - 2 > 0$$

(αφού $f(-1) > 2$) συμπεραίνουμε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι, από την (3) έχουμε:

$$g(x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 5} \Leftrightarrow f(x) + 2x = \sqrt{4x^2 + 4x + 5}$$
$$\Leftrightarrow f(x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 5} - 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

B2. Για κάθε $x \in D_f = \mathbb{R}$ με $x > 0$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{4x^2 + 4x + 5} - 2x\right)\left(\sqrt{4x^2 + 4x + 5} - 2x\right)}{\sqrt{4x^2 + 4x + 5} + 2x}$$

$$\overset{(x>0)}{=} \frac{\left(4x^2 + 4x + 5\right) - 4x^2}{x\sqrt{4 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + 2x} =$$

$$= \frac{x \cdot \left(4 + \frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + 2\right)} =$$

$$= \frac{4 + \frac{5}{x}}{\sqrt{4 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + 2}, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4+\frac{5}{x}}{\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+2} = \frac{4+0}{\sqrt{4+0+0}+2} = 1$$

B3. i. Για κάθε $x \in D_f = \mathbb{R}$ με $x<0$, έχουμε

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{4x^2+4x+5}-2x}{x} \overset{(x<0)}{=} \frac{-x\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-2x}{x} =$$

$$= -\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-2, \text{ οπότε είναι}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-2\right) = -\sqrt{4+0+0}-2 = -4$$

ii. Για κάθε $x \in D_f = \mathbb{R}$ με $x<0$ είναι

$$\frac{(f(x))^2+2x^2}{x^2+\eta\mu^2 x} = \frac{\frac{f^2(x)+2x^2}{x^2}}{\frac{x^2+\eta\mu^2 x}{x^2}} = \frac{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2+2}{1+\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}}$$

Για κάθε $x<0$ έχουμε:

$$\left|\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right| = \frac{|\eta\mu x|^2}{|x^2|} \le \frac{1^2}{|x^2|} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow -\frac{1}{x^2} \le \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \qquad (4)$$

Είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2} = 0,$$

οπότε από την (3) με κριτήριο παρεμβολής, προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu^2 x}{x^2} = 0$$

Άρα έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(f(x))^2+2x^2}{x^2+\eta\mu^2 x} =$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2+2}{1+\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}}=\frac{(-4)^2+2}{1+0}=18$$

B3. Είναι

- $\mathbf{\lim_{x\to+\infty} f(x)=1>0}$ **και**
- $\mathbf{\lim_{x\to+\infty} f(2x) \overset{\left(\substack{\omega=2x \\ \lim_{x\to+\infty}(2x)=+\infty}\right)}{=} \lim_{\omega\to+\infty} f(\omega)=1>0}$, **ότι «κοντά» στο** $+\infty$.

οπότε είναι $\mathbf{f(x)>0}$ **και** $\mathbf{\lim_{x\to+\infty} f(2x)>0}$

Έχουμε :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1001}{1000}-\frac{(f(2x))^{2016}}{f(x)}\right)=\frac{1001}{1000}-\frac{\left(\lim_{x\to+\infty} f(2x)\right)^{2016}}{\lim_{x\to+\infty} f(x)}=$$

$$=\frac{1001}{1000}-\frac{1^{2016}}{1}=\frac{1}{1000}>0 \text{ ,οπότε "κοντά" στο } +\infty \text{ ισχύει:}$$

$$\mathbf{\frac{1001}{1000}-\frac{(f(2x))^{2016}}{f(x)}>0\Rightarrow\frac{(f(2x))^{2016}}{f(x)}<\frac{1001}{1000}\overset{\left(\substack{f(x)>0,\text{"κοντά"} \\ \text{στο}+\infty}\right)}{\Rightarrow}(f(2x))^{2016}<\frac{1001}{1000}f(x)}$$

8ο **ΘΕΜΑ Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Γ1. Είναι

$$|f(x)-f(y)|\le|x-y|,\ (x,y\in\mathbb{R})\ :(1)$$

Έστω τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}$.

Λόγω της (1) έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(x)-f(x_0)|\le|x-x_0| \Rightarrow -|x-x_0|\le f(x)-f(x_0)\le|x-x_0|$$
$$\Rightarrow f(x_0)-|x-x_0|\le f(x)\le f(x_0)+|x-x_0| \quad (2)$$

Είναι

- $\lim_{x\to x_0}\left(f(x_0)-|x-x_0|\right)=f(x_0)-0=f(x_0)$ και
- $\lim_{x\to x_0}\left(f(x_0)+|x-x_0|\right)=f(x_0)+0=f(x_0)$,

οπότε από την (2) με **κριτήριο παρεμβολής**, προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Έτσι, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Γ2 Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

Λόγω της (1) έχουμε :

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le |x_1 - x_2| \overset{\binom{\lambda>1}{|x_1-x_2|>0}}{<} \lambda|x_1 - x_2| \overset{(x_1-x_2<0)}{=} \lambda(x_2 - x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \lambda(x_2 - x_1) \Rightarrow -\lambda(x_2 - x_1) < f(x_1) - f(x_2) < \lambda(x_2 - x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda(x_2 - x_1) < f(x_1) - f(x_2) \\ f(x_1) - f(x_2) < \lambda(x_2 - x_1) \end{cases} \Rightarrow f(x_1) - \lambda x_1 > f(x_2) - \lambda x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση

$$\mathbf{g(x) = f(x) - \lambda x, (\lambda > 1)}$$

είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Έχουμε:

$$f(x^2 + 2x) - f(3) > \lambda(x^2 + 2x - 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x^2 + 2x) - \lambda(x^2 + 2x) > f(3) - \lambda \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow g(x^2 + 2x) > g(3)$$

$$\overset{(g \searrow \mathbb{R})}{\Leftrightarrow} x^2 + 2x < 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in (-3, 1)$$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - e^x + 4x$. Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, οπότε η h είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Ακόμη είναι

$$h(0) = f(0) - e^0 + 4 \cdot 0 = f(0) - 1 =$$

$$=0-1=-1<0 \text{ και } h(1)=f(1)-e^1+4\cdot 1=$$

$$=f(1)+4-e.$$

Λόγω της (1) (για $x=1$ και $y=0$), έχουμε

$$|f(1)-f(0)|\leq|1-0|$$

$$\overset{f(0)=0}{\Rightarrow}|f(1)-0|\leq 1\Rightarrow|f(1)|\leq 1\Rightarrow -1\leq f(1)\leq 1$$

$$\Rightarrow 3-e\leq f(1)+4-e\leq 5-e$$

$$\Rightarrow 3-e\leq h(1)\leq 5-e\overset{3-e>0}{\Rightarrow}h(1)>0$$

Έτσι είναι $h(0)h(1)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[0,1]$, έπεται, σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano**, ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$, ώστε

$$h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-e^{x_0}+4x_0=0\Leftrightarrow f(x_0)=e^{x_0}-4x_0.$$

8ο **ΘΕΜΑ Δ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Δ1. Είναι

$$f(f(x))+f(x)=2x-6\ :(1)\quad \text{και}\quad f(2)=0\ :(2)$$

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$.

Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\begin{cases}f(f(x_1))=f(f(x_2))\\ f(x_1)=f(x_2)\end{cases}$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow}f(f(x_1))+f(x_1)=f(f(x_2))+f(x_2)$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow}2x_1-6=2x_2-6\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

Επομένως, η f είναι συνάρτηση $1-1$, οπότε η f είναι αντιστρέψιμη.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών $f(\mathbb{R})$ της f

Από την (1) θέτοντας όπου x το $f^{-1}(x)$, έχουμε ότι για κάθε $x\in f(\mathbb{R})$ ισχύει

$$f\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)+f\left(f^{-1}(x)\right)=2f^{-1}(x)-6$$

$$\Leftrightarrow f(x)+x=2f^{-1}(x)-6\ \left(\text{αφού } f\left(f^{-1}(x)\right)=x\right)$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x+f(x)+6).$$

Δ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+x$.

- Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[0,2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- Είναι $g(2)=f(2)+2=0+2=2>0$.

Από την (1) για $x=2$ έχουμε

$$f(f(2))+f(2)=2\cdot 2-6 \overset{(f(2)=0)}{\Rightarrow} f(0)+0=-2 \Rightarrow f(0)=-2,$$

οπότε

$$g(0)=f(0)+0=-2<0.$$

Έτσι η g είναι συνεχής στο $[0,2]$ και ισχύει $g(0)g(2)<0$, οπότε η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θεωρήματος Bolzano** στο $[0,2]$.

Επομένως, υπάρχει $\xi\in(0,2)$, ώστε

$$g(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)+\xi=0 \Leftrightarrow f(\xi)=-\xi.$$

Άρα η εξίσωση $f(x)=-x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$ η οποία μάλιστα ανήκει στο $(0,2)$.

Δ3. Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει λύση στο $\mathbb{R}$ και έστω $\rho\in\mathbb{R}$ λύση της εξίσωσης αυτής, τότε θα ισχύει $f(\rho)=\rho$.

Από την (1) για $x=\rho$, έχουμε

$$f(f(\rho))+f(\rho)=2\rho-6$$

$$\overset{f(\rho)=\rho}{\Rightarrow} f(\rho)+\rho=2\rho-6 \overset{f(\rho)=\rho}{\Rightarrow} \rho+\rho=2\rho-6 \Rightarrow 0=-6, \text{ ΑΤΟΠΟ}$$

Επομένως, η εξίσωση $f(x)=x$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Δ4. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=L\in\mathbb{R}_{+}^{*}$.

i. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\cdot x\right) \overset{\binom{L\cdot(+\infty)}{L>0}}{=} +\infty,$$

$$\left(\text{αφού } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = L \in \mathbb{R}_+^* \text{ και } \lim_{x\to+\infty} x = +\infty\right)$$

Επειδή είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, έπεται ότι υπάρχει $\kappa > 0$, ώστε να ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\kappa, +\infty)$.

Για κάθε $x \in (\kappa, +\infty)$ έχουμε

$$\frac{f(f(x))}{x} = \frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}$$

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = L \in \mathbb{R}_+^* \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{f(x)} \overset{\left(\substack{\omega = f(x) \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}\right)}{=} \lim_{\omega\to+\infty}\frac{f(\omega)}{\omega} = L$$

(θέσαμε $\omega = f(x)$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, έπεται ότι, όταν $x \to +\infty$ έχουμε $\omega \to +\infty$)

οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = L\cdot L = L^2$$

ii. Από την (1) για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$\frac{f(f(x)) + f(x)}{x} = \frac{2x - 6}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{f(f(x))}{x} + \frac{f(x)}{x} = 2 - \frac{6}{x},$$

$$\text{οπότε } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(f(x))}{x} + \frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(2 - \frac{6}{x}\right)$$

$$\Rightarrow L^2 + L = 2 - 0$$

$$\Rightarrow L^2+L-2=0 \Rightarrow L=1 \text{ ή } L=-2$$

Επειδή $L>0$ έπεται ότι είναι $L=1$.

9ο

9ο | **ΘΕΜΑ Β** | ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

B1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^2(x)=2\lambda x f(x)+(4-\lambda^2)x^2+x+1$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)-2\lambda x f(x)+(\lambda x)^2=4x^2+x+1$$

$$\Leftrightarrow (f(x)-\lambda x)^2=4x^2+x+1$$

$$\Leftrightarrow g^2(x)=4x^2+x+1 \quad :(1), \text{ όπου } g(x)=f(x)-\lambda x, x \in \mathbb{R}.$$

Είναι $4x^2+x+1>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (αφού το τριώνυμο $\varphi(x)=4x^2+x+1$ έχει αρνητική διακρίνουσα $\Delta=1-16=-15<0$ και ο συντελεστής του x^2 είναι $\alpha=4>0$).

Έτσι από την (1) έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|g(x)|=\sqrt{4x^2+x+1} \quad :(2).$$

Από την (2) έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|g(x)|=\sqrt{4x^2+x+1}>0 \Rightarrow g(x) \neq 0.$$

Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-\lambda x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) \neq 0$, οπότε η $g(x)$ διατηρεί στο $\mathbb{R}$ σταθερό πρόσημο και επειδή είναι $g(0)=f(0)-\lambda \cdot 0=f(0)>0$ συμπεραίνουμε ότι είναι $g(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έτσι από την (2) έχουμε:

$$g(x)=\sqrt{4x^2+x+1}$$

$$\Leftrightarrow f(x)-\lambda x=\sqrt{4x^2+x+1}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\lambda x+\sqrt{4x^2+x+1}$$

Β2. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f(x)=\lambda x+x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=x\left(\lambda+\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)$$

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} x=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\lambda+\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\lambda+2\,.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\lambda+2>0\Leftrightarrow\lambda>-2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- $\lambda+2<0\Leftrightarrow\lambda<-2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
- $\lambda+2=0\Leftrightarrow\lambda=-2$.

Για $\lambda=-2$ και για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}-2x=\frac{\left(4x^2+x+1\right)-4x^2}{\sqrt{4x^2+x+1}+2x}$$

$$\overset{(x>0)}{=}\frac{x+1}{x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x}=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)}=$$

$$=\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}$$

Οπότε είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}=\frac{1+0}{\sqrt{4+0+0}+2}=\frac{1}{4}\,.$$

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\begin{cases} +\infty \ , \ \text{αν} \ \lambda>-2 \\ -\infty \ , \ \text{αν} \ \lambda<-2 \\ \dfrac{1}{4} \ , \ \text{αν} \ \lambda=-2 \end{cases}.$$

B1. Για $\lambda>-2$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f^2(x)+4f(x)+5}-f(x)\right)$ θέτουμε $w=f(x)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ οπότε , όταν $x\to+\infty$ έχουμε $w\to+\infty$.

Άρα:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f^2(x)+4f(x)+5}-f(x)\right)=$$

$$\overset{(w=f(x))}{=}\lim_{w\to+\infty}\left(\sqrt{w^2+4w+5}-w\right)=$$

$$=\lim_{w\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{w^2+4w+5}-w\right)\left(\sqrt{w^2+4w+5}+w\right)}{\sqrt{w^2+4w+5}+w}$$

$$=\lim_{w\to+\infty}\frac{w^2+4w+5-w^2}{\sqrt{w^2+4w+5}+w}$$

$$\overset{(w>0)}{=}\lim_{w\to+\infty}\frac{4w+5}{w\sqrt{1+\frac{4}{w}+\frac{5}{w^2}}+w}$$

$$=\lim_{w\to+\infty}\frac{w\left(4+\frac{5}{w}\right)}{w\left(\sqrt{1+\frac{4}{w}+\frac{5}{w^2}}+1\right)}$$

$$=\lim_{w\to+\infty}\frac{4+\frac{5}{w}}{\sqrt{1+\frac{4}{w}+\frac{5}{w^2}}+1}=\frac{4+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=2$$

9ο **ΘΕΜΑ Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Γ1 Είναι

$$f(x)-f(y)<x-y+|x-y| \;:(1) \quad (x,y\in\mathbb{R}).$$

Από την (1) με εναλλαγή των γραμμάτων x και y έχουμε ότι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(y)-f(x)<y-x+|y-x| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\big(f(x)-f(y)\big)<-\big(x-y-|-(x-y)|\big)$$

$$\Rightarrow f(x)-f(y)>x-y-|x-y| \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ με $x\neq y$ ισχύει:

$$x-y-|x-y|<f(x)-f(y)<x-y+|x-y|$$

$$\Rightarrow -|x-y|<f(x)-f(y)-x+y<|x-y|$$

$$\Rightarrow |f(x)-f(y)-x+y|<|x-y| \quad (3).$$

Γ2 Έστω $x_0\in\mathbb{R}$.

Λόγω της (3) έχουμε ότι για κάθε $x\neq x_0$ ισχύει:

$$|f(x)-f(x_0)-x+x_0|<|x-x_0|$$

$$\Rightarrow -|x-x_0|<f(x)-f(x_0)-x+x_0<|x-x_0|$$

$$\Rightarrow x-x_0-|x-x_0|+f(x_0)<f(x)<x-x_0+|x-x_0|+f(x_0) \quad (4)$$

Είναι

- $\lim\limits_{x\to x_0}\big(x-x_0-|x-x_0|+f(x_0)\big)=f(x_0)$ και
- $\lim\limits_{x\to x_0}\big(x-x_0+|x-x_0|+f(x_0)\big)=f(x_0)$,

οπότε λόγω της (4) και του **κριτηρίου παρεμβολής** προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

Επομένως για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Γ3 Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$.

Λόγω της (3) έχουμε ότι ισχύει:

$$\left|f(x_1)-f(x_2)-x_1+x_2\right|<\left|x_1-x_2\right| \overset{(x_1-x_2<0)}{=} x_2-x_1$$

$$\Rightarrow -x_2+x_1<f(x_1)-f(x_2)-x_1+x_2<x_2-x_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_1)-f(x_2)-x_1+x_2>-x_2+x_1 \\ f(x_1)-f(x_2)-x_1+x_2<x_2-x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_1)-2x_1>f(x_2)-2x_2 \\ f(x_1)<f(x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x_1)>g(x_2) \\ f(x_1)<f(x_2) \end{cases}$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ4 Η $g(x)=f(x)-2x$, ως γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ είναι $1-1$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(3f(x))+2x=7f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(3f(x))-2(3f(x))=f(x)-2x$$

$$\Leftrightarrow g(3f(x))=g(x)$$

$$\overset{(g\ \text{είναι}\ 1-1)}{\Leftrightarrow} 3f(x)=x \Leftrightarrow f(x)=\frac{x}{3}\ \text{(ικανοποιεί την υπόθεση)}$$

Άρα είναι

$$f(x)=\frac{x}{3},\ x\in\mathbb{R}$$

9ο **ΘΕΜΑ Δ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Δ1. **i.** Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=3 \quad (1) \quad \text{και} \quad 2f(0)+f(1)=2f(3)+f(4) \quad (2).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=f(x)-\frac{2f(0)+f(1)}{3}.$$

- Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

- Είναι $g(0)=f(0)-\dfrac{2f(0)+f(1)}{3}=\dfrac{1}{3}\left(f(0)-f(1)\right)$ και

$$g(1)=f(1)-\frac{2f(0)+f(1)}{3}=\frac{2\left(f(1)-f(0)\right)}{3}=-\frac{2}{3}\left(f(0)-f(1)\right),$$

οπότε

$$g(0)g(1)=-\frac{2}{9}\left(f(0)-f(1)\right)^2\le 0.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $g(0)g(1)=0$, τότε θα είναι $g(0)=0$ ή $g(1)=0$.
- Αν $g(0)g(1)<0$, τότε η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **θεωρήματος Bolzano** στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $g(\xi)=0$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι υπάρχει $x_1\in[0,1]$ (είναι $x_1=0$ ή $x_1=1$ ή $x_1=\xi\in(0,1)$) ώστε:

$$g(x_1)=0\Rightarrow f(x_1)-\frac{2f(0)+f(1)}{3}=0\Rightarrow f(x_1)=\frac{2f(0)+f(1)}{3}.$$

ii. Από το i. ερώτημα έχουμε ότι υπάρχει $x_1\in[0,1]$ με

$$f(x_1)=\frac{2f(0)+f(1)}{3}.$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι υπάρχει $x_2\in[3,4]$ ώστε

$$f(x_2)=\frac{2f(3)+f(4)}{3}.$$

Από την (2) έχουμε:

$$2f(0)+f(1)=2f(3)+f(4)$$
$$\Rightarrow \frac{2f(0)+f(1)}{3}=\frac{2f(3)+f(4)}{3}$$
$$\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

Επειδή $x_1\in[0,1]$ και $x_2\in[3,4]$ είναι $x_1\ne x_2$.

Έτσι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\ne x_2$ και $f(x_1)=f(x_2)$, οπότε η f δεν είναι $1-1$

iii. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει $x_0 \in [0,2]$ με

$$f(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0+1) + f(x_0+2)\right)$$

Τότε για κάθε $x \in [0,2]$ ισχύει:

$$f(x) \neq \frac{1}{2}\left(f(x+1)+f(x+2)\right) \Rightarrow 2f(x) - f(x+1) - f(x+2) \neq 0 \Rightarrow h(x) \neq 0,$$

όπου

$$h(x) = 2f(x) - f(x+1) - f(x+2),\ x \in \mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών, στο $\mathbb{R}$, συναρτήσεων (οι συναρτήσεις $\varphi_1(x) = f(x+1)$ και $\varphi_2(x) = f(x+2)$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων η καθεμία).

Άρα η h είναι συνεχής στο $[0,2]$ και επειδή ισχύει $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0,2]$, έπεται ότι η h διατηρεί στο $[0,2]$ σταθερό πρόσημο.

Δηλαδή είναι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,2]$ ή $h(x) < 0$ για κάθε $x \in [0,2]$.

- Έστω ότι είναι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,2]$.

Τότε για κάθε $x \in [0,2]$ ισχύει:

$$h(x) > 0 \Rightarrow 2f(x) - f(x+1) - f(x+2) > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2f(x) > f(x+1) + f(x+2) \quad :(3)$$

Λόγω της (3) έχουμε ότι ισχύουν:

- $2f(0) > f(1) + f(2)$, (για $x = 0$)
- $2f(1) > f(2) + f(3)$, (για $x = 1$)
- $2f(2) > f(3) + f(4)$, (για $x = 2$)

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$2f(0) + 2f(1) + 2f(2) > f(1) + 2f(2) + 2f(3) + f(4)$$
$$\Rightarrow 2f(0) + f(1) > 2f(3) + f(4),$$

ΑΤΟΠΟ, αφού δόθηκε ότι ισχύει

$$2f(0) + f(1) = 2f(3) + f(4).$$

- Ομοίως σε άτοπο καταλήγουμε και στην περίπτωση $h(x)<0$ για κάθε $x\in[0,2]$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι υπάρχει $x_0\in[0,2]$ ώστε

$$f(x_0)=\frac{1}{2}\left(f(x_0+1)+f(x_0+2)\right).$$

Δ2. i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(2x)-2f(x)=\left[f(2x)-2(2x)\right]-2\left(f(x)-2x\right).$$

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=3 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left(f(2x)-2(2x)\right)\underset{\left(\lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty\right)}{\overset{(w=2x)}{=}}\lim_{w\to+\infty}\left(f(w)-2w\right)=3.$$

Οπότε έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(2x)-2f(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(f(2x)-2(2x)\right)-2\left(f(x)-2x\right)\right]=3-2\cdot3=-3.$$

Άρα

$$\boxed{M=-3}.$$

ii. Για κάθε $x>0$ είναι

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-2x+2x}{x}=\left(f(x)-2x\right)\frac{1}{x}+2.$$

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(f(x)-2x\right)\frac{1}{x}+2\right]=3\cdot0+2=2.$$

Άρα

$$\boxed{N=2}.$$

iii. Είναι

$$\frac{f^2(x)}{x}-4x=\frac{f^2(x)-4x^2}{x}=\frac{\left(f(x)-2x\right)\left(f(x)+2x\right)}{x}=\left(f(x)-2x\right)\left(\frac{f(x)}{x}+2\right).$$

Οπότε,

$$.\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f^2(x)}{x}-4x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(f(x)-2x\right)\left(\frac{f(x)}{x}+2\right)\right]=3\cdot(2+2)=12.$$

Άρα $$\boxed{P=12}.$$