163. **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Είναι από υπόθεση

$$I=\int_0^1 f'(x)3^x dx \;+\; \ln 3\cdot I \;=\; \int_0^1 f(x)3^x dx \quad (1)$$

Αλλά :

$$I=\int_0^1 f(x)3^x dx=\int_0^1 f(x)\frac{(3^x)'}{\ln 3}dx=\frac{1}{\ln 3}\int_0^1 f(x)(3^x)'\,dx$$

Εφαρμόζοντας **ολοκλήρωση κατά παράγοντες** έχουμε:

$$I=\frac{1}{\ln 3}\left[f(x)3^x\right]_0^1-\frac{1}{\ln 3}\int_0^1 f'(x)3^x dx=\frac{1}{\ln 3}\big(3f(1)-f(0)\big)-\frac{1}{\ln 3}\int_0^1 f'(x)3^x dx$$

$$\overset{(1)}{=}\frac{1}{\ln 3}\big(3f(1)-f(0)\big)-\frac{1}{\ln 3}(I-\ln 3\cdot I)=\frac{1}{\ln 3}\big(3f(1)-f(0)\big)-\frac{I}{\ln 3}+I$$

Άρα

$$I=\frac{1}{\ln 3}\big(3f(1)-f(0)\big)-\frac{I}{\ln 3}+I \Leftrightarrow$$

$$I=3f(1)-f(0) \quad (2)$$

- Αν $I=-2f(0)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}3f(1)-f(0)=-2f(0)\Leftrightarrow 3f(1)=-f(0) \quad (3)$
  - Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική
  - $f(0)\cdot f(1)\overset{(3)}{=}-3f(1)\cdot f(1)=-3\big(f(1)\big)^2<0$

Άρα σύμφωνα με το **Θεώρημα Bolzano** η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο $(0,1)$, άρα και η εξίσωση $f'(x)f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

- Αν $I=2f(1)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}3f(1)-f(0)=2f(1)\Leftrightarrow f(1)=f(0) \quad (4)$
  - Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική
  - Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πολυωνυμική
  - $f(1)=f(0)$

Άρα σύμφωνα με το **Θεώρημα Rolle** η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο $(0,1)$, άρα και η εξίσωση $f'(x)f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Γ2. Έστω $\xi\in(0,\,1)$ η ρίζα του προηγούμενου ερωτήματος, άρα $f'(\xi)=0$

Επίσης είναι $f'(\alpha)=0$ με $\alpha>1$.

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x)=f'(x)f(x),\ \ x\in[\xi,\alpha].$$

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\xi,\alpha]$.
- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο (ξ,α).
- $f'(\xi)=f'(\alpha)$

Επομένως για την συνάρτηση $g(x)$ στο $[\xi,\ \alpha]$ εφαρμόζεται το **Θεώρημα Rolle**, οπότε η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα πραγματική, άρα η εξίσωση

$$\boxed{\left(f'(x)f(x)\right)'=0\Leftrightarrow f''(x)f(x)+\left(f'(x)\right)^2=0}$$

έχει **μια τουλάχιστον** πραγματική ρίζα.

164. **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Η δοθείσα σχέση γράφεται:

$$f^2(x)+4e^x=4+2e^xf(x)\Leftrightarrow f^2(x)-4+4e^x-2e^xf(x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(f(x)-2)(f(x)+2)-2e^x(f(x)-2)=0$$

$$\Leftrightarrow(f(x)-2)\left(f(x)+2-2e^x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\ \ f(x)=2\ (\text{ άτοπο })\ \ \text{ή}\ \ \ f(x)+2-2e^x=0$$

Επομένως

$$\boxed{f(x)=2e^x-2,\ \ x\in\mathbb{R}}$$

Γ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=2e^x>0$, άρα η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$ και συνεπώς **“1–1”,** άρα είναι **αντιστρέψιμη**.

Έστω

$$y=2e^x-2\Leftrightarrow 2e^x=y+2\Leftrightarrow e^x=\frac{y+2}{2}\Leftrightarrow x=\ln\frac{y+2}{2},\ \ y>-2$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{f^{-1}(x)=\ln\frac{x+2}{2},\quad x\in(-2,+\infty)}}$$

Γ3. Είναι

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2e^x-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\left(e^x-1\right)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}2\lim_{x\to0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{(x)'}=2\lim_{x\to0}e^x=2}$$

Γ4. Έχουμε

$$\int_0^{-1}f^{-1}(x)dx=-\int_{-1}^0 f^{-1}(x)dx=-\int_{-1}^0\ln\frac{x+2}{2}dx=-\int_{-1}^0\left(\ln(x+2)-\ln2\right)dx$$

$$=-\int_{-1}^0\ln(x+2)dx+\int_{-1}^0\ln2dx$$

Αλλά είναι

- $\int_{-1}^0\ln(x+2)dx=\int_{-1}^0(x+2)'\ln(x+2)dx$

  $=\left[(x+2)\ln(x+2)\right]_{-1}^0-\int_{-1}^0(x+2)\left(\ln(x+2)\right)'dx$

  $=2\ln2-\int_{-1}^0(x+2)\frac{1}{x+2}dx=2\ln2-[x]_{-1}^0=2\ln2-1$

- $\int_{-1}^0\ln2dx=\ln2[x]_{-1}^0=\ln2$

Επομένως

$$\boxed{\mathbf{\int_0^{-1}f^{-1}(x)dx=-2\ln2+1+\ln2=1-\ln2=\ln e-\ln2=\ln\frac{e}{2}}}$$

165. **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Είναι

$$f^{-1}\left(f(x)\right)=x$$

οπότε:

$$\int_\alpha^\beta xf'(x)dx=\int_\alpha^\beta f^{-1}\left(f(x)\right)f'(x)dx\quad(1)$$

Θέτουμε $f(x)=u$, οπότε είναι:

- $du=f'(x)dx$
- για $x=\alpha$ είναι $u=f(\alpha)$ και για $x=\beta$ είναι $u=f(\beta)$

Επομένως από την (1) προκύπτει:

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} xf'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}\big(f(x)\big)f'(x)dx = \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(u)du = \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx}$$

Γ2. Είναι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx \overset{B1}{=} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} xf'(x)dx =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + xf'(x))dx = \int_{\alpha}^{\beta} (xf(x))'dx = [xf(x)]_{\alpha}^{\beta} = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$$

Γ3. Έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \big(2x - f^{-1}(x)\big)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} 2xdx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{f(\alpha)}^{(\beta)} f^{-1}(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (x^2)'dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) = [x^2]_{\alpha}^{\beta} \Leftrightarrow \beta^2 - \alpha^2 = \beta^2 - \alpha^2, \text{ που ισχύει.}$$

166. **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Αν $M\big(x, f(x)\big)$ τότε είναι:

$$f'(x) = 2xf(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αλλά $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x \Leftrightarrow \big(\ln f(x)\big)' = \big(x^2\big)'$$

Άρα σύμφωνα με γνωστό πόρισμα είναι:

$$\ln f(x) = x^2 + c \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2+c} \quad (1)$$

Από την (1) για $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = e^c \text{ και επειδή } f(0) = \lambda$$

προκύπτει τελικά ότι $e^c = \lambda \Leftrightarrow c = \ln\lambda$.

Άρα

$$\boxed{f(x) = e^{x^2+\ln\lambda} = e^{x^2}e^{\ln\lambda} = \lambda e^{x^2}}$$

Γ2. Η **εφαπτομένη** της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\big(1, f(1)\big)$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon:\ y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

Αλλά

$$f'(x)=\left(\lambda e^{x^2}\right)'=\lambda e^{x^2}\left(x^2\right)'=2\lambda x e^{x^2}\text{, οπότε } f'(1)=2\lambda e$$

Επίσης είναι

$$f(1)=\lambda e$$

Άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,f(1))$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon:\ y-\lambda e=2\lambda e(x-1)\ \text{ ή}$$

$$\varepsilon:\ y+\lambda e(1-2x)=0\text{, για κάθε } \lambda>0\,.$$

Για να δείξουμε ότι η ευθεία ε διέρχεται από σταθερό σημείο, αρκεί να βρούμε σημείο K του οποίου οι συντεταγμένες επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε για κάθε $\lambda>0$

Το ζητούμενο σημείο θα είναι εκείνο του οποίου οι συντεταγμένες μηδενίζουν τις παραστάσεις $y=0$ και $e(1-2x)=0$, δηλαδή η λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y=0 \\ e(1-2x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα η **εφαπτομένη** διέρχεται από το σταθερό **σημείο** $\mathbf{K\left(\frac{1}{2}\ ,\ 0\right)}$ για κάθε $\boldsymbol{\lambda>0}$.

Γ3. Είναι

$$f'(x)=2\lambda x e^{x^2}>0 \text{ για κάθε } x\in(0,\lambda),$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\lambda]$ και επομένως

η ελάχιστη τιμή της στο $[0,\lambda]$ είναι $m=f(0)=\lambda$ και

η μέγιστη $M=f(\lambda)=\lambda e^{\lambda^2}$.

Άρα είναι

$$\lambda\le f(x)\le \lambda e^{\lambda^2}$$

Οπότε

$$\int_0^\lambda \lambda dx\le\int_0^\lambda f(x)dx\le\int_0^\lambda \lambda e^{\lambda^2}dx \quad \text{ή}$$

$$\lambda[x]_0^{\lambda} \le \int_0^{\lambda} f(x)dx \le \lambda e^{\lambda^2}[x]_0^{\lambda} \quad \text{ή}$$

$$\lambda(\lambda-0) \le \int_0^{\lambda} f(x)dx \le \lambda e^{\lambda^2}(\lambda-0)$$

Άρα είναι τελικά:

$$\boxed{\lambda^2 \le \int_0^{\lambda} f(x)dx \le \lambda^2 e^{\lambda^2}}$$

167. **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Είναι:

- $f(0)=1$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x + 1) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} + 1\right) \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} + 1\right)$

$$= \lim_{x\to 0^+}(-x+1) = 1$$

Άρα είναι

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)},$$

οπότε η f είναι **συνεχής** στο 0.

Γ2. Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(x\ln x+1)-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}(\ln x) = -\infty.$$

Άρα η f **δεν παραγωγίζεται** στο 0.

Γ3. Έχουμε:

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^{1}(x\ln x + 1)dx = \int_{\lambda}^{1}\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x dx + \int_{\lambda}^{1}1dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_{\lambda}^{1} - \int_{\lambda}^{1}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx + [x]_{\lambda}^{1} = \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{\lambda^2}{2}\ln\lambda - \frac{1}{2}\int_{\lambda}^{1}xdx + (1-\lambda)$$

$$= -\frac{\lambda^2}{2}\ln\lambda - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\lambda}^{1} + (1-\lambda) = -\frac{\lambda^2}{2}\ln\lambda - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda^2}{2}\right) + (1-\lambda)$$

$$= -\frac{\lambda^2}{2}\ln\lambda - \frac{1}{4} + \frac{\lambda^2}{4} + 1 - \lambda.$$

Γ4. Έχουμε:

$$\lim_{\lambda\to 0^+} I(\lambda) = \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\lim_{\lambda\to 0^+}(\lambda\ln\lambda) - \frac{1}{4} + \lim_{\lambda\to 0^+}\frac{\lambda^2}{4} + 1 - \lim_{\lambda\to 0^+}\lambda = 0\cdot 0 - \frac{1}{4} + 0 + 1 - 0 = \frac{3}{4}$$

$$\left(\text{επειδή}\quad \lim_{\lambda\to 0^+}(\lambda\ln\lambda) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\lambda}{\frac{1}{\lambda}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{\lambda\to 0^+}\frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{\lambda^2}} = \lim_{\lambda\to 0^+}(-\lambda) = 0\right)$$

168. **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Είναι:

$$2f(x) + xf'(x)\ln x = 0\ ,\ x > 1,$$

οπότε έχουμε

$$\frac{2}{x}\ln x\cdot f(x) + f'(x)\ln^2 x = 0 \Leftrightarrow \left((\ln x)^2\right)' f(x) + f'(x)(\ln x)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[(\ln x)^2 f(x)\right]' = 0$$

Επομένως σύμφωνα με γνωστό πόρισμα είναι:

$$(\ln x)^2 f(x) = c \quad (1)$$

Για $x = e$ στην σχέση (1) έχουμε:

$$(\ln e)^2 f(e) = c \Leftrightarrow f(e) = c \Leftrightarrow c = 1$$

Άρα η (1) γίνεται:

$$\boxed{\mathbf{f(x) = \frac{1}{\ln^2 x},\quad x\in(1,+\infty)}}$$

Γ2. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^x f(x)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^x\frac{1}{\ln^2 x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln^2 x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(\ln^2 x)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\frac{2\ln x}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{2\ln x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(xe^x)'}{2(\ln x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x(x+1)}{2} = +\infty$$

Γ3. Είναι:

$$I = \int_e^{e^2}\frac{1}{\ln^2 x}dx - 2\int_e^{e^2}(\ln x)^{-3}dx = \int_e^{e^2}(x)'(\ln x)^{-2}dx - 2\int_e^{e^2}(\ln x)^{-3}dx$$

$$= [x(\ln x)^{-2}]_e^{e^2} + 2\int_e^{e^2}(\ln x)^{-3}dx - 2\int_e^{e^2}(\ln x)^{-3}dx = e^2 2^{-2} - e = e\left(\frac{e}{4} - 1\right).$$

169. **ΘΕΜΑ Γ** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2003**

Γ1. Η συνάρτηση f πληροί τις προυποθέσεις του **Θ.Μ.Τ** στο $[0,x]$,

άρα υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x},$$

άρα για κάθε $x>0$ υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιος ώστε :

$$\boxed{\mathbf{f(x)=x\cdot f'(\xi)}}$$

Γ2. Είναι

$$h'(x)=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}+e^x \overset{(A)}{=} \frac{f'(x)\cdot x-f'(\xi)\cdot x}{x^2}+e^x=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x}+e^x$$

Αλλά επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$ για $\xi<x$ είναι

$$f'(\xi)<f'(x) \Leftrightarrow f'(x)-f'(\xi)>0,$$

οπότε

$$h'(x)=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x}+e^x>0,$$

άρα η h είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0,+\infty)$, οπότε η h είναι **1−1** στο $(0,+\infty)$.

Γ3. Είναι

$$h(x)=e^x+x^5+x,$$

άρα

$$\frac{f(x)}{x}+e^x=e^x+x^5+x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=x^5+x \Leftrightarrow$$

$$f(x)=x^6+x^2.$$

Άρα

$$I=\int_1^{e-1} f(x+1)dx \overset{\substack{u=x+1,\ du=dx\\ x=1\ \to y=2\\ x=e-1\ \to y=e}}{=} \int_2^e f(u)du=\int_2^e (u^6+u^2)du=$$

$$=\left[\frac{u^7}{7}+\frac{u^3}{3}\right]_2^e=\frac{e^7}{7}+\frac{e^3}{3}-\frac{2^7}{7}-\frac{2^3}{3}$$

170. **ΘΕΜΑ Γ** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2005**

Γ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x)=\left(x-\ln x+e^{x}\right)'=1-\frac{1}{x}+e^{x}=\frac{x-1}{x}+e^{x}>0,\ \text{για}\ x>1,$$

άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(1,+\infty)$.

Γ2. Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{1}=+\infty \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to+\infty}x=+\infty.$$

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln x+e^{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\frac{\ln x}{x}+\frac{e^{x}}{x}\right)\right]=+\infty.$$

Γ3. Η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(1,+\infty)$ (από το Β1 ερώτημα), άρα το σύνολο τιμών της είναι

$$\boxed{f\left((1,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to1^{+}}f(x),\ \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)}$$

Αλλά

- $\lim\limits_{x\to1^{+}}f(x)=\lim\limits_{x\to1^{+}}\left(x-\ln x+e^{x}\right)=1+e$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (από ερώτημα Β2)

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι

$$\boxed{f\left((1,+\infty)\right)=(1+e,+\infty)}$$

Αλλά $2005\in f\left((1,+\infty)\right)$,

οπότε η εξίσωση

$f(x)=2005$ έχει **μια τουλάχιστον** λύση στο $(1,+\infty)$ και

επειδή η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(1,+\infty)$ η λύση αυτή είναι **μοναδική.**

Γ4. Έχουμε

$$\Pi=\int_{2}^{e}f(x)dx+\int_{f(2)}^{f(e)}f^{-1}(x)dx\ \overset{\substack{u=f^{-1}(x),\ \text{άρα}\ x=f(u),\ dx=f'(u)du\\ x=f(2)\to u=2\ \ \text{και}\ \ x=f(e)\to u=e}}{=}\ \int_{2}^{e}f(x)dx+\int_{2}^{e}uf'(u)du$$

$$=\int_2^e \left(f(x)+xf'(x)\right)dx=\int_2^e \left(xf(x)\right)'dx=\left[xf(x)\right]_2^e=ef(e)-2f(2)=$$

$$=e\left(e-\ln e+e^e\right)-2\left(2-\ln 2+e^2\right)=-e^2-e+e^{1+e}-4+2\ln 2\,.$$

Άρα

$$\boxed{\Pi-2\ln 2=e^{1+e}-e^2-e-4}$$

171. **ΘΕΜΑ Γ** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2008**

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως τριγωνομετρική, με παράγωγο

$$f'(x)=(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x,\quad x\in\mathbb{R}$$

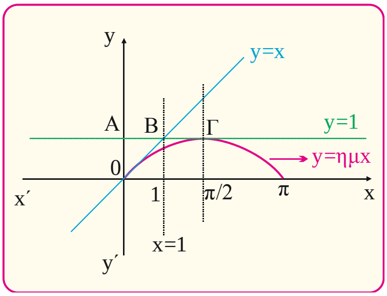
Άρα είναι

$$f'(0)=\sigma\upsilon\nu 0=1 \qquad \kappa\alpha\iota \quad f(0)=\eta\mu 0=0.$$

Η εφαπτομένη ευθείας στο σημείο $\left(0,f(0)\right)$ της γραφικής παράστασης της f έχει εξίσωση

$$\varepsilon\colon y-f(0)=f'(0)x \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad \varepsilon\colon y=x$$

Γ2. Επειδή το ζητούμενο χωρίο περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων, κατασκευάζουμε το επόμενο σχήμα και με τη βοήθειά του εντοπίζουμε το γραμμοσκιασμένο χωρίο.



Η ευθεία $y=1$ τέμνει την εφαπτομένη $\varepsilon\colon y=x$ στο σημείο $B(1,\ 1)$ και την γραφική παράσταση της $f(x)=\eta\mu x$ στο σημείο $\Gamma\left(\frac{\pi}{2},1\right)$.

Το ζητούμενο χωρίο προκύπτει αν από το καμπυλόγραμμο τρίγωνο ΟΑΓ αφαιρέσουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ.

$$E_{ΟΑΓ} = \int_0^{\pi/2} (1 - ημx)dx = \left[x + συνx\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + συν\,\frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \quad τ.μ.$$

$$E_{\overset{\triangle}{ΟΑΒ}} = \frac{1}{2}(ΟΑ)(ΑΒ) = \frac{1}{2} 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \quad τ.μ.$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{E = E_{ΟΑΓ} - E_{\overset{\triangle}{ΟΑΒ}} = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} = \frac{\pi - 3}{2} \quad τ.μ.}}$$

Γ3. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g(x) = ημx - x + \frac{3}{2}x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Είναι

$$g'(x) = \left(ημx - x + \frac{3}{2}x^2\right)' = συνx - 1 + 3x, \quad x \in \mathbb{R}$$

και

$$g''(x) = (συνx - 1 + 3x)' = -ημx + 3 = 3 - ημx > 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

Άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα σ' όλο το $\mathbb{R}$, συνεπώς και στο $[0, +\infty)$.

Έτσι για

$$x > 0 \overset{g'\,γν.\,αύξ.}{\Leftrightarrow} g'(x) > g'(0) \Leftrightarrow g'(x) > 0.$$

Άρα η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[0, +\infty)$.

Έτσι για

$$\boxed{\mathbf{x > 0 \overset{g\,γν.\,αύξ.}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0}}$$

172. **ΘΕΜΑ Γ** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2009**

Γ1. α΄ τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με

$$h(x) = f(x) - g(x) = x - 1 - \ln x, \quad x > 0$$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$$h'(x) = (x - 1 - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x}, \quad x > 0$$

- $h'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x}=0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x-1=0 \Leftrightarrow x=1$
- $h'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x-1>0 \Leftrightarrow x>1$
- $h'(x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x}<0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x-1<0 \Leftrightarrow x<1$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	$h(1)=0$	$\nearrow$	

Η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $h(1)=0$, άρα για κάθε $x>0$ είναι

$$\boxed{\mathbf{h(x)\ge 0 \Leftrightarrow f(x)-g(x)\ge 0 \Leftrightarrow f(x)\ge g(x)}}$$

β΄ τρόπος

Βρίσκουμε την εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(1,0)$.

Είναι $g'(x)=\dfrac{1}{x}$, $x>0$, άρα $g'(1)=1$,

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$\varepsilon:\ y-g(1)=g'(1)(x-1) \Leftrightarrow \varepsilon:\ y=x-1$$

Επίσης είναι

$$g''(x)=-\frac{1}{x},\ x>0,$$

άρα η g είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$.

Η εφαπτόμενη ευθεία (ε) βρίσκεται πάνω από τη C_g, με εξαίρεση το σημείο επαφής A,

άρα

$$x-1\ge g(x) \Leftrightarrow f(x)\ge g(x).$$

Γ2. i. Η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,e]$,

άρα

$$\boxed{\mathbf{1\le x\le e \Leftrightarrow h(1)\le h(x)\le h(e) \Leftrightarrow 0\le h(x)\le e-2}}$$

ii. Από το ερώτημα Β1 είναι $h(x)\ge 0$, για κάθε $x>0$, άρα

$$E(\Omega)=\int_1^e h(x)dx=\int_1^e (x-1-\ln x)dx=\int_1^e xdx-\int_1^e 1dx-\int_1^e (x)'\ln xdx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e-[x]_1^e-[x\ell nx]_1^e+\int_1^e (x(\ell nx)'dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}-e+1-e+e-1=\frac{e^2-2e-1}{2} \quad \text{τ.μ.}$$

iii. Έστω $u=h(x)$, οπότε είναι

- $du=h'(x)dx$
- Για $x=e$ είναι $u=e-2$
- Για $x=1$ είναι $u=0$

Άρα έχουμε

$$I=\int_1^e e^{h(x)}[h(x)+1]h'(x)dx=\int_0^{e-2} e^u(u+1)du=\int_0^{e-2}(e^u u+e^u)du=$$

$$=\int_0^{e-2}(ue^u)'du=[ue^u]_0^{e-2}=(e-2)e^{e-2}$$

173. **ΘΕΜΑ Γ** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2010**

Γ1. Είναι

$$f'(x)+f(x)-x=0,\ \ x\in\mathbb{R} \quad (1)$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$g'(x)=(e^x)'[f(x)-x+1]+e^x[f(x)-x+1]'$$

$$=e^x[f(x)-x+1]+e^x[f'(x)-1]$$

$$=e^x[f(x)-x+1+f'(x)-1]$$

$$=e^x[f'(x)+f(x)-x]\overset{(1)}{=}0 \quad \text{από την } (1)$$

Άρα η συνάρτηση g είναι **σταθερή** στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, άρα είναι $g(x)=c,\ \ x\in\mathbb{R}$.

Αλλά

$$g(0)=e^0[f(0)-0+1]=1,$$

άρα

$$g(x)=1,\ \ x\in\mathbb{R}, \text{ οπότε είναι}$$

$$e^x[f(x)-x+1]=1\Leftrightarrow f(x)-x+1=e^{-x}\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{f(x)=e^{-x}+x-1,\ \ x\in\mathbb{R}}}$$

Γ3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = -e^{-x} + 1 = 1 - \frac{1}{e^x} = \frac{e^x - 1}{e^x}$$

Είναι

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x - 1}{e^x} = 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x - 1}{e^x} > 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x - 1}{e^x} < 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(0)=0$	$\nearrow$	

Η συνάρτηση f παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** το $f(0) = 0$,

άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$\boxed{\mathbf{f(x) \geq 0}}$$

Γ4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E(\Omega) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (e^{-x} + x - 1)dx = \left[-e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1$$

$$= -e^{-1} + \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} = \frac{e-2}{2e} \quad \text{τ.μ.}$$

174. **ΘΕΜΑ Γ** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2011**

Γ1. Παραγωγίζουμε τη δοθείσα σχέση κατά μέλη

$$\left(2\int_0^x f(t)dt\right)' = [\ln^2(x+1)]' \Leftrightarrow \cancel{2}f(x) = \cancel{2}\ln(x+1)[\ln(x+1)]' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \ln(x+1)\,\frac{(x+1)'}{x+1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1}, \quad x > -1$$

Γ2. Έχουμε

$$f'(x) = \left[\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]' = \frac{[\ln(x+1)]'(x+1) - \ln(x+1)\,(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}, \ x > -1$$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 1$

  $\Leftrightarrow x+1 = e \Leftrightarrow x = e-1$

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} > 0 \Leftrightarrow x < e-1$

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} < 0 \Leftrightarrow x > e-1$

x	-1	**e−1**	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	f(e-1)=1/e	↘

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(e-1) = \frac{1}{e}$, άρα για κάθε $x > -1$ είναι:

$$\boldsymbol{f(x) \le \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)}{x+1} \le \frac{1}{e} \Leftrightarrow e\ln(x+1) \le x+1 \Leftrightarrow}$$
$$\boldsymbol{\ln(x+1)^e \le x+1 \Leftrightarrow e^{\ln(x+1)^e} \le e^{x+1} \Leftrightarrow (x+1)^e \le e^{x+1}}$$

Γ3. Έχουμε

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Αναζητούμε το πρόσημο της f στο $[0, e-1]$, οπότε είναι

$$0 \le x \le e-1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(0) \le f(x) \le f(e-1) \Leftrightarrow 0 \le f(x) \le \frac{1}{e}$$

Άρα το ζητούμενο **εμβαδόν** είναι

$$\boldsymbol{E = \int_0^{e-1} f(x)dx = \int_0^{e-1} \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx = \left[\frac{\ln^2(x+1)}{2}\right]_0^{e-1} = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}}$$

Γ4. Για $x > -1$ έχουμε:

$$(x+1)^2 = 2^{x+1} \Leftrightarrow \ln(x+1)^2 = \ln 2^{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(x+1) = (x+1)\ln 2 \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow f(x) = f(1)$$

1^{η} λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x)=f(x)-f(1)$.

Έστω ότι η g έχει 3 ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στα $[\rho_1, \rho_2]$ και $[\rho_2, \rho_3]$, άρα από Θ. Rolle υπάρχουν

$$x_1 \in (\rho_1, \rho_2) \text{ και } x_2 \in (\rho_2, \rho_3)$$

τέτοια ώστε

$$g'(x_1)=g'(x_2)=0.$$

Όμως $g'(x)=f'(x)$ και η f' έχει μοναδική ρίζα το $e-1$,άτοπο, άρα η g έχει το πολύ δύο ρίζες.

Είναι

$$g(1)=g(3)=0,$$

άρα η εξίσωση $f(x)=f(1)$ έχει **ακριβώς δύο λύσεις** τις $x=1$ και $x=3$.

2^{η} λύση

- Στο διάστημα $\Delta_1=(-1, e-1)$ η εξίσωση $f(x)=f(1)$ έχει προφανή λύση την $x=1$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1, η εξίσωση $f(x)=f(1)$ έχει μοναδική λύση στο Δ_1 την $x=1$.
- Στο διάστημα $\Delta_2=[e-1,+\infty)$

$$f(3)=\frac{\ln 4}{4}=\frac{2\ln 2}{4}=\frac{\ln 2}{2}=f(1),$$

άρα η εξίσωση $f(x)=f(1)$ έχει λύση την $x=3$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 ,η εξίσωση $f(x)=f(1)$ έχει μοναδική λύση στο Δ_2 την $x=3$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=f(1)$ έχει ακριβώς δύο λύσεις τις $x=1$ και $x=3$.

Επομένως και η ισοδύναμή της εξίσωση

$$\mathbf{(x+1)^2=2^{x+1}}$$

έχει **ακριβώς δύο λύσεις**, τις $x=1$ και $x=3$.

175. **ΘΕΜΑ Γ** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2012**

Γ1. Θεωρούμε συνάρτηση φ, με

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-2}{x-2}.$$

Ισχύει

$$\lim_{x\to 2}\varphi(x)=2\,.$$

Είναι

$$f(x) = (x-2)\varphi(x) + 2.$$

- $f(2)\overset{\text{f συνεχής}}{=}\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}[(x-2)\varphi(x)+2]$
  $=\lim_{x\to 2}(x-2)\lim_{x\to 2}\varphi(x)+2=0\cdot 2=2=2$
- $f'(2)=\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2}{x-2}=2$

Γ2. Είναι

- Η f είναι συνεχήςστο $[0, 2]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$
- $f(0)=f(2)=2$

Άρα από **Θ. Rolle** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0, 2)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$ και επειδή η f' είναι **γνησίως αύξουσα** στο ξ είναι **μοναδικό**.
Επομένως υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0, 2)$, τέτοιο ώστε η **εφαπτομένη** της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ είναι **παράλληλη** στον $x'x$.

Γ3. Η f' είναι **γνησίως αύξουσα**, άρα η f είναι **κυρτή**.
Η **εφαπτομένη** της C_f στο $x_0=\xi$ είναι η $y=f(\xi)$ και επειδή η f είναι **κυρτή** η C_f βρίσκεται **πάνω** από την εφαπτομένη με **εξαίρεση** το σημείο επαφής,
άρα

$$\boxed{\mathbf{f(x)\geq f(\xi)}}$$

Γ4. Θεωρούμε συνάρτηση g, με

$$g(x)=\int_1^x f(t)dt-x^2+2x,\ \ x\in\mathbb{R}$$

- Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξεις συνεχών
  - $g(0)=\int_1^0 f(t)dt=-\int_0^1 f(t)dt$
  - $g(1) = 1 > 0$

$$f(x)\geq f(\xi)>0,\ \text{ στο } [0,1],$$

άρα

$$\int_0^1 f(t)dt > 0 \Leftrightarrow -\int_0^1 f(t)dt < 0$$

Επομένως $g(0)\cdot g(1)<0$.

Από **Θ. Bolzano** η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Επομένως η εξίσωση

$$\boxed{\int_1^x f(t)dt = x^2 + 2x}$$

έχει **μια τουλάχιστον ρίζα** στο διάστημα $(0,1)$.

176. **ΘΕΜΑ Γ** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2013**

Γ1. Έχουμε

$$3\int_1^x 2t\cdot f(t)dt + x^3 = 3x^2 f(x) + 3x - 8 \quad (1) \Leftrightarrow$$

$$3\int_1^x 2t\cdot f(t)dt + x^3 - 3x + 8 = 3x^2 f(x) \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$f(x) = \frac{3\int_1^x 2t\cdot f(t)dt + x^3 - 3x + 8}{3x^2}.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$,

άρα η συνάρτηση f_1, με

$$f_1(t) = 2t\cdot f(t)$$

είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Επομένως η συνάρτηση f_2, με

$$f_2(t) = 3\int_1^x 2t\cdot f(t)dt = 3\int_1^x f_1(t)dt \quad \text{είναι παραγωγίσιμη στο } (0, +\infty).$$

Τέλος, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως πράξεις των παραγωγίσιμων συναρτήσεων f_2, f_3, f_4, με

$$f_3(x) = x^3 - 3x + 8 \ \text{ και } \ f_4(x) = 3x^2.$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (1) κατά μέλη έχουμε:

$$\left(3\int_1^x 2t\cdot f(t)dt + x^3\right)' = (3x^2 f(x) + 3x - 8)' \Leftrightarrow$$

$$\cancel{6x\cdot f(x)} + 3x^2 = \cancel{6x\cdot f(x)} + 3x^2 f'(x) + 3 \Leftrightarrow$$

$$3x^2 f'(x) = 3x^2 - 3 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}, \quad x>0$$

Γ2. Έχουμε

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)'$$

Από συνέπειες **Θ.Μ.Τ.**

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + c\,,\ x > 0 \quad (2).$$

$$(1) \overset{x=1}{\Rightarrow} 3\int_1^x 2t\cdot f(t)dt + 1 = 3f(1) + 3 - 8 \Leftrightarrow f(1) = 2$$

$$(2) \overset{x=1}{\Rightarrow} f(1) = 2 + c \Leftrightarrow 2 = 2 + c \Leftrightarrow c = 0$$

$$(2) \overset{c=0}{\Rightarrow} f(x) = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2+1}{x}\,,\ x > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty}\left(\cancel{x} + \frac{1}{x} - \cancel{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

άρα η ευθεία $y = x$ είναι η **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

Γ3. Έχουμε

$$f(x) - x = \cancel{x} + \frac{1}{x} - \cancel{x} = \frac{1}{x} > 0\,,\ \text{στο}\ [1, e^2]$$

άρα

$$E = \int_1^{e^2}[f(x) - x]dx = \int_1^{e^2}\frac{1}{x}\,dx = [\ell nx]_1^{e^2} = \ell ne^2 - \ell n1 = 2 \text{ τ.μ..}$$

Γ4. 1η Λύση

Για $x > 1$ έχουμε:

$$f'(x) > \frac{f(x)-2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2} > \frac{x + \frac{1}{x} - 2}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2-1}{x^2} > \frac{\frac{x^2+1-2x}{x}}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2} > \frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{x\,\cancel{(x-1)}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2-1}{x^2} > \frac{x-1}{x} \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} x^2 - 1 > x^2 - x \Leftrightarrow x > 1 \ \text{που ισχύει.}$$

2η Λύση

Για $x > 1$ έχουμε: **Θ.Μ.Τ.** με την f στο διάστημα $[1, x]$.

Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{f(x)-2}{x-1}\,.$$

Είναι

$$f''(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{2}{x^3}>0,\ \text{για}\ \ x>0$$

άρα η f' είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0,+\infty)$

$$x>\xi \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(\xi)\Leftrightarrow f'(x)>\frac{f(x)-2}{x-1}$$

177. **ΘΕΜΑ Γ** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2014**

Γ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x)=\left(2^x+x^2-2x-1\right)'=2^x\ln2+2x-2\ ,\text{ οπότε}$$

$$f''(x)=\left(2^x\ln2+2x-2\right)'=2^x(\ln2)^2+2>0\,,$$

άρα η συνρτηση είναι f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f(0)=1$ και $f(1)=0$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει 2 ρίζες το 0 και το 1.

Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει 3 ρίζες ρ_1,ρ_2,ρ_3 με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$.

- η f είναι παραγωγίσιμη στα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$
- $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$

Άρα από **Θ. Rolle** υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ και $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$, τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0\,.$$

Επίσης

- η f' είναι παραγωγίσιμη στα $[\xi_1,\xi_2]$
- $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$

Άρα από **Θ. Rolle** υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$, τέτοιο ώστε

$$f''(x)=0\,,\text{ άτοπο διότι}$$

$$f''(x)>0\,,\ \text{για κάθε}\ \ x\in\mathbb{R}\,,$$

επομένως η $f(x)=0$ έχει 2 το πολύ ρίζες.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει **ακριβώς 2 ρίζες**, τις

$$x_1=0 \quad \text{και} \quad x_2=1.$$

Γ2. Έχουμε

- η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$
- $f(0)=f(1)=0$

Άρα από **Θ. Rolle** υπάρχει $x_0 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε

$$f'(x_0)=0 \quad \text{και}$$

επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα (f κυρτή) το x_0 είναι μοναδικό.

Επομένως υπάρχει **μοναδικός αριθμός** $x_0 \in (0,1$, τέτοιος ώστε η **εφαπτομένη** της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι **παράλληλη** στον άξονα $x'x$.

Γ3. Από συνέπειες **θεωρήματος Bolzano** η συνεχής συνάρτηση f διατηρεί **σταθερό πρόσημο** μεταξύ των διαδοχικών ριζών της 0 και 1.

Αλλά είναι

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\left(\frac{1}{2}\right)-1=\sqrt{2}+\frac{1}{4}-2<0$$

Επομένως

$$f(x)<0, \text{ για κάθε } x\in(0,1).$$

Το $x_0=1$ είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης

$$\int_1^x f(t)dt=x-1.$$

Για $x\in(0,1)$ έχουμε:

$$f(x)<0 \Leftrightarrow -f(x)>0,$$

άρα

$$\int_x^1 -f(t)dt>0 \Leftrightarrow -\int_x^1 f(t)dt>0 \Leftrightarrow \int_1^x f(t)dt>0>x-1$$

Επομένως η εξίσωση

$\int_1^x f(t)dt=x-1$ έχει **μοναδική ρίζα** στο $(0,1]$ την $x_0=1$.

178. **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη με παράγωγο:

$$f'(x)=1+\frac{1}{x^2+1}\,(x^2+1)'=1+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}-\{-1\}$$

που σημαίνει ότι η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο πεδίο ορισμού της που είναι το $\mathbb{R}$.

Άρα η f είναι “1–1” στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι **αντιστρέψιμη** σ’ αυτό.

Γ2. Έχουμε

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [x + 1 + \ln(x^2 + 1)] = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [x + 1 + \ln(x^2 + 1)] =$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\ln(x^2+1)}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\cdot\lim_{x\to-\infty}\left[1+\frac{1}{x}+\frac{\ln(x^2+1)}{x}\right]=-\infty$$

επειδή είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

Γ3. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

άρα

$$\text{υπάρχει } x_1>0 \text{ τέτοιο ώστε } f(x_1)>0$$

Επίσης έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

άρα

$$\text{υπάρχει } x_2<0 \text{ τέτοιο ώστε } f(x_2)<0$$

οπότε

$$f(x_1)\cdot f(x_2)<0$$

και επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$, σύμφωνα με το **Θ. Bolzano** η εξίσωση $f(x)=0$ έχει **μία τουλάχιστον λύση** στο (x_1, x_2) η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως μονότονη.

Γ4. Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$ οπότε:

$$\boxed{\mathbf{f([-1,\ 1])=[f(-1),f(1)]=[\ln 2,\ 2+\ln 2]}}$$

Γ5. Έχουμε

$$\int_0^1 \ln(x^2+1)dx = \int_0^1 (x)'\ln(x^2+1)dx$$

$$= [x\ln(x^2+1)]_0^1 - \int_0^1 x[\ln(x^2+1)]'dx$$

$$= \ln 2 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, 2xdx = \ln 2 - 2\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\, dx$$

$$= \ln 2 - 2\int_0^1 1\, dx - 2\int_0^1 \frac{-1}{x^2+1}\, dx = \ln 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

$$= \ln 2 - 2 + 2\,\frac{\pi}{4} = \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2$$

Γ6. Επειδή στο διάστημα $[0,1]$ ισχύει $f(x)>0$ έχουμε:

$$E(\Omega) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 [x+1+\ln(x^2+1)] = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + [x]_0^1 + \int_0^1 \ln(x^2+1)$$

$$= \frac{1}{2} + 1 + \ln 2 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} = \ln 2 + \frac{\pi}{2} + 1$$

179. **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Παραγωγίζοντας την **(1)** έχουμε

$$f'(x) - 2 = f''(x)$$

η οποία λόγω της **(2)** γράφεται:

$$f'(x) - 2 + f(x) = 2x + 6e^x \quad \text{ή} \quad f(x) = 3e^x + 2x$$

Άρα είναι

$$f'(x) = 3e^x + 2 > 0$$

που σημαίνει ότι η f είναι **γν. αύξουσα** και ως τέτοια θα είναι **“1–1”** και άρα **αντιστρέψιμη**.

Γ2. Έχουμε:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^x}{x}+2\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} x \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}+2\right) \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \ldots = +\infty .}$$

Όμοια βρίσκουμε

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty .}$$

Γ3. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ , άρα υπάρχει } x_1 < 0 \text{ τέτοιο ώστε } f(x_1) < 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ , άρα υπάρχει } x_2 > 0 \text{ τέτοιο ώστε } f(x_2) > 0$$

οπότε

$$f(x_1)\cdot f(x_2) < 0$$

και επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$, σύμφωνα με το **Θ. Bolzano** η εξίσωση $f(x)=0$ έχει **μία τουλάχιστον λύση** στο (x_1, x_2) η οποία είναι **μοναδική** αφού η f είναι **γνησίως μονότονη**.

Γ4. Είναι

$$f''(x) = 3e^x > 0$$

που σημαίνει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα και ότι η f στρέφει προς τα πάνω στο $\mathbb{R}$

Γ5. Στο διάστημα $[0, 2]$ ισχύει $f(x) > 0$ οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$\boxed{\mathbf{E(\Omega) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (3e^x + 2x)dx = 3[e^x]_0^2 + 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 3e^2 + 1}}$$

Γ6. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, στο σημείο της με τετμημένη 0 είναι:

$$\varepsilon\colon y - f(0) = f'(0)\,(x-0) \quad \text{ή} \quad \varepsilon\colon y = 5x+3$$

Γ7. Έστω ότι υπάρχει ξ τέτοιος ώστε:

$$f'(x) = 0 \ \textbf{ή} \ \ 3e^{\xi} + 2 = 0 \Leftrightarrow e^{\xi} = -\frac{2}{3}, \text{ άτοπο}$$

180. **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Είναι:

$$g'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)f'(-x)(-x)' = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$$

Από τη σχέση

$$\frac{f'(x)}{f'(-x)} = \frac{f(x)}{f(-x)}$$

έχουμε:

$$f'(x)f(-x) = f(x)f'(-x)$$

οπότε

$$g'(x) = 0.$$

Άρα

$$g(x)=c \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Όμως

$$f(0)=1 \text{ οπότε } g(0)=f(0)f(0) \text{ ή } c=1$$

Άρα

$$g(x)=1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

οπότε

$$f(x)f(-x)=1 \quad (1).$$

Γ2. Είναι:

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-2\eta\mu^2\frac{x}{2}}{f(x)+1}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)+1}\,dx.$$

Θέτουμε $x=-u$, οπότε

- $dx=-du$
- Για $x=-\frac{\pi}{2}$ είναι $u=\frac{\pi}{2}$ ενώ για $x=-\frac{\pi}{2}$ είναι $u=-\frac{\pi}{2}$.

Άρα:

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu(-u)}{f(-u)+1}(-du)\overset{(1)}{=}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{\frac{1}{f(u)}+1}\,du=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{\frac{1+f(u)}{f(u)}}\,du$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(u)\sigma\upsilon\nu u}{f(u)+1}\,du=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(u)\sigma\upsilon\nu u+\sigma\upsilon\nu u-\sigma\upsilon\nu u}{1+f(u)}\,du$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{f(u)+1}{f(u)+1}\sigma\upsilon\nu u-\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+f(u)}\right]du=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sigma\upsilon\nu u-\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+f(u)}\right)du$$

$$=\left[\eta\mu u\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+f(u)}\,du=2-I$$

δηλαδή

$$\boxed{\mathbf{I=2-I \Leftrightarrow 2I=2 \Leftrightarrow I=1}}$$

181. **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Είναι

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+(1-x)e^{-x}\right)=+\infty,$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+(1-x)e^{-x}\right)=1$

Γ2. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$g'(x) = (x - 2)e^{-x}$$

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow (x-2)e^{-x} > 0 \Leftrightarrow x > 2$
- $g'(x) < 0 \Leftrightarrow (x-2)e^{-x} < 0 \Leftrightarrow x < 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$f(2)=\frac{e^2-1}{e^2}$	$\nearrow$	

αλλά

$$g(2) = 1 - e^{-2} = 1 - \frac{1}{e^2} = \frac{e^2 - 1}{e^2} > 0$$

οπότε

$$g(x) > g(2) > 0$$

άρα

$$g(x) > 0$$

Γ3. Έχουμε

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Γ4. Είναι

$$f'(x) = 1 + e^{-x}(1 - x) = g(x) > 0$$

Επομένως η f είναι **γνησίως αύξουσα.**

Γ5. Είναι

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} (x + xe^{-x} - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

Άρα η ευθεία **(δ)** με εξίσωση $\mathbf{y = x}$ είναι **ασύμπτωτη** της $\mathbf{C_f}$.

Γ6. Έχουμε

$$f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow 1 + e^{-x_0}(1 - x_0) = 1 \Leftrightarrow e^{-x_0}(1 - x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

$$f(1) = 1 + \frac{1}{e}.$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $\left(1,\, 1 + \frac{1}{e}\right)$.

Γ7. Έχουμε

$$H'(x) = h(x) \Leftrightarrow \alpha e^{-x} - e^{-x}(\alpha x + \beta) = xe^{-x} \Leftrightarrow \alpha - \alpha x - \beta = x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -(\alpha+1)x + (\alpha-\beta) = 0$$

Πρέπει

$$\alpha = -1 \quad \text{και} \quad \beta = \alpha = -1$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{H(x) = -(x+1)e^{-x}}}$$

Γ8. Έχουμε

$$E = \int_0^2 (f(x) - x)dx = \int_0^2 xe^{-x}\,dx = \int_0^2 h(x)dx$$
$$= [H(x)]_0^2 = [(-x-1)e^{-x}]_0^2 = -3e^{-2} - (-1)e^0 = -3e^{-2} + 1 = 1 - 3e^{-2}$$

182. **ΘΕΜΑ Γ** **study4exams**

Γ1. Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(\frac{2e}{x} + 2\ln x\right)' = \frac{-2e}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{2(x-e)}{x^2}.$$

Είναι

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < e$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(0, e]$.
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > e$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $[e, +\infty)$.

x	0	e	+∞
f΄(x)	−	0	+
f(x)	↘	f(e)=4	↗

Η f για $x = e$ παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο**.
Δηλαδή

$$f(x) \ge f(e) \quad \text{με τιμή} \quad f(e) = 2 + 2 = 4.$$

Γ2. Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$x\ln\frac{x}{e} \ge x - e \Leftrightarrow x(\ln x - \ln e) \ge x - e \Leftrightarrow x\ln x - x \ge x - e \Leftrightarrow$$
$$x\ln x - 2x + e \ge 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x - 2 + \frac{e}{x} \ge 0 \Leftrightarrow 2\ln x + \frac{2e}{x} \ge 4 \Leftrightarrow$$
$$f(x) \ge 4 \quad \text{που ισχύει από i).}$$

Γ3. Για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$\left(\frac{x}{e}\right)^x \ge \lambda^{x-e} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{e}\right)^x \ge \ln\lambda^{x-e} \Leftrightarrow x(\ln x - \ln e) \ge (x-e)\ln\lambda \Leftrightarrow$$

$$x\ln x - x - x\ln\lambda + e\ln\lambda \ge 0 \quad (1)$$

Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = x\ln x - x - x\ln\lambda + e\ln\lambda, \ \ x > 0 \ \text{ και } \ \lambda > 0, \ \text{ τότε:}$$

$$g'(x) = \ln x + 1 - 1 - \ln\lambda = \ln x - \ln\lambda$$

Από (1) έχουμε:

$$g(x) \ge 0, \ \text{ για κάθε } \ x > 0.$$

Αλλά

$$g(e) = 0.$$

Άρα

$$g(x) \ge g(e) \ \ \text{ για κάθε } \ x > 0.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη και στο $x = e$ εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της παρουσιάζει ακρότατο, οπότε από το **Θεώρημα Fermat** έχουμε:

$$\boxed{\mathbf{g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln e - \ln\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = e}}$$

Γ4. Είναι:

$$f(x) = \frac{2e}{x} + 2\ln x, \ \ x > 0.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$1 \le x \le e^2 \Leftrightarrow \ln x \ge 0 \ \text{ και } \ \frac{2e}{x} > 0, \ \text{ οπότε: } \ f(x) > 0 \ \text{ στο } \ [0, e^2]$$

Άρα

$$E = \int_1^{e^2}\left(\frac{2e}{x} + 2\ln x\right)dx = 2e\left[x\ln x\right]_1^{e^2} + 2\int_1^{e^2}\ln x dx =$$

$$= 2e\ln e^2 + 2\int_1^{e^2}(x)'\ln x dx = 4e + 2\left[\ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x\,\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= 4e + 2e^2\ln e^2 - (e^2 - 1) = 4e + 4e^2 - e^2 + 1 = 3e^2 + 4e + 1.$$

183. **ΘΕΜΑ Γ** **study4exams**

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ με

$$f'(x) = \left(\frac{e}{x} + \ln x + 1\right)' = \frac{-e}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-e}{x^2}$$

και επειδή

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > e \ \text{ και}$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < e$$

η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[e, +\infty)$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $(0, e]$ και για $x = e$ παρουσιάζει **ακρότατο** το

$$f(e) = \frac{e}{e} + \ln e + 1 = 3.$$

Γ2. Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e}{x} \ \ln x + 1\right) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{e + x\ln x + x}{x}\right) = +\infty$$

αφού

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Άρα $x = 0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επίσης ισχύει:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{e}{x^2} + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) = 0 + \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} + 0 = 0$$

αφού

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0 \ \text{ και } \ \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{e}{x} + \ln x + 1\right) = +\infty$$

αφού

$$\lim_{x\to +\infty}\ln x = +\infty.$$

Άρα η C_f δεν έχει **ασύμπτωτες** στο $+\infty$.

Γ3. Έστω

$$g(x) = f(x) - 3^{x-1}$$

η οποία είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $[1, 4]$ και για την οποία ισχύει:

$$g(1)g(4) < 0$$

αφού

- $g(1) = f(1) - 3^0 = e + \ln 1 + 1 - 1 = e > 0$
- $g(4) = f(4) - 3^3 = \dfrac{e}{4} + \ln 4 + 1 - 3^3 < 0$

Άρα από το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 4)$ τέτοιο ώστε

$$..\boxed{\mathbf{f(\xi) = 3^{\xi-1}}}$$

B4. Είναι:

$$1 \le x \le e^2 \Leftrightarrow \ln x \ge 0 \ \text{ και } \ \frac{e}{x} > 0.$$

Άρα

$$f(x) = \frac{e}{x} + \ln x + 1 > 0 \ \text{ για κάθε } \ x \in [1, e^2].$$

Επομένως έχουμε:

$$E = \int_1^{e^2} \left(\frac{e}{x} + \ln x + 1 \right) dx = \int_1^{e^2} \frac{e}{x}\, dx + \int_1^{e^2} \ln x dx + 1(e^2 - 1) =$$

$$= e[\ln x]_1^{e^2} + \int_1^{e^2} (x)' \ln x dx + e^2 - 1 =$$

$$= e(\ln e^2 - \ln 1) + [x \ln x]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \frac{1}{x}\, dx + e^2 - 1 =$$

$$= 2e + e^2 \ln e^2 - 1(e^2 - 1) + e^2 - 1 = 2e + 2e^2 \ \text{τ.μ..}$$

184. **Θ Ε Μ Α Γ** **study4exams**

Γ1. Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(\frac{2\ln x}{x} + \lambda x + 3 \right)' = 2\left(\frac{\ln x}{x} \right)' + \lambda = 2\,\frac{(\ln x)' x - \ln x (x)'}{x^2} + \lambda =$$

$$= 2\,\frac{1 - \ln x}{x^2} + \lambda \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2 - 2\ln x}{x^2} + \lambda .$$

Ο συντελεστής της εφαπτομένης της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι:

$$f'(1) = \frac{2 - 0}{1} + \lambda = 2 + \lambda$$

και επειδή είναι παράλληλη προς την ευθεία ε ισχύει:

$$\boxed{\mathbf{2 + \lambda = 3 \Leftrightarrow \lambda = 1.}}$$

Άρα

$$f(x)=\frac{2\ln x}{x}+x+3,\ x>0 \ \text{και}\ f'(x)=\frac{2-2\ln x}{x^2}+1.$$

Γ2. Για κάθε $x>0$ είναι:

$$f'(x)=\frac{2-2\ln x}{x^2}+1=\frac{2-2\ln x+x^2}{x^2}.$$

Έστω

$$g(x)=x^2-2\ln x+2,\ x>0.$$

Είναι

$$g'(x)=3x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x},$$

- $g'(x)=0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=1$
- $g'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-2}{x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2-1>0 \Leftrightarrow |x|>1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x>1.$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(1)=3$	$\nearrow$	

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.
Δηλαδή η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.
Επομένως:

$$g(x)\geq g(1)\Leftrightarrow g(x)\geq 3>0,$$

άρα

$$f'(x)>0 \ \text{για κάθε}\ x>0$$

οπότε η f **δεν έχει ακρότατα** και είναι **γνησίως αύξουσα**.

Γ3. Είναι:

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}+x+3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{\ln x}{x^2}+1+\frac{3}{x}\right)=2\cdot 0+1+0=1,$$

αφού $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0.$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{\ln x}{x}+x+3-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{\ln x}{x}+3\right)=$

$=2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'}+3=2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}+3=3.$

Άρα η ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ είναι η ευθεία

$$y=x+3$$

Γ4. Έχουμε

$$E=\int_1^e|f(x)-x-3|\,dx=\int_1^e\left|2\frac{\ln x}{x}+\cancel{x}+\cancel{3}-\cancel{x}-\cancel{3}\right|dx=$$

$$\int_1^e 2\left|\frac{\ln x}{x}\right|dx\overset{*}{=}2\int_1^e\frac{\ln x}{x}\,dx=[\ell n^2x]_1^e=\ell n^2e-\ell n^2 1=1.$$

$$^*\left(1<x<e\Leftrightarrow \ln x>0\ \text{ άρα }\ \frac{\ln x}{x}\ \text{ θετικός}\right)$$

185. **ΘΕΜΑ Γ** **study4exams**

Γ1. Είναι:

$$h(x)=f(x)-g(x)=-2+\frac{2}{x}-3\ln x=\frac{2}{x}-3\ln x-2\quad\text{για κάθε }\ x>0.$$

Άρα

$$h'(x)=\frac{-2}{x^2}-\frac{3}{x}<0,$$

οπότε h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Ακόμα

$$h(1)=0.$$

Επομένως:

Για κάθε $x>1$ είναι

$$h(x)<h(1)\Leftrightarrow h(x)<0$$

και για κάθε $0<x<1$ είναι

$$\boxed{\mathbf{h(x)>h(1)\Leftrightarrow h(x)>0}}$$

Γ2. Για να προσδιορίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν πρέπει να γνωρίζουμε αν

$$\lambda>1\ \text{ ή }\ \lambda<1$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda>1$ τότε:

$$E(\lambda) = \int_1^\lambda |f(x) - g(x)|\,dx = \int_1^\lambda |h(x)|\,dx$$

$$= -\int_1^\lambda h(x)dx = -\int_1^\lambda \left(\frac{2}{x} - 3\ln x - 2\right)dx$$

$$= -2[\ln x]_1^\lambda + 3\int_1^\lambda (x)'\ln x dx + 2(\lambda - 1)$$

$$= -2(\ln\lambda - \ln\lambda) + 3[\ln x]_1^\lambda - 3\int_1^\lambda x\,\frac{1}{x}\,dx + 2\lambda - 2$$

$$= -2\ln\lambda + 3\lambda\ln\lambda - 3(\lambda - 1) + 2\lambda - 2$$

$$= -2\ln\lambda + 3\lambda\ln\lambda - 3\lambda + 3 + 2\lambda - 2$$

$$= (3\lambda - 2)\ln\lambda - \lambda + 1.$$

- Αν $0 < \lambda < 1$ τότε:

$$E(\lambda) = -\int_1^\lambda h(x)dx = -\int_1^\lambda \left(\frac{2}{x} - 3\ln x - 2\right)dx =$$

$$E(\lambda) = (3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda.$$

- Αν $\lambda = 1$ τότε προφανώς $E(1) = 0$.

Επομένως

$$E(\lambda) = (3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda.$$

Γ3. Είναι:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} [(3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda] = \lim_{\lambda\to+\infty} (3\lambda\ln\lambda - 2\ln\lambda - \lambda + 1) =$$

$$= \lim_{\lambda\to+\infty}\left[\lambda\left(3\ln\lambda - 2\frac{\ln\lambda}{\lambda} - 1 + \frac{1}{\lambda}\right)\right] = (+\infty)\,(+\infty - 2\cdot 0 - 1 + 0) = +\infty\,.$$

Αφού $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \ln\lambda = +\infty$ και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \dfrac{\ln\lambda}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \dfrac{(\ln\lambda)'}{(\lambda)'} = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \dfrac{1}{\lambda} = 0$.

Γ4. Είναι:

$$\boxed{\lim_{\lambda\to 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0^+} [(3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda] = (0 - 2)\cdot(-\infty) + 1 - 0] = +\infty\,.}$$

186. **ΘΕΜΑ Γ** **study4exams**

Γ1. Για κάθε $x > 0\, x > 0$ έχουμε:

$$f'(x) = 8x^3 + \frac{3}{x} > 0\,.$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0, +\infty)$, οπότε **δεν έχει ακρότατα.**

Γ2. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(2x^4 + 3\ln x + 2) = 0 - \infty + 2 = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(2x^4 + 3\ln x + 2) = +\infty + \infty + 2 = +\infty$.

Επίσης η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, από B1, άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$$\boxed{\mathbf{f((0, +\infty)) = (-\infty, +\infty).}}$$

Γ3. Για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε:

$$\lambda^4 = \frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda} - 1 \Leftrightarrow 2\lambda^4 = 3(\ln 1 - \ln\lambda) - 2 \Leftrightarrow 2\lambda^4 = -3\ln\lambda - 2 \Leftrightarrow$$
$$2\lambda^4 + 3\ln\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow f(\lambda) = 0.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\lambda > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(\lambda) = 0.$$

Αυτό ισχύει αφού το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.
(ΑΠΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ) και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Γ4. Η συνάρτηση f επειδή είναι **γνησίως αύξουσα** είναι και **«1–1»** άρα **αντιστρέφεται**.
Θέτουμε

$$t = f(x) \Leftrightarrow dt = f'(x)dx.$$

Για $t = 0$ είναι

$$0 = f(x) \Leftrightarrow x = \lambda.$$

Για $t = 4$ είναι

$$4 = f(x) \Leftrightarrow f(1) = f(x) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} x = 1.$$

Επομένως:

$$\int_0^4 f^{-1}(t)dt = \int_\lambda^1 f^{-1}(f(x))f'(x)dx = \int_\lambda^1 xf'(x)dx = \int_\lambda^1 x\left(8x^3 + \frac{3}{x}\right)dx =$$
$$\int_\lambda^1 (8x^4 + 3)dx = \left[8\frac{x^5}{5} + 3x\right]_\lambda^1 = \frac{8}{5} + 3 - \left(\frac{8}{5}\lambda^5 + 3\lambda\right) = -\frac{8}{5}\lambda^5 - 3\lambda + \frac{23}{5}.$$

187. **ΘΕΜΑ Γ** **Ο.Ε.Φ.Ε 2007**

Γ1.

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2} \ \text{και} \ g''(x)=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Για x=0 είναι $0<g(0)\le 0$. Ισχύει η ισότητα.

Γ2. Για κάθε x>0 εφαρμόζεται το **Θ.Μ.Τ.** στο [0,x] οπότε υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιος ώστε

$$g'(\xi)=\frac{g(x)-g(0)}{x}=\frac{g(x)}{x}.$$

Έχουμε

$$\frac{1}{1+x^2}\le g'(\xi)\le 1 \Leftrightarrow g'(x)\le g'(\xi)\le g'(0).$$

Ισχύει διότι $g'(x)\downarrow$ στο [0,+∞) και 0<ξ<x (ερώτημα α).

Γ3. Έστω

$$h(x)=g(x)+g(-x).$$

Είναι

$$h'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$$

άρα

$$h(x)=c.$$

Για x=0 είναι h(0)=0.
Επομένως h(x)=0, για κάθε $x\in R$.

Γ4. Αφού g(x)>0 έχουμε

$$E=\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 x'\cdot g(x)dx=\left[x\cdot g(x)\right]_0^1-\int_0^1 x\cdot g'(x)dx=$$

$$=g(1)-\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx=g(1)-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\ln(1+x^2)\right)'dx$$

$$=g(1)-\frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1=g(1)-\frac{1}{2}\ln 2 \ \text{τ.μ.}$$

188. **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως παραγωγίσιμη, άρα η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών.

Επίσης είναι:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \left(2xf(x)\right)' + \left(\left(x^2+1\right)f'(x)\right)' = 2f(x)+2xf'(x)+2xf'(x)+\left(x^2+1\right)f''(x)\\ &= 2f(x)+4xf'(x)+\left(x^2+1\right)f''(x)\\ &= 0\end{aligned}.$$

Άρα η συνάρτηση φ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, οπότε

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi(x)=c}} \text{ για κάθε } \boldsymbol{x\in\mathbb{R}}.$$

Γ2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα είναι

$$f(0)=0 \quad (1).$$

Επίσης η **εφαπτομένη** ε της C_f στην αρχή των αξόνων είναι **κάθετη** στην ευθεία $\eta:\ x+2y-11=0$, οπότε

$$\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_\eta=-1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=2.$$

Αλλά $\lambda_\varepsilon=f'(0)$, άρα $f'(0)=2 \quad (2)$.

Από το ερώτημα Γ1 είναι $\varphi(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα

$$2xf(x)+\left(x^2+1\right)f'(x)=c \quad (3), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Η σχέση (3) για $x=0$ γίνεται

$$f'(0)=c \overset{(2)}{\Leftrightarrow} c=2,$$

οπότε είναι

$$\varphi(x)=2, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Άρα

$$2xf(x)+\left(x^2+1\right)f'(x)=2 \Leftrightarrow \left(x^2+1\right)'f(x)+\left(x^2+1\right)f'(x)=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(x^2+1\right)f(x)\right)'=2$$

Επομένως από γνωστό πόρισμα είναι:

$$\boxed{\left(x^2+1\right)f(x)=2x \overset{x^2+1\neq 0}{\Leftrightarrow} f(x)=\frac{2x}{x^2+1}}$$

Γ3. Η εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων έχει εξίσωση:

$$\varepsilon:\ y-f(0)=f'(0)x\,,$$

Οπότε λόγω των σχέσεων (1) και (2) η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι

$$\varepsilon:\ y=2x\,.$$

Το **εμβαδόν** του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της στο σημείο $O(0,0)$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=3$ είναι :

$$E=\int_2^3\left|f(x)-2x\right|dx=\int_2^3\left|\frac{2x}{x^2+1}-2x\right|dx=\int_2^3\left|\frac{2x-2x^3-2x}{x^2+1}\right|dx=\int_2^3\left|\frac{-2x^3}{x^2+1}\right|dx$$

$$\overset{x\in[2,3]}{=}\int_2^3\frac{2x^3}{x^2+1}dx=\int_2^3\left(2x-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\left[x^2-\ln\left(x^2+1\right)\right]_2^3=5-\ln 2\,.$$

189. **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Είναι:

- $$f'(x)=\left(\ln\left(\eta\mu x\right)\right)'=\frac{1}{\eta\mu x}\cdot\left(\eta\mu x\right)'=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\sigma\varphi x>0\text{, επειδή }\quad x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right).$$

Άρα η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

$$g'(x)=\left(\ln\left(\sigma\upsilon\nu x\right)\right)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu x\right)'=-\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=-\varepsilon\varphi x<0\text{, επειδή }\quad x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Γ2. Έχουμε:

$$I=\int_0^1\left[\left(e^{f(x)}f'(x)\right)^2+\left(e^{g(x)}g'(x)\right)^2\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[\left(e^{\ln(\eta\mu x)}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)^2+\left(e^{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}\left(-\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)\right)^2\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[\left(\etaμx \frac{συνx}{ημx} \right)^2 + \left(συνx \left(-\frac{ημx}{συνx} \right) \right)^2 \right] dx$$

$$= \int_0^1 (συν^2x + ημ^2x)dx = \int_0^1 1dx = [x]_0^1 = 1.$$

Γ3. Είναι:

$$\left| e^{f(β)} - e^{f(α)} \right| \le |β-α| \Leftrightarrow \left| e^{\ln(ημβ)} - e^{\ln(ημα)} \right| \le |β-α| \Leftrightarrow |ημβ - ημα| \le |β-α|.$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$|ημβ - ημα| \le |β-α| \quad (1), \text{ για κάθε } α,\ β \in \left(0,\ \frac{π}{2}\right).$$

✓ Για $α = β$ η (1) ισχύει ως ισότητα.

✓ Για $α \ne β$ θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = ημx$, με $x \in [α,β]$, η οποία είναι:

- συνεχής στο $[α,β]$ ως τριγωνομετρική
- παραγωγίσιμη στο $(α,β)$ με $h'(x) = συνx$

Επομένως σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ** υπάρχει $ξ \in (α,\ β)$ τέτοιο ώστε

$$h'(ξ) = \frac{h(β) - h(α)}{β-α} = \frac{ημβ - ημα}{β-α}$$

Οπότε είναι

$$|ημβ - ημα| = |h'(ξ)(β-α)| = |h'(ξ)| \cdot |β-α| = |συνξ| \cdot |β-α| < |β-α|,$$

επειδή $0 < συνξ < 1$.

190. **Θ Ε Μ Α Γ**

Γ1. Γνωρίζουμε από εφαρμογή σχολικού βιβλίου ότι:

$$\ln x \le x - 1, \text{ για κάθε } x > 0. \quad (1)$$

Αν θέσουμε στην (1) όπου x, το $e^x > 0$, έχουμε:

$$\boxed{\mathbf{\ln e^x \le e^x - 1 \Leftrightarrow x \le e^x - 1 \Leftrightarrow e^x \ge x + 1,\ x \in \mathbb{R}}}.$$

Το ίσον ισχύει μόνο όταν $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Γ2. Η γραφική παράσταση της f έχει στο σημείο $(0, f(0))$ εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $η: 2x - y + 7 = 0$,

άρα

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_\eta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 2$$

και επειδή $\lambda_\varepsilon = f'(0)$ είναι

$$f'(0) = 2 \quad (2).$$

Αλλά $f'(x) = \alpha + e^{-x} - xe^{-x}$, οπότε

$$f'(0) = \alpha + e^{-0} - 0 \cdot e^{-0} \Leftrightarrow f'(0) = \alpha + 1 \quad (3).$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha + 1 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1}}$$

Γ3. i. Για $\alpha = 1$ είναι $f(x) = x + xe^{-x}$.

Η f έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής.
Έχουμε

$$f'(x) = \left(x + xe^{-x}\right)' = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = 1 + \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} = \frac{e^x - x + 1}{e^x} \overset{(\Gamma 1)}{\geq} 0.$$

Άρα για κάθε $x \neq 0$ είναι $f'(x) > 0$, επομένως η f **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

Για να δείξουμε ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - x\right) = 0, \text{ δηλαδή } \lim_{x \to +\infty} \left(x + xe^{-x} - x\right) = 0 \text{ ή } \lim_{x \to +\infty} \left(xe^{-x}\right) = 0$$

Πράγματι είναι:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(xe^{-x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Επομένως η ευθεία **$y = x$** είναι **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

ii. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E(\lambda) = \int_0^\lambda |f(x) - x| dx = \int_0^\lambda |x + xe^{-x} - x| dx = \int_0^\lambda |xe^{-x}| dx \overset{x>0}{=} \int_0^\lambda xe^{-x} dx$$

Εφαρμόζοντας **ολοκλήρωση κατά παράγοντες** έχουμε:

$$E(\lambda) = \int_0^\lambda x\left(-e^{-x}\right)' dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^\lambda + \int_0^\lambda e^{-x} dx$$
$$= \left[-xe^{-x}\right]_0^\lambda + \left[-e^{-x}\right]_0^\lambda = \left(-\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1\right) \text{ τ.μ}$$

iii. Έχουμε

$$\lim_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(-\lambda e^{-\lambda}-e^{-\lambda}+1\right)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(-\frac{\lambda}{e^{\lambda}}-\frac{1}{e^{\lambda}}+1\right)$$

Αλλά

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda}{e^{\lambda}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{e^{\lambda}}=0 \quad \text{και} \quad \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{e^{\lambda}}=0.$$

Άρα

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)=1}$$

191. **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{\ln(x-\lambda)}{x-\lambda},\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

έχει πεδίο ορισμού $A=(\lambda,+\infty)$ και είναι συνεχής στο A.

Έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{\ln(x-\lambda)}{x-\lambda}\right)'=\frac{\frac{1}{x-\lambda}(x-\lambda)-\ln(x-\lambda)}{(x-\lambda)^2}=\frac{1-\ln(x-\lambda)}{(x-\lambda)^2},\quad x>\lambda.$$

- $f'(x)=0\Leftrightarrow 1-\ln(x-\lambda)=0\Leftrightarrow \ln(x-\lambda)=1\Leftrightarrow x-\lambda=e\Leftrightarrow x=\lambda+e$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow 1-\ln(x-\lambda)>0\Leftrightarrow \ln(x-\lambda)<1\Leftrightarrow x-\lambda<e\Leftrightarrow x<\lambda+e$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow 1-\ln(x-\lambda)<0\Leftrightarrow \ln(x-\lambda)>1\Leftrightarrow x-\lambda>e\Leftrightarrow x>\lambda+e$

x	λ		λ+e		+∞
f΄(x)		+	0	−	
f(x)		↗	f(λ+e)=1/e	↘	

Άρα η συνάρτηση f :

- Είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(\lambda,\lambda+e]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $[\lambda+e,+\infty)$
- παρουσιάζει **μέγιστο**, το $f(\lambda+e)=\dfrac{1}{e}$

Γ2. Έχουμε

$$g'(x)=\left[\left(\ln(x-\lambda)\right)^2\right]'=2\ln(x-\lambda)\cdot\frac{1}{x-\lambda}=2\frac{\ln(x-\lambda)}{x-\lambda}=2f(x),\quad x>\lambda$$

Γ3. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=\int_{\lambda+1}^{\lambda+4}|f(x)|dx$$

Αλλά είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\lambda+1,\ \lambda+4]$.

Άρα

$$E(\Omega)=\int_{\lambda+1}^{\lambda+4}|f(x)|\ dx=\int_{\lambda+1}^{\lambda+4}f(x)\ dx\overset{(\Gamma 2)}{=}\int_{\lambda+1}^{\lambda+4}\frac{g'(x)}{2}\ dx=\left[\frac{g(x)}{2}\right]_{\lambda+1}^{\lambda+4}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\ln(x-\lambda)\right)^2\right]_{\lambda+1}^{\lambda+4}=\frac{1}{2}\left(\ln^2 4-\ln^2 1\right)=\frac{1}{2}\ln^2 2^2=2\ln^2 2\quad \text{τ.μ.}$$

Γ4. Έχουμε

$$\int_{\lambda+1}^{\lambda+\mu}f(x)dx=2\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{2}\left[\left(\ln(x-\lambda)\right)^2\right]_{\lambda+1}^{\lambda+\mu}=2\Leftrightarrow\ln^2\mu=4$$

Άρα

$$\ln\mu=-2\quad \text{ή}\quad \ln\mu=2$$

και επειδή $\mu>1$ είναι $\ln\mu>0$, οπότε

$$\boxed{\mathbf{\ln\mu=2\Leftrightarrow\mu=e^2}}.$$

192. **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Αρχικά θα βρούμε τον τύπο της συνάρτησης g.

Έχουμε:

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow xg'(x)-g(x)=0\Leftrightarrow\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow\left(\frac{g(x)}{x}\right)'=0$$

Άρα

$$\frac{g(x)}{x}=c\Leftrightarrow g(x)=cx\quad(1).$$

Η σχέση (1) για $x=1$ γίνεται

$$g(1)=c\overset{g(1)=1}{\Rightarrow}c=1$$

Άρα

$$g(x)=x\ ,\ x\in(0,+\infty)\ .$$

Είναι

$$g(x_1)=g(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2$$

άρα η g **αντιστρέφεται**.

Γ2. Είναι

$$(g\circ g)(x)=g(g(x))\overset{g(x)=x}{=}g(x)=x,\ \ x\in(0,+\infty)\ \text{και}$$

$$g^{-1}(x)=x,\ \ x\in(0,+\infty)$$

οπότε:

$$(g\circ g)\circ g^{-1}(x)\ =g(g(g^{-1}(x)))\overset{g^{-1}(x)=x}{=}g(g(x))\overset{g(x)=x}{=}g(x)=x$$

Επομένως είναι:

$$2\int_1^2(g\circ g)\circ g^{-1}(x)dx\ =2\int_1^2 xdx=[x^2]_1^2=3$$

Επειδή δε είναι $g(3)=3$, είναι

$$\boxed{\mathbf{2\int_1^2(g\circ g)\circ g^{-1}(x)dx=g(3)}}.$$

Γ3. Είναι $g(x)=x\ ,\ x\in(0,+\infty)$, οπότε έχουμε:

$$g^4(\alpha)=\alpha^4\ \ \text{και}\ \ g^2(\alpha)=\alpha^2$$

οπότε η f γράφεται:

$$f(x)=\frac{\alpha^4}{x^2+3\alpha^2}\ ,\ \alpha>0,\ \ x\in\mathbb{R}\,.$$

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής ως ρητή, οπότε είναι:

$$f'(x)=\left(\frac{\alpha^4}{x^2+3\alpha^2}\right)=\frac{-2\alpha^4x}{(x^2+3\alpha^2)^2}\qquad\text{και}\qquad f''(x)=\frac{6\alpha^4(x^2-\alpha^2)}{(x^2+3\alpha^2)^3}$$

- $f''(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{6\alpha^4(x^2-\alpha^2)}{(x^2+3\alpha^2)^3}>0\Leftrightarrow x^2-\alpha^2>0\Leftrightarrow x^2>\alpha^2\Leftrightarrow x<-\alpha\ \ \text{ή}\ \ x>\alpha$
- $f''(x)<0\Leftrightarrow\dfrac{6\alpha^4(x^2-\alpha^2)}{(x^2+3\alpha^2)^3}<0\Leftrightarrow x^2-\alpha^2<0\Leftrightarrow-\alpha<x<\alpha$
- $f''(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{6\alpha^4(x^2-\alpha^2)}{(x^2+3\alpha^2)^3}=0\Leftrightarrow x^2-\alpha^2=0\Leftrightarrow x^2=\alpha^2\Leftrightarrow x=-\alpha\ \ \text{ή}\ \ x=\alpha$

x	$-\infty$	$-\alpha$		α	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\cup$	Σ.Κ.	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

Άρα τα **σημεία καμπής** είναι τα:

$$\left(-\alpha, f(-\alpha)\right)=\left(-\alpha,\frac{\alpha^2}{4}\right) \quad \text{και} \quad \left(\alpha, f(\alpha)\right)=\left(\alpha,\frac{\alpha^2}{4}\right)$$

Έχουμε λοιπόν

$$y=\frac{x^2}{4},\ \text{με} \quad x>0 \quad \text{ή} \quad x<0.$$

Άρα ο ζητούμενος **γεωμετρικός τόπος** είναι η **παραβολή** με εξίσωση

$$\mathbf{y=\frac{x^2}{4}},\ \textbf{εκτός}\ \text{από το σημείο της}\ \ O(0,0).$$

Γ4. Οι εφαπτόμενες στα σημεία $\left(-\alpha,\ \frac{\alpha^2}{4}\right)$ και $\left(\alpha,\ \frac{\alpha^2}{4}\right)$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης $f'(-\alpha)$ και $f'(\alpha)$ με

$$f'(-\alpha)=\frac{2\alpha^5}{16\alpha^4}=\frac{1}{8}\,\alpha \qquad \text{και} \qquad f'(\alpha)=-\frac{1}{8}\,\alpha.$$

Για να είναι οι εφαπτόμενες αυτές παράαληλες πρέπει

$$f'(-\alpha)=f'(\alpha) \quad \text{ή} \quad \frac{1}{8}\,\alpha=-\frac{1}{8}\,\alpha \quad \text{ή} \quad 1=-1\ ,\ \text{άτοπο}$$

Άρα **δεν υπάρχει τιμή του α** ώστε οι **εφαπτόμενες** στα σημεία καμπής να είναι **παράλληλες**.

Γ5. Τα κοινά σημεία δίνονται από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y=x \\ y=\dfrac{\alpha^4}{x^2+3\alpha^2} \end{cases}$$

από το οποίο προκύπτει η εξίσωση

$$x=\frac{\alpha^4}{x^2+3\alpha^2} \quad \text{ή} \quad x^3+3\alpha^2x-\alpha^4=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x^3+3\alpha^2x-\alpha^4,\ \ x\in[0,\alpha]$

- Η h είναι **συνεχής** στο διάστημα $[0,\alpha]$ $(\alpha>0)$.

- $h(0)=-\alpha^4<0$ και $h(\alpha)=4\alpha^3-\alpha^4=\alpha^3(4-\alpha)>0$, επειδή $\alpha<4$, οπότε

$$h(0)h(\alpha)<0$$

Επομένως από **Θ. Bolzano** υπάρχει $x_0\in(0,\ \alpha)$ τέτοιο ώστε

$$\boxed{\mathbf{h(x_0)=0}}.$$

193. **ΘΕΜΑ Γ** **2003**

Γ1. Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική. Είναι

$$f'(x)=5x^4+3x^2+1>0,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.
Επίσης

$$f''(x)=20x^3+6x=2x\left(10x^2+3\right)$$

Το **πρόσημο** της f', η **μονοτονία** της f, το **πρόσημο** της f'', καθώς και τα **κοίλα** και τα **κυρτά** της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f′(x)	+		+
f″(x)	−	0	+
f(x)	↗	0 Σ.Κ.	↗

Δηλαδή η συνάρτηση f :

- είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι $1-1$, οπότε έχει **αντίστροφη** συνάρτηση.

- είναι **κοίλη** στο $(-\infty,0]$ και **κυρτή** στο $[0,+\infty)$.

- Παρουσιάζει **καμπή** στο σημείο με τετμημένη 0 η τεταγμένη του οποίου είναι $f(0)=0$, δηλαδή **σημείο καμπής** το $O(0,0)$.

Γ2. Είναι:

$$f\left(e^{x}\right)\geq f\left(1+x\right),\ x\in\mathbb{R}\ \overset{f\ \text{γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow}\ e^{x}\geq 1+x,\ \ x\in\mathbb{R},$$

που ισχύει όπως βλέπουμε παρακάτω.

α΄ τρόπος

Θεωρούμε συνάρτηση $g\left(x\right)=e^{x}-x-1,\ \ x\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'\left(x\right)=e^{x}-1,\ \ x\in\mathbb{R}.$$

Είναι:

- $g'(x)=0\Leftrightarrow e^{x}=1\Leftrightarrow x=0$
- $g'(x)>0\Leftrightarrow e^{x}>1\Leftrightarrow e^{x}>e^{0}\Leftrightarrow x>0$
- $g'(x)<0\Leftrightarrow e^{x}<1\Leftrightarrow e^{x}<e^{0}\Leftrightarrow x<0$

Το πρόσημο της g', η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0 min	$\nearrow$	

Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο το $g\left(0\right)=0$, οπότε είναι:

$$g\left(x\right)\geq g\left(0\right)=0,\ \ x\in\mathbb{R}$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{g\left(x\right)\geq 0\Leftrightarrow e^{x}-x-1\geq 0\Leftrightarrow e^{x}\geq x+1,\ \ x\in\mathbb{R}}}$$

β΄ τρόπος

Γνωρίζουμε από εφαρμογή σχολικού βιβλίου ότι:

$$\ln x\leq x-1,\ \text{για κάθε}\ x>0.\quad (1)$$

Αν θέσουμε στην (1) όπου x, το $e^{x}>0$, έχουμε:

$$\boxed{\mathbf{\ln e^{x}\leq e^{x}-1\ \Leftrightarrow\ x\leq e^{x}-1\ \Leftrightarrow\ e^{x}\geq x+1,\ \ x\in\mathbb{R}}}.$$

Το ίσον ισχύει μόνο όταν $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Γ3. Η εφαπτομένη της C_f στο $O(0,0)$ έχει εξίσωση :

$$\varepsilon:\ y - f(0) = f'(0)(x-0)$$

Αλλά $f(0)=0$ και $f'(0)=1$, οπότε η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι:

$$\varepsilon:\ y = x$$

που είναι προφανώς ο **άξονας συμμετρίας** των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

Γ4. Αρχικά βρίσκουμε τα όρια ολοκλήρωσης:

$$f^{-1}(x)=0 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = f(0)\text{, δηλαδή } x = f(0) \Leftrightarrow x = 0$$

Η f^{-1} είναι $1-1$ αφού είναι **αντιστρέψιμη**, άρα **δεν έχει άλλες ρίζες**,
οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = \int_0^3 |f^{-1}(x)|dx \quad (1)$$

Η f^{-1} **διατηρεί πρόσημο** στο $[0,3]$ ως **συνεχής** και επειδή $f^{-1}(3)=1>0$ είναι

$$f^{-1}(x)>0$$

Άρα η σχέση (1) γίνεται

$$E(\Omega) = \int_0^3 f^{-1}(x)dx$$

Θέτουμε $x = f(u)$, επομένως :

- για $x=0$ είναι $f(u)=0 \Leftrightarrow u=0$
- για $x=3$ είναι $f(u)=3 \Leftrightarrow u=1$
- $dx = f'(u)du$

Άρα

$$\boldsymbol{E(\Omega) = \int_0^1 f^{-1}(f(u))f'(u)du = \int_0^1 u\cdot f'(u)du = \left[uf(u)\right]_0^1 - \int_0^1 f(u)du}$$

$$= f(1) - \int_0^1 (u^5 + u^3 + u)du = f(1) - \left[\frac{u^6}{6} + \frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2}\right]_0^1$$

$$= 3 - \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right] = 3 - \frac{11}{12} = \frac{25}{12} \text{ τ.μ}$$

194 **ΘΕΜΑ Γ** **2004**

Γ1. Η συναρτηση $g(x)$ είναι:

- συνεχής στο $\left[0, \frac{3}{2}\right]$
- παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ με παράγωγο $g'(x) = e^x\left(f'(x) + f(x)\right)$ και
- επειδή $g(0) = 0$ και $g\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, είναι $g(0) = g\left(\frac{3}{2}\right)$

Άρα η g ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του **θεωρήματος Rolle** στο $\left[0, \frac{3}{2}\right]$,

οπότε υπάρχει $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \text{ ή}$$

$$e^{\xi}\left(f'(\xi) + f(\xi)\right) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = -f(\xi)$$

Γ2. Είναι:

$$I(\alpha) = \int_\alpha^0 \left(2x^2 - 3x\right)e^x dx$$

Εφαρμόζουμε **ολοκλήρωση κατά παράγοντες** και έχουμε:

$$I(\alpha) = \left[e^x\left(2x^2 - 3x\right)\right]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 e^x(4x-3)dx = -e^\alpha\left(2\alpha^2 - 3\alpha\right) - \int_\alpha^0 e^x(4x-3)dx$$

$$= -e^\alpha\left(2\alpha^2 - 3\alpha\right) - \left(\left[e^x(4x-3)\right]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 4e^x dx\right)$$

$$= -e^\alpha\left(2\alpha^2 - 3\alpha\right) - \left(-3 - e^\alpha(4\alpha - 3) - 4\left[e^x\right]_\alpha^0\right)$$

$$= -e^\alpha 2\alpha^2 + 3\alpha e^\alpha + 3 + e^\alpha(4\alpha - 3) + 4\left(1 - e^\alpha\right)$$

$$= -e^\alpha 2\alpha^2 + 7\alpha e^\alpha - 7e^\alpha + 7$$

$$= e^\alpha\left(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7\right) + 7$$

Γ3. Είναι:

$$\lim_{\alpha\to-\infty} I(\alpha)=\lim_{\alpha\to-\infty}\left(\frac{-2\alpha^2+7\alpha-7}{e^{-\alpha}}\right)+7 \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{\alpha\to-\infty}\frac{-4\alpha+7}{-e^{-\alpha}}+7$$

$$\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{\alpha\to-\infty}\frac{-4}{e^{-\alpha}}+7=0+7=7.$$

195. **ΘΕΜΑ Γ** **2005**

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\left(e^{\lambda x}\right)'=e^{\lambda x}(\lambda x)'=\lambda e^{\lambda x}>0 \quad (\text{αφού } \lambda>0),$$

οπότε η f είναι ***γνησίως αύξουσα*** στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$$\varepsilon:\ y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \ \text{ή}\ \ \varepsilon:\ y-e^{\lambda x_0}=\lambda e^{\lambda x_0}(x-x_0) \quad (1)$$

Η εφαπτομένη ε διέρχεται από το $O(0,0)$, άρα οι συντεταγμένες του σημείου $O(0,0)$ επαληθεύουν την εξίσωσή της, οπότε για $x=y=0$ η (1) γίνεται:

$$-e^{\lambda x_0}=-\lambda e^{\lambda x_0}\cdot x_0 \Leftrightarrow 1=\lambda x_0 \Leftrightarrow x_0=\frac{1}{\lambda}$$

οπότε η (1) γίνεται:

$$y-e=\lambda e\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)\Rightarrow y-e=\lambda ex-e\Rightarrow y=\lambda ex$$

Επομένως η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι

$$\boxed{\varepsilon:\ y=\lambda ex}$$

και το σημείο επαφής είναι το $M\left(\frac{1}{\lambda},e\right)$.

Γ3. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με

$$f''(x)=(\lambda e^{\lambda x})'=\lambda^2 e^{\lambda x}>0$$

οπότε

η f είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$.

Επομένως η εφαπτόμενη της σε κάθε σημείο θα βρίσκεται «κάτω» απο την C_f εκτός του σημείο επαφής.

Δηλαδή:

$$f(x) \ge \lambda e x\,,$$

οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$\boxed{\mathbf{E(\lambda)=\int_0^{1/\lambda}\left|f(x)-\lambda e x\right|dx=\int_0^{1/\lambda}\left(e^{\lambda x}-\lambda e x\right)dx=\left[\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}-\lambda e\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/\lambda}=\frac{e-2}{2\lambda}\,\tau.\mu.}}$$

Γ4. Είναι

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2\cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2\cdot\dfrac{e-2}{2\lambda}}{2+\eta\mu\lambda}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda(e-2)}{2(2+\eta\mu\lambda)}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{e-2}{2\left(\dfrac{2}{\lambda}+\dfrac{\eta\mu\lambda}{\lambda}\right)}$$

Έχουμε:

$$\left|\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}\right|\le\frac{1}{\lambda}\Leftrightarrow-\frac{1}{\lambda}\le\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}\le\frac{1}{\lambda}\Rightarrow\frac{2}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\le\frac{2}{\lambda}+\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}\le\frac{2}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\Rightarrow\frac{1}{\lambda}\le\frac{2}{\lambda}+\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}\le\frac{3}{\lambda}$$

Επειδή

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}=0=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{3}{\lambda}\,,$$

σύμφωνα με το **κριτήριο παρεμβολής** έχουμε :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{2}{\lambda}+\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}\right)=0\quad(1)$$

Άρα επειδή είναι:

$$\frac{2}{\lambda}+\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}\ge\frac{1}{\lambda}>0$$

λόγω της (1) και επειδή είναι $e-2>0$ είναι:

$$\boxed{\mathbf{\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2\cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}=+\infty}}$$

196. **ΘΕΜΑ Γ** **2007**

Γ1. Η f είναι δυό φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)\qquad \text{και} \qquad f''(x)=6x$$

αφού το $-2\eta\mu^2\theta$ είναι σταθερό.

Το **πρόσημο** της f', η **μονοτονία** και τα **ακρότατα** της f, το **πρόσημο** της f'', καθώς και τα **κοίλα** και τα **κυρτά** της f με τα **σημεία καμπής** φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	Σ.Κ.	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	

Παρατηρούμε ότι:

- το $f(-1)=2-2\eta\mu^2\theta=2\sigma\upsilon\nu^2\theta>0$ είναι **τοπικό μέγιστο** της f στο -1
- το $f(1)=-2(1+\eta\mu^2\theta)<0$ είναι **τοπικό ελάχιστο** της f στο 1
- το σημείο $\left(0,2\eta\mu^2\theta\right)$ είναι **σημείο καμπής**.

Γ2. Επειδή η f είναι **συνεχής** και **γνησίως μονότονη** σε καθένα από τα διαστήματα

$$I_1=(-\infty,-1],\quad I_2=[-1,1],\quad I_3=[1,+\infty)$$

και ισχύει

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty\,,\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$$

θα είναι :

$$f(I_1)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),f(-1)\right]=\left(-\infty,2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right]$$

$$f(I_2)=\left[f(1),f(-1)\right]=\left[-2(1+\eta\mu^2\theta),2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right]$$

$$f(I_3)=\left[-2(1+\eta\mu^2\theta),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[-2(1+\eta\mu^2\theta),+\infty\right)$$

Παρατηρούμε ότι $0\in f(I_1)$, $0\in f(I_2)$ και $0\in f(I_3)$, η συνάρτηση είναι **1-1** σε καθένα από αυτά τα διαστήματα, ως **γνήσια μονότονη** σε αυτά,
οπότε συμπεραίνουμε ότι έχει **τρεις ακριβώς ρίζες**.

Γ3. Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες των σημείων

$$A\left(-1,\,2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right),\quad B\left(1,-2(1+\eta\mu^2\theta)\right),\quad \Gamma\left(0,-2\eta\mu^2\theta\right)$$

που έχουμε βρει στο ερώτημα Γ1 **επαληθεύουν** την εξίσωση της ευθείας :

$$\varepsilon: y=-2x-2\eta\mu^2\theta$$

Άρα τα σημεία Α, Β και Γ βρίσκονται στην ευθεία (ε).

Γ4. Οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f και της ευθείας (ε) είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=-2x-2\eta\mu^2\theta$, δηλαδή είναι:

$$x^3-3x-2\eta\mu^2\theta=-2x-2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=0$$

Άρα οι τετμημένες των σημείων τομής είναι $-1,\ 0$ και 1.

Το πρόσημο της διαφοράς

$$f(x)-y=x^3-x=x(x-1)(x+1)$$

φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^3-x		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Αν Ε(Ω) το ζητούμενο εμβαδό . έχουμε:

$$E(\Omega)=\int_{-1}^{1}|f(x)-y|dx=\int_{-1}^{1}|x^3-x|dx=\int_{-1}^{0}|x^3-x|dx+\int_{0}^{1}|x^3-x|dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx-\int_{0}^{1}(x^3-x)dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{2}\ \tau.\mu$$

197. **ΘΕΜΑ Γ** **2010**

Γ1. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη με παράγωγο:

$$f'(x)=2+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2x^2+2+2x}{x^2+1}>0,\quad x\in\mathbb{R},$$

επειδή το τριώνυμο $2x^2+2x+2$ έχει αρνητική διακρίνουσα, οπότε $2x^2+2x+2>0$. Άρα είναι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Η δοσμένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$2x^2-2(3x-2)=\ln\left[(3x-2)^2+1\right]-\ln(x^4+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+\ln(x^4+1)=2(3x-2)+\ln\left[(3x-2)^2+1\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x^2)=f(3x-2)$$

Αλλά η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι $1-1$, άρα

$$f(x^2)=f(3x-2)\Leftrightarrow x^2=3x-2\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=1 \quad \acute{\eta} \quad x=2$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης

$$2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$$

είναι $x=1$ ή $x=2$.

Γ3. Είναι:

$$f''(x)=\left(2+\frac{2x}{x^2+1}\right)'=0+\frac{2(x^2+1)-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2(1-x^2)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Επομένως είναι:

- $f''(x)>0 \Leftrightarrow 1-x^2>0 \Leftrightarrow x\in(-1,1)$
- $f''(x)<0 \Leftrightarrow 1-x^2<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$
- $f''(x)=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f(x)			Σ.Κ.		Σ.Κ.		

Επομένως η συνάρτηση f είναι:

- **κυρτή** στο $[-1,1]$ και
- **κοίλη** στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$
- έχει **σημεία καμπής** τα σημεία $A(-1,f(-1))$ και $B(1,f(1))$, δηλαδή τα

$$\mathbf{A(-1,-2+\ln 2)} \text{ και } \mathbf{B(1,2+\ln 2)}.$$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α έχει εξίσωση :

$$\varepsilon_1: y-f(-1)=f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y+2-\ln 2=x+1 \Leftrightarrow y=x-1+\ln 2.$$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Β έχει εξίσωση :

$$\varepsilon_2: y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-2-\ln 2=3(x-1) \Leftrightarrow y=3x-1+\ln 2.$$

Οι ευθείες ε_1, ε_2 τέμνουν τον άξονα y΄y στο σημείο $\Gamma(0,-1+\ln 2)$, το οποίο είναι και το σημείο τομής τους.

Γ4. Είναι:

$$I=\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(2x^2+x\ln(x^2+1)\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}2x^2dx+\int_{-1}^{1}x\ln(x^2+1)dx=$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα θέτουμε:

$x^2+1=u$, οπότε

- $du=2xdx\Rightarrow xdx=\frac{1}{2}du$
- για $x=-1$ είναι $u=2$
- για $x=1$ είναι $u=2$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{I=\left[\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\int_{2}^{2}\frac{1}{2}\ln u\,du=\frac{4}{3}+0=\frac{4}{3}}}$$

198. **ΘΕΜΑ Γ** **2012**

Γ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x)=\ln x+\frac{x-1}{x}=\ln x+1-\frac{1}{x}$$

Η f' έχει προφανή ρίζα την $x=1$.

Είναι

$$f''(x)=\left(\ln x+1-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\overset{x>0}{>}0,$$

άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε είναι $1-1$.

Άρα η ρίζα $x=1$ είναι μοναδική.

Το πρόσημο της f', η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	1	$+\infty$
f΄(x)	−	0	+
f(x)	↘	−1 min	↗

Αν $0<x<1$, τότε $\ln x<0 \Rightarrow x\ln x<0$ και $x-1<0$, επομένως $x\ln x+x-1<0$ και έτσι $f'(x)<0$ για $0<x<1$.

Άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\Delta_1=(0,1]$, οπότε :

$$f(\Delta_1)=f((0,1])=\left[f(1),\lim_{x\to 0^+}f(x)\right)=[-1,+\infty),$$

διότι

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[(x-1)\ln x-1\right]=+\infty$$

Αν $x>1$, τότε $\ln x>0 \Rightarrow x\ln x>0$ και $x-1>0$,
επομένως

$$x\ln x+x-1>0 \text{ και έτσι } f'(x)>0 \text{ για } x>1.$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\Delta_2=[1,+\infty)$, οπότε :

$$f(\Delta_2)=f([1,+\infty))=\left[f(1),\lim_{x\to +\infty}f(x)\right)=[-1,+\infty),$$

διότι

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left[(x-1)\ln x-1\right]=+\infty$$

Επομένως το **σύνολο τιμών** της f είναι το

$$\boxed{[-1,+\infty)}$$

Γ2. Η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$ γράφεται ισοδύναμα :

$$x^{x-1}=e^{2013}\Leftrightarrow(x-1)\ln x=2013\Leftrightarrow(x-1)\ln x-1=2012\Leftrightarrow f(x)=2012$$

Αλλά

$$f(\Delta_1)=f((0,1])=[-1,+\infty),$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,1]\subseteq(0,+\infty)$ και $2012\in[-1,+\infty)$,

άρα σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών**

υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_1)=2012.$$

Επειδή δε η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0,1]$, το x_1 είναι η **μοναδική λύση** της εξίσωσης

$$f(x)=2012 \text{ στο } (0,1).$$

Ομοίως

$$f(\Delta_2)=f([1,+\infty))=[-1,+\infty),$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)\subseteq(0,+\infty)$ και $2012\in[-1,+\infty)$,

άρα σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών**
υπάρχει $x_2 \in (1,+\infty)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_2)=2012.$$

Επειδή δε η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(1,+\infty)$, το x_2 είναι η **μοναδική λύση** της εξίσωσης

$$f(x)=2012 \text{ στο } (1,+\infty).$$

Άρα τελικά η αρχική εξίσωση έχει ακριβώς **δύο θετικές ρίζες** x_1 και x_2.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$H(x)=f(x)e^x-2012e^x,\ x\in[x_1,x_2], \text{ η οποία είναι:}$$

- συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $H'(x)=f'(x)e^x+f(x)e^x-2012e^x$.
- $H(x_1)=H(x_2)=0$, διότι από **Γ2** είναι $f(x_1)=f(x_2)=2012$.

Άρα ισχύουν οι προυποθέσεις του **θεωρήματος Rolle** για την συνάρτηση H στο $[x_1,x_2]$, οπότε υπάρχει

$$x_0\in(x_1,x_2) \text{ τέτοιο ώστε :}$$

$$H'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)e^{x_0}+f(x_0)e^{x_0}-2012e^{x_0}=0 \overset{e^{x_0}\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\boxed{\mathbf{f'(x_0)+f(x_0)=2012}}.$$

Γ4. Από το ερώτημα **Γ1** έχουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[-1,+\infty)$,άρα για κάθε $x>0$ ισχύει

$$f(x)\geq -1 \Leftrightarrow f(x)+1\geq 0 \Leftrightarrow g(x)\geq 0$$

Επίσης η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=-1$, άρα και της εξίσωσης $g(x)=0$ είναι η $x=1$.

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E=\int_1^e g(x)dx=\int_1^e (x-1)\ln x dx=\int_1^e \left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)'\ln x dx$$

$$=\left[\frac{(x-1)^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{(x-1)^2}{2}\frac{1}{x}dx=\frac{(e-1)^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e\frac{x^2-2x+1}{x}dx$$

$$=\frac{(e-1)^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e\left(x-2+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{(e-1)^2}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-2x+\ln x\right]_1^e$$

$$=\frac{e^2-2e+1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}-2e+1-\frac{1}{2}+2\right)=\frac{e^2-3}{4}\text{ τ.μ.}$$

199. **ΘΕΜΑ Γ** **2013**

Γ1. Έχουμε

$$\big(f(x)+x\big)\big(f'(x)+1\big)=x\Leftrightarrow\big(f(x)+x\big)\big(f(x)+x\big)'=x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\big(f(x)+x\big)\big(f(x)+x\big)'=2x\Leftrightarrow\Big(\big(f(x)+x\big)^2\Big)'=\big(x^2\big)'\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\big(f(x)+x\big)^2=x^2+c$$

Για $x=0$ προκύπτει $c=1$,

άρα

$$\big(f(x)+x\big)^2=x^2+1,\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Θέτουμε

$$h(x)=f(x)+x$$

οπότε είναι

$$h^2(x)=x^2+1,$$

άρα

$h(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού $x^2+1\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως η συνάρτηση h δεν μηδενίζεται και επειδή είναι συνεχής, σύμφωνα με σχόλιο του **Θεωρήματος Bolzano** διατηρεί πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επειδή όμως είναι

$h(0)=1>0$, θα είναι $h(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα

$$h(x)=\sqrt{x^2+1},\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

επομένως

$$\boxed{\mathbf{f(x)+x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-x}},\ x \in \mathbb{R}.$$

Γ2. Είναι

$$x^2+1>x^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>|x| \geq x \Rightarrow \sqrt{x^2+1}-x>0$$

Άρα

$$f(x)>0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=-\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}<0$$

Επομένως

η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$, άρα 1-1.

Συνεπώς

$$f(g(x))=1 \overset{f(0)=1}{\Leftrightarrow} f(g(x))=f(0) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} g(x)=0.$$

Η συνάρτηση $g(x)=x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1$ είναι παραγωγίσιμη στο ως πολυωνυμική με :

$$g'(x)=3x^2+3x=3x(x+1).$$

Το πρόσημο της g', η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$ max	$\searrow$	-1 min	$\nearrow$	

Στη συνέχεια βρίσκουμε τα επί μέρους σύνολα τιμών: (η g είναι συνεχής σε κάθε ένα από αυτά).

- $$g((-\infty,-1])=\left(\lim_{x\to-\infty} g(x), g(-1)\right]=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right].$$

Το **μηδέν δεν ανήκει** σε αυτό το διάστημα, άρα **η g δεν έχει ρίζα** σε αυτό.

- $$g([-1,0])=[g(0),g(-1)]=\left[-1,-\frac{1}{2}\right],$$

οπότε ούτε σε αυτό το διάστημα έχει η g ρίζα.

- $g\left(\left[0,+\infty\right)\right)=\left[g(0),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=\left[-1,+\infty\right)$

Εδώ **το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών**, άρα η g έχει **μία τουλάχιστον ρίζα** και επειδή είναι **γνησίως αύξουσα** σε αυτό το διάστημα η ρίζα αυτή είναι **μοναδική**.

Άρα η εξίσωση

$$\boxed{\mathbf{g(x)=0 \Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=1}}$$

έχει **μια λύση** και μάλιστα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$p(x)=\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt - f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\text{εφ}x\,.$$

- Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής, η συνάρτηση $F(x)=\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη, άρα συνεχής.

  Συνεπώς και η συνάρτηση p είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

- $p(0)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt>0$, διότι είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$p\left(\frac{\pi}{4}\right)=-f(0)\text{εφ}\frac{\pi}{4}=-1<0\,,$$

άρα

$$p(0)\cdot p\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$$

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του **θεωρήματος Bolzano**,

συνεπώς υπάρχει $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, τέτοιο, ώστε

$$\boxed{\mathbf{p(x_0)=0 \Leftrightarrow \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt = f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\text{εφ}x_0}}$$

200. **ΘΕΜΑ Γ** **2014**

Γ1. Η συνάρτηση h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με :

$$h'(x)=1-\frac{1}{e^x+1}\cdot e^x=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}$$

Προφανώς $h'(x)>0$,

άρα η $h(x)$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$ και

$$h''(x)=-\frac{1}{(e^x+1)^2}\cdot e^x=\frac{-e^x}{(e^x+1)^2}<0\,,$$

άρα η h είναι **κοίλη** στο R.

Αλλά

$$h''(x)<0\,,$$

άρα η $h'(x)$ είναι **γνησίως φθίνουσα**.

Γ2. Είναι

$$e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow \ln e^{h(2h'(x))}<\ln\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(2h'(x))<\ln\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow h(2h'(x))<h(1)\overset{h\text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2h'(x)<1\Leftrightarrow h'(x)<\frac{1}{2}\Leftrightarrow h'(x)<h'(0)\overset{h'\text{ γν. φθίνουσα}}{\Leftrightarrow}\quad x>0\,.$$

Γ3. α. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln e^x-\ln\left(e^x+1\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x}{e^x+1}=\lim_{u\to1}\left(\ln u\right)=\ln1=0$$

όπου

$$u\left(x\right)=\frac{e^x}{e^x+1}\quad\text{και}\quad\lim_{x\to+\infty}u\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}=1\,.$$

Άρα η ευθεία $y=0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$ είναι η **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

β. Είναι:

- $$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\ln\left(e^x+1\right)\right)=1$$

- $$\lim_{x\to-\infty}\left(h\left(x\right)-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\ln\left(e^x+1\right)\right)\overset{e^x+1=y}{=}\lim_{y\to1}\left(-\ln y\right)=0$$

Άρα η ευθεία $y=x$ είναι η **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

Γ4. Είναι

$$\varphi(x)=e^x\left(h(x)+\ln 2\right)=e^x\left(x-\ln\left(e^x+1\right)+\ln 2\right)=e^x\left(x+\ln\frac{2}{e^x+1}\right),\ x\in\mathbb{R}.$$

- Σημείο τομής της C_φ με τον άξονα $x'x$:

Είναι

$$\varphi(x)=0\Leftrightarrow h(x)+\ln 2=0\Leftrightarrow h(x)=-\ln 2\Leftrightarrow h(x)=h(0)\overset{h\ 1-1}{\Leftrightarrow}x=0,$$

άρα η C_φ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(0,0)$.

- Πρόσημο της $\varphi(x)$ στο $[0, 1]$:

Η $\varphi(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και είναι:

$$\varphi(x)\geq 0\Leftrightarrow h(x)\geq -\ln 2\Leftrightarrow h(x)\geq h(0)\overset{h\ \text{γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow}x\geq 0.$$

- Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=\int_0^1 e^x\cdot\ln\frac{2e^x}{e^x+1}dx=\left[e^x\cdot\ln\frac{2e^x}{e^x+1}\right]_0^1-\int_0^1 e^x\cdot\frac{e^x+1}{2e^x}\cdot\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}dx$$

$$=\left[e^x\cdot\ln\frac{2e^x}{e^x+1}\right]_0^1-\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\left(e\cdot\ln\frac{2e}{e+1}-e^0\cdot\ln\frac{2\cdot e^0}{e^0+1}\right)-\left[\ln(e^x+1)\right]_0^1$$

$$=e\cdot\ln\frac{2e}{e+1}-\ln\frac{2}{2}-\ln(e+1)+\ln 2=e\cdot\ln\frac{2e}{e+1}-\ln(e+1)+\ln 2=$$

$$=e\cdot\ln\frac{2e}{e+1}+\ln\frac{2}{e+1}=(e+1)\ln\frac{2}{e+1}+e\ \ \text{τ.μ}$$

201. **ΘΕΜΑ Γ** **ΕΠΑΝ. 2003**

Γ1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A=\mathbb{R}$, επειδή $x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+1\right)} = 0$$

Γ2. Είναι:

- $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{x} = -\lim_{x \to -\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right) = -2$

- $\lim_{x \to -\infty}\left(f(x)-(-2x)\right) = \lim_{x \to -\infty}\left(f(x)+2x\right) = \lim_{x \to -\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = 0$$

Άρα η ζητούμενη **ασύμπτωτη** είναι η ευθεία $y=-2x$.

Γ3. Είναι

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)' = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2+1}},$$

Άρα

$$f'(x) = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2+1}},$$

οπότε

$$\boxed{\mathbf{f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}+f(x)=0}}$$

Γ4. Από ερώτημα Γ3 είναι $f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}+f(x)=0 \quad (1)$.

Θα δείξουμε ότι $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

Τότε

$$\sqrt{x_0^{\,2}+1}-x_0=0 \Leftrightarrow \sqrt{x_0^{\,2}+1}=x_0 \Leftrightarrow x_0^{\,2}+1=x_0^{\,2} \Leftrightarrow 1=0$$, άτοπο.

Άρα

$$f(x)\neq 0$$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η σχέση (1) γίνεται:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot\sqrt{x^2+1}+1=0 \Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (2)$$

Επομένως είναι:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx \overset{(2)}{=} -\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = -\left[\ln|f(x)|\right]_0^1 = -\ln\left(\sqrt{2}-1\right)=\ln\left(\sqrt{2}-1\right)^{-1}$$

$$=\ln\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=\ln\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

202 **ΘΕΜΑ Γ** **ΕΠΑΝ. 2011**

Γ1. Είναι

$$x'(t)=16 \Leftrightarrow x(t)=16t+c.$$

Επειδή $x(0)=0$, προκύπτει ότι $c=0$, άρα $x(t)=16t, t\geq 0$.

Γ2. Ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό, μέχρι το σημείο $A(x_0, f(x_0))$, όπου A είναι το σημείο επαφής της εφαπτομένης της C_f, η οποία άγεται από το σημείο Π(0,1).

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο A είναι :

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow 1-\sqrt{x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(0-x_0) \Leftrightarrow \sqrt{x_0}=2 \Leftrightarrow x_0=4$$

Άρα A(4,2). Θέλουμε $x(t)=4 \Leftrightarrow 16t=4 \Leftrightarrow t=\frac{1}{4}$ min

<u>Σημείωση:</u> Ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή «μέχρι» και το σημείο O, γιατί υπάρχει και κατακόρυφη εφαπτομένη.

Γ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=\frac{1}{4}x+1$,

άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\boxed{\mathbf{E(\Omega)=\int_0^4\left(y-f(x)\right)dx=\int_0^4\left(\frac{1}{4}x+1-\sqrt{x}\right)dx=\left[\frac{1}{8}x^2+x-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^4=\frac{2}{3}}}.$$

Γ4. Η απόσταση του παρατηρητή από το κινητό είναι:

$$d(x)=\sqrt{x^2+\left(\sqrt{x}-1\right)^2}\text{ , οπότε } d^2(x)=x^2+\left(\sqrt{x}-1\right)^2.$$

Για να γίνει ελάχιστη η απόσταση d , αρκεί να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση

$$h(x)=d^2(x)=x^2+\left(\sqrt{x}-1\right)^2.$$

Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ κατά την οποία η απόσταση $d=(\Pi M)$ του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $x_0\in(0,4)$ που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση h.

Επομένως αναζητούμε ελάχιστο της συνάρτησης h στο διάστημα $(0,4)$.

Είναι

$$h'(x)=2x+2\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}.$$

Θεωρούμε συνάρτηση $f(x)=2x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1,\ x\in[0,4]$.

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x\in[0,4]$ ως πράξεις συνεχών
- $f(0)\cdot f(4)=(-1)\cdot 17=-17<0$

Άρα από **Θεώρημα Bolzano** υπάρχει $x_0\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Αλλά $f'(x)=3\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}>0$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

x	0		x_0		4
f′(x)		+	0	+	
f(x)		↗		↗	

- Για $0<x<x_0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(x_0)\Leftrightarrow f(x)<0\Leftrightarrow h'(x)<0\Leftrightarrow$
- Για $x_0<x<4 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_0)>f(x_0)\Leftrightarrow f(x)>0\Leftrightarrow h'(x)>0$

x	0		x_0		4
h′(x)		−	0	+	
h(x)		↘	$h(x_0)$ min	↗	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση h παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** το $h(x_0)$

203. **ΘΕΜΑ Γ** **ΕΠΑΝ. 2014**

Γ1. Για $x>0$, σε μια περιοχή κοντά στο 0, είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} \quad (1).$$

Θέτουμε $u=\dfrac{\ln x}{x}$ με $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$

Επομένως η (1) γίνεται:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{u} = 0$$

Αλλά $f(0)=0$ είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο 0.

Γ2. Η συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο $[0,+\infty)$ και **παραγωγίσιμη** στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x)=\left(e^{\frac{\ln x}{x}}\right)' = e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = f(x)\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = f(x)\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Είναι:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<1 \Leftrightarrow x<e$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow 1-\ln x<0 \Leftrightarrow \ln x>1 \Leftrightarrow x>e$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
h(x)		↗	$f(e)=e^{1/e}$	↘	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι:

Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $[0,e]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $[e,+\infty)$, παρουσιάζει δε **μέγιστη τιμή** την $f(e)=e^{\frac{1}{e}}$.

Επομένως τα επιμέρους σύνολα τιμών της f θα είναι:

- $f([0,e])=[f(0),f(e)]=\left[0,e^{\frac{1}{e}}\right]$ και
- $f([e,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),f(e)\right]=\left(1,e^{\frac{1}{e}}\right]$.

Άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$$\boxed{\mathbf{f([0,e])\cup f([e,+\infty))=\left[0,e^{\frac{1}{e}}\right]}}$$

Γ3. i. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x)=f(4)\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln 4}{4}\Leftrightarrow 4\ln x=x\ln 4\Leftrightarrow \ln x^4=\ln 4^x\Leftrightarrow x^4=4^x$$

ii. Λόγω της παραπάνω ισοδυναμίας, όποιες ρίζες έχει η εξίσωση

$$x^4=4^x,$$

τις ίδιες θα έχει και η εξίσωση

$$f(x)=f(4).$$

Η εξίσωση $x^4=4^x$ έχει προφανείς ρίζες τις 2 και 4,

άρα τις ίδιες ρίζες έχει και η $f(x)=f(4)$, ενώ δεν έχει άλλες, λόγω της μονοτονίας της σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[0,e]$ και $[e,+\infty)$, στα οποία ανήκουν αντί-στοιχα οι ρίζες 2 και 4.

Επομένως οι ρίζες αυτές είναι μοναδικές.

Γ4. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$f'(x)\int_2^x f(t)dt=f(x)\left(\sqrt{2}-f(x)\right)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[2,4]$.

Η εν λόγω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$f'(x)\int_2^x f(t)dt = f(x)\left(\sqrt{2}-f(x)\right) \Leftrightarrow f'(x)\int_2^x f(t)dt + f(x)\left(f(x)-\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)-\sqrt{2}\right)'\int_2^x f(t)dt + \left(\int_2^x f(t)dt\right)'\left(f(x)-\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left(\left(f(x)-\sqrt{2}\right)\left(\int_2^x f(t)dt\right)\right)'=0$$

$$\Leftrightarrow h'(x)=0$$

Αρκεί λοιπόν να εφαρμόζεται το **θεώρημα Rolle** για την h στο $[2,4]$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό και

$$h(2)=\left(f(2)-\sqrt{2}\right)\left(\int_2^2 f(t)dt\right)=0$$

$$h(4)=\left(f(4)-\sqrt{2}\right)\left(\int_2^4 f(t)dt\right)=\left(f(4)-\sqrt{2}\right)\left(\int_2^4 f(t)dt\right)=0,$$

εφόσον είναι

$$f(4)=e^{\frac{\ln 4}{4}}=\left(e^{\ln 4}\right)^{\frac{1}{4}}=4^{\frac{1}{4}}=\sqrt{2}.$$

Το συμπέρασμα έπεται άμεσα από τις παραπάνω ισοδυναμίες.

204. **ΘΕΜΑ Γ** **Ο.Ε.Φ.Ε 2006**

Γ1. Είναι

$$f'(x)=e^x-\alpha,\quad x\in\mathbb{R},\ \text{οπότε}\ \ f'(0)=1-\alpha.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $(0, f(0))$ είναι:

$$\varepsilon:\ y-f(0)=f'(0)(x-0)$$

Αλλά είναι

$$f(0)=e^0-1=0\ \text{ και }\ f'(0)=1-\alpha,$$

άρα η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι:

$$\varepsilon:\ y=(1-\alpha)x$$

Γ2. Είναι $f'(x)=e^x-\alpha$, οπότε έχουμε:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=\alpha \Leftrightarrow x=\ln\alpha$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x>\alpha \Leftrightarrow x>\ln\alpha$

- $f'(x)<0 \Leftrightarrow e^x<\alpha \Leftrightarrow x<\ln\alpha$

x	$-\infty$	$\ln\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι:
Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=\ln\alpha$ το

$$f(\alpha)=e^{\ln\alpha}-\alpha\ln\alpha-1=\alpha-\alpha\ln\alpha-1$$

Θεωρούμε συνάρτηση

$$g(\alpha)=\alpha-\alpha\ln\alpha-1$$

Επειδή

$$g'(\alpha)=1-\ln\alpha-1=-\ln\alpha<0 \text{ για κάθε } \alpha\in(1,+\infty) \text{ και}$$

g συνεχής στο $[1,+\infty)$, η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$
οπότε για κάθε $\alpha>1$ ισχύει

$$g(\alpha)<g(1)=0.$$

Γ3. i. $E(\alpha)=\int_0^\alpha |f(x)-(1-\alpha)x|dx$.

Επειδή η f είναι **κυρτή** διότι

$$f''(x)=e^x>0$$

και η $y=(1-\alpha)x$ εφαπτομένη της C_f στο $(0,f(0))$, ισχύει:

$$f(x)\geq(1-\alpha)x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Άρα

$$E(\alpha)=\int_0^\alpha\left(e^x-\alpha x-1-x+\alpha x\right)dx=\int_0^\alpha\left(e^x-x-1\right)dx=\left[e^x-\frac{x^2}{2}-x\right]_0^\alpha$$

$$=e^\alpha-\frac{\alpha^2}{2}-\alpha-1 \text{ τ.μ.}$$

ii. $E(\alpha)=\alpha^2\left(\frac{e^\alpha}{\alpha^2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\right)$.

Είναι

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{e^{\alpha}}{\alpha^2}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\left(e^{\alpha}\right)'}{\left(\alpha^2\right)'}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{e^{\alpha}}{2\alpha}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\left(e^{\alpha}\right)'}{\left(2\alpha\right)'}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{e^{\alpha}}{2}=+\infty\ .$$

Επομένως

$$\boxed{\lim_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)=+\infty}$$

205. **ΘΕΜΑ Γ** **Ο.Ε.Φ.Ε 2008**

Γ1. i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x)=\left(e^{1-e^x}\right)'=(1-e^x)'\cdot e^{1-e^x}=-e^xe^{1-e^x}=-e^{1+x-e^x}$$

Επειδή

$$e^{1+x-e^x}>0 \text{ είναι } f(x)<0 \text{ στο } \mathbb{R}\,,$$

άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.

ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f''(x)=\left(-e^{1+x-e^x}\right)'=-\left(1+x-e^x\right)'\cdot e^{1+x-e^x}=-(1-e^x)\cdot e^{1+x-e^x}=(e^x-1)\cdot e^{1+x-e^x}$$

Έτσι:

- $f''(x)=0\Leftrightarrow(e^x-1)\cdot e^{1+x-e^x}=0\Leftrightarrow e^x-1=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$
- $f''(x)>0\Leftrightarrow x>0$, $f''(x)<0\Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	**e** ↘	1	↘ 0

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)<0$ στο διάστημα $(-\infty,0)$,

άρα

στρέφει τα **κοίλα κάτω** στο διάστημα $(-\infty,0]$.

Ακόμα είναι $f''(x)>0$ στο διάστημα $(0,+\infty)$,

άρα

η f στρέφει τα **κοίλα άνω** στο $[0,+\infty)$.

Τέλος, η συνάρτηση έχει **σημείο καμπής** το $\left(0, f(0)\right)$, γιατί εκατέρωθέν του αλλάζει κυρτότητα και **υπάρχει** η **εφαπτομένη** της γραφικής της παράστασης σ' αυτό, αφού είναι **παραγωγίσιμη**.

Είναι

$$f(0)=e^{1-1}=e^{0}=1 \text{ , έτσι, η συνάρτηση έχει σημείο καμπής το } (0,1).$$

Γ2. Θα βρούμε, αν υπάρχουν, τα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{1-e^{x}}\right) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{1-e^{x}}\right)$$

Θέτουμε

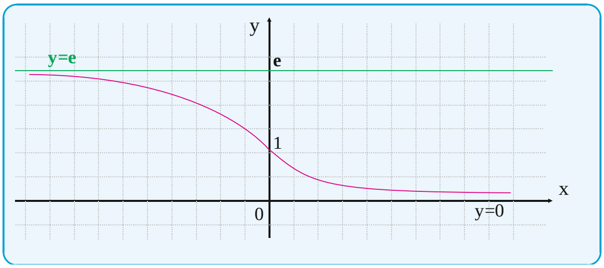
$$u=1-e^{x} \text{ οπότε: } \lim_{x\to+\infty} u=\lim_{x\to+\infty}(1-e^{x})=-\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} u=\lim_{x\to-\infty}(1-e^{x})=1-0=0$$

Τότε είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^{1-e^{x}})=\lim_{u\to-\infty} e^{u}=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^{1-e^{x}})=\lim_{u\to1}(e^{u})=e$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει **οριζόντια ασύμπτωτη** την $y=0$ στο $+\infty$ και την $y=e$ στο $-\infty$.

Γ3. Με βάση τις πληροφορίες των προηγούμενων ερωτημάτων σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:



Γ4. Στο (α) ερώτημα βρήκαμε $f'(x)<0$, οπότε

$$|f'(x)|=-f'(x)$$

και έτσι:

$$E=\int_{\ln\frac{1}{2}}^{0}|f'(x)|dx=-\int_{\ln\frac{1}{2}}^{0}f'(x)dx=-\left[f(x)\right]_{\ln\frac{1}{2}}^{0}=-f(0)+f\left(\ln\frac{1}{2}\right)=-e^{1-e^{0}}+e^{1-e^{\ln\frac{1}{2}}}$$

$$=-1+e^{1/2} \text{ τ.μ.}$$

206. **ΘΕΜΑ Γ** **Ο.Ε.Φ.Ε 2013**

Γ1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής.
Είναι

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x'}{(e^x-1)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^0} = 1 .$$

Πρέπει

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) \Leftrightarrow \ln\alpha = 1 = \ln e \Leftrightarrow \alpha = e .$$

Για την παράγωγο στο 0 έχουμε:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x-e^x+1}{xe^x - x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{e^x + xe^x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{-e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \frac{-e^0}{e^0+e^0+0\cdot e^0} = -\frac{1}{2}$$

Γ2. i. Έχουμε

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x-1}\right)' = \frac{1\cdot(e^x-1) - x\cdot e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2},\ x \neq 0 .$$

Θέτουμε

$$g(x) = e^x - 1 - xe^x .$$

Τότε

$$g'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x .$$

Αν

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 .$$

Το πρόσημο και η μονοτονία των g(x) και f(x) φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		**0**		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$		↗	0	↘	
		−	0	−	
$f'(x)$		−		−	
$f(x)$		↘		↘	

Αφού η g(x) παρουσιάζει **μέγιστο** στο $x_0=0$, το g(0)=0,

θα είναι αρνητική για $x\neq 0$.

Άρα η $f'(x)$ είναι αρνητική για κάθε $x\in\mathbb{R}$,δηλαδή η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.

ii. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^x-1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0\text{, αφού }\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty .$$

Άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=0$ (άξονας $x'x$).

Ακόμη

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x-1}=\frac{-\infty}{0-1}=+\infty .$$

Άρα το σύνολο τιμών της f(x) είναι

$$\boxed{\mathbf{f(A)=(0,+\infty)}}.$$

Ελέγχουμε για ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Είναι

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{e^x-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{0-1}=-1$ και
- $\displaystyle[f(x)-(-x)]=\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{e^x-1}+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+x\cdot e^x-x}{e^x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot e^x}{e^x-1}$

Έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x\cdot e^x\right)\overset{(-\infty)\cdot 0}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0\text{ οπότε }\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot e^x}{e^x-1}=\frac{0}{0-1}=0 .$$

Άρα η ευθεία $y=-x$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=2x-\int_0^x\frac{1}{f(t)+1}dt-\frac{1}{2013}$$

συνεχή στο [0,1] σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων με

$$g(0)=2\cdot 0-\int_0^0\frac{1}{f(t)+1}dt-\frac{1}{2013}=-\frac{1}{2013}<0\text{ και}$$

$$g(1)=2\cdot 1-\int_0^1 \frac{1}{f(t)+1}dt-\frac{1}{2013}.$$

Όμως

$$f(t)>0,\ \text{οπότε}\ f(t)+1>1,\ \text{δηλαδή}\ \ 0<\frac{1}{f(t)+1}<1.$$

Άρα

$$\int_0^1 0\cdot dt<\int_0^1 \frac{1}{f(t)+1}dt<\int_0^1 1\cdot dt \Leftrightarrow 0<\int_0^1 \frac{1}{f(t)+1}dt<1(1-0)\Leftrightarrow 0<\int_0^1 \frac{1}{f(t)+1}dt<1$$

Άρα $g(1)>0$ οπότε από το **θ. Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της $g(x)=0$ στο $(0,1)$.

Η ρίζα είναι μοναδική γιατί $g(x)\uparrow[0,1]$ αφού:

$$g'(x)=2-\frac{1}{f(x)+1}>0$$

αφού

$$0<\frac{1}{f(x)+1}<1$$

207. **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=e^x-x+1,\quad x\in\mathbb{R}$$

Είναι

$$f'(x)=e^x-1,$$

οπότε έχουμε:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 0$ ολικό ελάχιστο το $f(0) = 2$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει:

$$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow e^x - x + 1 \geq 2$$

Αφού $2 > 0$ συμπεραίνουμε ότι

$$\boxed{\mathbf{e^x - x + 1 > 0}}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ2. **i.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$[f'(x) - f(x)]e^x = (x - 1)f'(x) - f(x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^x - f(x)e^x = xf'(x) - f'(x) - f(x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^x - f(x)e^x - xf'(x) + f'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)(e^x - x + 1) - f(x)(e^x - 1) = 0 \overset{e^x - x + 1 > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f'(x)(e^x - x + 1) - f(x)(e^x - 1)}{(e^x - x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x - x + 1}\right)' = 0$$

Άρα

$$\frac{f(x)}{e^x - x + 1} = c \Leftrightarrow f(x) = c(e^x - x + 1)$$

Για $x = 0$ παίρνουμε

$$f(0) = 2c \Leftrightarrow 2 = 2c \Leftrightarrow c = 1$$

Άρα

$$f(x) = e^x - x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ii. Έχουμε

$$e^{\lambda^2+3} - e^{2\lambda+2} < 1 - \lambda^2 \Leftrightarrow e^{\lambda^2+3} < e^{2\lambda^2+2} + 1 - \lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda^2+3} - \lambda^2 - 3 < e^{2\lambda^2+2} + 1 - \lambda^2 - \lambda^2 - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda^2+3} - (\lambda^2 + 3) < e^{2\lambda^2+2} - (2\lambda^2 + 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda^2+3} - (\lambda^2 + 3) + 1 < e^{2\lambda^2+2} - (2\lambda^2 + 2) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\lambda^2 + 3) < f(2\lambda^2 + 2) \; \mathbf{(1)}$$

Αλλά

$$f'(x) = e^x - 1$$

x	$-\infty$	**0**	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Επειδή για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι

$$\lambda^2 + 3 > 0 \quad \text{και} \quad 2\lambda^2 + 2 > 0$$

Από **(1)** προκύπτει

$$\lambda^2 + 3 < 2\lambda^2 + 2 \Leftrightarrow \lambda^2 > 1 \Leftrightarrow |\lambda| > 1 \Leftrightarrow \lambda < -1 \text{ ή } \lambda > 1$$

iii. Είναι

$$f(x) = e^x - x + 1, \quad x\in\mathbb{R} \text{ και}$$

$$f'(x) = e^x - 1, \quad x\in\mathbb{R}$$

Οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) - f(x) = Ax + B \Leftrightarrow e^x + 1 - e^x + x - 1 = Ax + B \Leftrightarrow x - 2 = Ax + B$$

Από την ισότητα των πολυωνύμων παίρνουμε :

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \end{cases}$$

iv. Λόγω του προηγούμενου ερωτήματος έχουμε

$$f'(x) - f(x) = x - 2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Οπότε

$$\int_0^1 \frac{x-2}{e^x - x + 1}dx = \int_0^1 \frac{f'(x) - f(x)}{f(x)}dx = \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - 1\right)dx = \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx - \int_0^1 dx$$

$$= \left[\ln f(x)\right]_0^1 - \left[x\right]_0^1 = \left[\ln(e^x - x + 1)\right]_0^1 - 1 = \ln e - \ln 2 - 1 = -\ln 2.$$

208. **ΘΕΜΑ**

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - (\ln x - 1)}{x^2} = \frac{2 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 2 \Leftrightarrow x < e^2$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 2 \Leftrightarrow x > e^2$$

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	max	↘	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι:

- Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0, e^2]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $[e^2, +\infty)$.

- Η f παρουσιάζει στο $x_0 = e^2$ **μέγιστο** το

$$f(e^2) = \frac{\ln e^2 - 1}{e^2} = \frac{2-1}{e^2} = \frac{1}{e^2}$$

Γ2. Έχουμε

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - 2x(2 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x - 4x + 2x\ln x}{x^4} =$$

$$= \frac{x(-5 + 2\ln x)}{x^4} = \frac{2\ln x - 5}{x^3}$$

Άρα είναι:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = e^{5/2}$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{5}{2} \Leftrightarrow x > e^{5/2}$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow x < e^{5/2}$

x	0	$e^{5/2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι:

Η f είναι **κοίλη** στο $(0\ ,e^{5/2}]$ και **κυρτή** στο $[e^{5/2},+\infty)$.

Σημείο καμπής το

$$K\left(e^{5/2}\ ,\ \frac{3}{2e^{5/2}}\right)$$

αφού

$$f(e^{5/2}) = \frac{\ln e^{5/2} - 1}{e^{5/2}} = \frac{\frac{5}{2} - 1}{e^{5/2}} = \frac{\frac{3}{2}}{e^{5/2}} = \frac{3}{2e^{5/2}}\,.$$

Γ3. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}(\ln x - 1)\right] = (+\infty)(-\infty) = -\infty\,.$$

Άρα η $\varepsilon_1 : x = 0$ (ο άξονας $y'y$) είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

Επίσης είναι: $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x - 1}{x} \underset{\text{D.L'H.}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

Άρα η $\varepsilon_2 : y = 0$ (ο άξονας $x'x$) είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

Γ4. Είναι

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Άρα η C_f τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(e\ ,\ 0)$.

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_1^e |f(x)|dx\,.$$

Είναι

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq e\,.$$

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e\,.$$

Άρα $f(x) \le 0$ για κάθε $x \in [1, e]$.

Οπότε

$$E = \int_1^e - f(x)dx = \int_1^e - \frac{\ln x - 1}{x}dx = -\int_1^e (\ln x - 1)\frac{1}{x}dx$$

Θέτουμε $u = \ln x - 1$ οπότε $du = \frac{1}{x}dx$.

Για $x = 1$ προκύπτει $u = -1$ και για $x = e$ προκύπτει $u = 0$.

Άρα

$$\boxed{\mathbf{E = -\int_{-1}^{0} u\,du = -\left[\frac{u^2}{2}\right]_{-1}^{0} = -(0 - \frac{(-1)^2}{2}) = \frac{1}{2}}} \text{ τ.μ.}$$

209. **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο:

$$f'(x) = \ln x + (x+1)\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1 + \frac{1}{x}$$

Η συνάρτηση f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο:

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}.$$

Οπότε είναι:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		−	0	+	
$f'(x)$		↘	$f'(1)=2$	↗	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι:

- Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$
- Η f' παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f'(1) = 2$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in (0,+\infty)$ είναι

$$f'(x) \geq f'(1) = 2 > 0,$$

Άρα $f'(x) > 0$, οπότε η συνάρηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f\left((0,+\infty)\right) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right)$$

Αλλά είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+1)\ln = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (x+1)\ln x = +\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$\boxed{\mathbf{f\left((0,+\infty)\right) = \mathbb{R}.}}$$

Γ2. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο A(1,0) είναι

$$\varepsilon : y - f(1) = f'(1)(x-1)$$

Αλλά $f(1) = 0$ και $f'(1) = 2$, άρα $\varepsilon : y - 0 = 2(x-1)$.

Επομένως η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτόμενης είναι:

$$\varepsilon : y = 2x - 2.$$

Για να δείξουμε ότι η εφαπτομένη ε διαπερνά την γραφική παράστεση της f, αρκεί να δείξουμε ότι το σημείο A(1,0) είναι σημείο καμπής της C_f.

Είναι

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	−	0	+
f(x)		Σ.Κ.	

Πράγματι είναι $f'(1) = 0$ και η f'' αλλάζει πρόσημο στο $x_0 = 1$, οπότε το $A(1,0)$ ένα σημείο καμπής της C_f.

Η (ε) διαπερνά την C_f, αφού η f είναι κοίλη στο (0,1] και κυρτή στο [1,+∞).

Γ3. Στο διάστημα $\left[\frac{1}{e},1\right]$ η f είναι κοίλη, άρα η εφαπτομένη της βρίσκεται ***΄΄πάνω΄΄*** από την C_f, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\mathbf{E(\Omega)=\int_{1/e}^{1}[2x-2-f(x)]dx=\int_{1/e}^{1}[2x-2-(x+1)\ln x]dx=\ldots}$$

210. **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Η δοσμένη σχέση γράφεται διαδοχικά:

$$[f'(x)]^2+f(x)f''(x)=\frac{e^x}{2}\Leftrightarrow[f(x)f'(x)]'=\left[\frac{e^x}{2}\right]$$

άρα

$$f(x)f'(x)=\frac{e^x}{2}+c\,(c\ \text{σταθερά})$$

$$\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=e^x+c_1 (1),\ \text{όπου}\ c_1=2c.$$

Έτσι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\left[f^2(x)\right]'=e^x+c_1,\ \text{άρα}\ f^2(x)=e^x+c_1x+c_2,\ \text{όπου}\ c_1,c_2\ \text{σταθερές.}$$

Γ2. Είναι

$$f^2(0)=1^2=1$$

οπότε

$$e^0+c_1\cdot 0+c_2=1\Leftrightarrow c_2=0$$

και η (1) για $x=0$, δίνει:

$$2f(0)f'(0)=e^0+c_1\Leftrightarrow 2\cdot 1\cdot 0=1+c_1$$

άρα $c_1=-1$.

Τελικά :

$$\boxed{\mathbf{f^2(x)=e^x-x,\ \ x\in\mathbb{R}.}}$$

Γ3. Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει $e^x\geq x+1>x$, επομένως $e^x-x>0$.

Συμπεραίνουμε ότι $\sqrt{e^x-x}\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αλλά η f είναι συνεχής, επομένως θα διατηρεί σταθερό πρόσημο,

δηλαδή

$$f(x)=\sqrt{e^x-x} \quad \text{ή} \quad f(x)=-\sqrt{e^x-x}.$$

Επειδή $f(0)=1>0$ είναι $f(x)>0$, άρα έχουμε τελικά

$$\boxed{\mathbf{f(x)=\sqrt{e^x-x}}}, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Γ4. Από την αρχική σχέση έχουμε

$$f(x)f''(x)=\frac{e^x}{2}-[f'(x)]^2.$$

Ακόμη:

$$f'(x)=\frac{(e^x-x)'}{2\sqrt{e^x-x}}=\frac{e^x-1}{2\sqrt{e^x-x}},$$

συνεπώς το ολοκλήρωμα I ισούται με:

$$I=\int_1^2\frac{\frac{e^x}{2}-[f'(x)]^2}{e^x-1}dx=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{e^x}{e^x-1}dx-\frac{1}{4}\int_1^2\frac{e^x-1}{e^x-x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\ln|e^x-1|\Big]_1^2-\frac{1}{4}\Big[\ln|e^x-x|\Big]_1^2$$

$$=\frac{1}{2}\ln(e^2-1)-\frac{1}{4}\ln(e^2-2)-\frac{1}{4}\ln(e-1)$$

211. **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x}.$$

Έχουμε:

$$g'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2(x+1)(x-1)}{x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x>1$$

και

$$g'(x)<0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0<x<1,$$

άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Επομένως, όπως φαίνεται στον επόμενο πίνακα μεταβολών,

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	

η g για $x=1$ παρουσιάζει ακρότατο με τιμή $g(1)=4$ που είναι η ελάχιστη.

Γ2. Είναι:

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{2x^2+2}{4x^2}=\frac{x^2+3-2\ln x}{2x^2}=\frac{g(x)}{2x^2}$$

Αλλά (από ερώτημα Δ1) η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, άρα:

- για $0<x<1$ είναι $g(x)>g(1)$, οπότε $g(x)>4>0$,

  άρα $f'(x)>0$ και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$
- για $x>1$ είναι $g(x)>g(1)$, οπότε $g(x)>4>0$,

  άρα $f'(x)>0$ και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Συνεπώς η f **δεν παρουσιάζει ακρότατα**.

Γ3. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{x^2-1}{2x}-\frac{x}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln x-1}{2x}\right)\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Άρα η ευθεία $\varepsilon:\ y=\frac{1}{2}x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f.

Η εξίσωση

$$\frac{1}{2}x=\frac{\ln x}{x}+\frac{x^2-1}{2x}$$

γράφεται ισοδύναμα:

$$x^2 = 2\ln x + x^2 - 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$$

Άρα η ευθεία (ε) τέμνει την C_f στο σημείο

$$A = (\sqrt{e}, f(\sqrt{e})) \quad ή \quad A\left(\sqrt{e}, \frac{e}{\sqrt{e}}\right).$$

Γ4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_{\sqrt{e}}^{e}\left(f(x) - \frac{1}{2}x\right)dx = \int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{2\ln x - 1}{2x}\,dx = \int_{\sqrt{e}}^{e}\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2x}\right)dx$$

$$\left(\frac{2\ln x - 1}{2x} \geq 0 \text{ για } x \in [\sqrt{e}, e]\right) \quad = \int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{\ln x}{x}dx - \frac{1}{2}\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,[\ln^2 x]_{\sqrt{e}}^{e} - \frac{1}{2}\,[\ln x]_{\sqrt{e}}^{e} = \frac{1}{2}\,(\ln^2 e - \ln^2\sqrt{e}) - \frac{1}{2}\,(\ln^2 e - \ln^2\sqrt{e})$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

212. **ΘΕΜΑ Γ** **ΕΠΑΝ. 2013**

Γ1. α. Είναι

$$g(1) = \frac{f'(1)}{f(1)} = 1 \quad και \quad g'(x) = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)},$$

άρα $g'(1) = -1$.

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο της $A(1,1)$ είναι $y = -x + 2$

Επειδή η συνάρτηση g είναι κυρτή, ισχύει

$$g(x) \geq -x + 2, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

β. Από την προηγούμενη σχέση έχουμε:

$$g(x) \geq -x + 2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} \geq -x + 2 \Rightarrow f'(x) \geq (2-x)f(x) \Rightarrow f'(x) - (2-x)f(x) \geq 0, \quad \text{για}$$

κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Επειδή $f'(1) - (2-1)f(1) = 1 > 0$, θα είναι

$$\int_0^1 \left(f'(x) - (2-x)f(x)\right)dx > 0 \Rightarrow \int_0^1 f'(x)dx > \int_0^1 (2-x)f(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_0^1 (2-x)f(x)dx < [f(x)]_0^1 \Rightarrow \int_0^1 (2-x)f(x)dx < f(1) = 1$$

Γ2. Έχουμε $f'(x)>0$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$, άρα $h(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

Άρα

$$E=\int_0^1 h(x)dx=\int_0^1\left(f'(x)\right)^3dx=\int_0^1\left(f'(x)\right)^2f'(x)dx=\left[\left(f'(x)\right)^2f(x)\right]_0^1-2\int_0^1 f'(x)f''(x)f(x)dx=$$

$$1-2\int_0^1\left(\left(f'(x)\right)^2-1\right)f'(x)dx=1-2\int_0^1\left(f'(x)\right)^3dx+2\int_0^1 f'(x)dx=1-2E+2\left[f(x)\right]_0^1=1-2E+2$$

Επομένως

$$E=1-2E+2\Leftrightarrow E=1$$