Θέματα Β

138. **ΘΕΜΑ Β**

B1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{x(\ln x)'-(x)'\ln x}{x^2}=\frac{x\frac{1}{x}-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2},\ x>0.$$

- $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}>0\Leftrightarrow 1-\ln x>0\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow x<e$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}<0\Leftrightarrow 1-\ln x<0\Leftrightarrow \ln x>1\Leftrightarrow x>e$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f(e)=\frac{1}{e}$	↘	

Από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι:

- Η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0,e]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $[e,+\infty)$.
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** το $f(e)=\frac{1}{e}$.

B2. Είναι $\alpha<\beta$ με $\alpha,\beta\in(e,+\infty)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(e,+\infty)$, άρα έχουμε:

$$\boxed{f(\alpha)>f(\beta)\Leftrightarrow\frac{\ln\alpha}{\alpha}>\frac{\ln\beta}{\beta}\Leftrightarrow\beta\ln\alpha>\alpha\ln\beta\Leftrightarrow\ln\alpha^{\beta}>\ln\beta^{\alpha}\Leftrightarrow\alpha^{\beta}>\beta^{\alpha}}$$

B3. Είναι

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}=0\Leftrightarrow\ln x=0\Leftrightarrow x=1,$$

οπότε είναι:

- $f(x)<0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}<0 \Leftrightarrow \ln x<0 \Leftrightarrow 0<x<1$
- $f(x)>0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}>0 \Leftrightarrow \ln x>0 \Leftrightarrow x>1$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων της f.

x	0		1		$+\infty$
f(x)		−	0	+	

Άρα είναι

$$f(x)<0,\ \text{για}\ \frac{1}{e}\le x\le 1 \quad \text{και} \quad f(x)<0,\ \text{για}\ 1\le x\le e^2$$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=\int_{\frac{1}{e}}^{1}|f(x)|dx+\int_{1}^{e^2}|f(x)|dx=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{e^2}f(x)dx$$

$$=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{\ln x}{x}dx+\int_{1}^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\cdot\frac{1}{x}dx+\int_{1}^{e^2}\ln x\cdot\frac{1}{x}dx$$

Αλλά είναι:

- $$\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\cdot\frac{1}{x}dx \overset{\substack{\ln x=u\\ \frac{1}{x}dx=du}}{=} \int_{-1}^{0}u\,du=\left[\frac{u^2}{2}\right]_{-1}^{0}=-\frac{1}{2}$$
- $$\int_{1}^{e^2}\ln x\cdot\frac{1}{x}dx \overset{\substack{\ln x=u\\ \frac{1}{x}dx=du}}{=} \int_{0}^{2}u\,du=\left[\frac{u^2}{2}\right]_{0}^{2}=\frac{4}{2}=2$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{E(\Omega)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}\quad \tau.\mu}}$$

139. **ΘΕΜΑ Β**

B1. Βρίσκουμε τα σημεία τομής της C_1 με τον άξονα x΄x. Έχουμε

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3+1=0 \Leftrightarrow x^3=-1 \Leftrightarrow x=-1$$

Άρα η γραφική παράσταση C_1 της συνάρτησης f τέμνει τον x΄x στο σημείο $A(-1,0)$.

Ομοίως βρίσκουμε τα σημεία τομής της C_2 με τον άξονα x΄x. Έχουμε

$$g(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1 \quad \text{ή} \quad x=1$$

Άρα η γραφική παράσταση C_2 της συνάρτησης g τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $A(-1,0)$ και $B(1,0)$.

Επομένως οι C_1 και C_2 **τέμνονται** στο σημείο $A(-1,0)$ και $A \in x'x$.

Β2. Για να βρούμε τις τετμημένες των σημείων τομής των C_1 και C_2 λύνουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$, οπότε έχουμε:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^3+1=3x^2-3 \Leftrightarrow x^3-3x^2+4=0 \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε σχήμα Horner στην (1) και έχουμε:

$$x^3-3x^2+4=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=-1 \quad \text{ή} \quad x=2$$

Άρα C_1 και C_2 τέμνονται στα σημεία $A(-1,0)$ και $\Gamma(2,9)$, αφού

$$f(2)=g(2)=9.$$

Επομένως μοναδικό δεύτερο σημείο που οι καμπύλες τέμνονται είναι το $(2,9)$.

Οι συναρτήσεις $f(x)=x^3+1$ και $g(x)=3x^2-3$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$f'(x)=\left(x^3+1\right)'=3x^2 \quad \text{και} \quad g'(x)=\left(3x^2-3\right)'=6x$$

Οπότε είναι $f'(2)=3\cdot 2^2=12$ και $g'(2)=6\cdot 2=12$, άρα είναι:

$$f(2)=g(2) \quad \text{και} \quad f'(2)=g'(2)$$

Επομένως οι C_1, C_2 έχουν **κοινή εφαπτομένη** στο σημείο $(2,9)$

Β3. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(x)=f(x)-g(x)=x^3+1-3x^2+3=x^3-3x^2+4, \ x\in\mathbb{R}$$

Από το προηγούμενο ερώτημα Β2 είναι:

$$x^3-3x^2+4=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=-1 \quad \text{ή} \quad x=2$$

Μελετάμε το πρόσημο της συνάρτησης h:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Επομένως το ζητούμενο **εμβαδόν** είναι:

$$E(\Omega)=\int_{-1}^{2}|h(x)|dx=\int_{-1}^{2}h(x)dx=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+4x\right]_{-1}^{2}$$

$$=4-\cancel{8}+\cancel{8}-\frac{1}{4}-1+4=8-\frac{5}{4}=\frac{27}{4}\text{ τ.μ.}$$

140. **ΘΕΜΑ Β**

B1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$f'(x)=(1-\alpha)2x-2\alpha(1-x)=2x-2\alpha x-2\alpha+2\alpha x=2x-2\alpha.$$

Έχουμε:

- $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-2\alpha=0\Leftrightarrow x=\alpha$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow 2x-2\alpha>0\Leftrightarrow x>\alpha$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow 2x-2\alpha<0\Leftrightarrow x<\alpha$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει **ένα ακρότατο (ελάχιστο)** , για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, το

$$f(\alpha)=(1-\alpha)\alpha^2+\alpha(1-\alpha)^2=\alpha^2-\alpha^3+\alpha-2\alpha^2+\alpha^3=\alpha-\alpha^2=\alpha(1-\alpha)$$

B2. Το ακρότατο $f(\alpha)=\alpha(1-\alpha)$ είναι αρνητικός αριθμός, άρα $\alpha(1-\alpha)<0\quad(1)$.

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,1)$
- $f(0)=\alpha$ και $f(1)=1-\alpha$, οπότε $f(0)\cdot f(1)=\alpha(1-\alpha)\overset{(1)}{<}0$

Άρα σύμφωνα με το **Θεώρημα Bolzano**

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$,

άρα

η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε **ένα τουλάχιστον** σημείο $x_0\in(0,1)$.

B3. Έχουμε

$$\boxed{\int_{x_0}^{1}f'(x)dx=5\Leftrightarrow f(1)-f(x_0)\overset{\substack{f(1)=1-\alpha\\ f(x_0)=0}}{=}5\Leftrightarrow 1-\alpha=5\Leftrightarrow \alpha=-4}$$

141. **ΘΕΜΑ Β**

B1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-1,+\infty)$ ως λογαριθμική και παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}>0\text{, για κάθε } x>-1$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$, οπότε είναι "1–1" και άρα αντιστρέψιμη.

Έστω $f(x)=y$. Είναι

$$y=\ln(x+1)\Leftrightarrow e^y=x+1\Leftrightarrow x=e^y-1.$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{f^{-1}(x)=e^x-1,\ \ x\in\mathbb{R}}}$$

B2. Οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f και της ευθείας με εξίσωση $y=x$ είναι:

$$f(x)=x\Leftrightarrow\ln(x+1)=x\Leftrightarrow\ln(x+1)-x=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=\ln(x+1)-x$$

η οποία έχει προφανή ρίζα το 0. Επίσης είναι

$$h'(x)=-\frac{x}{x+1}\ ,\ \ x>-1$$

- $h'(x)=0\Leftrightarrow x=0$
- $h'(x)>0\Leftrightarrow x<0$ και $h'(x)<0\Leftrightarrow x>0$

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	Τ.Μ. $h(0)=0$	$\searrow$	

Άρα το 0 είναι μοναδική ρίζα της h, οπότε σημείο τομής της C_f με την ευθεία $y=x$ είναι το $O(0,0)$.

Ομοίως οι τετμημένες των σημείων τομής της $C_{f^{-1}}$ και της ευθείας με εξίσωση $y=x$ είναι:

$$f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow e^x-1=x$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$t(x)=e^x-1-x$$

η οποία έχει προφανή ρίζα το 0.
Επίσης είναι

$$t'(x) = e^x-1, \quad x\in\mathbb{R}$$

- $t'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$
- $t'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$ και $t'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$		**0**		$+\infty$
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$		$\searrow$	Τ.Ε. t(0)=0	$\nearrow$	

Αποδεικνύεται επομένως ότι και η t έχει μοναδική ρίζα το 0, οπότε σημείο τομής της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y=x$ είναι το $O(0,0)$.

B3. Έχουμε:

- $$\lim_{x\to0^+} g(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x^2-x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{e^x}{2x-1}=-1.$$

  Άρα η $x=0$ **δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη**.

- $$\lim_{x\to1^+} g(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{e^x-1}{x^2-x}=\lim_{x\to1^+}\left[\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{1}{x-1}\right]=+\infty$$

  επειδή

  $$\lim_{x\to1^+}\frac{e^x-1}{x}=e-1 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty.$$

Οπότε η $x=1$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη**.
Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E(\Omega)=\int_0^1\left|f(x)-f^{-1}(x)\right|dx$$

Λόγω όμως της **συμμετρίας** των C_f, $C_{f^{-1}}$ ως προς τη ευθεία $y=x$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι **διπλάσιο** από το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζει η $C_{f^{-1}}$ με τη ευθεία $y=x$.

Άρα

$$E(\Omega)=2\int_0^1\left|f^{-1}(x)-x\right|dx=2\int_0^1\left|e^x-1-x\right|dx$$

Αλλά απο ερώτημα Β2 έχουμε ότι

$$t(x)=e^x-1-x\geq 0,$$

άρα

$$\boxed{\mathbf{E(\Omega)=2\int_0^1(e^x-1-x)dx=2\left[e^x-x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=2\left(e-1-\frac{1}{2}-1\right)=2e-5\ \tau.\mu.}}$$

142. **ΘΕΜΑ Β**

B1. Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{e^x(2+e^{x+1})-(3+e^x)e^{x+1}}{(2+e^{x+1})^2}=\frac{2e^x+e^{2x+1}-3e^{x+1}-e^{2x+1}}{(2+e^{x+1})^2}=\frac{e^x(2-3e)}{(2+e^{x+1})^2}<0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.

B2. Εφόσον η f είναι **γνησίως φθίνουσα** άρα είναι και **"1–1"** οπότε ορίζεται και η **αντίστροφή** της.

Θέτουμε $f(x)=y$, οπότε

$$y=\frac{3+e^x}{2+e^{x+1}}\Leftrightarrow y\left(2+e^{x+1}\right)=3+e^x\Leftrightarrow e^x\left(ye-1\right)=3-2y\Leftrightarrow$$

$$e^x=\frac{3-2y}{ye-1}\ \left(y\neq\frac{1}{e}\right)\Leftrightarrow\ x=\ln\frac{3-2y}{ye-1},\ \left(\frac{3-2y}{ye-1}>0\right)$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{f^{-1}(x)=\ln\frac{3-2x}{ex-1}\ \ \mu\varepsilon\ \ x\in\left(\frac{1}{e},\frac{3}{2}\right)}}$$

B3. Έχουμε:

$$I=\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,dx=\int_0^1\frac{2+e^{x+1}}{3+e^x}dx.$$

Θέτουμε $e^x=u$, οπότε

- $du=e^x dx$.
- Για $x=0$ είναι $u=1$ και για $x=1$ είναι $u=e$

Άρα

$$I=\int_1^e \frac{2+eu}{(3+u)u}\,du\,.$$

Είναι

$$\frac{2+eu}{(3+u)u}=\frac{A}{3+u}+\frac{B}{u}\Leftrightarrow 2+eu=Au+\ 3B+uB\text{ , οπότε}$$

$$\begin{cases} A+B=e \\ 3B=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=e-\dfrac{2}{3} \\ B=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Άρα

$$I=\int_1^e\left(\frac{e-\frac{2}{3}}{3+u}+\frac{\frac{2}{3}}{u}\right)du=\left[\left(e-\frac{2}{3}\right)\ln(3+u)+\frac{2}{3}\ln u\right]_1^e$$

$$=\left(e-\frac{2}{3}\right)\left(\ln(3+e)-\ln 4\right)+\frac{2}{3}\left(\ln e-\ln 1\right)=\left(e-\frac{2}{3}\right)\left(\ln\frac{3+e}{4}\right)+\frac{2}{3}$$

B4. Έχουμε:

$$2004<2005 \text{ οπότε } 2004^x<2005^x$$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, είναι

$$f(2004^x)>f(2005^x) \quad (1)$$

Ομοίως

$$f^{-1}(2006^x)>f^{-1}(2008^x) \quad (2)$$

επειδή η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\boxed{f\left(2005^x\right)+f^{-1}\left(2008^x\right)<f\left(2004^x\right)+f^{-1}\left(2006^x\right)}$$

143. **ΘΕΜΑ Β** **study4exams**

B1. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\lambda>e$ τότε

$$E(\lambda)=\int_e^{\lambda} f(x)dx=\int_e^{\lambda}(\ln x-1)dx=\int_e^{\lambda}(x)'\ln x dx-(\lambda-e)=$$

$$=\left[x\ln x\right]_e^{\lambda}-\int_e^{\lambda} x\,\frac{1}{x}\,dx-\lambda+e=\lambda\ln\lambda-e-(\lambda-e)-\lambda+e=$$

$$=\lambda\ln\lambda-e-\lambda+e-\lambda+e=\lambda\ln\lambda-2\lambda+e \ \ (\text{αφού } \ e<x\ \lambda \ \text{ το } \ \ln x>1).$$

- Αν $0<\lambda<e$ τότε

$$E(\lambda)=\int_{\lambda}^{e}(-f(x))dx=\int_{\lambda}^{e}(1-\ln x)dx=(e-\lambda)-\int_{\lambda}^{e}(x)'\ln x dx=$$

$$=e-\lambda-\left[x\ln x\right]_{\lambda}^{e}+\int_{\lambda}^{e}x(\ln x)'dx=e-\lambda-e+\lambda\ln\lambda+(e-\lambda)=\lambda\ln\lambda-2\lambda+e\,.$$

B2. Έχουμε:

$$\lim_{\lambda\to0^+}E(\lambda)=\lim_{\lambda\to0^+}(\lambda\ln\lambda-2\lambda+e)=\lim_{\lambda\to0^+}\lambda\ln\lambda-0+e=\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\ln\lambda}{\frac{1}{\lambda}}+e=$$

$$=\lim_{\lambda\to0^+}\left(\frac{(\ln\lambda)'}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)'}+e\right)=\lim_{\lambda\to0^+}\left(\frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{\lambda^2}}+e\right)=\lim_{\lambda\to0^+}(-\lambda)+e=e.$$

B3. Η εξίσωση της **εφαπτομένης** της C_f στο σημείο $M\left(e^2, f(e^2)\right)$ είναι:

$$\varepsilon:\ y-f(e^2)=f'(e^2)(x-e^2)\,.$$

Αλλά

$$f(e^2)=\ln e^2-1=1 \qquad \text{και} \qquad f'(e^2)=\frac{1}{e^2}$$

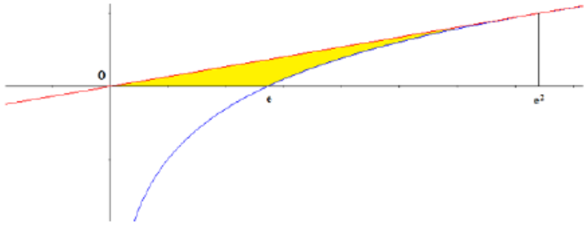
Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon:\ y-1=\frac{1}{e^2}\,(x-e^2)} \qquad \textbf{ή} \qquad \boldsymbol{\varepsilon:\ y=\frac{1}{e^2}\,x\,.}}$$

B4. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0,$$

Άρα η f είναι **κοίλη**, οπότε η γραφική παράσταση της εφαπτομένης στο M βρίσκεται **πάνω** από τη γραφική παράσταση της f, με **εξαίρεση** το σημείο επαφής



Επομένως:

$$E(\Omega)=\int_0^{e^2}\frac{1}{e^2}xdx-\int_e^{e^2}(\ln x-1)dx=$$

$$=\frac{1}{e^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{e^2}-\int_e^{e^2}\ln xdx+(e^2-e)=\frac{1}{e^2}\cdot\frac{e^4}{2}-\int_e^{e^2}(x)'\ln xdx+e^2-e$$

$$=\frac{e^2}{2}-[x\ln x]_e^{e^2}+\int_e^{e^2}x\frac{1}{x}dx+e^2-e=\frac{e^2}{2}-e^2\ln e^2+e\ln e+e^2-e+e^2-e$$

$$=\frac{e^2}{2}-2\cancel{e^2}+\cancel{e}+\cancel{e^2}-\cancel{e}+\cancel{e^2}-e=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)\ \text{τ.μ..}$$

144. **ΘΕΜΑ Β** **study4exams**

B1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=e^x+3x^2+1>0 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

B2. Από το ερώτημα B1 έχουμε ότι

f **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$,

άρα είναι **«1 – 1»** οπότε **αντιστρέφεται**.

B3. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\ \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$$

Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^x+x^3+x-2)=0-\infty-\infty-2=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^x+x^3+x-2)=+\infty.$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)}}.$$

Επομένως το **πεδίο ορισμού** της f^{-1} είναι:

$$\boxed{D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty).}$$

B4. Είναι:

$$I = \int_{-1}^{e} f^{-1}(x)dx.$$

Θέτουμε $x = f(y)$, οπότε είναι:

- $dx = f'(y)dy$
- $f(0) = -1$ και $f(1) = e$,

άρα τα νέα άκρα ολοκλήρωσης είναι 0 και 1.

Επομένως:

$$I = \int_{-1}^{e} f^{-1}(x)dx = \int_{0}^{1} f^{-1}(f(y))f'(y)dy = \int_{0}^{1} yf'(y)dy = [yf(y)]_0^1 - \int_{0}^{1}(y)'f(y)dy =$$

$$1f(1) - 0 - \int_{0}^{1} f(y)dy = f(1) - \int_{0}^{1}(e^y + y^3 + y - 2)dy = e - \left[e^y + \frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2} - 2y\right]_0^1 =$$

$$e - \left[e + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 - (e^0 + 0 + 0 - 0)\right] = \cancel{e} - \cancel{e} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 + 1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 = \frac{9}{4}.$$

145. **ΘΕΜΑ Β** **2001**

B1. Αν η f είναι συνεχής, θα είναι συνεχής και στο 3 ,

Άρα

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$$

Είναι

- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(\alpha x^2) = 9\alpha$
- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1 - e^{x-3}}{x-3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{(1 - e^{x-3})'}{(x-3)'} = \lim\limits_{x\to 3^+}(-e^{x-3}) = -1$
- $f(3) = 9\alpha$.

Άρα

$$\boxed{9\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{9}}$$

B2. Για $x > 3$ είναι :

$$f'(x)=\frac{(1-e^{x-3})'(x-3)-(1-e^{x-3})(x-3)'}{(x-3)^2}=\frac{-e^{x-3}(x-3)-(1-e^{x-3})}{(x-3)^2}$$

Επομένως

$$f'(4)=\frac{-e\cdot 1-(1-e)}{1}=-1 \quad (1).$$

Ακόμη είναι

$$f(4)=\frac{1-e^{4-3}}{4-3}=1-e \quad (2)$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(4,f(4))$ είναι :

$$\varepsilon\text{: } y-f(4)=f'(4)(x-4),$$

Οπότε από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon: \ y-(1-e)=-1(x-4), \ \ \text{άρα} \ \ \varepsilon: \ y=-x+5-e.}}$$

B3. Η f είναι **συνεχής** στο $[1,2]$, άρα το ζητούμενο **εμβαδό** είναι

$$\boxed{\mathbf{E=\int_1^2|f(x)|dx=\int_1^2|\alpha|x^2dx=|\alpha|\int_1^2 x^2dx=|\alpha|\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{7}{3}|\alpha| \ \ \tau.\mu}}$$

146. **ΘΕΜΑ Β** **2006**

B1. Είναι

$$f(x)=2+x^2-4x+4=x^2-4x+6, \quad x\geq 2$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ και παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x)=2(x-2)$$

Είναι $f'(x)\geq 0$ για $x\geq 2$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$, άρα «1-1».

B2. Αφού η f είναι «1-1» είναι αντιστρέψιμη.

Αρχικά βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f.

Η f είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα, άρα

$$f(A)=f([2,+\infty))=\left[f(2),\lim_{x\to\infty}f(x)\right)=[2,+\infty)$$

αφού

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2-4x+6)=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

οπότε το **σύνολο τιμών** της είναι το **πεδίο ορισμού** της **αντίστροφής** της.

Έχουμε :

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=y \\ x\ge 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2+(x-2)^2-y=0 \\ x\ge 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} (x-2)^2=y-2 \\ x\ge 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x-2=\sqrt{y-2} \\ x\ge 2 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x=2+\sqrt{y-2} \\ x\ge 2 \end{array}\right\}$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{f^{-1}:[2,+\infty)\to \mathbb{R}}} \quad \text{με} \quad \boxed{\mathbf{f^{-1}(x)=2+\sqrt{x-2}}}$$

B3. i. Έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=x \\ x\ge 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x^2-4x+6=x \\ x\ge 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x^2-5x+6=0 \\ x\ge 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=3 \text{ ,}$$

άρα τα κοινά σημεία της C_f και της ευθείας $y=x$ είναι τα

$$A(2,2) \text{ και } B(3,3).$$

Ομοίως προκύπτει ότι τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ και της ευθείας $y=x$ είναι τα

$$A(2,2) \text{ και } B(3,3).$$

Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι τα $A(2,2)$ και $B(3,3)$.

Λόγω της συμμετρίας των $C_f, C_{f^{-1}}$ ως προς τη ευθεία $y=x$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζει η C_f με τη ευθεία $y=x$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=\int_2^3 |f(x)-f^{-1}(x)|dx=\int_2^3 |f(x)-x|dx$$

Είναι

$$f(x)-x=2+(x-2)^2-x=2+x^2-4x+4-x=x^2-5x+6$$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)-x$		+	0	−	0	+	

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E(\Omega)=2\int_2^3(x-f(x))dx=2\int_2^3\left(x-x^2+4x-6\right)dx=2\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-6x\right]_2^3=\frac{1}{3}\ \text{τ.μ}$$

147. **ΘΕΜΑ Β** **ΕΠΑΝ. 2002**

B1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x)=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)'=\frac{\left(e^x-1\right)'\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^x\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$=\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}>0,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα**, συνεπώς και **1-1**, άρα **αντιστρέφεται**.

Εύρεση της αντίστροφης:

$$y=\frac{e^x-1}{e^x+1}\Leftrightarrow y\left(e^x+1\right)=e^x-1\Leftrightarrow(-y+1)e^x=y+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}e^x=\dfrac{y+1}{-y+1}\\[2mm] \dfrac{y+1}{-y+1}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\ln\left(\dfrac{y+1}{-y+1}\right)\\[2mm] -1<y<1\end{cases}$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{f^{-1}(x)=\ln\frac{x+1}{-x+1},\quad x\in(-1,1)}}$$

B2. Έχουμε

$$f^{-1}(x)=0\Leftrightarrow\ln\frac{x+1}{-x+1}=0\Leftrightarrow\frac{x+1}{-x+1}=1\Leftrightarrow x=0$$

Άρα η εξίσωση $f^{-1}(x)=0$ έχει **μοναδική ρίζα το μηδέν**.

B3. Είναι

$$I=\int_{-1/2}^{1/2}f^{-1}(x)dx=\int_{-1/2}^{1/2}\ln\frac{x+1}{-x+1}dx$$

Θέτουμε $x=-u$, οπότε είναι

- $dx=-du$
- για $x=-\frac{1}{2}$ είναι $u=\frac{1}{2}$ και για $x=\frac{1}{2}$ είναι $u=-\frac{1}{2}$

Άρα

$$I=-\int_{1/2}^{-1/2}\ln\frac{-u+1}{u+1}du$$

Αλλά $\ln\frac{-u+1}{u+1}=\ln\left(\frac{u+1}{-u+1}\right)^{-1}=-\ln\frac{u+1}{-u+1}$, οπότε

$$I=-\int_{1/2}^{-1/2}\ln\frac{-u+1}{u+1}du=\int_{1/2}^{-1/2}\ln\frac{u+1}{-u+1}du=-\int_{-1/2}^{1/2}\ln\frac{u+1}{-u+1}du=-I$$

Επομένως

$$\boxed{\mathbf{I=-I\Leftrightarrow 2I=0\Leftrightarrow I=0}}$$

148. **ΘΕΜΑ Β** **ΕΠΑΝ. 2004**

B1. Είναι

$$f(0)=2^0+m^0-4^0-5^0=1+1-1-1=0\,.$$

Ακόμη f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$f'(x)=2^x\ln 2+m^x\ln m-4^x\ln 4-5^x\ln 5$$

Επειδή $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $f(x)\geq f(0)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$. Άρα

- η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=0$
- το $x_0=0$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Σύμφωνα με το **Θεώρημα Fermat** έχουμε

$$f'(0)=0\,.$$

Άρα

$$f'(0)=0\Leftrightarrow 2^0\ln 2+m^0\ln m-4^0\ln 4-5^0\ln 5=0\Leftrightarrow \ln 2+\ln m-\ln 4-\ln 5=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln 2+\ln m=\ln 4+\ln 5\Leftrightarrow \ln(2m)=\ln 20\Leftrightarrow 2m=20\Leftrightarrow m=10$$

B2. Επειδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0, θα ισχύει

$$f(x)>0\ \text{, για κάθε } x\neq 0\,.$$

Άρα

$$E(\Omega)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(2^x+10^x-4^x-5^x)dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{10^x}{\ln 10}-\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{5^x}{\ln 5}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{\ln 2}+\frac{9}{\ln 10}-\frac{3}{\ln 4}-\frac{4}{\ln 5}\quad \text{τ.μ}$$

149. **ΘΕΜΑ Β** **ΕΠΑΝ. 2006**

B1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων καθώς και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x)=\left(\frac{1+e^x}{1+e^{x+1}}\right)'=\frac{\left(1+e^x\right)'\left(1+e^{x+1}\right)-\left(1+e^x\right)\left(1+e^{x+1}\right)'}{\left(1+e^{x+1}\right)^2}$$

$$=\frac{e^x\left(1+e^{x+1}\right)-e^{x+1}\left(1+e^x\right)}{\left(1+e^{x+1}\right)^2}$$

$$=\frac{e^x-e^{x+1}}{\left(1+e^{x+1}\right)^2}=\frac{e^x\left(1-e\right)}{\left(1+e^{x+1}\right)^2}<0 \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.

B2. α΄ τρόπος

Έχουμε

$$I=\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx=\int_0^1\frac{1+e^{x+1}}{1+e^x}dx$$

Θέτουμε $e^x=u$, οπότε είναι:

- $e^x dx=du \Leftrightarrow dx=\frac{1}{u}du$
- Για $x=0$ είναι $u=1$ και για $x=1$ είναι $u=e$

οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I=\int_1^e\frac{eu+1}{u+1}\cdot\frac{1}{u}du=\int_1^e\frac{eu+1}{u\left(u+1\right)}du$$

Έστω ότι υπάρχουν $A,B\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\frac{eu+1}{u\left(u+1\right)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow eu+1=A(u+1)+Bu\Leftrightarrow eu+1=(A+B)u+A\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=e\\A=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=e-1\end{cases}$$

Επομένως

$$I=\int_1^e\frac{1}{u}du+(e-1)\int_1^e\frac{1}{u+1}du=\left[\ln|u|\right]_1^e+(e-1)\left[\ln|u+1|\right]_1^e$$

$$=\ln e-\ln 1+(e-1)\left(\ln\left(e+1\right)-\ln 2\right)=1+(e-1)\left(\ln\left(e+1\right)-\ln 2\right)$$

β΄ τρόπος

Είναι :

$$I=\int_0^1\frac{1+e^{x+1}}{1+e^x}dx=\int_0^1\frac{1+e^{x+1}+e^x-e^x}{1+e^x}dx=\int_0^1\frac{1+e^x}{1+e^x}dx+\int_0^1\frac{e^{x+1}-e^x}{1+e^x}dx=$$

$$=\int_0^1 dx+\int_0^1\frac{e^x(e-1)}{1+e^x}dx=[x]_0^1+(e-1)\int_0^1\frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$=1+(e-1)\left[\ln\left(1+e^x\right)\right]_0^1=1+(e-1)\left(\ln(1+e)-\ln 2\right)$$

B3. Για $x<0$ ισχύουν

$$\left(\frac{5}{6}\right)^x>1 \quad \text{και} \quad \left(\frac{7}{8}\right)^x>1.$$

Άρα

$$5^x>6^x \quad \text{και} \quad 7^x>8^x.$$

Από ερώτημα Β1 γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα

$$f(5^x)<f(6^x) \quad \text{και} \quad f(7^x)<f(8^x).$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των δύο τελευταίων ανισοτήτων προκύπτει ότι

$$\boxed{\mathbf{f(5^x)+f(7^x)<f(6^x)+f(8^x)}}$$

150. **ΘΕΜΑ Β** **ΕΠΑΝ. 2007**

B1. Είναι

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu 3x}{x}=3\lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu 3x}{3x}=3\cdot 1=3$$

B2. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$,

άρα

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0),$$

Αλλά $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=3$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\beta$, επομένως $\beta=3$.

Για $x>0$, η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=2x+\alpha-\beta\eta\mu x=2x+\alpha-3\eta\mu x$$

Οπότε

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi\Leftrightarrow 2\frac{\pi}{2}+\alpha-3\eta\mu\frac{\pi}{2}=\pi\Leftrightarrow\pi=\pi+\alpha-3\Leftrightarrow\alpha=3.$$

B3. Έχουμε

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi}\left(x^2+3x+3\sigma\upsilon\nu x\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+3\eta\mu x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3}+\frac{3\pi^2}{2}.$$

151. **ΘΕΜΑ Β** **Ο.Ε.Φ.Ε 2004**

B1.i. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)+2\right)=0 \quad (1) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x-2\right)=0 \quad (2)$$

Το κλάσμα $\dfrac{g'(x)}{f'(x)-1}$ ορίζεται σε διάστημα Δ της μορφής $(\alpha,+\infty)$, αφού $f'(x)\neq 1$.

Στο Δ είναι

$$\frac{\left(g(x)+2\right)'}{\left(f(x)-x-2\right)'}=\frac{g'(x)}{f'(x)-1}$$

Ακόμα:

$$f'(x)-g'(x)=1 \Leftrightarrow g'(x)=f'(x)-1,$$

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{f'(x)-1}=1.$$

Από το πρώτο θεώρημα του **De L' Hospital** προκύπτει:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)+2}{f(x)-x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(g(x)+2\right)'}{\left(f(x)-x-2\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{f'(x)-1}=1$$

ii. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)+2\right)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x)=-2,$$

άρα η C_f έχει στο $+\infty$ **οριζόντια ασύμπτωτη** την ευθεία $y=-2$.

Πάλι,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x-2\right)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0,$$

άρα η C_f έχει στο $+\infty$ **πλάγια ασύμπτωτη** την ευθεία $y=x+2$.

B2. Έστω ότι η g έχει δύο διαφορετικές ρίζες ρ_1,ρ_2 στο $\mathbb{R}$ με $\rho_1<\rho_2$. (απόδειξη με άτοπο)

Εφαρμόζεται το **θεώρημα Rolle** για την g στο $[\rho_1,\rho_2]$ γιατί, ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$:

- η g είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2), και ακόμα

- $g(\rho_1)=g(\rho_2)=0$.

Επομένως, υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$.

Τότε:

$$f'(\xi)-g'(\xi)=1 \Leftrightarrow f'(\xi)=1. \text{ Άτοπο γιατί } f'(x)\neq 1.$$

Έτσι, η g έχει το **πολύ μία ρίζα** στο $\mathbb{R}$.

B3. Έχουμε

$$f'(x)-g'(x)=x \Leftrightarrow \big(f(x)-g(x)\big)'=(x)',$$

άρα, από τις συνέπειες του **Θ.Μ.Τ.** του διαφορικού λογισμού, υπάρχει αριθμός $c\in\mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε

$$f(x)-g(x)=x+c \qquad (1) \quad \text{ή}$$

$$f(x)-x-2=g(x)+2+c-4 \quad (2)$$

Επειδή υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-x-2\big) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\big[\big(g(x)+2\big)+c-4\big],$$

από την (2) είναι ίσα.

Προκύπτει επομένως:

$$0=c-4 \Leftrightarrow c=4.$$

Άρα, είναι:

$$\boxed{\mathbf{f(x)-g(x)=x-4,\ \ x\in\mathbb{R}}}$$

[Στην (1) καταλήγουμε και με ολοκλήρωση των δύο μελών της $f'(x)-g'(x)=x$]

152. **ΘΕΜΑ Β** **Ο.Ε.Φ.Ε 2005**

B1. Για κάθε $x>0$,

$$\boxed{\mathbf{f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot(\ln x-2)+2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}(\ln x-2)+\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}(\ln x-2+2)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}}$$

B2. Έχουμε

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln x\right]=-\infty$$

διότι

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$$

B3. Για κάθε $x>0$,

$$f''(x)=\frac{(\ln x)'\cdot\sqrt{x}-\ln x\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\frac{\sqrt{x}}{x}-\ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$$

Είναι

$$2-\ln x\geq 0\Leftrightarrow \ln x\leq 2\Leftrightarrow \ln x\leq \ln e^2\Leftrightarrow 0<x\leq e^2$$

x	0	e^2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\smile$	Σ.Κ.	$\frown$

$$f(e^2)=2e\left(\ln e^2-2\right)=0$$

$M\left(e^2,0\right)$ το σημείο καμπής.

Β4. Έχουμε

$$E=\int_{1/e}^{e^2}\left|\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right|dx=\int_{1/e}^{1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx+\int_{1}^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\left[-2\sqrt{x}(\ln x-2\right]_{1/e}^{1}+\left[2\sqrt{x}(\ln x-2)\right]_{1}^{e^2}$$

$$=-2(-2)+\frac{2}{\sqrt{e}}\left(\ln\frac{1}{e}-2\right)+2e\cdot\left(\ln e^2-2\right)-2(-2)=8+\frac{2}{\sqrt{e}}(-1-2)+2e(2-2)$$

$$=8-\frac{6}{\sqrt{e}}\ \text{τ.μ}$$

153. **ΘΕΜΑ Β** **Ο.Ε.Φ.Ε 2008**

Β1. Η f είναι συνεχής για $x<0$, ως πολυωνυμική και για $x>0$, ως άθροισμα της τριγωνομετρικής ημx με την σταθερή c(x)=λ.

Στο $x_0=0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x+\lambda)=\lambda\,,$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left((\mu-1)x+1\right)=1$$

Ακόμα $f\left(0\right)=1$.

Για να είναι η συνάρτηση συνεχής στο $x_0=0$ πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\lambda=1$$

Επομένως, η ζητούμενη τιμή είναι

$$\boxed{\lambda = 1}$$

B2. Για $x > 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x + \lambda - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

Για $x < 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(\mu-1)x + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(\mu-1)x}{x} = \mu - 1$$

Για να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Leftrightarrow \mu - 1 = 1 \Leftrightarrow \mu = 2$$

Επομένως, η ζητούμενη τιμή είναι

$$\boxed{\mu = 2}$$

B3. Είναι π.χ. $f(2\pi) = f(\pi) = \lambda$, άρα

η συνάρτηση δεν είναι $1-1$.

B4. Είναι

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + 1, & \text{αν } x > 0 \\ x + 1, & \text{αν } x \le 0 \end{cases} \quad \text{και}$$

$$\int_{-2}^{\pi} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = \int_{-2}^{0} (x+1)dx + \int_{0}^{\pi} (\eta\mu x + 1)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-2}^{0} + \left[-\sigma\upsilon\nu x + x\right]_{0}^{\pi} = \pi + 2$$

154. **ΘΕΜΑ Β** **Ο.Ε.Φ.Ε 2011**

B1.i. Η f, ως πολυωνυμική, είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 12x^2 + 24\lambda x + \lambda - 1 \quad \text{και} \quad f''(x) = 24x + 24\lambda$$

Επειδή στο $x_0 = -1$ παρουσιάζει καμπή, είναι $f''(-1) = 0$, δηλαδή

$$\boxed{-24 + 24\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1}$$

ii. Επειδή $\lambda = 1$ είναι

$$f(x) = 4x^3 + 12x^2 \text{ και}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 24x + 24 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 24x + 24 < 0 \Leftrightarrow x < -1$$

Επομένως η f είναι **κοίλη** στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και **κυρτή** στο $[-1, +\infty)$.

B2. Θέτουμε $u = f(x)$.

Επειδή

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3}(4x^3 + 12x^2) = 0$$

είναι

$$\boxed{\lim_{x\to -3}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = \lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u} = 1}$$

B3. i. Η ζητούμενη αρχική είναι η

$$F(x) = x^4 + 4x^3 + c,\quad x\in\mathbb{R} \text{ με c σταθερά,}$$

γιατί για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$F'(x) = (x^4 + 4x^2 + c)' = 4x^3 + 12x^2 = f(x)$$

Το σημείο $(0,1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της F, οπότε $F(0) = 1$,

άρα

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$$

Επομένως

$$\boxed{F(x) = x^4 + 4x^3 + 1,\quad x\in\mathbb{R}}.$$

ii. Βρίσκουμε τις ρίζες της συνάρτησης:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\text{ ή }\; x = -3$$

Το ζητούμενο εμβαδόν Ε ισούται με το ολοκλήρωμα

$$E = \int_{-3}^{0}|f(x)|dx$$

Στο διάστημα $[-3,0]$ είναι

$$f(x) = 4x^2(x+3) \ge 0$$

άρα

$$E = \int_{-3}^{0} f(x)dx$$

Τότε

$$\boxed{E = F(0) - F(-3) = 1 + 26 = 27 \text{ τ.μ}}$$

155. **ΘΕΜΑ Β** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2001**

B1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x)=\ln x+1-2=\ln x-1,\ \ x>0,$$

οπότε :

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x-1=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x-1>0 \Leftrightarrow \ln x>1 \Leftrightarrow x>e$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow \ln x-1<0 \Leftrightarrow \ln x<1 \Leftrightarrow x<e$

x	0		e		$+\infty$
f΄(x)		−	0	+	
f(x)		↘	f(e)=−e	↗	

Από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0,e]$ και **γνησίως αύξουσα** στο $[e,+\infty)$.

B2. Η f παρουσιάζει **ελάχιστο** για $x=e$ την τιμή $f(e)=-e$,
άρα είναι :

$$f(x)\geq -e \Leftrightarrow x\ln x-2x\geq -e \Leftrightarrow x\ln x\geq 2x-e \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\ln x\geq 2-\frac{e}{x},\ \text{για κάθε}\ x>0}$$

B3. Στο διάστημα $[1,e]$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε :

$$1\leq x\leq e \Leftrightarrow f(1)\leq f(x)\leq f(e) \Leftrightarrow -e\leq f(x)\leq -2,$$

άρα

$$f(x)<0\ \text{στο}\ [1,e]$$

Επομένως

$$E=\int_1^e |f(x)|dx=-\int_1^e f(x)dx=-\int_1^e (x\ln x-2x)dx=-\int_1^e x\ln x dx+\int_1^e 2xdx=$$

$$=-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln xdx+\int_1^e 2xdx=-\left[\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\right]_1^e+\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot(\ln x)'dx+\int_1^e 2xdx=$$

$$=-\left[\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\right]_1^e+\int_1^e\frac{x}{2}dx+\int_1^e 2xdx=-\frac{1}{2}\left[x^2\cdot\ln x\right]_1^e+\frac{1}{4}\left[x^2\right]_1^e+\left[x^2\right]_1^e=$$

$$=-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}+e^2-1=\frac{3}{4}e^2-\frac{5}{4}=\frac{3e^2-5}{4}\ \text{τ.μ.}$$

156. **ΘΕΜΑ Β** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2002**

B1. Η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\left(0, f(0)\right)$ με

$$f(0) = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}.$$

Επίσης είναι

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{(2x+4)^2},$$

οπότε

$$f'(0) = 2 - \frac{1}{8} = \frac{15}{8}.$$

Άρα η εξίσωση της **εφαπτομένης** (ε) της C_f στο $\left(0, f(0)\right)$ είναι :

$$(\varepsilon):\ y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon):\ y - \frac{17}{4} = \frac{15}{8}x \Leftrightarrow$$

$$\boxed{(\varepsilon):\ y = \frac{15}{8}x + \frac{17}{4}}$$

B2. Κατακόρυφη ασύμπτωτη

Το πεδίο ορισμού της f είναι $A = \mathbb{R} - \{-2\}$ και

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+}\left(2x+4+\frac{1}{2x+4}\right) = +\infty$$

Άρα η C_f έχει **κατακόρυφη** ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $x = -2$.

Πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και στο $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+4+\frac{1}{2x+4}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x^2+16x+16+1}{2x+4}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{2x^2} = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(2x+4+\frac{1}{2x+4}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(4+\frac{1}{2x+4}\right) = 4$$

Άρα η C_f έχει **πλάγια ασύμπτωτη** στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y = 2x+4$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι η C_f έχει **πλάγια ασύμπτωτη** στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y = 2x+4$.

B3. Στο διάστημα $[0,1]$ είναι $f(x)\geq 0$, οπότε :

$$E=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(2x+4+\frac{1}{2x+4}\right)dx=\left[x^2+4x-\frac{1}{2}\ln(2x+4)\right]_0^1=$$

$$=1+4+\frac{\ln 6}{2}-\frac{\ln 4}{2}=\left(5+\frac{\ln 6}{2}-\ln 2\right)\text{τ.μ.}$$

157. **ΘΕΜΑ Β** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2005**

B1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$,

άρα

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\ \ (1)$$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\alpha+e^x\right)=\alpha+1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$
- $f(0)=0$

Άρα από την σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha+1=0\ \Leftrightarrow\ \alpha=-1.}}$$

B2.i. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot\ln x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$$

Άρα επειδή

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

η συνάρτηση f **δεν είναι παραγωγίσιμη** στο $x_0=0$.

ii. Είναι

$$f'(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ 1+\ln x, & x>0\end{cases}$$

Για $x<0$ είναι $f'(x)=e^x>0$.

Για $x>0$ είναι

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1+\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow 1+\ln x<0 \Leftrightarrow \ln x<-1 \Leftrightarrow 0<x<e^{-1}$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow 1+\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow x>e^{-1}$

x	$-\infty$ 0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$ 0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f είναι

- **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty,0]$ και $[e^{-1},+\infty)$
- και **γνησίως φθίνουσα** στο $[0,e^{-1}]$.

iii. Στο διάστημα $[1,e]$ είναι

$$f(x)=x\ln x\geq 0,$$

οπότε:

$$E=\int_1^e |f(x)|dx=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e x\ln x dx=\int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{x^2}{2}(\ln x)' dx=\frac{e^2}{2}-0-\int_1^e \frac{x}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e=$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4} \text{ τ.μ.}$$

158. **ΘΕΜΑ Β** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2007**

Β1. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα δύο παραγωγίσιμων στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεων με παράγωγο

$$h'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)+4e^{-4x}=e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)+4e^{-4x}=$$

$$=e^{-x}(-4e^{-3x})+4e^{-4x}=-4e^{-4x}+4e^{-4x}=0$$

Άρα η h είναι **σταθερή** στο $\mathbb{R}$.

Β2. Είναι $h(x)=e^{-x}f(x)-e^{-4x}$, οπότε:

$$h(0)=e^0 f(0)-e^0=1\cdot 2-1=1$$

Άρα επειδή η h είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, έχουμε

$$h(x)=1,\ \text{για κάθε}\ \ x\in\mathbb{R},$$

οπότε

$$\boxed{\mathbf{e^{-x}f(x)-e^{-4x}=1\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^{-4x}+1}{e^{-x}}\Leftrightarrow f(x)=e^{-3x}+e^{x}\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{e^{3x}}+e^{x}}}$$

B3. Είναι

$$I(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\left(\frac{1}{e^{3t}}+e^t\right)dt=\int_0^x\left(e^{-3t}+e^t\right)dt=\int_0^x e^{-3t}dt+\int_0^x e^t dt$$

$$=\left[-\frac{e^{-3t}}{3}\right]_0^x+\left[e^t\right]_0^x=-\frac{1}{3}e^{-3x}+\frac{1}{3}+e^x-1=e^x-\frac{1}{3}e^{-3x}-\frac{2}{3}$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{I(x)=e^x-\frac{1}{3}e^{-3x}-\frac{2}{3}}}$$

B3. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{I(x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-\frac{1}{3}e^{-3x}-\frac{2}{3}}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{3x^2e^{3x}}-\frac{2}{3x^2}\right)$$

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

Επίσης

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3x^2e^{3x}}=0\qquad\text{και}\qquad\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3x^2}=0$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{\lim_{x\to+\infty}\frac{I(x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2e^{3x}}-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3x^2}=+\infty}}$$

159. **ΘΕΜΑ Β** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2008**

B1. Είναι

$$f(x)=\frac{x+\ln x}{x}=1+\frac{\ln x}{x},\ \ x>0$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x)=\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'x-\ln x(x)'}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2},\ x>0$$

Είναι

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}>0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} 1-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<1 \Leftrightarrow 0<x<e$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}<0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} 1-\ln x<0 \Leftrightarrow \ln x>1 \Leftrightarrow x>e$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	Τ.Μ.	↘	

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0,e]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $[e,+\infty)$.

Παρουσιάζει ολικό **μέγιστο** για $x=e$, το $f(e)=\frac{e+1}{e}$.

B2. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\frac{(x+\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1}=1$$

επειδή είναι $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

B3. Είναι

$$I=\int_1^{e^2} f(x)dx\ \int_1^{e^2}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)dx=\int_1^{e^2}dx+\int_1^{e^2}\ln x(\ln x)'\,dx$$

$$=[x]_1^{e^2}+\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^{e^2}=e^2-1+\frac{\ln^2 e^2}{2}-\frac{\ln^2 1}{2}=e^2-1+\frac{4}{2}=e^2+1$$

B1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x) = (e^{2x} - 2x)' = 2e^{2x} - 2$$

Είναι

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} = 2 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} > 2 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} < 2 \Leftrightarrow e^{2x} < 1 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	f(0)=1	↗	

Από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι

Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty, 0]$ και **γνησίως αύξουσα** στο $[0, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** για $x = 0$, την τιμή $f(0) = 1$.

B2. Έχουμε

$$f''(x) = (2e^{2x} - 2)' = 4e^{2x} > 0,$$

άρα η συνάρτηση f είναι **κυρτή**.

B3. Έχουμε

- Προφανής ρίζα το 0, αφού $f(0) = 1$

- $x < 0 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 1$
- $x > 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 1$

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει **μοναδική ρίζα** το 0.

B4. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ είναι η $\varepsilon: y = 1$ και επειδή η f είναι **κυρτή**, η C_f βρίσκεται **πάνω** από την εφαπτομένη με **εξαίρεση** το σημείο επαφής,

άρα

$$f(x) \geq 1 \Leftrightarrow e^{2x} - 2x - 1 \geq 0.$$

Άρα

$$E(\Omega) = \int_0^1 [f(x) - 1]\,dx = \int_0^1 [e^{2x} - 2x - 1]\,dx =$$

$$=\left[\frac{e^{2x}}{2}-x^2-x\right]_0^1=\frac{e^2}{2}-2-\frac{1}{2}=\frac{e^2-5}{2}\ \text{τ.μ.}$$

161. **ΘΕΜΑ Β** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2014**

Β1. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=(0,+\infty)$, οπότε έχουμε

- $$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)=-\infty,\ \text{διότι}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

άρα η C_f έχει **κατακόρυφη ασύμπτωτη** την $x=0$ (δηλαδή τον άξονα $y'y$).
Επίσης έχουμε

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

άρα η C_f έχει **οριζόντια ασύμπτωτη** την $y=0$ (δηλαδή τον άξονα $x'x$).

Β2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

- $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0\Leftrightarrow 1-\ln x>0\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow x<e$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	f(e)=1/e	↘	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0,e]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $[e,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** το

$$f(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$$

Είναι

$$\boxed{\mathbf{f(x)\le\frac{1}{e}\underset{e>0}{\Leftrightarrow} e\cdot f(x)\le 1}},\ \text{για κάθε}\ \ x>0.$$

B3. Έχουμε

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}=0\Leftrightarrow\ln x=0\Leftrightarrow x=1.$$

Αναζητούμε το πρόσημο της f στο διάστημα $\left[\frac{1}{e},1\right]$,

οπότε έχομε

$$\frac{1}{e}\le x\le 1\overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(\frac{1}{e}\right)\le f(x)\le f(1)\overset{f(1)=0}{\Rightarrow} f(x)\le 0$$

Άρα

$$E(\Omega)=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}f(x)dx=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{\ln x}{x}dx\ =-\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}=-\frac{\cancel{\ln^2 1}}{\cancel{2}}+\frac{\ln^2\frac{1}{e}}{2}$$

$$=\frac{(\ln 1-\ln e)^2}{2}=\frac{(0-1)^2}{2}=\frac{1}{2}\ \ \text{τ.μ.}$$

162. **ΘΕΜΑ Β** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2015**

B1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $(0,+\infty)$, άρα πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι η ευθεία $x=0$ (ο άξονας yy').

Είναι

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)=-\infty-(+\infty)=-\infty-\infty=-\infty.$$

Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$.

Για να βρούμε αν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη υπολογίζουμε το

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)=+\infty-0=+\infty,$$

επομένως η C_f **δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη** στο $+\infty$.

B2. Έστω $x_1, x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$.

Είναι

$$x_1<x_2\Rightarrow\ln x_1<\ln x_2\quad(1)\ \ \text{και}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \quad (2).$$

Από (1) και (2) προκύπτει

$$f(x_1) < f(x_2)$$

επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$,

άρα αν έχει λύση, αυτή είναι μοναδική.

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και είναι και γνησίως αύξουσα, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα $(1, e)$ είναι το

$$\left(\lim_{x\to 1^+} f(x),\ \lim_{x\to e^-} f(x)\right).$$

Άρα το διάστημα $\left(-1,\, 1-\frac{1}{e}\right)$ αφού

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0-1=-1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to e^-} f(x) = 1-\frac{1}{e}.$$

Επομένως αφού περιέχεται στο σύνολο τιμών το 0 η γραφική παράσταση της f έχει τουλάχιστον ένα σημείο τομής με τον άξονα των x και αφού είναι γνησίως αύξουσα αυτό θα είναι μοναδικό.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

Εναλλακτικά

Εφαρμογή **θεωρήματος Bolzano** στο $[1, e]$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Είναι

$$f(1) = -1 < 0 \quad \text{και} \quad f(e) = 1-\frac{1}{e} > 0.$$

Οπότε $f(1)f(e) < 0$,

άρα από το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$x_0 \in (1, e) \quad \text{ώστε} \quad f(x_0) = 0.$$

B3. Για κάθε $x > e$ είναι

$$x > e \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x) > f(e) \overset{f(e)>0}{\Rightarrow} f(x) > 0.$$

Το ζητούμενο εμβαδό ισούται με

$$E(\Omega)=\int_{e}^{2e}|f(x)|dx \overset{f(x)>0}{=} \int_{e}^{2e} f(x)dx = \int_{e}^{2e}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)dx = \int_{e}^{2e}\ln x dx-\int_{e}^{2e}\frac{1}{x}dx$$

$$= \int_{e}^{2e}(x)'\ln x\, dx-[\ln x]_{e}^{2e} = [x\ln x]_{e}^{2e}-\int_{e}^{2e}x(\ln x)'dx-\ln 2e+\ln e$$

$$=2e\ln 2e-e\ln e-\int_{e}^{2e}x\frac{1}{x}dx-\ln 2e + \ln e$$

$$=2e\ln 2e-e-\int_{e}^{2e}1dx-\ln 2e + 1 = 2e\ln 2e-e-[x]_{e}^{2e}-\ln 2e+1$$

$$=2e\ln 2e-e-2e + e-\ln 2e + 1 = 2e\ln 2e-\ln 2e-2e+1$$

$$=2e(\ln 2 + \ln e)-(\ln 2 + \ln e)-2e + 1$$

$$=2e\ln 2 + 2e\ln e-\ln 2-\ln e-2e + 1 =$$

$$=2e\ln 2 + 2e-\ln 2-1-2e + 1 = (2e-1)\ln 2 \ \text{τ.μ.}$$