# 11ο ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

**11ο** **ΘΕΜΑ Β** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

**B1.** Είναι

$$g'(x)=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{f'(x)x-f(x)(x)'}{x^2}=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} \quad \text{και}$$

$$g''(x)=\frac{\left(xf'(x)-f(x)\right)'x^2-\left(xf'(x)-f(x)\right)\left(x^2\right)'}{x^4}=$$

$$=\frac{xf''(x)x^2-2x\left(xf'(x)-f(x)\right)}{x^4}=$$

$$=\frac{x^2f''(x)-2xf'(x)+2f(x)}{x^3}>0$$

για κάθε $x>0$, (αφού για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$x^2f''(x)-2xf'(x)+2f(x)>0 \text{ και } x^3>0).$$

Επομένως, η $g$ είναι **κυρτή** στο $\mathbb{R}_+^*$.

**B2.** Επειδή είναι $g''(x)>0$ για κάθε $x>0$, έπεται ότι η $g'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Ακόμη είναι

$$g'(1)=\frac{1\cdot f'(1)-f(1)}{1^2}=f'(1)-f(1)=1-1=0.$$

Επειδή η $g'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ έπεται ότι

1) για κάθε $x>1$ ισχύει $g'(x)>g'(1)=0$,

2) για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει $g'(x)<g'(1)=0$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | min | ↗ | |

Από το πρόσημο της $g'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα προκύπτει ότι

- η $g$ είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $[0,1]$ και **γνησίως αύξουσα** στο $[1,+\infty)$.
- η $g$ παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ **(ολικό) ελάχιστο** το

$$g_{min} = g(1) = \frac{f(1)}{1} = 1.$$

**B3.** Επειδή η $g$ έχει ελάχιστο, έπεται ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$g(x) \geq g_{min} \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \geq 1 \overset{(x>0)}{\Rightarrow} f(x) \geq x.$$

**B4.** Επειδή η $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, έπεται ότι η $g$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** σε καθένα από τα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (1,2)$ και $\xi_2 \in (2,3)$, ώστε

$$g'(\xi_1) = \frac{g(2)-g(1)}{2-1} = g(2)-g(1) = \frac{f(2)}{2} - \frac{f(1)}{1} \overset{(f(1)=1)}{=} \frac{f(2)}{2} - 1 \text{ και}$$

$$g'(\xi_2) = \frac{g(3)-g(2)}{3-2} = g(3)-g(2) = \frac{f(3)}{3} - \frac{f(2)}{2}$$

Έχουμε, όμως

$$1 < \xi_1 < 2 < \xi_2 < 3 \Rightarrow 0 < \xi_1 < \xi_2 \overset{(g' \mathbf{1}\ \mathbb{R}_+^*)}{\Rightarrow} g'(\xi_1) < g(\xi_2),$$

$$\Rightarrow \frac{f(2)}{2} - 1 < \frac{f(3)}{3} - \frac{f(2)}{2} \Rightarrow.$$

$$\boxed{\mathbf{f(2) < 1 + \frac{f(3)}{3}}}$$

**11ο** **ΘΕΜΑ Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

**Γ1.** Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$xf'(x) = \frac{x+1}{1+e^{f(x)}} \Leftrightarrow xf'(x)\left(1+e^{f(x)}\right) = x+1$$

$$\Leftrightarrow f'(x) + e^{f(x)}f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$\overset{(x>0)}{\Leftrightarrow}\left(f(x)+e^{f(x)}\right)'=(x+\ln x)'$$

$$\Leftrightarrow f(x)+e^{f(x)}=x+\ln x+c,\ (c\in\mathbb{R})$$

Για $x=1$ έχουμε:

$$f(1)+e^{f(1)}=1+\ln 1+c\overset{(f(1)=0)}{\Leftrightarrow}0+e^{0}=1+c\Leftrightarrow c=0$$

Άρα για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$\boxed{\mathbf{f(x)+e^{f(x)}=x+\ln x:(1)}}$$

**Γ2.** Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=x+e^{x},x\in\mathbb{R}$$

Είναι

$$g'(x)=1+e^{x}>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

οπότε η $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως, η $g$, ως γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της $Dg=\mathbb{R}$, είναι συνάρτηση $1-1$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}_{+}^{*}$ έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow f(x)+e^{f(x)}=\ln x+e^{\ln x}$$

$$\Leftrightarrow g(f(x))=g(\ln x)$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\ln x\quad,(g:1-1)$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{f(x)=\ln x,\ x>0}}$$

**Γ3.** Είναι

$$f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x},\ x>0.$$

Η εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) της $Cf$ στο σημείο της $M(x_0,f(x_0)),(x_0>0)$, είναι

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\bullet(x-x_0)$$

$$\Leftrightarrow y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)\Leftrightarrow y=\frac{1}{x_0}x+\ln x_0-1$$

Για να διέρχεται η (ε) από το σημείο $(0,0)$ πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$0=\frac{1}{x_0}\cdot 0+\ln x_0-1$$

$$\Leftrightarrow \ln x_0=1\Leftrightarrow x_0=e$$

Για $x_0=e$ η εξίσωση της (ε) γίνεται $y=\frac{1}{e}x$

Άρα

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon: y=\frac{1}{e}x}}$$

είναι η ζητούμενη εφαπτομένη της $C_f$.

**11ο** **Θ Ε Μ Α Δ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

**Δ1.** $f'(x)=\alpha-e^{-x}:(1)$ $\qquad f(x)\geq f(-1):(2)$

Επειδή ισχύει η (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έπεται ότι η $f$ παρουσιάζει στο $x_0=-1$ ελάχιστο, οπότε σύμφωνα με το **Θ. Fermat** ισχύει:

$$f'(-1)=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\alpha-e^{-(-1)^3}=0\Leftrightarrow\alpha-e=0\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha=e}}$$

**Δ2.** Για $\alpha=e$ είναι :

$$f'(x)=e-e^{-x^3},\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε:

- $f'(x)>0\Leftrightarrow e-e^{-x^3}>0\Leftrightarrow e^{-x^3}<e^1\overset{(e^x\ \mathbf{1}\mathbb{R})}{\Leftrightarrow}-x^3<1$

$$\Leftrightarrow x^3>-1\Leftrightarrow x^3>(-1)^3\Leftrightarrow x>-1$$

- $f'(x)<0\Leftrightarrow x<-1$
- $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

Από το πρόσημο της $f'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα προκύπτει ότι η $f$ είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty,-1]$ και **γνησίως αύξουσα** στο $[-1,+\infty)$.

**Δ3.** Είναι

$$f''(x)=\left(e-e^{-x^3}\right)'=0-e^{-x^3}\left(-3x^2\right)=3x^2e^{-x^3}$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ είναι $f''(x)>0$ και $f''(0)=0$,

οπότε η $f'$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | ↗ | | ↗ | |

**Δ4.** Επειδή η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η $f$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
Η εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) της $C_f$ στο σημείο της $A(0,f(0))$ είναι

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\overset{(f'(0)=e-1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow y-f(0)=(e-1)x\Leftrightarrow y=(e-1)x+f(0)$$

Επειδή η $f$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η $C_f$ βρίσκεται πάνω από την εφαπτόμενή της ευθεία $(\varepsilon)$ σε όλο το $\mathbb{R}$ με εξαίρεση το κοινό σημείο επαφής τους $A(0,f(0))$.
Δηλαδή ισχύει

$$\boxed{\mathbf{f(x)\geq(e-1)x+f(0)}}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x=0$.

**Δ5.** Επειδή η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η $f$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ** στο διάστημα $[x,x+1]$,

οπότε υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=f(x+1)-f(x):(3)$$

Έχουμε όμως

$$x<\xi<x+1\overset{(f'\mathbf{1}\ \mathbb{R})}{\Rightarrow}f'(x)<f'(\xi)<f'(x+1)$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow}f'(x)<f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\boxed{\mathbf{f'(x)<f(x+1)-f(x)<f'(x+1):(4)}}$$

**Δ6.** Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e-e^{-x^3}\right)=e-0=e \text{ και } \lim_{x\to+\infty} f'(x+1) \overset{\left(\substack{\omega=x+1\\ \lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty}\right)}{\Rightarrow} \lim_{\omega\to+\infty} f'(\omega)=e,$$

οπότε , λόγω της (4), προκύπτει ότι

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\mathbf{f(x+1)-f(x)}\right)=\mathbf{e}} \text{ (κριτ. Παρεμβ.).}$$

# 12ο ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

**12ο** **ΘΕΜΑ Β** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

**B1.** Για κάθε $x\geq 1$ ισχύει:

$$(x+1)f(x)+x(x+\ln x)f'(x)=x$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x}(x+1)f(x)+(x+\ln x)f'(x)=1$$
$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)+(x+\ln x)f'(x)=1$$
$$\Rightarrow (x+\ln x)'f(x)+(x+\ln x)(f(x))'=1$$
$$\Rightarrow ((x+\ln x)f(x))'=(x)'$$
$$\Rightarrow (x+\ln x)f(x)=x+c,\ (c\in\mathbb{R} \text{ σταθερά}).$$

Για $x=1$ έχουμε:

$$(1+\ln 1)f(1)=1+c \overset{(f(1)=1)}{\Leftrightarrow} 1=1+c \Leftrightarrow c=0$$

Άρα για κάθε $x\geq 1$ ισχύει :

$$(x+\ln x)f(x)=x \quad \mathbf{(1)}$$

Για κάθε $x\geq 1$ είναι:

$$x\geq 1 \overset{(\ln x\uparrow 1)}{\Rightarrow} \begin{cases} x\geq 1 \\ \ln x\geq \ln 1=0 \end{cases} \Rightarrow x+\ln x\geq 1>0 \Rightarrow x+\ln x\neq 0,$$

οπότε από την **(1)** έχουμε:

$$\boxed{\mathbf{f(x)=\frac{x}{x+\ln x}}},\ x\ge 1.$$

**B2.** Είναι:

$$f'(x)=\frac{(x)'(x+\ln x)-x(x+\ln x)'}{(x+\ln x)^2}=\frac{x+\ln x-x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{(x+\ln x)^2}=\frac{\ln x-1}{(x+\ln x)^2}.$$

Έχουμε:

- $$\begin{cases} f'(x)>0 \\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\ln x-1}{(x+\ln x)^2}>0 \\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln x>1 \\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln x>\ln e \\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>e \\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow x>e$$
- $$\begin{cases} f'(x)<0 \\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x<e$$
- $$\begin{cases} f'(x)=0 \\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow x=e$$

Από το πρόσημο της $f'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα προκύπτει ότι

η $f$ είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $[1,e]$ και **γνησίως αύξουσα** στο $[e,+\infty)$.

Η $f$ παρουσιάζει (μόνο) στο $x_1=e$ **ολικό ελάχιστο**, το $f(e)=\dfrac{e}{e+1}$ και (μόνο) στο $x_2=1$ **τοπικό μέγιστο** το οποίο είναι το $f(1)=1$.

Σημείωση

Είναι :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+\ln x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(x+\ln x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+0}=1,$$

οπότε το $f(1)=1$ είναι ολικό μέγιστο της $f$.

**B3.** Είναι:

$$f(1)=1, \qquad f(e)=\frac{e}{e+1},$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+\ln x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to 6\infty}\frac{(x)'}{(x+\ln x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+0}=1.$$

Επειδή η $f$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[1,e]$ έπεται ότι

$$f([1,e])=[f(e),f(1)]=\left[\frac{e}{e+1},1\right].$$

Επειδή η $f$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$ έπεται ότι

$$f([e,+\infty))=\left[f(e),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=\left[\frac{e}{e+1}\ ,1\right).$$

Το **σύνολο τιμών** της $f$ είναι το

$$\boxed{\mathbf{f([1,+\infty))=f([1,e])\cup f([e,+\infty))=\left[\frac{e}{e+1},1\right]\cup\left[\frac{e}{e+1}\ ,1\right)=\left[\frac{e}{e+1},1\right]}}.$$

**B4.** Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right|=|x|\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le|x|\cdot 1=|x|\overset{(x>0)}{=}x\Rightarrow -x\le x\eta\mu\frac{1}{x}\le x:\ \mathbf{(5)}$$

Είναι

$$\lim_{x\to 0^+}(-x)=0 \text{ και } \lim_{x\to 0^+}x=0,$$

οπότε λόγω της **(5)** προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$ . **(κριτήριο παρεμβολής)**

Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0 \text{ και } \lim_{x\to 0^+}(x+\ln x)=-\infty.$$

(αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$ ),

οπότε

$$\boxed{\mathbf{\lim_{x\to 0^+}\frac{x\eta\mu\frac{1}{x}}{x+\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x+\ln x}\right)=0\cdot 0=0}}$$

**12ο** **Θ Ε Μ Α Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

**Γ1.** $f'(x)f(-x)=x$ : **(1).** Από την **(1)** θέτοντας όπου $x$ το $-x$, έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει :

$$f'(-x)f(x)=-x \quad : \mathbf{(2)}.$$

Για κάθε $x\neq 0$ είναι

$$f'(-x)f(x)=-x\neq 0\Rightarrow f(x)\neq 0.$$

Ακόμη είναι $f(0)=1\neq 0$, οπότε τελικά ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η $f$ ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και επειδή ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έπεται ότι η $f$ διατηρεί στο $\mathbb{R}$ σταθερό πρόσημο και επειδή είναι $f(0)=1>0$ συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{\mathbf{f(x)>0}}.$$

**Γ2.** Από **(1)** και **(2)** με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)f(-x)+f'(-x)f(x)=0\Leftrightarrow (f(x))'f(-x)-f(x)(f(-x))'=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(f(x))'f(-x)-f(x)(f(-x))'}{(f(-x))^2}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{f(-x)}\right)'=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{f(-x)}=c \qquad (c\in\mathbb{R} \text{ σταθερά})$$

$$\Leftrightarrow f(x)=cf(-x) \quad : \mathbf{(3)}$$

Από την **(3)** για $x=0$ έχουμε

$$f(0)=c\cdot f(-0)\Leftrightarrow 1=c\cdot 1\Leftrightarrow c=1.$$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(-x)=f(x) \quad : \mathbf{(4)}.$$

Από την **(1)**, λόγω της **(4)**, έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει :

$$f'(x)\cdot f(x)=x\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=2x\Leftrightarrow (f^2(x))'=(x^2)'$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)=x^2+c_1 \ , (c_1\in\mathbb{R} \text{ σταθερά}).$$

Για $x=0$ έχουμε:

$$f^2(0)=0^2+c_1 \Leftrightarrow 1^2=c_1 \Leftrightarrow c_1=1.$$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^2(x)=x^2+1 \Leftrightarrow |f(x)|=\sqrt{x^2+1} \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)=\sqrt{x^2+1}\ ,\ x\in\mathbb{R}.$$

Άρα είναι

$$\boxed{\mathbf{f(x)=\sqrt{x^2+1}}},\ x\in\mathbb{R}. \qquad \text{(ικανοποιεί την υπόθεση)}$$

**Γ3.** $f(x)+f(2013x)=f(2x)+f(2014x)$ : **(Ε)**

Είναι

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ ,\ x\in\mathbb{R}.$$

Για κάθε $x>0$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}>0\ .$$

Για κάθε $x<0$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}<0\ ,$$

και είναι $f'(0)=0$ .

Έτσι η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $x_0=0$ επαληθεύει την εξίσωση **(Ε)**, αφού ισχύει:

$$f(0)+f(2013\cdot 0)=f(2\cdot 0)+f(2014\cdot 0)\ \ (=2f(0))$$

Έστω $\mathbf{x>0}$.

Έχουμε:

$$x>0 \Rightarrow \begin{cases} 0<x<2x \\ 0<2013x<2014x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)<f(2x) \\ f(2013x)<f(2014x) \end{cases} ,\left(\text{αφού } f \text{ γν αύξ } [0,+\infty)\right)$$

$$\Rightarrow f(x)+f(2013x)<f(2x)+f(2014x).$$

Επομένως στο $(0,+\infty)$ η εξίσωση **(Ε)** δεν έχει λύσεις .

Έστω $\mathbf{x<0}$.

Έχουμε

$$x<0\Rightarrow\begin{cases}2x<x<0\\2014x<2013x<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(2x)>f(x)\\f(2014x)>f(2013x)\end{cases},\left(\text{αφού } f \text{ γν.φθίν } (-\infty,0]\right)$$

$$\Rightarrow f(x)+f(2013x)<f(2x)+f(2014x)$$

Επομένως στο $(-\infty,0)$ η εξίσωση **(Ε)** δεν έχει λύση.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εξίσωση **(Ε)** έχει **ακριβώς μια ρίζα** στο $\mathbb{R}$, τον αριθμό $x_0=0$.

**Γ4.** Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\overset{(x>0)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{1+0}=1=\lambda\in\mathbb{R} \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=0\in\mathbb{R}$$

$$(\text{αφού } \lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\overset{(+\infty)+(+\infty)}{=}+\infty).$$

Επομένως η ευθεία **ε:** $y=1\cdot x+0$ δηλαδή η ευθεία **ε:** $y=x$ είναι **(πλάγια) ασύμπτωτη** της $C_f$ στο $+\infty$.

**Γ5.** Για κάθε $x<0$ έχουμε:

$$\left(2f(x)-f(2x)\right)x^2\eta\mu\left(\frac{\pi}{x}\right)=\left(2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{4x^2+1}\right)x^2\eta\mu\left(\frac{\pi}{x}\right)=$$

$$=\frac{4\left(x^2+1\right)-\left(4x^2+1\right)}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{4x^2+1}}x^2\eta\mu\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

$$=\frac{3}{2|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}x^2\eta\mu\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

$$\overset{(x<0)}{=}\frac{3}{2(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+(-x)\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}x^2\eta\mu\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

$$=-\frac{3}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}x\eta\mu\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

$$=-\frac{3\pi\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{\pi}{x}}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}$$

Είναι :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{\pi}{x}}\overset{\left(\begin{array}{c}u=\frac{\pi}{x}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi}{x}\right)=0\end{array}\right)}{=}\lim_{u\to0^-}\frac{\eta\mu u}{u}=1\ ,$$

οπότε

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\left(2f(x)-f(2x)\right)x^2\eta\mu\left(\frac{\pi}{x}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{3\pi\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{\pi}{x}}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}\right)=$$

$$=-\frac{3\pi.1}{2\sqrt{1+0}+\sqrt{4+0}}=-\frac{3\pi}{4}$$

**12ο** **ΘΕΜΑ Δ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

**Δ1.** Είναι :

- $L=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$

..

- $N=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\cdot\frac{f(2x)}{2x}-\frac{f(x)}{x}\right)=2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{2x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

  $=2\cdot2013-2013=2013$

$$\left(\text{ είναι } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{2x}\overset{\left(\substack{\omega=2x\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty}\right)}{=}\lim_{\omega\to+\infty}\frac{f(\omega)}{\omega}=2013\right)$$

- $$P=\lim_{x\to0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(f(2x)-f(0)\right)-\left(f(x)-f(0)\right)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(2\frac{f(2x)-f(0)}{2x}-\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)=2\cdot1-1=1$$

(Είναι

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=L=1 \text{ και } \lim_{x\to0}\frac{f(2x)-f(0)}{2x}\overset{\left(\substack{\omega=2x\\ \lim\limits_{x\to0}(2x)=0}\right)}{=}\lim_{\omega\to0}\frac{f(\omega)-f(0)}{\omega}=L=1\ )$$

**Δ2.** Επειδή η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_+$ έπεται ότι για $x>0$ η $f$ είναι συνεχής στο $[x,2x]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,2x)$.

Άρα η $f$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ** στο $[x,2x]$,

οπότε υπάρχει $\xi\in(x,2x)$, ώστε

$$\boxed{f'(\xi)=\frac{f(2x)-f(x)}{2x-x}\Rightarrow f(2x)-f(x)=xf'(\xi)\Rightarrow f(2x)=f(x)+xf'(\xi)}$$

**Δ3.** Είναι:

$$g'(x)=\left(\frac{f(2x)-f(x)}{x}\right)'=\frac{\left(f(2x)-f(x)\right)'x-\left(f(2x)-f(x)\right)(x)'}{x^2}$$
$$=\frac{x\left(2f'(2x)-f'(x)\right)-\left(f(2x)-f(x)\right)}{x^2}$$

Λόγω του (2) ερωτήματος έχουμε ότι

υπάρχει $\xi\in(0,x)$, ώστε

$$f(2x)-f(x)=xf'(\xi),$$

οπότε έχουμε

$$g'(x)=\frac{x\left(2f'(2x)-f'(x)\right)-xf'(\xi)}{x^2}=\frac{2f'(2x)-f'(x)-f'(\xi)}{x},\ x>0.$$

Επειδή η $f$ είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}_+$ έπεται ότι η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}_+^*=(0,+\infty)$.

Έτσι έχουμε:

$$0<x<\xi<2x \Rightarrow \begin{cases} 2x>x>0 \\ 2x>\xi>0 \end{cases} \overset{(f'\mathbf{1}\,(0,+\infty))}{\Rightarrow} \begin{cases} f'(2x)>f'(x) \\ f'(2x)>f'(\xi) \end{cases}$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow} 2f'(2x)>f'(x)+f'(\xi) \Rightarrow 2f'(2x)-f'(x)-f'(\xi)>0$$

$$\overset{(x>0)}{\Rightarrow} \frac{2f'(2x)-f'(x)-f'(\xi)}{x}>0 \Rightarrow g'(x)>0$$

Επειδή είναι $g'(x)>0$ για κάθε $x>0$ έπεται ότι η $g$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0,+\infty)$.

**Δ4.** Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$0<x<2x \Rightarrow g(x)<g(2x) \text{ , } \left(\text{αφού } g\mathbf{1}\ (0,+\infty)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{f(2x)-f(x)}{x}<\frac{f(2(2x))-f(2x)}{2x}$$

$$\overset{x>0}{\Rightarrow} 2\left(f(2x)-f(x)\right)<f(4x)-f(2x)$$

$$\Rightarrow 2f(2x)-2f(x)<f(4x)-f(2x)$$

$$\Rightarrow 2f(x)+f(4x)>3f(2x)$$

**Δ5.** Επειδή η συνάρτηση $g$ είναι

γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(0,+\infty)$

έπεται ότι

$$g\left((0,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to 0^+} g(x), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right).$$

Είναι όμως

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=P=1$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=N=2013,$$

οπότε

$$f\left((0,+\infty)\right)=(1,2013)\ .$$

Επειδή είναι

$$f\left((0,+\infty)\right)=(1,2013)$$

έπεται ότι για κάθε $x>0$ ισχύει

$$g(x)\in g((0,+\infty))=(1,2013)\Rightarrow 1<g(x)<2013$$

$$\Rightarrow 1<\frac{f(2x)-f(x)}{x}<2013$$

$$\overset{(x>0)}{\Rightarrow} x<f(2x)-f(x)<2013x$$

$$\Rightarrow x+f(x)<f(2x)<2013x+f(x)$$

# 13ο ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

**13ο** **ΘΕΜΑ Β** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

**B1.** i. Η συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x)=\left[4(f(x)-x)^2+(f'(x)-1)^2\right]'=$$

$$=8(f(x)-x)(f(x)-x)'+2(f'(x)-1)(f'(x)-1)'=$$

$$=8(f(x)-x)(f'(x)-1)+2(f'(x)-1)f''(x)$$

$$=2(f'(x)-1)\left[4(f(x)-x)+f''(x)\right]=2(f'(x)-1)(f''(x)+4f(x)-4x)$$

$$=2(f'(x)-1)\cdot 0=0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$g'(x)=0,$$

έπεται ότι η $g$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

**ii.** Επειδή η $g$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$g(x)=g(0)\Leftrightarrow 4(f(x)-x)^2+(f'(x)-1)^2=4(f(0)-0)^2+(f'(0)-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4(f(x)-x)^2+(f'(x)-1)^2=4.0^2+(1-1)^2=0$$

$$\overset{\left(\begin{smallmatrix}4(f(x)-x)^2\geq 0\\ (f'(x)-1)^2\geq 0\end{smallmatrix}\right)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}4(f(x)-x)^2=0\\ (f'(x)-1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=x\\ f'(x)=1\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=x$$

Άρα είναι

$$\boxed{\mathbf{f(x)=x,\ \ x\in\mathbb{R}}}.$$

**B2.** **i.** Είναι

$$f'(x)=\left(x^3-2x^2+2x\right)'=3x^2-4x+2$$

Η διακρίνουσα του τριώνυμου $3x^2-4x+2$ είναι

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot 3\cdot 2=16-24=-8<0$$

και ο συντελεστής του $x^2$ είναι το $3>0$.

Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $3x^2-4x+2>0$,

δηλαδή ισχύει

$$f'(x)=3x^2-4x+2>0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

οπότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

**ii.** Έστω ότι είναι $\alpha\neq\beta$, τότε θα είναι $\alpha>\beta$ ή $\alpha<\beta$ .

Έστω $\alpha>\beta$, τότε θα έχουμε:

$$\alpha>\beta\Rightarrow f(\alpha)>f(\beta)\ ,\ (\text{αφού η f είναι γν. αύξουσα στο}\,\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow\beta>\alpha,\ (\text{αφού } f(\alpha)=\beta \text{ και } f(\beta)=\alpha)$$

$$\Rightarrow\alpha<\beta,\ \text{ΑΤΟΠΟ, αφού υποθ. ότι } \alpha>\beta.$$

Ομοίως, σε άτοπο καταλήγουμε, αν υποθέσουμε ότι $\alpha<\beta$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha=\beta}}$$

**13ο** **Θ Ε Μ Α Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

$$\left(f'(x)\right)^2+\left(f''(x)\right)^3=e^{2x}+e^{3x}:(1)$$

$$f'(0)=1$$

**Γ1.** Έστω ότι η $f$ παρουσιάζει στο $x_0\in\mathbb{R}$ καμπή, τότε , δεδομένου ότι η $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ , θα είναι $f''(x_0)=0$

Από την (1) παραγωγίζοντας τα μέλη της ως προς x έχουμε:

$$2f'(x)f''(x)+3\left(f''(x)\right)^2f'''(x)=2e^{2x}+3e^{3x}:(2)$$

Από τη (2) για $x=x_0$ έχουμε :

$$2f'(x_0)f''(x_0)+3(f''(x_0))^2 f'''(x_0)=2e^{2x_0}+3e^{3x_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f'(x_0)\cdot 0+3\cdot 0^2\cdot f'''(x_0)=2e^{2x_0}+3e^{3x_0} \Rightarrow 2e^{2x_0}+3e^{3x_0}=0,$$

ΑΤΟΠΟ, αφού είναι $2e^{2x_0}+3e^{3x_0}>0$.

Επομένως, η $C_f$ **δεν έχει σημείο καμπής**.

**Γ2.** Έχουμε:

$$(2)\Rightarrow f''(x)\left(2f'(x)+3f''(x)f'''(x)\right)=2e^{2x}+3e^{3x}:(3)$$

Από την (3) και επειδή είναι $2e^{2x}+3e^{3x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, προκύπτει ότι $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επειδή η $f''$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (αφού η $f''$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$) και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)\neq 0$,

έπεται ότι η $f''$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Από την (1) για $x=0$ έχουμε

$$(f'(0))^2+(f''(0))^3=e^{2\bullet 0}+e^{3\bullet 0}$$

$$\overset{(f'(0)=1)}{\Rightarrow} 1^2+(f''(0))^3=2\Rightarrow (f''(0))^3=1\Rightarrow f''(0)=1$$

Επειδή είναι $f''(0)=1>0$ και η $f''$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι είναι

$$f''(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Επομένως, η $f$ είναι **κυρτή** στο $\mathbb{R}$.

**Γ3.** Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=f(x)+f(\alpha+\beta-x), x\in\mathbb{R}$$

Είναι

$$g'(x)=f'(x)+f'(\alpha+\beta-x)\cdot(\alpha+\beta-x)'=$$

$$=f'(x)-f'(\alpha+\beta-x)$$

Επειδή η $f$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, έχουμε ότι η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$g'(x)>0\Leftrightarrow f'(x)-f'(\alpha+\beta-x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>f'(\alpha+\beta-x)$$

$$\Leftrightarrow x>\alpha+\beta-x \text{ , (αφού η } f' \text{ είναι γνη. αύξουσα στο } \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow 2x>\alpha+\beta\Leftrightarrow x>\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$g'(x)<0 \Leftrightarrow x<\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{\alpha+\beta}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | |

Από το πρόσημο της $g'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει ότι

η $g$ είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\left(-\infty,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και **γνησίως αύξουσα** στο

$\left[\frac{\alpha+\beta}{2},+\infty\right)$,

οπότε η $g$ παρουσιάζει στο $x_0=\frac{\alpha+\beta}{2}$ **ελάχιστο**, το οποίο είναι το

$$g_{min}=g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)= =f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+f\left(\alpha+\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$g(x)\geq g_{min} \Leftrightarrow f(x)+f(\alpha+\beta-x)\geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

**13ο** **Θ Ε Μ Α Δ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

**Δ1.** Επειδή η ευθεία $\varepsilon: y=2x+5$ είναι ασύμπτωτης της $C_f$ στο $+\infty$, έπεται ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2:(1) \text{ και } \lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=5:(2).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=f(x)-2x:(3).$$

Λόγω της (2) έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=5.$$

Από την (3) έχουμε

$$f(x)=h(x)+2x. \text{ Είναι } f(x+1)-f(x)=$$

$$=h(x+1)+2(x+1)-(h(x)+2x)=$$
$$=h(x+1)-h(x)+2$$

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=5 \text{ και } \lim_{x\to+\infty} h(x+1) \overset{\left(\underset{x\to+\infty}{\lim}(x+1)=+\infty\right)}{\overset{\omega=x+1}{=}} \lim_{\omega\to+\infty} h(\omega)=5,$$

οπότε είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(h(x+1)-h(x)+2\right)=$$
$$=5-5+2=2.$$

Άρα

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=2}$$

**Δ2.** Έχουμε:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(f(x))^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 \underset{=}{\overset{(1)}{}} 2^2=4\in\mathbb{R} \text{ και}$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(f(x))^2}{x}-4x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(f(x))^2-4x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(f(x)-2x)(f(x)+2x)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[(f(x)-2x)\left(\frac{f(x)}{x}+2\right)\right]\overset{((1),(2))}{=}5\cdot(2+2)=20\in\mathbb{R}$$

Επομένως, η ευθεία $\zeta: y=4x+20$ είναι η **ασύμπτωτη** της $C_g$ στο $+\infty$.

**Δ3.** Επειδή η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι για οποιοδήποτε $\mathbf{x}\in\mathbb{R}$ η $f$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[x-1,x],[x,x+1]$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(x-1,x),(x,x+1)$,

οπότε η $f$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** σε καθένα από τα διαστήματα

$$[x-1,x] \text{ και } [x,x+1].$$

Άρα υπάρχουν $x_1\in(x-1,x)$ και $x_2\in(x,x+1)$ τέτοιοι, ώστε

$$f'(x_1)=\frac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}=f(x)-f(x-1):(\alpha)\ \text{και}$$

$$f'(x_2)=\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=f(x+1)-f(x):(\beta)$$

Επειδή η $f$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Έχουμε

$$x-1<x_1<x<x_2<x+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x_1)<f'(x)<f'(x_2)\ \ (\text{αφού } f'\ \mathbf{1}\ \ \mathbb{R})$$

$$\overset{(\alpha),(\beta)}{\Rightarrow} f(x)-f(x-1)<f'(x)<f(x+1)-f(x):(\Sigma)$$

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=2\ \ (\text{από το } 1^{\text{ο}} \text{ ερώτημα})$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-f(x-1)\right)\overset{\left(\substack{\varphi=x-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\\ x=\varphi+1}\right)}{=}\lim_{\kappa\to+\infty}\left(f(\varphi+1)-f(\varphi)\right)=2\,,$$

οπότε ,λόγω της (Σ) και του **κριτηρίου παρεμβολής** , προκύπτει ότι

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f'(x)=2}.$$

**Δ4.** Θεωρούμε την συνάρτηση

$$H(x)=f(x+1)-f(x)\,,\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Είναι

$$H'(x)=\left(f(x+1)-f(x)\right)'$$
$$=f'(x+1)(x+1)'-f'(x)$$
$$=f'(x+1)-f'(x)$$

Έχουμε :

$$x+1>x\overset{(f'\ \text{γν.αύξ}\ \mathbb{R})}{\Rightarrow}f'(x+1)>f'(x)$$
$$\Rightarrow f'(x+1)-f'(x)>0$$
$$\Rightarrow H'(x)>0$$

Επομένως η

$$H(x)=f(x+1)-f(x)\,,\ x\in\mathbb{R}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επειδή η $H(x)$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε

$$H(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}H(x)\,,\ \lim_{x\to+\infty}H(x)\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}H(x)\,,2\right)\ ,$$

$$\text{αφού}\ \lim_{x\to+\infty}H(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=2\ .$$

Έτσι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει :

$$H(x)\in H(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}H(x),2\right)\Rightarrow H(x)<2$$

$$\Rightarrow f(x+1)-f(x)<2$$

# 14ο ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

**14ο** **ΘΕΜΑ Β** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

**B1.i.**
- $f(x)+e^{f(x)}=(x+1)e^{-x}:(1)$
- $x+e^{x}=1:(E)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=x+e^{x}-1, x\in\mathbb{R}.$$

Η εξίσωση (E) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $g(x)=0$.

Είναι

$$g'(x)=\left(x+e^{x}-1\right)'=1+e^{x}>0 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

οπότε η $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $g(0)=0+e^{0}-1=1-1=0$,

οπότε ο αριθμός $x_0=0$ είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$ και

μάλιστα μοναδική στο $\mathbb{R}$, αφού η είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση (E) έχει **ακριβώς μία λύση** στο $\mathbb{R}$, τον αριθμό $x_0=0$.

**ii.** Από την (1) παραγωγίζοντας τα μέλη της ως προς $x$ έχουμε:

$$\left(f(x)+e^{f(x)}\right)'=\left[(x+1)e^{-x}\right]'\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)+e^{f(x)}f'(x)=1\cdot e^{-x}+(x+1)\left(-e^{-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\left(1+e^{f(x)}\right)=-xe^{-x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{-x\cdot e^{-x}}{1+e^{f(x)}}\ ,\ \left(\text{αφού } 1+e^{f(x)}>0\right)$$

Έχουμε :

- $f'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{-xe^{-x}}{1+e^{f(x)}}>0\Leftrightarrow -x>0\Leftrightarrow x<0$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow x>0$
- $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

| x | $-\infty$ | | **0** | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f΄(x) | | + | 0 | − | |
| f(x) | | ↗ | max | ↘ | |

Από το πρόσημο της $f'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα προκύπτει ότι

η $f$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty,0]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $[0,+\infty)$.

Ακόμη, η $f$ παρουσιάζει στο $x_0=0$ **ολικό μέγιστο**, το οποίο είναι το $f_{max}=f(0)$

**iii.** Από την (1) για $x=0$ έχουμε

$$f(0)+e^{f(0)}=(0+1)e^{-0}\Leftrightarrow f(0)+e^{f(0)}=1:(\alpha)$$

Επειδή η εξίσωση $x+e^{x}=1$ έχει μία μόνο λύση στο $\mathbb{R}$, τον αριθμό $x_0=0$,

έπεται (λόγω της (α)) ότι είναι $f(0)=0$.

Άρα το ολικό μέγιστο της $f$ είναι το $f_{max}=f(0)=0$,

οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x)\le f_{max}=0.$$

Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{\mathbf{f(x)\le 0}}$$

**B2.i.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f''(x)=g''(x)\Leftrightarrow(f'(x))'=(g'(x))'\Leftrightarrow f'(x)=g'(x)+C_1,(C_1\in\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow(f(x))'=(g(x)+C_1x)'\Leftrightarrow f(x)=g(x)+C_1x+C_2\ ,(C_2\in\mathbb{R})$$

Για $x=1$ έχουμε:

$$f(1)=g(1)+C_1\cdot 1+C_2$$

$$\Leftrightarrow g(1)+5=g(1)+C_1+C_2\ (\text{αφού } f(1)=g(1)+5)$$

$$\Leftrightarrow C_1+C_2=5$$

Για $x=2$ έχουμε:

$$f(2)=g(2)+C_1\cdot 2+C_2$$

$$\Leftrightarrow g(2)+7=g(2)+2C_1+C_2\ ,(\text{αφού } f(2)=g(2)+7)\Leftrightarrow 2C_1+C_2=7$$

Έχουμε

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5 \\ 2C_1 + C_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = 2 \text{ και } C_2 = 3$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{\mathbf{f(x) = g(x) + 2x + 3 : (1)}}.$$

**ii.** Επειδή η ευθεία $\varepsilon : y = 5x + 10$ είναι ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$ έπεται ότι ισχύουν

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 5 : (\alpha) \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - 5x\right) = 10 : (\beta)$$

Έχουμε

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} \underset{=\!=}{(1)} \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x) - 2x - 3}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - 2 - \frac{3}{x}\right) \overset{(\alpha)}{=} 5 - 2 - 0 = 3 \in \mathbb{R} \quad \text{και}$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}\left(g(x) - \lambda(x)\right) \overset{(1)}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - 2x - 3 - 3x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(f(x) - 5x\right) - 3\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - 5x\right) - \lim_{x\to+\infty} 3 =$$

$$\overset{(\beta)}{=} 10 - 3 = 7 \in \mathbb{R}$$

Άρα η ευθεία $\delta : y = 3x + 7$ είναι **(πλάγια) ασύμπτωτη** της $C_g$ στο $+\infty$.

**14ο** **ΘΕΜΑ Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

**Γ1.** Είναι

$$f'(x) = \left[(x - \alpha)(x - \beta) + (x - \alpha) + (x - \beta)\right]e^x = \varphi(x)e^x,$$

όπου

$$\varphi(x) = (x - \alpha)(x - \beta) + (x - \alpha) + (x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta - 2)x + \alpha\beta - \alpha - \beta$$

είναι πολυωνυμική συνάρτηση $2^{ου}$ βαθμού.

Είναι:

- $\varphi(\alpha) = \alpha - \beta < 0$
- $\varphi(\beta) = \beta - \alpha > 0$
- $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^2 - (\alpha + \beta - 2)x + \alpha\beta - \alpha - \beta\right) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

Επειδή είναι $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = +\infty$ έπεται ότι υπάρχει $\gamma < \alpha$ ώστε $\varphi(\gamma) > 0$. Έτσι έχουμε:

- $\varphi(\gamma)\varphi(\alpha)<0$
- $\varphi(\alpha)\varphi(\beta)<0$

και η $\varphi$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[\gamma,\alpha]$ και $[\alpha,\beta]$ (ως πολυωνυμική), οπότε, σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχουν $x_1\in(\gamma,\alpha)$ και $x_2\in(\alpha,\beta)$, ώστε $\varphi(x_1)=0$ και $\varphi(x_2)=0$.

Επομένως η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $\gamma<x_1<\alpha<x_2<\beta$ και επειδή η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι πολυωνυμική $2^{ου}$ βαθμού δεν έχει άλλες πραγματικές ρίζες. Άρα η εξίσωση $\varphi(x)=0$, οπότε και η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<\alpha<x_2<\beta$. (Οι εξισώσεις $\varphi(x)=0$ και $f'(x)=0$ είναι ισοδύναμες στο $\mathbb{R}$, αφού είναι $f'(x)=\varphi(x)e^x$ και $e^x\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$).

**Γ2.** Επειδή οι αριθμοί $x_1,x_2$ είναι οι ρίζες του τριωνύμου
$\varphi(x)=x^2-(\alpha+\beta-2)x+\alpha\beta-\alpha-\beta$ έπεται ότι $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)$,
οπότε

$$f'(x)=(x-x_1)(x-x_2)e^x.$$

Έχουμε:

$$f'(x)>0\Leftrightarrow(x-x_1)(x-x_2)e^x>0\Leftrightarrow$$

$$\overset{(e^x>0)}{\Leftrightarrow}(x-x_1)(x-x_2)>0$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow x\in(x_1,x_2)$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=x_1 \text{ ή } x=x_2$$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↗ | Τ.Μ. | ↘ | Τ.Ε. | ↗ | |

Από το πρόσημο της $f'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα προκύπτει ότι η $f$ παρουσιάζει στο $x_1$ τοπικό μέγιστο και στο $x_2$ τοπικό ελάχιστο.

**Γ3.** Έχουμε:

$$f'(x_2)=0 \Leftrightarrow \varphi(x_2)e^{x_2}=0 \overset{(e^{x_2}\neq 0)}{\Leftrightarrow} \varphi(x_2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_2-\alpha)(x_2-\beta)+(x_2-\alpha)+(x_2-\beta)=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha+\beta-2x_2=(x_2-\alpha)(x_2-\beta) \quad :(1)$$

Έχουμε όμως $x_2\in(\alpha,\beta)\Leftrightarrow \alpha<x_2<\beta \Rightarrow \begin{cases} x_2-\alpha>0 \\ x_2-\beta<0 \end{cases} \Rightarrow (x_2-\alpha)(x_2-\beta)<0 \Rightarrow$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \alpha+\beta-2x_2<0 \Rightarrow 2x_2>\alpha+\beta \Rightarrow x_2>\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

Επειδή το $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ είναι το μέσο του $[\alpha,\beta]$ και $x_2>\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, έπεται ότι το $x_2$ βρίσκεται πλησιέστερα στο $\beta$ από ότι στο $\alpha$.

**Γ4.** Επειδή οι αριθμοί $x_1, x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$\varphi(x)=0 \Leftrightarrow (x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)+(x-\beta)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-(\alpha+\beta-2)x+\alpha\beta-\alpha-\beta=0,$$

ισχύουν:

$$\begin{cases} (x_1-\alpha)(x_1-\beta)+(x_1-\alpha)+(x_1-\beta)=0 \\ (x_2-\alpha)(x_2-\beta)+(x_2-\alpha)+(x_2-\beta)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_1-\alpha)(x_1-\beta)=\alpha+\beta-2x_1 \\ (x_2-\alpha)(x_2-\beta)=\alpha+\beta-2x_2 \end{cases} \quad :(2)$$

Ακόμη από τους τύπους Vieta ισχύουν:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\alpha+\beta-2 \\ x_1x_2=\alpha\beta-\alpha-\beta \end{cases} \quad :(3)$$

Είναι:

$$f(x_1)=(x_1-\alpha)(x_1-\beta)e^{x_1}\overset{(2)}{=}(\alpha+\beta-2x_1)e^{x_1} \text{ και}$$

$$f(x_2)=(x_2-\alpha)(x_2-\beta)e^{x_2}\overset{(2)}{=}(\alpha+\beta-2x_2)e^{x_2}$$

Οπότε έχουμε:

$$f(x_1)f(x_2)=(\alpha+\beta-2x_1)e^{x_1}(\alpha+\beta-2x_2)e^{x_2}=$$

$$=\left[(\alpha+\beta)^2-2(x_1+x_2)(\alpha+\beta)+4x_1x_2\right]e^{x_1+x_2}$$

$$\overset{(3)}{=}\left[(\alpha+\beta)^2-2(\alpha+\beta-2)(\alpha+\beta)+4(\alpha\beta-\alpha-\beta)\right]e^{\alpha+\beta-2}$$

$$=\left[(\alpha+\beta)^2-2(\alpha+\beta)^2+4(\alpha+\beta)+4\alpha\beta-4(\alpha+\beta)\right]e^{\alpha+\beta-2}$$

$$=\left[4\alpha\beta-(\alpha+\beta)^2\right]e^{\alpha+\beta-2}$$

$$=\left(2\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2\right)e^{\alpha+\beta-2}$$

$$=-(\alpha-\beta)^2e^{\alpha+\beta-2} \text{ με } \alpha<\beta$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=-(x-\beta)e^{x+\beta-2}\ ,\ x\in(-\infty,\beta).$$

Είναι φανερό ότι $f(x_1)f(x_2)=h(\alpha)$.

Είναι

$$h'(x)=-2(x-\beta)(x-\beta)'e^{x+\beta-2}-(x-\beta)^2e^{x+\beta-2}(x+\beta-2)'=$$

$$=-2(x-\beta)e^{x+\beta-2}-(x-\beta)^2e^{x+\beta-2}$$

$$=-(x-\beta)(2+x-\beta)e^{x+\beta-2}$$

$$=-(x-\beta)(x-(\beta-2))e^{x+\beta-2}$$

| x | $-\infty$ | | $\beta-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $h(x)$ | | ↘ | | ↗ | |

Από το πρόσημο της $h'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα προκύπτει ότι η $h$ είναι γνησί-ως φθίνουσα στο $(-\infty,\beta-2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\beta-2,\beta)$,

οπότε η $h$ παρουσιάζει στο $x_0=\beta-2$ ολικό ελάχιστο, το οποίο είναι το

$$\min h(x)=h(\beta-2)=-(\beta-2-\beta)^2e^{\beta-2+\beta-2}=-4e^{2\beta-4}.$$

Άρα για κάθε $x\in(-\infty,\beta)$ ισχύει $h(x)\geq\min h(x)=-4e^{2\beta-4}$.

Επομένως είναι :

$$h(\alpha)\geq \min h(x)=-4e^{2\beta-4}\Rightarrow -(\alpha-\beta)^2 e^{\alpha+\beta-2}\geq -4e^{2\beta-4}$$
$$\Rightarrow f(x_1)f(x_2)\geq -4e^{2\beta-4}$$
$$\Rightarrow f(x_1)f(x_2)+4e^{2\beta-4}\geq 0\,.$$

**14ο** **Θ Ε Μ Α Δ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

**Δ1. i.** Έχουμε

$$2f(1)+f(5)<2f(2)+f(3)$$
$$\Leftrightarrow f(5)-f(3)<2f(2)-2f(1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(5)-f(3)}{2}<f(2)-f(1):(1)$$

Επειδή η $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η $f$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** σε καθένα από τα διαστήματα $[1,2]$, $[3,5]$,

οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(1,2)$ και $\xi_2\in(3,5)$

τέτοιοι, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1):(2)$$
$$f'(\xi_2)=\frac{f(5)-f(3)}{5-3}=\frac{f(5)-f(3)}{2}:(3)$$

Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι

$$f'(\xi_2)<f'(\xi_1)\,.$$

Άρα υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}$ με $\xi_1<\xi_2$ (αφού $\xi_1\in(1,2)$ και $\xi_2\in(3,5)$)

τέτοιοι ώστε

$$\boxed{\mathbf{f'(\xi_1)>f'(\xi_2)}}$$

**ii.** Επειδή η $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η $f'$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** στο $[\xi_1,\xi_2]$,

οπότε υπάρχει $x_0\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f''(x_0)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}$$

Έχουμε, όμως

$$\begin{cases} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \\ \xi_1 < \xi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(\xi_2) - f'(\xi_1) < 0 \\ \xi_2 - \xi_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0 \Rightarrow f''(x_0) < 0$$

Άρα υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με

$$\boxed{\mathbf{f''(x_0) < 0}}.$$

**iii.** Επειδή η $f''$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και είναι $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η $f''$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή είναι $f''(x_0) < 0$ συμπεραίνουμε ότι είναι

$$f''(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**Δ2.** Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = f(x) + f(\alpha+\beta-x) - 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right), x \in \mathbb{R}$$

Είναι

$$\varphi'(x) = f'(x) + f'(\alpha+\beta-x)(\alpha+\beta-x)' - 0 =$$

$$= f'(x) - f'(\alpha+\beta-x)$$

Επειδή η $f$ είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Έχουμε:

$$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(\alpha+\beta-x) > 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) > f'(\alpha+\beta-x) \Leftrightarrow x < \alpha+\beta-x$$

(γιατί η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow 2x < \alpha+\beta \Leftrightarrow x < \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{\alpha+\beta}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $\varphi(x)$ | | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | |

Από το πρόσημο της $\varphi'(x)$, που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει ότι

η $\varphi$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\left(-\infty,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο

$\left[\frac{\alpha+\beta}{2},+\infty\right)$

οπότε η $\varphi$ παρουσιάζει στο $x_0=\frac{\alpha+\beta}{2}$ **ολικό μέγιστο**, το οποίο είναι το

$$\varphi_{max}=\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+f\left(\alpha+\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0.$$

Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει $\varphi(x)\leq\varphi_{max}=0$

$$\Leftrightarrow f(x)+f(\alpha+\beta-x)-2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\leq 0$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \mathbf{f(x)+f(\alpha+\beta-x)\leq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}}$$

# 15ο ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

15ο **ΘΕΜΑ Β** ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

**B1.** Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=f(x)-x.$$

Η συνάρτηση $h$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων (η $f$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$).

Ακόμη είναι $h(\alpha)=f(\alpha)-\alpha$ και $h(\beta)=f(\beta)-\beta$.

Είναι, όμως,

$$f(\alpha)+f(\beta)=\alpha+\beta \Leftrightarrow f(\alpha)-\alpha=\beta-f(\beta),$$

οπότε

$$h(\beta)=-(f(\alpha)-\alpha).$$

Άρα είναι

$$h(\alpha)h(\beta)=(f(\alpha)-\alpha)\left[-(f(\alpha)-\alpha)\right]=$$

$$=-(f(\alpha)-\alpha)^2\le 0$$

Διακρίνουμε:

1) $h(\alpha)h(\beta)=0$ , τότε θα είναι $h(\alpha)=0$ ή $h(\beta)=0$
2) $h(\alpha)h(\beta)<0$.

Στην περίπτωση αυτή η $h$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ. Bolzano** στο $[\alpha,\beta]$ (αφού η $h$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $h(\alpha)h(\beta)<0$),
οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$h(\xi)=0.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ (είναι $x_0=\alpha$ ή $x_0=\beta$ ή $x_0=\xi\in(\alpha,\beta)$) τέτοιος, ώστε

$$h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-x_0=0\Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(x_0)=x_0}.$$

**B2.** Έχουμε

$$g'(x)=\left(e^{f(x)-x}\right)'=e^{f(x)-x}.\left(f(x)-x\right)'$$
$$=e^{f(x)-x}.\left(f'(x)-1\right).$$

Είναι όμως

$$f'(x)+e^{x-f(x)}=2$$
$$\Leftrightarrow f'(x)=2-e^{x-f(x)},$$

οπότε

$$g'(x)=e^{f(x)-x}\left(2-e^{x-f(x)}-1\right)==e^{f(x)-x}-1=g(x)-1$$

Επομένως, ισχύει

$$\boxed{\mathbf{g'(x)-g(x)+1=0}} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

**B3.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$g'(x)-g(x)+1=0$$
$$\Leftrightarrow g'(x)=g(x)-1\Leftrightarrow\left(g(x)-1\right)'=g(x)-1$$
$$\Leftrightarrow g(x)-1=ce^{x},\ (c\in\mathbb{R})$$
$$\Leftrightarrow g(x)=ce^{x}+1\Leftrightarrow e^{f(x)-x}=ce^{x}+1:(\Sigma)$$

Από τη (Σ) για $x=x_0$ έχουμε:

$$e^{f(x_0)-x_0}=ce^{x_0}+1\Leftrightarrow e^{x_0-x_0}=ce^{x_0}+1,\ \left(\text{αφού } f(x_0)=x_0\right)$$
$$\Leftrightarrow 1=ce^{x_0}+1\Leftrightarrow ce^{x_0}=0\Leftrightarrow c=0$$

Άρα

$$e^{f(x)-x}=0\cdot e^{x}+1\Leftrightarrow e^{f(x)-x}=1\Leftrightarrow e^{f(x)-x}=e^{0}$$
$$\Leftrightarrow f(x)-x=0\left(\text{αφού η συνάρτηση } \varphi(x)=e^{x} \text{ είναι} 1-1\right)$$
$$\Leftrightarrow f(x)=x$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{f(x)=x,\ x\in\mathbb{R}}}$$

- $f(x)+f(2-x)=2x^2-4x+4:(1)$
- $f(0)=0:(2)$

**Γ1.** Από την (1), παραγωγίζοντας τα μέλη της ως προς $x$, έχουμε:

$$\left(f(x)+f(2-x)\right)'=\left(2x^2-4x+4\right)'$$

$$\Leftrightarrow f'(x)+f'(2-x)(2-x)'=4x-4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)-f'(2-x)=4x-4:(3)$$

Από την (3) για $x=0$ έχουμε:

$$f'(0)-f'(2)=-4\Rightarrow f'(0)-f'(2)<0$$

$$\Rightarrow f'(0)<f'(2)$$

Επειδή δόθηκε ότι η $f'$ είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και για $0<2$ ισχύει

$$f'(0)<f'(2),$$

έπεται ότι η $f'$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

**Γ2.** Από την (1) για $x=0$ έχουμε:

$$f(0)+f(2-0)=2\cdot 0^2-4\cdot 0+4$$

$$\Leftrightarrow f(0)+f(2)=4\Leftrightarrow 0+f(2)=4 \quad ,(\text{αφού } f(0)=0)$$

$$\Leftrightarrow f(2)=4$$

Η $f$ ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Επειδή η $f$ είναι συνεχής στο $[0,2]$ (αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$) και ισχύει

$$f(0)=0<2<4=f(2),$$

έπεται σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών**, ότι υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιος, ώστε

$$\boxed{\mathbf{f(x_0)=2}}$$

**Γ3.** Επειδή η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η $f$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[0,x_0],[x_0,2]$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(0,x_0),(x_0,2)$,

οπότε η $f$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** σε καθένα από τα διαστήματα $[0,x_0]$ και $[x_0,2]$.

Επομένως, υπάρχουν $x_1 \in (0, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, 2)$ τέτοιοι, ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \frac{2-0}{x_0} = \frac{2}{x_0} \neq 0 \text{ και}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0} = \frac{4-2}{2-x_0} = \frac{2}{2-x_0} \neq 0$$

Είναι

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = \frac{1}{\frac{2}{x_0}} + \frac{1}{\frac{2}{2-x_0}} = \frac{x_0}{2} + \frac{2-x_0}{2} = 1$$

Άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0,2)$ τέτοιοι, ώστε

$$\boxed{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f'(x_1)}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f'(x_2)}} = \mathbf{1}}.$$

**Γ4.** Έχουμε

$0 < x_1 < x_0 < x_2 < 2 \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$, (αφού $f'$ **1** $\mathbb{R}$ )

$$\Rightarrow \frac{2}{x_0} < \frac{2}{2-x_0} \overset{\binom{x_0>0}{2-x_0>0}}{\Rightarrow} 2(2-x_0) < 2x_0$$

$$\Rightarrow 2 - x_0 < x_0 \Rightarrow 2x_0 > 2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{x_0 > 1}}$$

**15ο** **Θ Ε Μ Α Δ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

**Δ1.** ..

- $f(1 + f(x)) - f(x) = 2x - 6 : (1)$
- $f(0) = 5 : (2)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = L \in (-\infty, 0) : (3)$$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\begin{cases}1+f(x_1)=1+f(x_2)\\ f(x_1)=f(x_2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(1+f(x_1))=f(1+f(x_2))\\ f(x_1)=f(x_2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(1+f(x_1))-f(x_1)=f(1+f(x_2))-f(x_2)$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow}2x_1-6=2x_2-6\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

Επομένως, η $f$ είναι $1-1$.

Από την (1) για $x=0$ έχουμε:

$$f(1+f(0))-f(0)=2\cdot 0-6$$

$$\Leftrightarrow f(1+5)-5=-6\ ,\ (\text{αφού}\, f(0)=5)$$

$$\Leftrightarrow f(6)=-1$$

Από την (1) για $x=3$ έχουμε:

$$f(1+f(3))-f(3)=2\cdot 3-6\Leftrightarrow f(1+f(3))=f(3)$$

$$\Leftrightarrow 1+f(3)=3\ ,\ (\text{αφού η } f \text{ είναι} 1-1)$$

$$\Leftrightarrow f(3)=2$$

**Δ2.** Επειδή η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η $f$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** σε καθένα από τα διαστήματα $[0,3]$ και $[3,6]$,

οπότε υπάρχουν $x_1\in(0,3)$ και $x_2\in(3,6)$ τέτοια, ώστε

$$f'(x_1)=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{2-5}{3}=\frac{-3}{3}=-1$$

και

$$f'(x_2)=\frac{f(6)-f(3)}{6-3}=\frac{-1-2}{3}=\frac{-3}{3}=-1.$$

Επειδή ισχύει

$$f'(x_1)=f'(x_2)\ (=-1)$$

και είναι $x_1\neq x_2$ (αφού $0<x_1<3<x_2<6$), έπεται ότι η $f'$ δεν είναι $1-1$

**Δ3.** Από την (1) παραγωγίζοντας τα μέλη της ως προς $x$ έχουμε

$$\left(f(1+f(x))-f(x)\right)'=(2x-6)'$$

$$\Leftrightarrow f'(1+f(x))(1+f(x))'-f'(x)=2$$

$$\Leftrightarrow f'(1+f(x))f'(x)-f'(x)=2$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\left(f'(1+f(x))-1\right)=2:(4)$$

Από την (4) προκύπτει ότι $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και

επειδή η $f'$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, προκύπτει ότι η $f'$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x_1)=-1<0$ και η $f'$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$,

οπότε είναι

$$f'(x)<0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Άρα η $f$ είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.

**Δ4.** Η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$)

Ακόμη είναι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\cdot x\right)=+\infty$$

(αφού $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=m<0$ και $\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$) και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\cdot x\right)=-\infty,$$

(αφού $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=L<0$ και $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$)

Επομένως, το **σύνολο τιμών** της $f$ είναι το

$$\boxed{\mathbf{f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x),\lim_{x\to-\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}}}.$$

**Δ5.** Από την (1) για κάθε $x\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f(1+f(x))}{x}-\frac{f(x)}{x}=2-\frac{6}{x}:(4)$$

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=L\in(-\infty,0) \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(1+f(x))}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(1+f(x))}{1+f(x)}\cdot\frac{1+f(x)}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{f\left(1+f\left(x\right)\right)}{1+f\left(x\right)} \cdot \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{f\left(x\right)}{x}\right)$$

$$= m\cdot\left(0+L\right) = m\cdot L$$

( Είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{f\left(1+f\left(x\right)\right)}{1+f\left(x\right)} \overset{\left(\substack{u=1+f(x)\\ \lim_{x\to+\infty}(1+f(x))=-\infty}\right)}{=} \lim_{u\to-\infty}\frac{f\left(u\right)}{u} = m$ )

Έτσι από την (4) έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f\left(1+f\left(x\right)\right)}{x}-\frac{f\left(x\right)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{6}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow m.L - L = 2-0 \Leftrightarrow L\cdot m - L = 2 : \left(\alpha\right)$$

Είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(x\right)}{x} = m \in \left(-\infty, 0\right)$$

και

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(1+f\left(x\right)\right)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f\left(1+f\left(x\right)\right)}{1+f\left(x\right)}\cdot\frac{1+f\left(x\right)}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(1+f\left(x\right)\right)}{1+f\left(x\right)}\cdot \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{f\left(x\right)}{x}\right)$$

$$= L\cdot\left(0+m\right) = L\cdot m$$

( $\lim_{x\to-\infty} \frac{f\left(1+f\left(x\right)\right)}{1+f\left(x\right)} \overset{\left(\substack{u=1+f(x)\\ \lim_{x\to-\infty}(1+f(x))=+\infty}\right)}{=} \lim_{u\to+\infty}\frac{f\left(u\right)}{u} = L$ )

Έτσι από την (4) έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f\left(1+f\left(x\right)\right)}{x}-\frac{f\left(x\right)}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{6}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow Lm - m = 2-0 \Leftrightarrow Lm - m = 2 : \left(\beta\right)$$

Από (α) και (β) έχουμε:

$$\begin{cases} Lm - L = 2 \\ Lm - m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Lm - L = Lm - m \\ Lm - m = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L = m \\ m \cdot m - m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L = m \\ m^2 - m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L = m \\ m = -1 (\text{δεκτή}) \text{ ή } m = 2 (\text{απορ.}) \end{cases}$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{L = m = -1}}.$$