Διαγωνίσματα | ανά ενότητες |

1ο

2.1-2.2-2.3 Ορισμός παραγώγου-κανόνες παραγώγισης

1ο **ΘΕΜΑ Β**

B1. Για $x \neq 0$ είναι

$$f(x) = \frac{\eta\mu^2 x}{x} + \sqrt{x^2 + 4}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο IR άρα και στο 0 θα είναι

$$\boxed{f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\eta\mu x + \sqrt{x^2+4}\right) = 1\cdot 0 + \sqrt{4} = 2}$$

B2. Είναι

$$f(\pi) = \frac{\eta\mu^2\pi}{\pi} + \sqrt{\pi^2 + 4} = \sqrt{\pi^2 + 4}$$

$$f(-\pi) = \frac{\eta\mu^2(-\pi)}{-\pi} + \sqrt{(-\pi)^2 + 4} = \sqrt{\pi^2 + 4}$$

Δηλαδή $\pi \neq -\pi$ και $f(\pi) = f(-\pi)$

Άρα η f **δεν είναι 1–1.**

B3. Είναι

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu^2 x}{x} + \sqrt{x^2+4} & , \ x \neq 0 \\ 2 & , \ x = 0 \end{cases}$$

Για $x \neq 0$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x\cdot x - \eta\mu^2 x}{x^2} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x\eta\mu 2x - \eta\mu^2 x}{x^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

Για $x = 0$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\eta\mu^2 x}{x}+\sqrt{x^2+4}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}+\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2+\frac{x^2+4-4}{x(\sqrt{x^2+4}+4)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}+4}\right]=1$$

Άρα

$$\boxed{f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\eta\mu 2x-\eta\mu^2 x}{x^2}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}, & x\neq 0\\[2mm] 1, & x=0\end{cases}}$$

B4. Στο IR^* η f' είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Για $x=0$ είναι

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\eta\mu 2x-\eta\mu^2 x}{x^2}+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[2\frac{\eta\mu 2x}{2x}-\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right]=2\cdot 1-1^2+0=1=f'(0)$$

Άρα η f' είναι συνεχής και στο 0.

Άρα η f' είναι **συνεχής** στο IR.

B5. $$\lim_{x\to -\infty}f'(x)=\lim_{x\to -\infty}\left[\frac{x\eta\mu 2x-\eta\mu^2 x}{x^2}+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right]=$$

$$\overset{x<0}{=}\lim_{x\to -\infty}\left[\frac{1}{x}\eta\mu 2x-\frac{1}{x^2}\eta\mu^2 x+\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}\right]$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\left[\frac{1}{x}\eta\mu 2x-\frac{1}{x^2}\eta\mu^2 x-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}\right]=$$

$$=0-0-1=-1.$$

γιατί

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\eta\mu 2x\right)=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\eta\mu^2 x\right)=0$$ ως « μηδενική · φραγμένη »

1ο **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Έστω

$$g(x) = \frac{f(x) + x - 3}{x^2 - 4}$$

Άρα

$$f(x) = g(x)(x^2 - 4) - x + 3 \;\; \text{και} \;\; \lim_{x\to 2} g(x) = 1$$

Οπότε

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}[g(x)(x^2 - 4) - x + 3] = 1\cdot 0 - 2 + 3 = 1.$$

Η f είναι **συνεχής** στο IR άρα και στο **1** οπότε

$$\boxed{\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow f(2) = 1}.$$

Γ2. $$\lim_{x\to 2}\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2}\frac{g(x)(x^2 - 4) - x + 3 - 1}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{g(x)(x - 2)(x + 2) - (x - 2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2}[g(x)(x + 2) - 1] = 1\cdot 4 - 1 = 3$$

άρα

$$\boxed{f'(2) = 3}$$

Γ3. Είναι

$$f'(2) = 3 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2}\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2}\frac{f(x) - 1}{x - 2} = 3.$$

Οπότε

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3+1)-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x^3+1)-1}{(x^3+1)-2}\cdot\frac{(x^3+1)-2}{\sqrt{x+3}-2}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x^3+1)-1}{(x^3+1)-2}\cdot\frac{x^3-1}{\sqrt{x+3}-2}\right]$$

- $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3+1)-1}{(x^3+1)-2} \overset{u=x^3+1}{=} \lim_{u\to 2}\frac{f(u)-1}{u-2} = 3$$

- $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-4}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[(x^2+x+1)(\sqrt{x+3}+2)\right]=3\cdot 4=12$$

Άρα

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3+1)-1}{\sqrt{x+3}-2}=3\cdot 12=36}$$

Γ4. Πρέπει

- Η h να είναι συνεχής στο 1, δηλαδή : $\lim_{x\to 1^-}h(x) = \lim_{x\to 1^+}h(x) = h(1)$

- $$\lim_{x\to 1^-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} \in IR$$

Είναι

- $$\lim_{x\to 1^-}h(x) = \lim_{x\to 1^-}[f(2x)+x^2-1] = f(2)+1-1=1$$

αφού η $f(2x)$ είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών f και $2x$

- $$\lim_{x\to 1^+}h(x) = \lim_{x\to 1^+}(3x^2+\alpha x+\beta) = 3+\alpha+\beta$$

- $$h(1) = f(2)+1-1=1.$$

Άρα πρέπει

$$3+\alpha+\beta=1 \Leftrightarrow \beta=-\alpha-2 \qquad (1)$$

- $$\lim_{x\to 1^-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(2x)+x^2-1-1}{x-1} \overset{u=2x}{=}$$

$$=\lim_{u\to 2}\frac{f(u)+\left(\frac{u}{2}\right)^2-2}{\frac{u}{2}-1}=\lim_{u\to 2}\frac{f(u)+\frac{u^2}{4}-2}{\frac{u-2}{2}}=\lim_{u\to 2}\frac{4f(u)+u^2-8}{2(u-2)}=$$

$$=\lim_{u\to 2}\frac{4f(u)-4+u^2-4}{2(u-2)} = \lim_{u\to 2}\left[\frac{4(f(u)-1)}{2(u-2)}+\frac{(u-2)(u+2)}{2(u-2)}\right]=$$

$$=\lim_{u\to 2}\left[2\frac{f(u)-f(2)}{u-2}+\frac{u+2}{2}\right] = 2f'(2)+2 = 2\cdot 3+2=8$$

- $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\dfrac{3x^2+\alpha x+\beta-1}{x-1} \overset{(1)}{=}$

$= \lim_{x\to 1^+}\dfrac{3x^2+\alpha x-\alpha-2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\dfrac{3(x-1)(x+1)+\alpha(x-1)}{x-1} =$

$= \lim_{x\to 1^+}[3(x+1)+\alpha] = 6+\alpha$

Οπότε πρέπει

$$\boxed{6+\alpha=8 \Leftrightarrow \alpha=2}$$

Από (1):

$$\boxed{\beta=-4}$$

1ο **ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. Είναι

$$f^2(x)+ημ^2x=x^2 \Leftrightarrow f^2(x)=x^2-ημ^2x\,.$$

Επομένως:

$f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \Leftrightarrow x^2-ημ^2x=0 \Leftrightarrow x^2=ημ^2x \Leftrightarrow |x|=|ημx|$ **(1)**

Αλλά για κάθε $x\in$ IR ισχύει $|ημx| \le |x|$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

Οπότε από **(1)** ισοδύναμα προκύπτει **x = 0.**

Δ2. Η $f(x)$ έχει μοναδική ρίζα το 0.

Επομένως :

- Η είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και
- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$

άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty, 0)$

και επειδή $f(-\pi)=\pi>0$ συμπεραίνουμε ότι

$$f(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(-\infty,0).$$

Οπότε για κάθε $x\in(-\infty,0)$ είναι

$$f^2(x)=x^2-ημ^2x \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2-ημ^2x}$$

Επίσης

- Η είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και
- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ και επειδή $f(\pi)=-\pi<0$

συμπεραίνουμε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Οπότε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$$f^2(x) = x^2 - \eta\mu^2 x \Leftrightarrow f(x) = -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}$$

Άρα

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \sqrt{\mathbf{x^2 - \eta\mu^2 x}}, & \mathbf{x < 0} \\ \mathbf{0} \quad , & \mathbf{x = 0} \\ -\sqrt{\mathbf{x^2 - \eta\mu^2 x}}, & \mathbf{x > 0} \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}, & x < 0 \\ -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Δ3. • Αν $x \in (-\infty, 0)$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως ριζικό παραγωγίσιμης συνάρτησης με παράγωγο

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}\right)' = \frac{\left(x^2 - \eta\mu^2 x\right)'}{2\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}} = \frac{2x - 2\eta\mu x(\eta\mu x)'}{2\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}} = \frac{x - \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}}$$

• Αν $x \in (0, +\infty)$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως ριζικό παραγωγίσιμης συνάρτησης με παράγωγο

$$f'(x) = \left(-\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}\right)' = -\frac{\left(x^2 - \eta\mu^2 x\right)'}{2\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}} = -\frac{2x - 2\eta\mu x(\eta\mu x)'}{2\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}} = -\frac{x - \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}}$$

• Στο $x_0 = 0$ είναι :

♦ $$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right)}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|\sqrt{1 - \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2}}{x} \overset{x<0}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{-x\sqrt{1 - \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2}}{x} = -\lim_{x \to 0^-} \sqrt{1 - \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2} =$$

$$= -\sqrt{1 - 1^2} = 0$$

♦ $$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\sqrt{x^2\left(1 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right)}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-|x|\sqrt{1-\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2}}{x} \overset{x>0}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-x\sqrt{1-\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2}}{x} = -\lim_{x\to 0^+}\sqrt{1-\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2} =$$

$$= -\sqrt{1-1^2} = 0$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη και στο 0 με $f'(0)=0$

Επομένως

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x}}, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ -\dfrac{x-\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x}}, & x>0 \end{cases}}$$

Δ4. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[-\sqrt{x^2\left(1-\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-|x|\sqrt{1-\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[-x\sqrt{1-\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2}\right]$$

Είναι

- $|\eta\mu x| \le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right| \cdot |\eta\mu x| \le \left|\frac{1}{x}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\eta\mu x\right| \le \left|\frac{1}{x}\right| \Leftrightarrow -\left|\frac{1}{x}\right| \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \left|\frac{1}{x}\right|$
- $\lim_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{1}{x}\right|\right) = 0$ και $\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{x}\right| = 0$

οπότε από το **κριτήριο της παρεμβολής** προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$$

Άρα

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -(+\infty)\sqrt{1-0^2} = -\infty}$$

Δ5. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = h(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ η εξίσωση $f(x) = h(x)$ ισοδύναμα γράφεται :

$$-\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x}=e^x\ln x \Leftrightarrow e^x\ln x+\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x}=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x)=e^x\ln x+\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x},\quad x\in(0,+\infty)$$

- Η φ είναι συνεχής στο (0, + ∞) ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x\ln x+\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x}\right)=e^0(-\infty)+\sqrt{0^2-0^2}=-\infty$

Άρα $\varphi(x)<0$ κοντά στο 0^+.

Επομένως υπάρχει $x_1>0$, κοντά στο 0 τέτοιος ώστε $\varphi(x_1)<0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\ln x+\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\ln x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right)}\right]=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[e^x\ln x+|x|\sqrt{1-\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2}\right]\overset{x>0}{=}\lim_{x\to+\infty}\left[e^x\ln x+x\sqrt{1-\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2}\right]=$$

$$=(+\infty)(+\infty)+(+\infty)\sqrt{1-0}=+\infty$$

Άρα $\varphi(x)>0$ στην περιοχή του $+\infty$.

Επομένως υπάρχει x_2 στην περιοχή του $+\infty$, άρα $x_2>x_1$,

τέτοιος ώστε

$$\varphi(x_2)>0$$

Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]\subseteq(0,+\infty)$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων,

επομένως ισχύει το **Θ. Bolzano** στο $[x_1, x_2]\subseteq(0,+\infty)$

και συνεπώς η εξίσωση

$$\varphi(x)=0\Leftrightarrow f(x)=h(x)$$

έχει **μια τουλάχιστον ρίζα** στο $\boldsymbol{(x_1, x_2)\subseteq(0,+\infty)}$.

2ο

2.1-2.2-2.3 Ορισμός παραγώγου κανόνες παραγώγισης-Εξίσωση εφαπτομένης

2ο

ΘΕΜΑ Β

B1. Για y = 1 η δοθείσα σχέση γίνεται

$$f(x)-f(1)=\ln x+x-1 \Leftrightarrow f(x)=f(1)+\ln x+x-1 \qquad \textbf{(1)}$$

και για y = e έχουμε

$$f(x)-f(e)=\ln\frac{x}{e}+x-e \Leftrightarrow f(x)=f(e)+\ln x-\ln e+x-e$$
$$\Leftrightarrow f(x)=f(e)+\ln x-1+x-e \qquad \textbf{(2)}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε :

$$2f(x)=f(1)+f(e)+2\ln x+2x-2-e \Leftrightarrow 2f(x)=e+2+2\ln x+2x-2-e \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2f(x)=2\ln x+2x \Leftrightarrow f(x)=\ln x+x$$

Η $f(x)=\ln x+x$ επαληθεύει τη δοθείσα σχέση και συνεπώς είναι η ζητούμενη συνάρτηση.

B2. Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1<x_2$ **(3)** έχουμε: $\ln x_1<\ln x_2$ **(4)**

Με πρόσθεση κατά μέλη των **(3)** και **(4)** παίρνουμε

$$\ln x_1+x_1<\ln x_2+x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα συνεπώς 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f.

Είναι

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\ln x+x)=-\infty+0=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}(\ln x+x)=+\infty+\infty=+\infty$$

Επομένως

$$D_{f^{-1}}=f(A)=\left(\lim_{x\to 0^+} f(x),\ \lim_{x\to +\infty} f(x)\right)=(-\infty,\ +\infty)=\mathbb{R}$$

B3. Είναι

$$\ln\left(x-3+\frac{3}{x}\right)+x^2>4x-3 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^2-3x+3}{x}\right)+x^2>4x-3$$

Πρέπει

$$\frac{x^2-3x+3}{x}>0 \Leftrightarrow x(x^2-3x+3)>0 \Leftrightarrow x>0\,,$$

γιατί το τριώνυμο x^2-3x+3 έχει

διακρίνουσα $\Delta = -3<0$, οπότε $x^2-3x+3>0$, για κάθε $x \in IR$

Για κάθε $x>0$ έχουμε :

$$\ln\left(\frac{x^2-3x+3}{x}\right)+x^2>4x-3 \Leftrightarrow \ln(x^2-3x+3)-\ln x+x^2>4x-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2-3x+3)+x^2-3x+3>\ln x+x \Leftrightarrow f(x^2-3x+3)>f(x) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+3>x \Leftrightarrow x^2-4x+3>0 \Leftrightarrow x<1 \;\; ή \;\; x>3$$

Αλλά $x>0$ οπότε η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in (0,\ 1)\cup(3,\ +\infty)$

Β4. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} έχει εξίσωση :

$$y-f^{-1}(1)=(f^{-1})'(1)(x-1)$$

Είναι

$$f^{-1}(1)=\omega \Leftrightarrow f(\omega)=1 \Leftrightarrow f(\omega)=f(1) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} \omega=1 \Leftrightarrow f^{-1}(1)=1$$

Επίσης για κάθε $x \in D_{f^{-1}}=IR$ ισχύει $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$

Αφού η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, για κάθε $x \in IR$ έχουμε

$$\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)'=(x)'$$

$$f'\left(f^{-1}(x)\right)(f^{-1})'(x)=1$$

Για $x=1$ είναι

$$f'\left(f^{-1}(1)\right)(f^{-1})'(1)=1 \Leftrightarrow f'(1)(f^{-1})'(1)=1$$

Είναι

$$f'(x)=\frac{1}{x}+1 \quad οπότε \quad f'(1)=2\,.$$

Επομένως

$$2(f^{-1})'(1)=1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(1)=\frac{1}{2}$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο $x_0=1$ είναι

$$y-1=\frac{1}{2}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+1\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

2ο **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Η h είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο IR με

$$h'(x)=e^{\alpha x}(\alpha x)'-2e^{\beta x}(\beta x)'+1=\alpha e^{\alpha x}-2\beta e^{\beta x}+1$$
$$h''(x)=\alpha e^{\alpha x}(\alpha x)'-2\beta e^{\beta x}(\beta x)'=\alpha^2 e^{\alpha x}-2\beta^2 e^{\beta x}$$

Οπότε

$$h''(0)-h'(0)+3(\beta^2+1)=\alpha\Leftrightarrow \alpha^2e^0-2\beta^2e^0-(\alpha e^0-2\beta e^0+1)+3\beta^2+3-\alpha=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2-2\beta^2-\alpha+2\beta-1+3\beta^2-\alpha+3=0\Leftrightarrow(\alpha^2-2\alpha+1)+(\beta^2+2\beta+1)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\alpha-1)^2+(\beta+1)^2=0\ \underset{(\beta+1)^2\geq 0}{\overset{(\alpha-1)^2\geq 0}{\Leftrightarrow}}\ \begin{cases}(\alpha-1)^2=0\\ \text{και}\\ (\beta+1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-1=0\\ \text{και}\\ \beta+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{\alpha=1}\\ \textbf{και}\\ \boldsymbol{\beta=-1}\end{cases}$$

Γ2. Είναι $h(x)=e^x-2e^{-x}+x+1,\ \ x\in IR$.

Οπότε $h(0)=0$

Για κάθε $x_1,\ x_2\in IR$ με $x_1<x_2$ είναι

$$x_1<x_2\Leftrightarrow e^{x_1}<e^{x_2}\qquad \textbf{(1)}$$
$$-x_1>-x_2\Leftrightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2}\Leftrightarrow -2e^{-x_1}<-2e^{-x_2}\qquad \textbf{(2)}$$
$$x_1<x_2\Leftrightarrow x_1+1<x_2+1\qquad \textbf{(3)}$$

με πρόσθεση κατά μέλη των **(1), (2), (3)** παίρνουμε

$$e^{x_1}-2e^{-x_1}+x_1+1<e^{x_2}-2e^{-x_2}+x_2+1\Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2)$$

Άρα **η h είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της A = IR και συνεπώς 1 - 1 .**

Επομένως

- $h(x)=0\Leftrightarrow h(x)=h(0)\Leftrightarrow x=0$
- $h(x)<0\Leftrightarrow h(x)<h(0)\Leftrightarrow x<0$
- $h(x)>0\Leftrightarrow h(x)>h(0)\Leftrightarrow x>0$

Γ3. Είναι :

$$h(\xi)=\sqrt{\left(e^{2015}-2e^{-2015}+2016\right)\left(e^{2016}-2e^{-2016}+2017\right)}\Leftrightarrow h(\xi)=\sqrt{h(2015)h(2016)}$$

Για κάθε $x>0$ είναι $h(x)>0$.

Οπότε η σχέση $h(\xi)=\sqrt{h(2015)\cdot h(2016)}$ ισοδύναμα γράφεται

$$h^2(\xi)=h(2015)h(2016)\Leftrightarrow h^2(\xi)-h(2015)h(2016)=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x)=h^2(x)-h(2015)h(2016),\quad x\in[2015,\ 2016]$

- Η G είναι συνεχής στο $\left[2015,\ 2016\right]$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $G(2015)=h^2(2015)-h(2015)h(2016)=h(2015)\left(h(2015)-h(2016)\right)<0$, γιατί

$$2015>0\Leftrightarrow h(2015)>0 \text{ και}$$

$$2015<2016\overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow}h(2015)<h(2016)\Leftrightarrow h(2015)-h(2016)<0$$

- $G(2016)=h^2(2016)-h(2015)h(2016)=h(2016)\left(h(2016)-h(2015)\right)>0$, γιατί

$$2016>0\Leftrightarrow h(2016)>0 \text{ και}$$

$$2015<2016\overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow}h(2015)<h(2016)\Leftrightarrow h(2016)-h(2015)>0$$

Άρα

$$G(2015)G(2016)<0$$

Επομένως από το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει $\xi\in\left(2015,\ 2016\right)$ τέτοιο ώστε

$$G(\xi)=0\Leftrightarrow h(\xi)=\sqrt{h(2015)\cdot h(2016)}$$

Επειδή η **h είναι γνησίως αύξουσα άρα 1 – 1, το ξ είναι μοναδικό.**

Γ4. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-2e^{-x}+x+1\right)=+\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}(-2e^{-x})\overset{u=-x}{=}\lim_{u\to-\infty}(-2e^u)=-2\cdot 0=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$$

Θέτουμε $u=\dfrac{1}{h(x)}$, οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}u=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{h(x)}=0 \quad\text{αφού}\quad \lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty.$$

Επίσης $u=\dfrac{1}{h(x)}>0$ στην περιοχή του $+\infty$ αφού $h(x)>0$ για κάθε $x>0$

Άρα όταν $x\to+\infty$, $u\to 0^+$.

Οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left[h^2(x)\cdot \eta\mu\frac{1}{h(x)}\right]=\lim_{u\to 0^+}\left[\frac{1}{u^2}\cdot\eta\mu u\right]=\lim_{u\to 0^+}\left[\frac{1}{u}\cdot\frac{\eta\mu u}{u}\right]=\lim_{u\to 0^+}\frac{1}{u}\cdot\lim_{u\to 0^+}\frac{\eta\mu u}{u}$$

$$=\left(+\infty\right)\cdot 1=+\infty$$

Γ5. Οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο IR με

$$f'(x)=e^x+xe^x \qquad \text{και} \qquad g'(x)=-\frac{1}{2}2e^{2x}+2=-e^{2x}+2$$

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δέχονται στο κοινό τους σημείο $M(x_0,\,y_0)$ κοινή εφαπτομένη αν και μόνο αν

$$\begin{cases} f(x_0)=g(x_0)\\ f'(x_0)=g'(x_0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_0e^{x_0}+\kappa=-\dfrac{1}{2}e^{2x_0}+2x_0+\lambda & (1)\\ e^{x_0}+x_0e^{x_0}=-e^{2x_0}+2 & (2)\end{cases}$$

Η εξίσωση **(2)** γράφεται

$$e^{x_0}+x_0e^{x_0}=-e^{2x_0}+2\Leftrightarrow\frac{e^{x_0}}{e^{x_0}}+\frac{x_0e^{x_0}}{e^{x_0}}=-\frac{e^{2x_0}}{e^{x_0}}+\frac{2}{e^{x_0}}\Leftrightarrow 1+x_0=-e^{x_0}+2e^{-x_0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x_0}-2e^{-x_0}+x_0+1=0\Leftrightarrow h(x_0)=0\overset{\Delta 2.}{\Leftrightarrow}x_0=0$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0,\,f(0))$ έχει εξίσωση

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=f'(0)x+f(0)$$

και διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν $f(0)=0\Leftrightarrow \boldsymbol{\kappa=0}$

Από **(1)** για $x_0=0$ και $\kappa=0$ έχουμε :

$$0\cdot e^0+0=-\frac{1}{2}e^0+2\cdot 0+\lambda\Leftrightarrow 0=-\frac{1}{2}+\lambda\Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda=\frac{1}{2}}$$

Οπότε :

$$\begin{cases} f(0)=g(0)=0\\ f'(0)=g'(0)=1\end{cases}$$

και η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης είναι

$$y = f'(0)x + f(0) \Leftrightarrow \mathbf{y = x}$$

2ο **Θ Ε Μ Α Δ**

Δ1. Θέτουμε $h(x) = \dfrac{f(x) - \sqrt{x+6}}{x-3}$ οπότε

$$\lim_{x \to 3} h(x) = \frac{-7}{6} \qquad \text{και} \qquad f(x) = h(x)(x-3) + \sqrt{x+6}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to3} f(x) = \lim\limits_{x\to3}\left[h(x)(x-3) + \sqrt{x+6}\right] = \dfrac{-7}{6}\cdot 0 + \sqrt{9} = 3$

και επειδή η f είναι συνεχής στο IR άρα και στο 3, έχουμε

$$\lim_{x\to3} f(x) = f(3) = 3$$

Έχουμε

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to3}\frac{h(x)(x-3)+\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \lim_{x\to3}\left[\frac{h(x)(x-3)}{x-3} + \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}\right] =$$

$$= \lim_{x\to3}\left[h(x) + \frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}\right] = \lim_{x\to3}\left[h(x) + \frac{\left(\sqrt{x+6}\right)^2 - 3^2}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to3}\left[h(x) + \frac{x+6-9}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}\right] = \lim_{x\to3}\left[h(x) + \frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to3}\left[h(x) + \frac{1}{\sqrt{x+6}+3}\right] = \lim_{x\to3} h(x) + \lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+6}+3} = \frac{-7}{6} + \frac{1}{6} = -1$$

Άρα **η f είναι παραγωγίσιμη στο 3 με** $f'(3) = -1$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A\left(3, f(3)\right)$ είναι :

$$\varepsilon: y - f(3) = f'(3)(x-3) \Leftrightarrow y - 3 = -1(x-3) \Leftrightarrow y - 3 = -x + 3 \Leftrightarrow \mathbf{x + y - 6 = 0}$$

Δ2. Η $g(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu \geq 1$ οπότε

η $4g(x) + 9$ θα είναι βαθμού ν ,

η $g'(x)$ θα είναι βαθμού ν - 1, άρα

η $\left[g'(x)\right]^2$ θα είναι βαθμού 2(ν - 1), συνεπώς από την ισότητα

$$\left[g'(x)\right]^2 = 4g(x)+9$$

προκύπτει βαθμ.$\left[g'(x)\right]^2 =$ βαθμ.$\left[4g(x)+9\right]$

άρα

$$2(\nu-1)=\nu \Leftrightarrow 2\nu-2=\nu \Leftrightarrow \nu=2$$

Επομένως $g(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \ \alpha\neq 0$ και $g'(x)=2\alpha x+\beta$

Οπότε :

$$\left[g'(x)\right]^2 = 4g(x)+9 \Leftrightarrow (2\alpha x+\beta)^2 = 4(\alpha x^2+\beta x+\gamma)+9$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2 = 4\alpha x^2+4\beta x+4\gamma+9$$

Από την ισότητα των πολυωνύμων παίρνουμε :

$$\begin{cases}4\alpha^2=4\alpha\\ 4\alpha\beta=4\beta\\ \beta^2=4\gamma+9\end{cases} \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\alpha=1\\ 4\alpha\beta=4\beta\\ \beta^2=4\gamma+9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1\\ 4\beta=4\beta \ \text{ ισχύει}\\ \beta^2=4\gamma+9\end{cases}$$

Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(2+h)-g(2)}{h}=3 \Leftrightarrow g'(2)=3 \Leftrightarrow 4\alpha+\beta=3 \overset{\alpha=1}{\Leftrightarrow} 4+\beta=3 \Leftrightarrow \beta=-1$

Επομένως $\beta^2=4\gamma+9 \Leftrightarrow (-1)^2=4\gamma+9 \Leftrightarrow 1=4\gamma+9 \Leftrightarrow 4\gamma=-8 \Leftrightarrow \gamma=-2$

Άρα

$$g(x)=x^2-x-2,\quad x\in \mathrm{IR}\,.$$

Δ3. **i.** Έστω Μ(x_0, $g(x_0)$) σημείο επαφής και ε η εφαπτομένη της C_g στο Μ.

Είναι :

$$\varepsilon\ :\ y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-(x_0{}^2-x_0-2)=(2x_0-1)(x-x_0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y-x_0{}^2+x_0+2=(2x_0-1)x-2x_0{}^2+x_0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y=(2x_0-1)x-x_0{}^2-2$$

Η ε διέρχεται από το σημείο $B\left(\xi,\ -\dfrac{5}{2}\right)$ αν και μόνο αν

$$-\frac{5}{2}=(2x_0-1)\cdot\xi-x_0{}^2-2 \Leftrightarrow -5=4x_0\xi-2\xi-2x_0{}^2-4 \Leftrightarrow 2x_0{}^2-4\xi x_0+2\xi-1=0 \quad \textbf{(1)}$$

Η **(1)** είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού ως προς x_o με διακρίνουσα :

$$\Delta = (-4\xi)^2 - 4\cdot 2(2\xi-1) = 16\xi^2 - 16\xi + 8 = 8(2\xi^2 - 2\xi + 1) = 8(\xi^2 + \xi^2 - 2\xi + 1) =$$
$$= 8\left[\xi^2 + (\xi-1)^2\right] > 0, \quad \text{για κάθε } \xi \in \mathrm{IR}.$$

Επομένως έχει δύο ρίζες άνισες $x_1,\ x_2$.

Άρα υπάρχουν δύο σημεία επαφής $M_1\left(x_1,\ g(x_1)\right)$ και $M_2\left(x_2,\ g(x_2)\right)$.

Αν $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ οι εφαπτόμενες της C_g στα M_1 και M_2 και λ_1 και λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτόμενων αντιστοίχως, τότε :

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = g'(x_1)g'(x_2) = (2x_1-1)(2x_2-1) = 4x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 1 = 4x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 1$$

Από τους τύπους Vieta είναι

$$x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2\xi-1}{2} \quad \text{και} \quad x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4\xi}{2} = 2\xi$$

Οπότε : $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 4\dfrac{2\xi-1}{2} - 2\cdot 2\xi + 1 = 4\xi - 2 - 4\xi + 1 = -1$ και συνεπώς $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

Άρα **από το σημείο** $B\left(\xi,\ -\dfrac{5}{2}\right)$ **διέρχονται δύο εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της g, οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους.**

ii. Είναι $f'(3) = -1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = -1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-3}{x-3} = -1$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x^3-5)-3}{g(x)} = \lim_{x\to 2}\frac{f(x^3-5)-3}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{f(x^3-5)-3}{(x^3-5)-3}}{\dfrac{x^2-x-2}{(x^3-5)-3}} = \lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{f(x^3-5)-3}{(x^3-5)-3}}{\dfrac{x^2-x-2}{x^3-8}}$$

► Για το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x^3-5)-3}{(x^3-5)-3}$ θέτουμε $u = x^3 - 5$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 2} u = \lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-5\right) = 8 - 5 = 3$ και συνεπώς όταν $x \to 2$, $u \to 3$,

επομένως

$$\lim_{x\to 2}\frac{f\left(x^3-5\right)-3}{(x^3-5)-3} = \lim_{u\to 3}\frac{f(u)-3}{u-3} = f'(3) = -1$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{x^3-2^3}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x^2+2x+2^2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x^2+2x+4}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

Άρα

$$\mathbf{\lim_{x\to 2}\frac{f(x^3-5)-3}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\frac{f\left(x^3-5\right)-3}{(x^3-5)-3}}{\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^3-8}}=\frac{-1}{\frac{1}{4}}=-4}\,.$$

3ο

2.3-2.4 Εξίσωση εφαπτομένης–Ρυθμός μεταβολής

3ο

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι

$$f'(x) = \alpha e^x + 2\beta x \qquad f''(x) = \alpha e^x + 2\beta$$

Η εφαπτομένη της $C_{f'}$ στο σημείο της $M(0\ ,\ f'(0))$ έχει εξίσωση

$$y - f'(0) = f''(0)(x - 0) \Leftrightarrow$$

$$y - (\alpha e^0 + 2\beta\cdot 0) = (\alpha e^0 + 2\beta)x \Leftrightarrow y = (\alpha + 2\beta)x + \alpha$$

Η παραπάνω ευθεία ταυτίζεται με την $y = -6x + 2$ αν και μόνο

$$\boxed{\begin{cases}\alpha + 2\beta = -6\\ \alpha = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2 + 2\beta = -6\\ \alpha = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = -4\\ \alpha = 2\end{cases}}$$

Β2. Είναι

$$f(x) = 2e^x - 4x^2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2e^x - 4x^2) = 2\cdot 0 - 4(+\infty) = -\infty$$

Είναι

$$|\eta\mu x| \le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right||\eta\mu x| \le \left|\frac{1}{f(x)}\right| \Leftrightarrow -\left|\frac{1}{f(x)}\right| \le \frac{\eta\mu x}{f(x)} \le \left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

Είναι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ άρα } \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)} = 0$$

άρα από **κριτήριο παρεμβολής**

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{f(x)} = 0}.$$

Β3. Είναι $\lambda_\delta = \dfrac{1}{2}$

οπότε **αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει** $x_0 \in (0\ ,\ 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = -2 \qquad \textbf{(1)}$$

Είναι

$$f(x) = 2e^x - 4x^2 \quad \text{και} \quad f'(x) = 2e^x - 8x$$

άρα η (1) γίνεται

$$2e^{x_0} - 8x_0 = -2 \Leftrightarrow e^{x_0} - 4x_0 + 1 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = e^x - 4x + 1\,, \quad x \in IR$$

- Η g είναι συνεχής στο [0 , 1] ως διαφορά συνεχών.
- $g(0) = 2 > 0$ και $g(1) = e - 3 < 0$

Άρα από **Θ . Bolzano** υπάρχει **ένα τουλάχιστον** $x_0 \in (0\,,1)$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} - 4x_0 + 1 = 0\,.$$

3ο **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. i. Είναι $f(0) = 1$ οπότε

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2}\cdot x\right] = f'(0)\cdot 0 = 0}$$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2} \overset{u=x^2}{=} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)-f(0)}{u} = f'(0)$

ii. Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^2(2x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\big(f(2x)-1\big)\big(f(2x)+1\big)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\big(f(2x)-f(0)\big)\big(f(2x)+1\big)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[2\frac{f(2x)-f(0)}{2x}\big(f(2x)+1\big)\right] = 2f'(0)(1+1) = 4f'(0)$$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(0)}{2x} \overset{k=2x}{=} \lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(k)-f(0)}{k} = f'(0)$ και

$\lim\limits_{x\to 0} f(2x) = f(0) = 1$ αφού η $f(2x)$ είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών

f (παραγωγίσιμη) και 2x

Γ3. Είναι

$$f^2(x) - 4f(x) = x^2 - 3 \Leftrightarrow f^2(x) - 4f(x) + 4 = x^2 - 3 + 4 \Leftrightarrow \big(f(x)-2\big)^2 = x^2 + 1$$

Θέτουμε $g(x)=f(x)-2$ οπότε $g^2(x)=x^2+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$x^2+1\neq 0 \Leftrightarrow g^2(x)\neq 0 \Leftrightarrow g(x)\neq 0 \text{ και}$$

g συνεχής ως διαφορά συνεχών, αρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο IR.

Είναι

$$g(0)=f(0)-2=1-2=-1<0 \text{ άρα } g(x)<0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Επομένως

$$g(x)=-\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)-2=-\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=2-\sqrt{x^2+1},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Γ3. i. Έστω $N\left(x_0,\, f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής. Η εξίσωση εφαπτομένης θα είναι

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-\left(2-\sqrt{x_0^{\,2}+1}\right)=\frac{-x_0}{\sqrt{x_0^{\,2}+1}}(x-x_0)$$

και επειδή διέρχεται από το σημείο $B\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$ θα επαληθεύεται από αυτό.

Δηλαδή θα ισχύει

$$\frac{3}{2}-\left(2-\sqrt{x_0^{\,2}+1}\right)=\frac{-x_0}{\sqrt{x_0^{\,2}+1}}(0-x_0)\Leftrightarrow \frac{-1}{2}+\sqrt{x_0^{\,2}+1}=\frac{x_0^{\,2}}{\sqrt{x_0^{\,2}+1}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2}\sqrt{x_0^{\,2}+1}+\left(\sqrt{x_0^{\,2}+1}\right)^2=x_0^{\,2}\Leftrightarrow \frac{-1}{2}\sqrt{x_0^{\,2}+1}+x_0^{\,2}+1=x_0^{\,2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_0^{\,2}+1}=2\Leftrightarrow x_0^{\,2}+1=4\Leftrightarrow x_0^{\,2}=3\Leftrightarrow x_0=\pm\sqrt{3}$$

- Για $x_0=\sqrt{3}$ είναι $y=\frac{-\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}$
- Για $x_0=-\sqrt{3}$ είναι $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}$

ii. Έστω $M\left(x,\ f(x)\right)$ σημείο της C_f με $x>0$

Είναι $\overrightarrow{OA}=(0,\ 1)$, $\quad\overrightarrow{OM}=\left(x,\ f(x)\right)$ οπότε

$$(OAM)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}0 & 1\\ x & f(x)\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|x|\overset{x>0}{=}\frac{1}{2}x$$

Επειδή η τετμημένη μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου έχουμε

$$E(t)=\frac{1}{2}x(t).$$

Άρα

$$E'(t)=\frac{1}{2}x'(t) \text{ και επειδή } x'(t)=2cm/sec,$$

προκύπτει ότι το **εμβαδόν μεταβάλλεται με ρυθμό**

$$\boxed{\mathbf{E'(t)=1cm^2/sec.}}$$

3o **ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. Αφού η f είναι συνεχής στο Α = (1, + ∞) και γνησίως αύξουσα θα έχει σύνολο τιμών το

$$f(A)=(B,\Gamma) \quad \text{όπου} \quad B=\lim_{x\to1}f(x) \quad \text{και} \quad \Gamma=\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

Αλλά $f(A)=(0,+\infty)$

Επομένως είναι

$$\lim_{x\to1}f(x)=0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

Αφού η g είναι συνεχής στο Α=(1, +∞) και γνησίως φθίνουσα θα έχει σύνολο τιμών το

$$g(A)=(\Delta, E) \quad \text{όπου} \quad \Delta=\lim_{x\to+\infty}g(x) \quad \text{και} \quad E=\lim_{x\to1}g(x)$$

Αλλά $g(A)=(0,1)$

Επομένως είναι

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to1}g(x)=1$$

Επειδή $D_f\cap D_g=(1,+\infty)$, για το πεδίο ορισμού της h πρέπει:

$$\begin{cases} x\in(1,+\infty) \\ \text{και} \\ g(x)\neq0 \quad \text{που ισχύει αφού } g(A)=(0,\ 1) \text{ συνεπώς } 0<g(x)<1 \text{ για κάθε } x>1 \end{cases}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της h είναι $D_h=(1,+\infty)$

Για κάθε $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε

$$x_1<x_2 \overset{f:\text{γν.αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2) \qquad (1)$$

$$x_1<x_2 \overset{g:\text{γν.φθιν.}}{\Leftrightarrow} g(x_1)>g(x_2) \overset{g(x)>0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{g(x_1)}<\frac{1}{g(x_2)} \qquad (2)$$

Επειδή λόγω του συνόλου τιμών είναι f(x)>0 και g(x)>0 για κάθε x>1 , με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει:

$$\frac{f(x_1)}{g(x_1)}<\frac{f(x_2)}{g(x_2)}\Leftrightarrow\left(\frac{f}{g}\right)(x_1)<\left(\frac{f}{g}\right)(x_2)\Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2)$$

Άρα η h είναι **γνησίως αύξουσα** συνάρτηση .

Για το σύνολο τιμών της h έχουμε

- Η h είναι συνεχής στο $D_h=(1,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.
- $$\lim_{x\to1}h(x)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to1}f(x)}{\lim\limits_{x\to1}g(x)}=\frac{0}{1}=0$$
- $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0\\ g(x)>0\ \text{ για κάθε } x>1\end{array}\right\}\ \text{άρα}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{g(x)}=+\infty$$

$$\text{Οπότε}\ \lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\frac{1}{g(x)}\right]=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$$

Άρα η h έχει **σύνολο τιμών** το

$$\boxed{\mathbf{h(A)=(0,+\infty)}}$$

Δ2. Το $2016\in h(A)=(0,+\infty)$ άρα υπάρχει $x_0\in A=(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0)=2016.$$

Η h είναι **γνησίως αύξουσα** άρα **1-1** και συνεπώς **το x_0 είναι** **μοναδικό.**

Δ3. Πρέπει

$$\begin{cases}x\in IR\\ e^x+1\in A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in IR\\ e^x+1>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in IR\\ e^x>0\ \text{ που ισχύει}\end{cases}.$$

Άρα για κάθε $x\in IR$, έχουμε :

$$f(e^x+1)g(2)-g(e^x+1)f(2)<0\Leftrightarrow f(e^x+1)g(2)<g(e^x+1)f(2)\overset{g(x)>0\text{ για κάθε }x>1}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(e^x+1)}{g(e^x+1)}<\frac{f(2)}{g(2)}\Leftrightarrow\left(\frac{f}{g}\right)(e^x+1)<\left(\frac{f}{g}\right)(2)\Leftrightarrow h(e^x+1)<h(2)\overset{\mathbf{h:γν.αυξ.}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow e^x+1<2\Leftrightarrow e^x<1\Leftrightarrow e^x<e^0\Leftrightarrow x<0$$

Άρα η ανίσωση **αληθεύει για κάθε** $x\in(-\infty,0)$.

Δ4. i. Για κάθε $x>0$, είναι :

$$(f\,o\,\varphi)(x)\cdot g\left(\left|\ln x\right|+2\right)=(g\,o\,\varphi)(x)\cdot f\left(\left|\ln x\right|+2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\varphi(x)\right)\cdot g\left(\left|\ln x\right|+2\right)=g\left(\varphi(x)\right)\cdot f\left(\left|\ln x\right|+2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f\left(\varphi(x)\right)}{g\left(\varphi(x)\right)}=\frac{f\left(\left|\ln x\right|+2\right)}{g\left(\left|\ln x\right|+2\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f}{g}\right)\left(\varphi(x)\right)=\left(\frac{f}{g}\right)\left(\left|\ln x\right|+2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h\left(\varphi(x)\right)=h\left(\left|\ln x\right|+2\right)\overset{h:1\text{-}1}{\Leftrightarrow}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \boldsymbol{\varphi(x)=\left|\ln x\right|+2,\quad x>0}}$$

ii. Αν Α και Β είναι τα σημεία στα οποία η ευθεία $y = c$ τέμνει την C_φ αρκεί να δείξουμε ότι

$$\varphi'(x_A)\cdot\varphi'(x_B)=-1$$

Για κάθε $x > 0$, είναι :

$$\varphi(x)=c\Leftrightarrow\left|\ln x\right|+2=c\Leftrightarrow\left|\ln x\right|=c-2\overset{c>2}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\ln x=c-2\\ \quad ή\\ \ln x=2-c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=e^{c-2}\\ \quad ή\\ x=e^{2-c}\end{cases}$$

Άρα η ευθεία $y = c$ τέμνει τη γραφική παράσταση της φ σε δύο ακριβώς σημεία τα

$$A(e^{c-2},\, c)\qquad και\qquad B(e^{2-c},\, c)$$

Είναι $\varphi(x)=\left|\ln x\right|+2$, $x > 0$.

Αν $\ln x<0\Leftrightarrow 0<x<1$ τότε $\varphi(x)=-\ln x+2$

Αν

$$\ln x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1 \text{ τότε } \varphi(x)=\ln x+2$$

Άρα

$$\varphi(x)=\begin{cases}-\ln x+2, & αν\ \ 0<x<1\\ \ln x+2, & αν\ \ x\geq 1\end{cases}$$

Αν $0<x<1$ τότε

$$\varphi'(x)=\left(-\ln x+2\right)'=-\frac{1}{x}$$

Αν $x>1$ τότε

$$\varphi'(x)=\left(\ln x+2\right)'=\frac{1}{x}$$

Είναι

$$c>2 \Leftrightarrow c-2>0 \Leftrightarrow e^{c-2}>e^{0} \Leftrightarrow e^{c-2}>1,$$

άρα

$$\varphi'(x_A)=\varphi'(e^{c-2})=\frac{1}{e^{c-2}}$$

Είναι

$$c>2 \Leftrightarrow 2-c<0 \Leftrightarrow e^{2-c}<e^{0} \Leftrightarrow e^{2-c}<1,$$

άρα

$$\varphi'(x_B)=\varphi'(e^{2-c})=-\frac{1}{e^{2-c}}$$

Επομένως

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi'(x_A)\cdot\varphi'(x_B)=\frac{1}{e^{c-2}}\cdot\left(-\frac{1}{e^{2-c}}\right)=-\frac{1}{e^{c-2}\cdot e^{2-c}}=-\frac{1}{e^{c-2+2-c}}=-\frac{1}{e^{0}}=-1}}$$

4ο

2.5 Θεώρημα του Rolle

4ο

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)f(x)+\eta\mu(x^2-4)}{\sqrt{x-1}-1}=\lim_{x\to 2}\frac{\left((x-2)f(x)+\eta\mu(x^2-4)\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left((x-2)f(x)+\eta\mu(x^2-4)\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\left(\frac{(x-2)f(x)}{x-2}+\frac{\eta\mu(x^2-4)}{x-2}\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\left(f(x)+(x+2)\frac{\eta\mu(x^2-4)}{(x-2)(x+2)}\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\left(f(x)+(x+2)\frac{\eta\mu(x^2-4)}{x^2-4}\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)\right]$$

$$=\left(f(2)+4\cdot 1\right)\cdot 2=2f(2)+8$$

αφού η f είναι συνεχής στο 2 (ως παραγωγίσιμη) και

$$\lim_{x\to 2}\frac{\eta\mu(x^2-4)}{x^2-4}\overset{u=x^2-4}{=}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{2f(2)+8=-2\Leftrightarrow f(2)=-5}}$$

Από τη σχέση

$$f^2(x)+f(x^2)=2x^2 \text{ για } x=1$$

έχουμε :

$$f^2(1)+f(1)=2\Leftrightarrow f^2(1)+f(1)-2=0\Leftrightarrow f(1)=1 \quad \text{ή} \quad f(1)=-2$$

Αλλά η f είναι συνεχής και $f(x)\neq 0$

Άρα η f διατηρεί **σταθερό πρόσημο** στο IR και επειδή f(2)=-5<0 θα είναι f(x)<0 για κάθε x ∈IR. Επομένως

$$\boxed{\mathbf{f(1)=-2}}$$

B2. Η εξίσωση της **εφαπτομένης** της γραφικής παράστασης της f στο $A(1\ ,\ f(1))$ είναι

$$\varepsilon:\ y-f(1)=f'(1)(x-1).$$

Για να βρούμε την $f'(1)$, παραγωγίζουμε τα δύο μέλη της σχέσης

$$f^2(x)+f(x^2)=2x^2$$

και παίρνουμε :

$$2f(x)f'(x)+f'(x^2)2x=4x$$

Για $x=1$, έχουμε

$$2f(1)f'(1)+2f'(1)=4 \overset{f(1)=-2}{\Leftrightarrow} -4f'(1)+2f'(1)=4 \Leftrightarrow f'(1)=-2$$

Επομένως

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon:\ y-(-2)=-2(x-1) \Leftrightarrow y=-2x}}$$

B3. Η εξίσωση : $(x-3)f'(x)+f(x)=1$ γράφεται :

$$(x-3)f'(x)+f(x)-1=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=(x-3)f(x)-x,\quad x\in[1,\ 2]\ .$$

- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[\,1,\ 3\,]$με $g'(x)=(x-3)f'(x)+f(x)-1$
- $g(1)=-2f(1)-1=-2(-2)-1=3$
- $g(2)=-f(2)-2=-(-5)-2=3$

Επομένως $g(1)=g(2)$ και συνεπώς για την g ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θ. Rolle** στο διάστημα $[1\ ,2]$.

Άρα η εξίσωση

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow (x-3)f'(x)+f(x)-1=0 \Leftrightarrow (x-3)f'(x)+f(x)=1$$

έχει ***μια τουλάχιστον ρίζα*** στο $(1,\ 2)$.

4ο **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Έστω ότι $g(\alpha)=0$. Τότε για $x=\alpha$ η δοθείσα σχέση γίνεται :

$$f(\alpha)g'(\alpha)-g(\alpha)f'(\alpha)\neq 0 \overset{f(\alpha)=0}{\Leftrightarrow} 0\cdot g'(\alpha)-0\cdot f'(\alpha)\neq 0 \Leftrightarrow 0\neq 0,\quad \textbf{άτοπο.}$$

Ομοίως έστω ότι $g(\beta)=0$.

Τότε για $x = \beta$ η δοθείσα σχέση γίνεται :

$$f(\beta)g'(\beta) - g(\beta)f'(\beta) \neq 0 \overset{f(\beta)=0}{\Leftrightarrow} 0 \cdot g'(\beta) - 0 \cdot f'(\beta) \neq 0 \Leftrightarrow 0 \neq 0 \ , \quad \textbf{άτοπο.}$$

Γ2. Έστω ότι **δεν υπάρχει** $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

Άρα $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Επίσης λόγω **i)** ερωτήματος

$$g(\alpha) \neq 0 \ \text{ και } \ g(\beta) \neq 0$$

Επομένως

$$g(x) \neq 0 \ \text{ για κάθε } \ x \in [\alpha, \beta] .$$

Οπότε ορίζεται η συνάρτηση :

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in [\alpha, \beta] .$$

- Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, με

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

- $$h(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{0}{g(\alpha)} = 0 \quad \text{ και } \quad h(\beta) = \frac{f(\beta)}{g(\beta)} = \frac{0}{g(\beta)} = 0 .$$

Επομένως $h(\alpha) = h(\beta) = 0$ και συνεπώς για την h ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θ. Rolle** στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Άρα θα υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0 , \ \textbf{άτοπο}$$

αφού

$$f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0 , \ \text{ για κάθε } \ x \in \Delta = [\alpha, \beta].$$

Άρα υπάρχει **ένα τουλάχιστον** $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$\boxed{\mathbf{g(x_0) = 0}}$$

Γ3. Έστω ότι υπάρχουν $x_1 \neq x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε

$$g(x_1) = g(x_2) = 0.$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, έστω $x_1 < x_2$

Επειδή

$f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ θα είναι και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2] \subseteq (\alpha, \beta)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x)=\frac{g(x)}{f(x)},\ \ x\in[\,x_1,\ x_2\,].$$

- Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[\,x_1,\ x_2\,]\subseteq(\,\alpha,\ \beta\,)$, με

$$\varphi'(x)=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{f^2(x)}$$

- $$\varphi(x_1)=\frac{g(x_1)}{f(x_1)}=\frac{0}{f(x_1)}=0 \qquad \text{και} \qquad \varphi(x_2)=\frac{g(x_2)}{f(x_2)}=\frac{0}{f(x_2)}=0.$$

Επομένως $\varphi(\,x_1\,)=\varphi(\,x_2\,)=0$ και συνεπώς για την φ ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θ. Rolle** στο διάστημα $[\,x_1\,,\,x_2\,]$.

Άρα θα υπάρχει $\xi_0\in(\,x_1\,,\,x_2\,)\subseteq(\,\alpha,\ \beta\,)$ τέτοιο ώστε

$\varphi'(\xi)=0 \Leftrightarrow g'(\xi_0)f(\xi_0)-g(\xi_0)f'(\xi_0)=0 \Leftrightarrow f'(\xi_0)g(\xi_0)-f(\xi_0)g'(\xi_0)=0$, **άτοπο**

Άρα υπάρχει **μοναδικό** $x_0\in(\,\alpha,\ \beta\,)$ τέτοιο ώστε

$$\boxed{g(x_0)=0}$$

4ο **ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι 1-1 συνάρτηση.

Έστω ότι υπάρχουν $x_1\neq x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1)=f(x_2)$. Έστω $x_1<x_2$.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο IR ισχύει το Θ. Rolle στο $[x_1,\ x_2]$

οπότε υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ ώστε

$$f'(x_0)=0,\ \text{άτοπο αφού}\ f'(x)\neq 0\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}.$$

Άρα για κάθε $x_1\neq x_2$ είναι $f(x_1)\neq f(x_2)$ και συνεπώς η f είναι **1-1** συνάρτηση.

Δ2. Είναι

$$f^{-1}(9)=2\Leftrightarrow f(2)=9 \quad \text{και} \quad f^{-1}(4)=3\Leftrightarrow f(3)=4.$$

i. Είναι :

$$f^{-1}\left(5+f(x^2-1)\right)=2\Leftrightarrow f^{-1}\left(5+f(x^2-1)\right)=f^{-1}(9)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(f^{-1}\left(5+f(x^2-1)\right)\right)=f\left(f^{-1}(9)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5+f(x^2-1)=9\Leftrightarrow f(x^2-1)=4\Leftrightarrow f^{-1}\left(f(x^2-1)\right)=f^{-1}(4)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-1=3\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$$

ii. Είναι

$$2g(\xi)+\xi=0 \Leftrightarrow 2\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}+\xi=0 \Leftrightarrow 2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x^2f(x),\ x\in\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο IR ως γινόμενο παραγωγίσιμων με

$$h'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$$

Είναι

$$h(2)=2^2f(2)=4\cdot 9=36 \quad \text{και} \quad h(3)=3^2f(3)=9\cdot 4=36$$

αρα

$$h(2)=h(3)$$

οπότε ισχύει το **Θ. Rolle** και συνεπώς υπάρχει $\xi\in(2,\ 3)$ ώστε

$$h'(\xi)=0 \Leftrightarrow 2\xi f(\xi)+\xi^2 f(\xi)=0 \overset{\xi\neq 0}{\Leftrightarrow} 2f(\xi)+\xi f(\xi)=0 \Leftrightarrow 2g(\xi)+\xi=0$$

Δ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $g'(x_0)=1$ όπου

$$g(x_0)=0 \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=0 \Leftrightarrow f(x_0)=0\,.$$

Έχουμε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \overset{g(x_0)=0}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{f'(x)}-0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{f'(x)(x-x_0)} \overset{f(x_0)=0}{=}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f'(x)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{f':\ \text{συνεχής}}{=} \frac{1}{f'(x_0)}f'(x_0)=1$$

Άρα η g είναι **παραγωγίσιμη** με

$$\boxed{g'(x_0)=1}$$

5ο

2.6 Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού

5ο **ΘΕΜΑ Β**

B1. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,\ f(0))$ έχει εξίσωση

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=f'(0)x+f(0)$$

η οποία ταυτίζεται με την $y=2x+1$ αν και μόνο αν

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{f'(0)=2} \\ \mathbf{f(0)=1} \end{cases}}$$

B2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\,0,\ 1\,]$ οπότε από το **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[\,0,\ 1\,]$ υπάρχει $x_0\in(0,\ 1)$ ώστε

$$f'(x_0)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0)$$

Η f' είναι γνησίως φθίνουσα οπότε έχουμε

$$0<x_0<1\Leftrightarrow f'(0)>f'(x_0)>f'(1)\Leftrightarrow 2>f(1)-f(0)>1$$
$$\Leftrightarrow 2>f(1)-1>1\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{2<f(1)<3}}$$

B3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=(2-3x)f(x)-f(1-x)+4x,\quad x\in[0,\ 1]$$

Είναι $\quad g(0)=2f(0)-f(1)=2\cdot 1-f(1)=2-f(1)<0$ αφού $f(1)>2$

$$g(1)=-f(1)-f(0)+4=-f(1)-1+4=3-f(1)>0 \text{ αφού } f(1)<3.$$

Επειδή η g είναι συνεχής στο $[\,0,\ 1\,]$ ως παραγωγίσιμη , από το **Θ. Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\ 1)$ τέτοιο ώστε

$$\boxed{\mathbf{g(\xi)=0\Leftrightarrow(2-3\xi)f(\xi)-f(1-\xi)+4\xi=0\Leftrightarrow(2-3\xi)f(\xi)=f(1-\xi)-4\xi.}}$$

5ο **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=x^2f(x)-x,\ x\in\mathbb{R}.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής , με

$$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-1.$$

Είναι

$$g(-1)=f(-1)+1\overset{(1)}{=}f(1)-2+1=f(1)-1 \quad \text{και} \quad g(1)=f(1)-1$$

Άρα $g(-1)=g(1)$ επομένως από το **Θ. Rolle** υπάρχει $x_0\,(-1,\ 1)$ τέτοιο ώστε

$$g'(x_0)=0 \Leftrightarrow 2x_0f(x_0)+x_0^{\,2}f'(x_0)-1=0 \Leftrightarrow x_0^{\,2}f'(x_0)=1-2x_0f(x_0)$$

άρα το x_0 είναι ρίζα της εξίσωσης

$$\boxed{\mathbf{x^2f'(x)=1-2xf(x)}}$$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση οπότε από **Θ.Μ.Τ.** στα [-1, 0] και [0, 1] υπάρχουν $x_1\in(-1,\ 0)$ και $x_2\in(0,\ 1)$ τέτοια ώστε

$$f'(x_1)=\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=f(0)-f(-1) \quad \text{και} \quad f'(x_2)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0)$$

Συνεπώς

$$\boxed{\mathbf{f'(x_1)+f'(x_2)=f(1)-f(-1)\overset{(1)}{=}f(1)-\big(f(1)-2\big)=2}}$$

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-f(1)+1$ η οποία είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη και

$$h(-1)=f(-1)-f(1)+1\overset{(1)}{=}f(1)-2-f(1)+1=-1<0$$
$$h(1)=f(1)-f(1)+1=1>0$$

Άρα από **Θ. Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-1,\ 1)$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=f(1)-1$$

Γ4. Από **Θ.Μ.Τ.** για την f στα [-1 , ξ] και [ξ , 1] υπάρχουν

$$\xi_1\in(-1,\ \xi) \quad \text{και} \quad \xi_2\in(\xi,\ 1)$$

τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\xi)-f(-1)}{\xi-(-1)}=\frac{f(1)-1-\big(f(1)-2\big)}{\xi-(-1)}=\frac{1}{\xi+1}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{f(1)-\left(f(1)-1\right)}{1-\xi}=\frac{1}{1-\xi}$$

Οπότε

$$\boxed{\mathbf{\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=\xi+1+1-\xi=2}}$$

5ο **ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. Για κάθε $x\neq 1$ είναι

$$g'(x)=\left(\frac{f(x)}{x-1}\right)'=\frac{f'(x)(x-1)-f(x)}{(x-1)^2}\qquad \textbf{(1)}$$

- Για $x>1$ η f είναι συνεχής στο $[1,\ x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,\ x)$.

Σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,\ x)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{f(1)=0}{\Leftrightarrow} f'(\xi)=\frac{f(x)}{x-1}$$

Όμως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο IR και $1<\xi<x$, επομένως :

$$\xi<x\Leftrightarrow f'(\xi)<f'(x)\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x-1}<f'(x)\overset{x-1>0}{\Leftrightarrow} f(x)<f'(x)(x-1)\Leftrightarrow f'(x)(x-1)-f(x)>0$$

- Για $x<1$ η f είναι συνεχής στο $[x,\ 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,\ 1)$.

Σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x,\ 1)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(x)}{1-x}\overset{f(1)=0}{\Leftrightarrow} f'(\xi)=\frac{-f(x)}{1-x}\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(x)}{x-1}$$

Όμως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο IR και $x<\xi<1$,
επομένως :

$$x<\xi\Leftrightarrow f'(x)<f'(\xi)\Leftrightarrow f'(x)<\frac{f(x)}{x-1}\overset{x-1<0}{\Leftrightarrow} f'(x)(x-1)>f(x)\Leftrightarrow f'(x)(x-1)-f(x)>0$$

Επομένως για κάθε $x\neq 1$ είναι $f'(x)(x-1)-f(x)>0$ και επειδή $(x-1)^2>0$ από την **(1)** προκύπτει :

$$\boxed{\mathbf{g'(x)>0}}\quad \text{για κάθε } x\neq 1.$$

Δ2. i. Αφού $\kappa\notin[\alpha\ ,\ \beta]$, χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $\alpha<\beta<\kappa$.

Τα σημεία Α, Β, Μ είναι συνευθειακά επομένως

$$\lambda_{AB} = \lambda_{BM} \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\lambda - f(\beta)}{\kappa - \beta}$$

Έστω ότι το σημείο $M(\kappa\ ,\ \lambda)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

Τότε είναι $\lambda = f(\kappa)$ και επομένως

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{f(\kappa) - f(\beta)}{\kappa - \beta} \qquad \mathbf{(1)}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο IR , οπότε από **Θ.Μ.Τ.** στα

$$[\alpha, \beta],\ [\beta, \kappa],$$

υπάρχουν $x_1 \in (\alpha, \beta)$, $x_2 \in (\beta, \kappa)$ τέτοια ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}, \quad f'(x_2) = \frac{f(\kappa) - f(\beta)}{\kappa - \beta}$$

Λόγω της σχέσης **(1)** προκύπτει $f'(x_1) = f'(x_2)$.

Η $f\,'$ είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1, οπότε είναι $x_1 = x_2$, άτοπο.

Άρα το σημείο $M(\kappa, \lambda)$ **δεν μπορεί να ανήκει** στη γραφική παράστα ση της f.

ii. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\gamma,\ f(\gamma))$ έχει εξίσωση

$$\delta:\ y - f(\gamma) = f'(\gamma)(x - \gamma)$$

Η δ διέρχεται από το σημείο $M(\kappa, \lambda)$ αν και μόνο αν

$$\lambda - f(\gamma) = f'(\gamma)(\kappa - \gamma).$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $\lambda - f(x) = f'(x)(\kappa - x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β).

Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\lambda - f(x) = f'(x)(\kappa - x) \Leftrightarrow \lambda - f(x) - f'(x)(\kappa - x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f'(x)(x - \kappa) + \lambda - f(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (f(x) - \lambda)'(x - \kappa) - (f(x) - \lambda)(x - \kappa)' = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(f(x) - \lambda)'(x - \kappa) - (f(x) - \lambda)(x - \kappa)'}{(x - \kappa)^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x) - \lambda}{x - \kappa}\right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$G(x) = \frac{f(x) - \lambda}{x - \kappa}, \quad x \in [\alpha,\ \beta].$$

Η G είναι συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$ και παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\ \beta)$ με

$$G'(x)=\left(\frac{f(x)-\lambda}{x-\kappa}\right)'=\frac{(f(x)-\lambda)'(x-\kappa)-(f(x)-\lambda)(x-\kappa)'}{(x-\kappa)^2}=$$

$$=\frac{f'(x)(x-\kappa)+\lambda-f(x)}{(x-\kappa)^2}$$

Είναι

$$G(\alpha)=\frac{f(\alpha)-\lambda}{\alpha-\kappa} \quad \text{και} \quad G(\beta)=\frac{f(\beta)-\lambda}{\beta-\kappa}$$

Τα σημεία Α, Β, Μ είναι **συνευθειακά** επομένως

$$\lambda_{MA}=\lambda_{MB}\Leftrightarrow\frac{f(\alpha)-\lambda}{\alpha-\kappa}=\frac{f(\beta)-\lambda}{\beta-\kappa}\Leftrightarrow G(\alpha)=G(\beta).$$

Άρα ισχύει για την G το **Θ. Rolle**

οπότε υπάρχει **ένα τουλάχιστον** $\gamma\in(\alpha,\ \beta)$, τέτοιο ώστε

$$G'(\gamma)=0\Leftrightarrow f'(\gamma)(\gamma-\kappa)+\lambda-f(\gamma)=0\Leftrightarrow\lambda-f(\gamma)=f'(\gamma)(\kappa-\gamma)$$

Άρα η δ **διέρχεται από το σημείο** $M(\kappa,\ \lambda)$

6ο

2.6 Συνέπειες του θεωρήματος μέσης τιμής

6ο

ΘΕΜΑ Β

B1. Για κάθε $x>0$ είναι

$$g'(x)=\frac{\left(f(x)+xf'(x)\right)\left(x+1\right)-xf(x)}{\left(x+1\right)^2}=\frac{xf(x)+f(x)+x^2f'(x)+xf'(x)-xf(x)}{\left(x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{f(x)+f'(x)\left(x^2+x\right)}{\left(x+1\right)^2}=\frac{f(x)+\left(-\frac{f(x)}{x^2+x}\right)\left(x^2+x\right)}{\left(x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{f(x)-f(x)}{\left(x+1\right)^2}=0$$

Αρα η g είναι **σταθερή** στο $\left(0,\ +\infty\right)$.

B1. Για κάθε $x>0$ είναι

$$g(x)=c\Leftrightarrow\frac{xf(x)}{x+1}=c\Leftrightarrow f(x)=\frac{c(x+1)}{x}$$

Για $x=2$ έχουμε

$$f(2)=\frac{c(2+1)}{2}\Leftrightarrow 3=\frac{3c}{2}\Leftrightarrow c=2$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{f(x)=\frac{2(x+1)}{x}}}$$

B1. Είναι

$$f(\xi)=e^{\xi}\Leftrightarrow\frac{2(\xi+1)}{\xi}=e^{\xi}\Leftrightarrow 2(\xi+1)=\xi e^{\xi}\Leftrightarrow 2(\xi+1)-\xi e^{\xi}=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=2(x+1)-xe^{x},\ \ x\in\left[0,\ 2\right]$$

Η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών με

$$h(0)=2>0\ \text{ και }\ h(2)=6-2e^2=2(3-e^2)<0$$

Οπότε από **Θ. Bolzano** υπάρχει **ένα τουλάχιστον** $\xi\in\left(0,\ 2\right)$ ώστε

$$\boxed{\mathbf{h(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=e^{\xi}}}$$

B1. Είναι

$$f'(x)h(x)+f(x)h'(x)=f(x)h(x)\Leftrightarrow\big(f(x)h(x)\big)'=f(x)h(x)$$

άρα

$$f(x)h(x)=ce^{x},\quad x>0$$

Για $x=2$ είναι

$$f(2)h(2)=ce^{2}\Leftrightarrow 3e^{2}=ce^{2}\Leftrightarrow c=3$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{f(x)h(x)=3e^{x}\Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{x}h(x)=3e^{x}\Leftrightarrow h(x)=\frac{3xe^{x}}{2(x+1)},\quad x>0}}$$

6ο **Θ Ε Μ Α Γ**

Γ1. Για κάθε $x\in(0,\,\pi)$ η g είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(x)=\frac{f'(x)\eta\mu x-f(x)\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^{2}x}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $g'(x)=0$ για κάθε $x\in(0,\,\pi)$ ή ισοδύναμα ότι

$$f'(x)\eta\mu x-f(x)\sigma\upsilon\nu x=0,\quad \text{για κάθε } x\in(0,\,\pi).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x)=f'(x)\eta\mu x-f(x)\sigma\upsilon\nu x,\ \ x\in(0,\,\pi)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$$G'(x)=f''(x)\eta\mu x+f'(x)\sigma\upsilon\nu x-f'(x)\sigma\upsilon\nu x+f(x)\eta\mu x=\big(f''(x)+f(x)\big)\eta\mu x=0,$$

για κάθε $x\in(0,\,\pi)$,οπότε

$$G(x)=c_{1}\ \text{ για κάθε } x\in(0,\,\pi).$$

Είναι $G(\frac{\pi}{2})=f'(\frac{\pi}{2})\eta\mu\frac{\pi}{2}-f(\frac{\pi}{2})\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0\cdot 1-f(\frac{\pi}{2})\cdot 0=0$. Άρα $c_{1}=0$.

Επομένως $G(x)=0\Leftrightarrow f'(x)\eta\mu x-f(x)\sigma\upsilon\nu x=0$, για κάθε $x\in(0,\,\pi)$.

Άρα για κάθε $x\in(0,\,\pi)$: $g'(x)=0$ και συνεπώς $g(x)=c$

Γ2. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\,\pi)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi)f(\xi)=f'(\xi)h(\xi)\Leftrightarrow f'(\xi)h(\xi)-h'(\xi)f(\xi)=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x)=\dfrac{f(x)}{h(x)},\ x\in[0,\,\pi]$.

Από το Γ1. έχουμε $g(x)=c \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\eta\mu x}=c \Leftrightarrow f(x)=c\cdot\eta\mu x,\ \ x\in(0,\pi)$

Επειδή η f είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη στο [0, π], έχουμε :

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(c\cdot\eta\mu x)=0 \quad \text{και} \quad f(\pi)=\lim_{x\to\pi} f(x)=\lim_{x\to\pi}(c\cdot\eta\mu x)=0$$

- Η H(x) είναι παραγωγίσιμη , άρα και συνεχής, στο [0, π] , με

$$H'(x)=\frac{f'(x)h(x)-f(x)h'(x)}{h^2(x)}$$

- $$H(0)=\frac{f(0)}{h(0)}=\frac{0}{h(0)}=0 \quad \text{και} \quad H(\pi)=\frac{f(\pi)}{h(\pi)}=\frac{0}{h(\pi)}=0\,.$$

Επομένως H (π) = H (π) = 0 και συνεπώς για την H(x) ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θ. Rolle** στο διάστημα [0, π].

Άρα θα υπάρχει ξ ∈ (0, π) τέτοιο ώστε

$$H'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)h(\xi)-f(\xi)h'(\xi)=0 \Leftrightarrow \frac{h'(\xi)}{h(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\,.$$

Γ3. i. Επειδή $f(x)=c\cdot\eta\mu x,\ \ x\in(0,\pi)$ και f (0) = f (π) = 0, είναι $f(x)=c\cdot\eta\mu x,\ \ x\in[0,\pi]$ και συνεπώς

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+\lambda}{x^2}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{c\cdot\sigma\upsilon\nu x+\lambda}{x^2}=-\frac{1}{2}\,.$$

Είναι $\lim_{x\to 0}\left(c\cdot\sigma\upsilon\nu x+\lambda\right)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{c\cdot\sigma\upsilon\nu x+\lambda}{x^2}\cdot x^2\right]=-\frac{1}{2}\cdot 0=0$

Άρα $\lim_{x\to 0}\left(c\cdot\sigma\upsilon\nu x+\lambda\right)=0$ οπότε $c+\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-c$ και συνεπώς

$$\lim_{x\to 0}\frac{c\cdot\sigma\upsilon\nu x+\lambda}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{c\cdot\sigma\upsilon\nu x-c}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{c(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{c(\sigma\upsilon\nu x-1)(\sigma\upsilon\nu x+1)}{x^2(\sigma\upsilon\nu x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{c(\sigma\upsilon\nu^2 x-1)}{x^2(\sigma\upsilon\nu x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{c\cdot(-\eta\mu^2 x)}{x^2(\sigma\upsilon\nu x+1)}=-c\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right]=-c\cdot 1^2\cdot\frac{1}{2}=-\frac{c}{2}$$

Οπότε $-\frac{c}{2}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow c=1$ και άρα

$$f(x)=\eta\mu x,\ \ x\in[0,\pi]$$

ii. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{x} \Leftrightarrow \eta\mu x=\frac{1}{x}$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο διάστημα (0, π).

Ύπαρξη των ριζών.

Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται $x\eta\mu x - 1 = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση : $\varphi(x) = x\eta\mu x - 1, \quad x \in [0, \pi]$

Η φ είναι συνεχής στα διαστήματα $[0, \frac{\pi}{2}]$ και $[\frac{\pi}{2}, 0]$ και

$$\varphi(0) = -1 < 0, \qquad \varphi(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2} > 0, \qquad \varphi(\pi) = -1 < 0$$

Από **Θ. Bolzano** στα διαστήματα $[0, \frac{\pi}{2}]$ και $[\frac{\pi}{2}, 0]$ υπάρχουν

$x_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\quad x_2 \in (\frac{\pi}{2}, 0)$ τέτοια ώστε : $\varphi(x_1) = 0$ και $\varphi(x_2) = 0$

Επομένως η εξίσωση $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x\eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{x}$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(0, \pi)$.

Μοναδικότητα των ριζών.

Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται $\eta\mu x - \frac{1}{x} = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση : $\Phi(x) = \eta\mu x - \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \pi)$

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $\Phi(x) = 0$ έχει στο διάστημα $(0, \pi)$ τρείς ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$, δηλαδή $\Phi(\rho_1) = \Phi(\rho_2) = \Phi(\rho_3) = 0$.

Η $\Phi(x)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο διάστημα $(0, \pi)$ με

$$\Phi'(x) = \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{x^2} \qquad \text{και} \qquad \Phi''(x) = -\eta\mu x - \frac{2x}{x^4} = -\eta\mu x - \frac{2}{x^3}$$

Από το **Θ. Rolle** για την $\Phi(x)$ στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$ και $[\rho_2, \rho_3]$ υπάρχουν

$\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$, τέτοια ώστε : $\Phi'(\xi_1) = \Phi'(\xi_2) = 0$.

Από το **Θ. Rolle** για την $\Phi'(x)$ στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ υπάρχει

$x_0 \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (0, \pi)$, τέτοιο ώστε : $\Phi''(x_0) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x_0 - \frac{2}{{x_0}^3} = 0$ που είναι άτοπο αφού $-\eta\mu x - \frac{2}{x^3} < 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$.

Επομένως η εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{x}$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο διάστημα $(0, \pi)$.

6ο **ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$ για οποιοδήποτε $x_0\in\mathbb{R}$.

Για $y=x_0$ η δοθείσα σχέση δίνει

$$\left|e^{x_0}f(x)-e^{x}f(x_0)\right|\le(x-x_0)^2\Leftrightarrow\left|e^{x_0}f(x)-e^{x}f(x_0)\right|\le|x-x_0|^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left|e^{x_0}f(x)-e^{x}f(x_0)\right|}{|x-x_0|}\le|x-x_0|\Leftrightarrow\left|\frac{e^{x_0}f(x)-e^{x}f(x_0)}{x-x_0}\right|\le|x-x_0|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-|x-x_0|\le\frac{e^{x_0}f(x)-e^{x}f(x_0)}{x-x_0}\le|x-x_0|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-|x-x_0|\le\frac{e^{x_0}f(x)-e^{x_0}f(x_0)+e^{x_0}f(x_0)-e^{x}f(x_0)}{x-x_0}\le|x-x_0|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-|x-x_0|\le\frac{e^{x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)-f(x_0)\left(e^{x}-e^{x_0}\right)}{x-x_0}\le|x-x_0|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-|x-x_0|\le e^{x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\frac{e^{x}-e^{x_0}}{x-x_0}\le|x-x_0|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0}f(x_0)\frac{e^{x}-e^{x_0}}{x-x_0}-e^{-x_0}|x-x_0|\le\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le e^{-x_0}f(x_0)\frac{e^{x}-e^{x_0}}{x-x_0}+e^{-x_0}|x-x_0|$$

Είναι

$$\lim_{x\to x_0}\frac{e^{x}-e^{x_0}}{x-x_0}=e^{x_0}$$

επειδή η $f(x)=e^{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με παράγωγο

$$f'(x_0)=e^{x_0}\ .$$

Οπότε

- $\lim_{x\to x_0}\left[e^{-x_0}f(x_0)\frac{e^{x}-e^{x_0}}{x-x_0}-e^{-x_0}|x-x_0|\right]=e^{-x_0}f(x_0)e^{x_0}-e^{-x_0}|x_0-x_0|=f(x_0)$
- $\lim_{x\to x_0}\left[e^{-x_0}f(x_0)\frac{e^{x}-e^{x_0}}{x-x_0}+e^{-x_0}|x-x_0|\right]=e^{-x_0}f(x_0)e^{x_0}+e^{-x_0}|x_0-x_0|=f(x_0)$

Επομένως από το **κριτήριο παρεμβολής** είναι

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)}$$

Δ2. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$f'(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=ce^{x}.$$

Για $x=0$ είναι $f(0)=ce^{0}\Leftrightarrow 1=c$.

Άρα

$$\boxed{\mathbf{f(x)=e^{x},\ x\in\mathbb{R}}}$$

Δ3. Ζητάμε το

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x^2+x}}{3\eta\mu 2x-5}.$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$-1\le \eta\mu 2x\le 1\Leftrightarrow -3\le 3\eta\mu 2x\le 3\Leftrightarrow -3-5\le 3\eta\mu 2x-5\le 3-5\Leftrightarrow -8\le 3\eta\mu 2x-5\le -2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{8}\ge\frac{1}{3\eta\mu 2x-5}\ge-\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{e^{x^2+x}}{8}\ge\frac{e^{x^2+x}}{3\eta\mu 2x-5}\ge-\frac{e^{x^2+x}}{2}$$

Είναι

$$\lim_{x\to-\infty}e^{x^2+x}\overset{\mathbf{u=x^2+x}}{=}\lim_{u\to+\infty}e^{u}=+\infty$$

Αρα

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{e^{x^2+x}}{8}\right)=-\infty\qquad\text{και}\qquad\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{e^{x^2+x}}{2}\right)=-\infty$$

Επομένως από **κριτήριο παρεμβολής**

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x^2+x}}{3\eta\mu 2x-5}=-\infty}$$

Δ4. i. Για κάθε $x>0$ είναι

$g'(x)=-e^{h(x)}$: παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων $-e^{x}$ και $h(x)$

$h'(x)=-e^{g(x)}$: παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων $-e^{x}$ και $g(x)$

Οπότε

$$g''(x)=-e^{h(x)}h'(x)=-e^{h(x)}\left(-e^{g(x)}\right)=e^{h(x)+g(x)}$$

$$h''(x)=-e^{g(x)}g'(x)=-e^{g(x)}\left(-e^{h(x)}\right)=e^{g(x)+h(x)}$$

Αρα

$$g''(x)=h''(x)\Leftrightarrow g'(x)=h'(x)+c\Leftrightarrow -e^{h(x)}=-e^{g(x)}+c$$

Για $x = 1$ $\quad -e^{h(1)} = -e^{g(1)} + c \Leftrightarrow -e^{0} = -e^{0} + c \Leftrightarrow c = 0$

Οπότε

$$\boxed{\mathbf{-e^{h(x)} = -e^{g(x)} \Leftrightarrow e^{h(x)} = e^{g(x)} \Leftrightarrow h(x) = g(x), \qquad x > 0}}$$

ii. Για κάθε $x > 0$ αφού $g(x) = h(x)$ θα είναι

$$g'(x) = -e^{g(x)} \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{e^{g(x)}} = -1 \Leftrightarrow e^{-g(x)} g'(x) = -1 \Leftrightarrow -e^{-g(x)} g'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{-g(x)}\right)' = (x)' \Leftrightarrow e^{-g(x)} = x + c_1$$

Για $x = 1$ έχουμε $\quad e^{-g(1)} = 1 + c_1 \Leftrightarrow e^{0} = 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{e^{-g(x)} = x \Leftrightarrow -g(x) = \ln x \Leftrightarrow g(x) = -\ln x, \quad x > 0}}$$

7ο

2.7 Μονοτονία – Ακρότατα – De L’ Hospital I

7ο

ΘΕΜΑ Β

B1. Η x=1 προφανής ρίζα.

Είναι

$$f'(x)=\frac{1}{x}+2x>0 \text{ για κάθε } x>0$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\ +\infty)$ και

συνεπώς η $x=1$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

- Αν $0<x<1$ τότε $\boxed{\mathbf{f(x)<f(1)\Leftrightarrow f(x)<0}}$
- Αν $x>1$ τότε $\boxed{\mathbf{f(x)>f(1)\Leftrightarrow f(x)>0}}$

B2. i. Έστω $A(x,\ \ln x)$ σημείο της C_g.

Είναι

$$(AB)=\sqrt{x^2+(\ln x-1)^2}=\sqrt{x^2+\ln^2 x-2\ln x+1}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=\sqrt{x^2+\ln^2 x-2\ln x+1},\ \ x>0.$$

Είναι

$$h'(x)=\frac{2x+2\frac{\ln x}{x}-2\frac{1}{x}}{2\sqrt{x^2+\ln^2 x-2\ln x+1}}=\frac{x^2+\ln x-1}{x\sqrt{x^2+\ln^2 x-2\ln x+1}}=\frac{f(x)}{x\sqrt{x^2+\ln^2 x-2\ln x+1}}$$

x	0		1		+∞
f(x)		−	0	+	
h′(x)		−	0	+	
h(x)		↘	$\sqrt{2}$ min	↗	

Άρα η $h(x)$ δηλαδή η απόσταση (AB) γίνεται ελάχιστη όταν $x=1$ και συνεπώς $A(1,\ 0)$.

Η ελάχιστη απόσταση είναι

$$\boxed{h(1)=\sqrt{2}}$$

ii. Είναι

$$\lambda_{AB}=\frac{1-0}{0-1}=-1 \quad \text{και} \quad \lambda_{\varepsilon}=g'(1)=\frac{1}{1}=1$$

Άρα

$$\boxed{\lambda_{AB}\cdot\lambda_{\varepsilon}=-1 \Leftrightarrow AB\perp\varepsilon}$$

7ο **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. i. Είναι

$$g'(x)=\frac{2e^{x}-2xe^{x}}{e^{2x}}=\frac{2e^{x}(1-x)}{e^{2x}}. \qquad g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$		↗	max 2/e	↘	

Η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty,\ 1]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $[1,\ +\infty)$

Η g παρουσιάζει στη θέση $x_0=1$ **μέγιστο** το $g(1)=\frac{2}{e}$

ii. Είναι

$$g(x)\le g(1)\Leftrightarrow\frac{2x}{e^{x}}\le\frac{2}{e}<1\ , \quad \text{για κάθε } x\in IR.$$

Άρα

$$\boxed{\frac{2x}{e^{x}}<1\Leftrightarrow e^{x}>2x}, \quad \text{για κάθε } x\in IR.$$

Γ2. i. Είναι

$$f'(x)=e^{x}-x^{2}-1.$$

$$f''(x)=e^{x}-2x>0 \quad \text{λόγω } \mathbf{Γ1.\ ii}$$

Άρα f' **γνησίως αύξουσα** και αφού $f'(0)=0$

- $x<0\Leftrightarrow f'(x)<f'(0)\Leftrightarrow f'(x)<0$ οπότε f **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty,\ 0]$

- $x>0 \Leftrightarrow f'(x)>f'(0) \Leftrightarrow f'(x)>0$ οπότε f **γνησίως αύξουσα** στο $[0,\ +\infty)$

Η f παρουσιάζει στο $x_0=0$ **ελάχιστο** το $f(0)=0$

ii. Είναι

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0 min	$\nearrow$	

Έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x-\frac{x^3}{3}-x-1\right)=0-(-\infty)-(-\infty)-1=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-\frac{x^3}{3}-x-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1-\frac{x^3}{3e^x}-\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)\right]=$$

$$=(+\infty)(1-0-0-0)=+\infty$$

Γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{3e^x}\underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{3e^x}\underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{+\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Αν

- $x\in A_1=(-\infty,\ 0]$ τότε $f(A_1)=\left[f(0),\ \lim_{x\to-\infty} f(x)\right)=[0,\ +\infty)$
- $x\in A_2=(0,\ +\infty)$ τότε $f(A_2)=\left(\lim_{x\to 0^+} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(0,\ +\infty)$

Άρα το **σύνολο τιμών** της f είναι

$$\boxed{\mathbf{f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=[0,\ +\infty)}}$$

iii. Είναι

$$f\left(e^{2x}\right)<f\left(4x^2+1\right)\Leftrightarrow e^{2x}<4x^2+1$$

γιατί $e^{2x}>0$, $4x^2+1>0$ και η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[0,\ +\infty)$

Οπότε

$$\boxed{e^{2x} < 4x^2+1 \Leftrightarrow e^{2x}-4x^2-1<0 \Leftrightarrow f'(2x)<f'(0) \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} 2x<0 \Leftrightarrow x<0}$$

7ο **ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. i. Για x=y=1, έχουμε $f(1)=f(1)+f(1) \Leftrightarrow f(1)=0$

Οπότε

$$f'(1)=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$$

Για οποιοδήποτε $x_0>0$ είναι

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x=ux_0}{\overset{u=\frac{x}{x_0}}{=}} \lim_{u\to 1}\frac{f(ux_0)-f(x_0)}{ux_0-x_0}=\lim_{u\to 1}\frac{\frac{1}{u}f(x_0)+\frac{1}{x_0}f(u)-f(x_0)}{x_0(u-1)}=$$

$$=\lim_{u\to 1}\left[\frac{\frac{1}{u}f(x_0)-f(x_0)}{x_0(u-1)}+\frac{\frac{1}{x_0}f(u)}{x_0(u-1)}\right]=\lim_{u\to 1}\left[\frac{f(x_0)-uf(x_0)}{ux_0(u-1)}+\frac{f(u)}{x_0^2(u-1)}\right]=$$

$$=\lim_{u\to 1}\left[\frac{-f(x_0)(u-1)}{ux_0(u-1)}+\frac{1}{x_0^2}\cdot\frac{f(u)}{u-1}\right]=\frac{-f(x_0)}{x_0}+\frac{1}{x_0^2}f'(1)=\frac{-f(x_0)}{x_0}+\frac{1}{x_0^2}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο οποιοδήποτε $x_0>0$ με

$$f'(x_0)=\frac{-f(x_0)}{x_0}+\frac{1}{x_0^2}.$$

Άρα για κάθε $x>0$ είναι

$$\boxed{f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{f(x)}{x}}$$

ii. για κάθε $x>0$ έχουμε :

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{f(x)}{x}$$

$$xf'(x)=\frac{1}{x}-f(x)$$

$$xf'(x)+f(x)=\frac{1}{x}$$

$$(xf(x))'=(\ln x)'$$

$$xf(x)=\ln x+c$$

Για x=1 παίρνουμε : $f(1)=c \Leftrightarrow c=0$

Επομένως

$$\boxed{\mathbf{xf(x)=\ln x \Leftrightarrow f(x)=\frac{\ln x}{x},\quad x>0}}$$

Δ2. Είναι

$$g(x)=(x-1)\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-2=\ln x-\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-2$$

$$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1-\ln x}{x^2}-\frac{2}{x^2}=\frac{x-1+\ln x-2}{x^2}=\frac{x+\ln x-3}{x^2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

Έστω $h(x)=\ln x+x-3, \quad x>0$

- Η h είναι συνεχής στο $[1\ ,\ e^2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
- $h(1) = -2 < 0$

  $h(e^2) = \ln e^2 + e^2 - 3 = 2\ln e + e^2 - 3 = e^2-1>0$

Από **Θ. Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1\ ,\ e^2)$ ώστε

$$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow \ln\xi + \xi - 3 = 0$$

Επειδή είναι $h'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα 1-1

οπότε το ξ είναι μοναδικό στο $(0, +\infty)$.

Για $0 < x < \xi$ αφού η h είναι γνησίως αύξουσα θα είναι

$$h(x) < h(\xi) \Leftrightarrow h(x) < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0$$

Για $x > \xi$ θα είναι

$$h(x) > h(\xi) \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$$

x	0	ξ	+∞
g΄(x)	−	0	+
g(x)	↘	Ελάχιστο	↗

Η g είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0, \xi]$ και

γνησίως αύξουσα στο $[\xi, +\infty)$

Η g παρουσιάζει στο $x_0=\xi$ **ελάχιστο** το

$$\boxed{\mathbf{g(\xi)=\ln\xi-\frac{\ln\xi}{\xi}+\frac{2}{\xi}-2}}$$

Δ3. Αφού το g(ξ) είναι (ολικό) ελάχιστο, για κάθε $x > 0$ θα ισχύει

$$g(x)\ge g(\xi)$$

Επειδή

$$\ln\xi + \xi - 3 = 0 \Leftrightarrow \ln\xi = 3-\xi \text{ θα είναι}$$

$$g(\xi)=\ln\xi-\frac{\ln\xi}{\xi}+\frac{2}{\xi}-2=3-\xi-\frac{3-\xi}{\xi}+\frac{2}{\xi}-2=1-\xi-\frac{3-\xi}{\xi}+\frac{2}{\xi}=\frac{\xi-\xi^2-3+\xi+2}{\xi}$$
$$=\frac{-\xi^2+2\xi-1}{\xi}=\frac{-(\xi^2-2\xi+1)}{\xi}=\frac{-(\xi-1)^2}{\xi}$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{g(x)\ge g(\xi)\Leftrightarrow g(x)\ge\frac{-(\xi-1)^2}{\xi}\Leftrightarrow g(x)+\frac{(\xi-1)^2}{\xi}\ge 0}}$$

Δ4. Έστω

$$H(x)=g(x)+g'(x)\,,\quad x > 0$$

- Η $H(x)$ είναι συνεχής στο $[\xi\,,\,e^2]$ ως άθροισμα συνεχών.
- $H(\xi) = g(\xi) + g'(\xi) = -\dfrac{(\xi-1)^2}{\xi} + 0 = \dfrac{-(\xi-1)^2}{\xi} < 0,$

$$\text{αφού } \xi \in (1\,,\,e^2) \text{ άρα } \xi \ne 1$$

$$H(e^2) = g(e^2) + g'(e^2) = \left(\ln e^2-\frac{\ln e^2}{e^2}+\frac{2}{e^2}-2\right)+\frac{e^2+\ln e^2-3}{e^4}$$
$$=\left(2-\frac{2}{e^2}+\frac{2}{e^2}-2\right)+\frac{e^2+2-3}{e^4}=\frac{e^2-1}{e^4}>0$$

Άρα από **Θ. Bolzano**

υπάρχει $x_1 \in (\xi\,,\,e^2)$ άρα $x_1>\xi$ τέτοιο ώστε

$$\boxed{\mathbf{H(x_1)=0 \Leftrightarrow g(x_1)+g'(x_1)=0}}$$

8ο

2.7 Μονοτονία – Ακρότατα – De L' Hospital II

8ο **ΘΕΜΑ Β**

B1. Για $x>0$ είναι

$$\lim_{h\to 1}\frac{f\left(\frac{x}{h}\right)-f(x)}{h-1}\overset{u=\frac{x}{h}}{=}\lim_{u\to x}\frac{f(u)-f(x)}{\frac{x}{u}-1}=\lim_{u\to x}\frac{f(u)-f(x)}{\frac{x-u}{u}}=$$

$$=\lim_{u\to x}\left(-u\frac{f(u)-f(x)}{u-x}\right)=-xf'(x)$$

Άρα

$$-xf'(x)=\frac{1}{x}+x-2\Leftrightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{2}{x}\Leftrightarrow f'(x)=\left(\frac{1}{x}-x+2\ln x\right)'$$

Οπότε

$$f(x)=2\ln x-x+\frac{1}{x}+c$$

Είναι

$$f(1)=0\Leftrightarrow c=0$$

Επομένως

$$\boxed{\mathbf{f(x)=2\ln x-x+\frac{1}{x},\quad x>0}}$$

B2. Είναι $f'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{2x-x^2-1}{x^2}=\frac{-(x-1)^2}{x^2}<0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,\ +\infty)$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\ +\infty)$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\ln x-x+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}\left(2x\ln x-x^2+1\right)\right]=(+\infty)(0-0+1)=+\infty$

$$\text{γιατί }\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2\ln x - x + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(2\frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x^2}\right)\right] = (+\infty)(0-1+0) = -\infty$$

$$\text{γιατί } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DL'H}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Άρα το **σύνολο τιμών** της f είναι

$$\boxed{\mathbf{f(A) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to 0} f(x)\right) = (-\infty,\ +\infty) = \mathbb{R}}}$$

B3. Είναι $0 < \alpha < \beta$, οπότε

$$\frac{\alpha}{\beta} < 1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) > f(1) \Leftrightarrow 2\ln\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} > 0$$

$$\Leftrightarrow 2\ln\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow 2\ln\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{\ln\alpha - \ln\beta > \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}}}$$

B4.
- Προφανής ρίζα η $x = 1$
- Αν $0 < x < 1$ τότε $\ln x < 0$ οπότε

► $1 < 5 \Leftrightarrow \ln x > 5\ln x \Leftrightarrow \ln x > \ln x^5 \Leftrightarrow x > x^5$

και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα θα είναι

$$f(x) < f(x^5) \quad \textbf{(1)}$$

► $2 < 10 \Leftrightarrow 2\ln x > 10\ln x \Leftrightarrow \ln x^2 > \ln x^{10} \Leftrightarrow x^2 > x^{10}$

και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα θα είναι

$$f(x^2) < f(x^{10}) \quad \textbf{(2)}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των **(1)** και **(2)** έχουμε

$$f(x) + f(x^2) < f(x^5) + f(x^{10})$$

- Αν $x > 1$ τότε $\ln x > 0$ οπότε

► $1 < 5 \Leftrightarrow \ln x < 5\ln x \Leftrightarrow \ln x < \ln x^5 \Leftrightarrow x < x^5$

και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα θα είναι

$$f(x) > f(x^5) \quad \textbf{(3)}$$

► $2<10 \Leftrightarrow 2\ln x<10\ln x \Leftrightarrow \ln x^2<\ln x^{10} \Leftrightarrow x^2<x^{10}$

και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα θα είναι

$$f(x^2)>f(x^{10}) \quad \textbf{(4)}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των **(3)** και **(4)** έχουμε

$$f(x)+f(x^2)>f(x^5)+f(x^{10})$$

Επομένως για κάθε $x\in(0,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$ είναι

$$f(x)+f(x^2)\neq f(x^5)+f(x^{10}) \text{ και}$$

συνεπώς η $x=1$ είναι **μοναδική ρίζα** της εξίσωσης

$$\boxed{\mathbf{f(x)+f(x^2)=f(x^5)+f(x^{10})}}$$

στο $(0,+\infty)$.

8ο **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Για κάθε $x\in IR$ είναι:

$$\varphi'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to-\infty}(xe^x-1)=-1,$$

$$\text{αφού } \lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\left(-e^x\right)=0$$

Επίσης

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}(xe^x-1)=(+\infty)(+\infty)-1=+\infty$$

Τέλος

$$\varphi(-1)=-e^{-1}-1=-\frac{1}{e}-1<0.$$

Άρα

Αν $\mathbf{x\in A_1=(-\infty,\ -1]}$ τότε επειδή φ γνησίως φθίνουσα στο A_1, είναι :

$$\varphi(A_1)=\left[\varphi(-1),\ \lim_{x\to-\infty}\varphi(x)\right)=\left[-\frac{1}{e}-1,\ -1\right)$$

Αν $\mathbf{x\in A_2=(-1,\ +\infty)}$ τότε επειδή φ γνησίως αύξουσα στο A_2, είναι:

$$\varphi(A_2)=\left(\lim_{x\to-1}\varphi(x),\ \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)\right)=\left(-\frac{1}{e}-1,\ +\infty\right)$$

Το $0\notin\varphi(A_1)$ ενώ $0\in\varphi(A_2)$.

Επομένως υπάρχει $x_0\in A_2=(-1,+\infty)$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=0$.

Αφού η φ είναι **γνησίως αύξουσα** στο A_2 άρα **1-1** η ρίζα x_0 είναι **μοναδική**.

Αν $-1<x_0\le 0$ τότε αφού η φ είναι γνησίως αύξουσα στο A_2 θα είναι

$$\varphi(x_0)\le\varphi(0)\Leftrightarrow 0\le -1,\ \textbf{άτοπο.}$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{x_0>0}}$$

Γ2. Για κάθε $x\in IR$ είναι :

$$h'(x)=e^x+(x-1)e^x-1=xe^x-1=\varphi(x)$$

Είναι

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\varphi(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$$

Αν $x\in A_1=(-\infty,\ -1]$ τότε είναι

$$\varphi(A_1)=\left[-\frac{1}{e}-1,\ -1\right),$$

συνεπώς $h'(x)=\varphi(x)<0$.

Αν $x\in A_2=(-1,\ +\infty)$ τότε επειδή φ γνησίως αύξουσα στο A_2 , για $-1 < x < x_0$ είναι :

$$\varphi(x)<\varphi(x_0)\Leftrightarrow\varphi(x)<0,\ \text{ενώ για } x>x_0 \text{ είναι } \varphi(x)>\varphi(x_0)\Leftrightarrow\varphi(x)>0$$

Άρα

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$h'(x)=\varphi(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘		↗

Είναι

$$h(x_0)=(x_0-1)e^{x_0}-x_0-1=x_0e^{x_0}-e^{x_0}-x_0-1=\varphi(x_0)-e^{x_0}-x_0=-e^{x_0}-x_0<0$$

αφού $x_0>0$.

Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(x-1-\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)\right] = +\infty(+\infty-1-0-0) = +\infty$$

αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Αν $x\in\Delta=[x_0,\ +\infty)$ τότε επειδή h γνησίως αύξουσα στο Δ, είναι :

$$h(\Delta) = \left[h(x_0),\quad \lim_{x\to+\infty} h(x)\right) = \left[-e^{x_0}-x_0,\quad +\infty\right)$$

Το $0\in h(\Delta)$ επομένως υπάρχει $\rho\in\Delta=[x_0, +\infty)$, τέτοιο ώστε $h(\rho)=0$.

Αφού η h είναι **γνησίως αύξουσα** στο Δ, άρα **1-1**, η ρίζα ρ είναι **μοναδική** στο Δ.

Είναι

$$h(-\rho) = (-\rho-1)e^{-\rho}-(-\rho+1) = \frac{-\rho-1}{e^\rho}+\rho-1 = \frac{-(\rho+1)+(\rho-1)e^\rho}{e^\rho} = \frac{h(\rho)}{e^\rho} = 0$$

Άρα - ρ : ρίζα της h(x).

Είναι

$$\rho > x_0 > 0 \Leftrightarrow -\rho < -x_0 < 0.$$

Άρα $-\rho\in(-\infty,\ x_0)$ και επειδή η h είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty,\ x_0)$ η ρίζα -ρ είναι **μοναδική** στο $(-\infty,\ x_0)$

Συνεπώς η εξίσωση h(x)=0 έχει **δύο ακριβώς ρίζες αντίθετες**.

Γ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=e^x$ στο σημείο επαφής της $A\left(x_1,\ f(x_1)\right)$ είναι

$$\varepsilon_1: y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1) \Leftrightarrow y-e^{x_1}=e^{x_1}(x-x_1) \Leftrightarrow y=e^{x_1}x-e^{x_1}x_1+e^{x_1}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$g(x)=\ln x$ στο σημείο επαφής της $B\left(x_2,\ g(x_2)\right)$ είναι

$$\varepsilon_2: y-g(x_2)=g'(x_2)(x-x_2) \Leftrightarrow y-\ln x_2=\frac{1}{x_2}(x-x_2) \Leftrightarrow y=\frac{1}{x_2}x-1+\ln x_2$$

Οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν **κοινή εφαπτομένη** αν και μόνο αν υπάρχουν $x_1\in IR,\ \ x_2>0$, ώστε οι ε_1 και ε_2 να ταυτίζονται ,

δηλαδή αν και μόνο αν

$$\begin{cases} e^{x_1} = \dfrac{1}{x_2} \\ -e^{x_1}x_1 + e^{x_1} = -1 + \ln x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = e^{-x_1} \\ -e^{x_1}x_1 + e^{x_1} = -1 + \ln x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = e^{-x_1} \\ -e^{x_1}x_1 + e^{x_1} = -1 + \ln e^{-x_1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = e^{-x_1} \\ -e^{x_1}x_1 + e^{x_1} = -1 - x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = e^{-x_1} \\ (x_1 - 1)e^{x_1} - (1 + x_1) = 0 \end{cases}$$

Άρα για να ταυτίζονται οι ε_1 και ε_2 πρέπει το x_1 να είναι ρίζα της εξίσωσης h(x)=0.
Αλλά η εξίσωση h(x)=0 έχει δύο ακριβώς ρίζες και μάλιστα αντίθετες.

Άρα υπάρχουν δύο ακριβώς λύσεις του συστήματος και επομένως οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν **δύο ακριβώς κοινές εφαπτόμενες**.

8ο **ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. Από **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[2, 3]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2,\ 3)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = f(3) - f(2)$$

Αφού είναι $f(2) < f'(x) < f(3)$ για κάθε $x \in$ IR, έχουμε

$$f(2) < f'(\xi) < f(3) \Leftrightarrow f(2) < f(3) - f(2) < f(3)$$

Οπότε

$$f(3) - f(2) < f(3) \Leftrightarrow f(2) > 0$$

Συνεπώς $f'(x) > f(2) > 0$ για κάθε $x \in$ IR και επομένως

η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

Δ2. Από **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[1, 2]$

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,\ 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1)$$

Αφού είναι $f(2) < f'(x) < f(3)$ για κάθε $x \in$ IR,

έχουμε

$$f(2) < f'(\xi) < f(3) \Leftrightarrow f(2) < f(2) - f(1) < f(3)$$

Οπότε

$$f(2) < f(2) - f(1) \Leftrightarrow f(1) < 0$$

Συνεπώς $f(1)\cdot f(2)<0$ και αφού η f είναι συνεχής , ως παραγωγίσιμη, στο $[1,\ 2]$ από το **Θ. Bolzano**

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,\ 1)$ ώστε $f(x_0)=0$

και επειδή η f είναι **γνησίως αύξουσα** είναι και **1-1**, οπότε το x_0 είναι **μοναδικό**.

Δ3. Από **Θ.Μ.Τ.** για την f στα $[1,\ x_0]$ και $[x_0, 3]$ (το x_0 του προηγ. ερωτήματος)

υπάρχουν $\xi_1\in(1,\ x_0)$ και $\xi_2\in(x_0,\ 3)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}\overset{\Delta.2.}{=}\frac{-f(1)}{x_0-1}\quad \text{και}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(3)-f(x_0)}{3-x_0}\overset{\Delta.2.}{=}\frac{f(3)}{3-x_0}$$

Επομένως

$$\boxed{\frac{f(3)}{f'(\xi_2)}-\frac{f(1)}{f'(\xi_1)}=\frac{f(3)}{\frac{f(3)}{3-x_0}}-\frac{f(1)}{\frac{-f(1)}{x_0-1}}=3-x_0+x_0-1=2}$$

Δ4. i. Από **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[2,\ x],\ x>2$

υπάρχει ένα τουλάχιστον $t\in(2,\ x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(t)=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\overset{f(2)=1}{=}\frac{f(x)-1}{x-2}$$

Αφού είναι $f(2)<f'(x)<f(3)$ για κάθε $x\in IR$, και $f(2)=1$ για κάθε $x>2$

έχουμε

$$\boxed{f'(t)>1\Leftrightarrow\frac{f(x)-1}{x-2}>1\overset{x>2}{\Leftrightarrow}f(x)-1>x-2\Leftrightarrow f(x)>x-1}$$

ii. Για κάθε $x>2$ έχουμε $f(x)>x-1>0$

Οπότε

$$0<\frac{1}{f(x)}<\frac{1}{x-1}$$

και κατά μείζονα λόγο

$$0\le\frac{1}{f(x)}\le\frac{1}{x-1}.$$

Για κάθε $x>2$ είναι $\ln x>0$ επομένως

$$0 \le \frac{\ln x}{f(x)} \le \frac{\ln x}{x-1}$$

Είναι

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x-1} \underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} 0 = 0$

Άρα από το **κριτήριο παρεμβολής**

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{f(x)} = 0}$$

9ο

2.8 Κυρτότητα–Σημεία καμπής

9ο

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι

$$f'(x)=\frac{1}{x}+1>0 \quad \text{για κάθε } x>0$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A=(0,\ +\infty)$.

Επίσης είναι $f(1)=0$ δηλαδή η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα το 1 η οποία είναι και η μοναδική ρίζα της εξίσωσης αφού η f είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1.

Οπότε

- Αν $0<x<1$ τότε $\boxed{\mathbf{f(x)<f(1)\Leftrightarrow \ln x+x-1<0}}$
- Αν $x>1$ τότε $\boxed{\mathbf{f(x)>f(1)\Leftrightarrow \ln x+x-1>0}}$

B2. i. Για κάθε $x>0$ είναι

$$g'(x)=\frac{\ln x}{x}+1-\ln x-1=\frac{\ln x-x\ln x}{x}=\frac{(1-x)\ln x}{x}$$

x	0		1		+∞
1−x		+	0	−	
lnx		−	0	+	
g΄(x)		−	0	−	
g(x)		↘	0	↘	

Η g είναι **γνησίως φθίνουσα** στο πεδίο ορισμού της $A=(0,\ +\infty)$ και **δεν παρουσιάζει ακρότατα.**

ii. Είναι

$$g''(x)=\left(\frac{\ln x}{x}-\ln x\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-\ln x-x}{x^2}=\frac{-f(x)}{x^2}$$

όπου f η συνάρτηση του **B.1.** ερωτήματος.

Είναι

x	0	1	+∞
f(x)	−	0	+
g″(x)	+	0	−
g(x)	∪	0 Σ.Κ.	∩

Η g είναι **κυρτή** στο $(0,\ 1]$ και **κοίλη** στο $[1,\ +\infty)$.

Σημείο καμπής της C_g το $K(1,\ 0)$

9ο **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Έστω ότι υπάρχει θετικός αριθμός α τέτοιος ώστε f(α)=0

Για $x=\alpha$ και $y=1$ από τη δοθείσα σχέση έχουμε :

$$f(\alpha)=f(\alpha)f(1)-\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\overset{f(\alpha)=0}{\Leftrightarrow}0=-\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\Leftrightarrow\alpha^2=-1,\ \text{άτοπο.}$$

Άρα

$$f(x)\neq 0,\ \text{για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

Για x=y=1 από τη δοθείσα σχέση έχουμε:

$$f(1)=f^2(1)-2\Leftrightarrow f^2(1)-f(1)-2=0\Leftrightarrow f(1)=2\quad \text{ή}\quad f(1)=-1,$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, επομένως υπάρχει θετικός αριθμός ξ τέτοιος ώστε για οποιοδήποτε Μ > 0 να ισχύει f(x) > M για κάθε x > ξ.

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f για το κατάλληλο x παίρνει **θετική τιμή**.

Εξάλλου η f ως συνεχής συνάρτηση που δεν μηδενίζεται για καμία τιμή του x διατηρεί **σταθερό πρόσημο** οπότε f(x)>0, για κάθε x>0, οπότε f(1)=2.

Γ2. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και y=1 από τη δοθείσα σχέση έχουμε :

$$\boxed{f(x)=2f(x)-\frac{x^2+1}{x}\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2+1}{x}\Leftrightarrow f(x)=x+\frac{1}{x}}$$

Γ3. Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι

$$g(x)=\left(f(x)\right)^{2016}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2016},$$

οπότε :

$$g'(x) = 2016\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2015}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$g''(x) = 2016 \cdot 2015\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2014}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + 2016\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2015}\frac{2}{x^3} > 0$$

Επομένως η g είναι **κυρτή** στο διάστημα (0, 1).

Γ4. Αφού η g είναι κυρτή στο $(0,\ 1)$ η g' είναι γνησίως αύξουσα (0, 1).

- Αν $x = y$ τότε ισχύει η ισότητα
- Αν $x \neq y$ χωρίς περιορισμό της γενικότητας έστω ότι είναι $x < y$

Από το **Θ.Μ.Τ.** για την g στα διαστήματα $\left[x,\ \frac{x+y}{2}\right]$, $\left[\frac{x+y}{2},\ y\right]$

υπάρχουν

$$\xi_1 \in \left(x,\ \frac{x+y}{2}\right) \quad \text{και} \quad \xi_2 \in \left(\frac{x+y}{2},\ y\right)$$

ώστε

$$g'(\xi_1) = \frac{g\left(\frac{x+y}{2}\right) - g(x)}{\frac{x+y}{2} - x} = \frac{g\left(\frac{x+y}{2}\right) - g(x)}{\frac{y-x}{2}}$$

και

$$g'(\xi_2) = \frac{g(y) - g\left(\frac{x+y}{2}\right)}{y - \frac{x+y}{2}} = \frac{g(y) - g\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\frac{y-x}{2}}$$

Επειδή η g' είναι γνησίως αύξουσα , έχουμε

$$\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow g'(\xi_1) < g'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{g\left(\frac{x+y}{2}\right) - g(x)}{\frac{y-x}{2}} < \frac{g(y) - g\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\frac{y-x}{2}} \overset{y-x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{x+y}{2}\right) - g(x) < g(y) - g\left(\frac{x+y}{2}\right) \Leftrightarrow 2g\left(\frac{x+y}{2}\right) < g(x) + g(y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{g(x) + g(y)}{2}$$

Άρα για κάθε $x, y \in (0,\ 1)$ ισχύει:

$$\boxed{\mathbf{g\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq \frac{g(x)+g(y)}{2}}}$$

Γ5. Είναι x+y=1, οπότε x=1-y και y = 1-x

Οπότε επειδή είναι $x>0$ και $y>0$ θα είναι

$$1-y>0 \Leftrightarrow y<1 \text{ και } 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$$

Αλλά από Γ4. ερώτημα για κάθε $x,\ y \in (0,\ 1)$ ισχύει :

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq \frac{g(x)+g(y)}{2} \Leftrightarrow 2g\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq g(x)+g(y)$$

Επομένως

$$2g\left(\frac{1}{2}\right)\leq \left(x+\frac{1}{x}\right)^{2016}+\left(y+\frac{1}{y}\right)^{2016} \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}+2\right)^{2016}\leq \left(x+\frac{1}{x}\right)^{2016}+\left(y+\frac{1}{y}\right)^{2016} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{5}{2}\right)^{2016}\leq \left(x+\frac{1}{x}\right)^{2016}+\left(y+\frac{1}{y}\right)^{2016} \Leftrightarrow 2\frac{5^{2016}}{2^{2016}}\leq \left(x+\frac{1}{x}\right)^{2016}+\left(y+\frac{1}{y}\right)^{2016} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^{2016}+\left(y+\frac{1}{y}\right)^{2016}\geq \frac{5^{2016}}{2^{2015}}$$

9ο **Θ Ε Μ Α Δ**

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $[1,\ +\infty)$ ως παραγωγίσιμη και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\geq 1$

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[1,\ +\infty)$ και επειδή είναι $f(1)=e>0$ θα είναι

$$f(x)>0 \text{ για κάθε } x\geq 1.$$

Επομένως για κάθε $x\geq 1$ είναι

$$f''(x)>\frac{(f'(x))^2+2f^2(x)}{f(x)}>0$$

άρα η f είναι **κυρτή**.

Δ2. Είναι

$$f''(x)f(x)>(f'(x))^2+2f^2(x) \Leftrightarrow f''(x)f(x)-(f'(x))^2>2f^2(x) \overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}>2 \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'>2 \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)}-2x\right)'>0 \qquad \mathbf{(1)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}-2x,\quad x\geq 1$$

η οποία λόγω **(1)** είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$.

Οπότε για κάθε $x>1$ θα είναι

$$g(x)>g(1)\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}-2x>\frac{f'(1)}{f(1)}-2\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}-2x>\frac{2e}{e}-2\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}-2x>0\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\left(\ln f(x)-x^2\right)'>0\qquad \textbf{(2)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=\ln f(x)-x^2,\quad x\geq 1$$

η οποία λόγω **(2)** είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$.

Οπότε για κάθε $x>1$ θα είναι

$$\mathbf{h(x)>h(1)\Leftrightarrow \ln f(x)-x^2>\ln f(1)-1\Leftrightarrow \ln f(x)-x^2>\ln e-1\Leftrightarrow \ln f(x)-x^2>0\Leftrightarrow}$$
$$\mathbf{\Leftrightarrow \ln f(x)>x^2\Leftrightarrow f(x)>e^{x^2}}$$

Δ3. Αφού για κάθε $x>1$ είναι $f(x)>0$, από τη σχέση $f(x)>e^{x^2}$ προκύπτει

$$0<\frac{1}{f(x)}<\frac{1}{e^{x^2}}\Leftrightarrow 0<\frac{1}{f(x)}<e^{-x^2}$$

Είναι

$$0<\frac{1}{f(x)}<e^{-x^2}$$

οπότε

- Κατά μείζονα λόγο θα είναι $0\leq\frac{1}{f(x)}\leq e^{-x^2}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x^2}\overset{u=-x^2}{=}\lim\limits_{u\to-\infty}e^{u}=0$

Οπότε από το **κριτήριο παρεμβολής** προκύπτει

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$$

Επομένως

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}=+\infty$$

αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0 \quad \text{και} \quad \frac{1}{f(x)}>0 .$$

Στο **Δ.2.** ερώτημα βρήκαμε ότι

$$g(x)>g(1)\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}-2x>0 \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f'(x)>2xf(x)$$

Άρα για κάθε $x\geq 1$ είναι $f'(x)>2xf(x)>0$ και συνεπώς

η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $A=[1,\ +\infty)$.

- f(1)=e
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Οπότε το **σύνολο τιμών** της f είναι

$$\boxed{\mathbf{f(A)=[e,\ +\infty)}}$$

Δ4. Η εξίσωση $\mathbf{f(x)+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}=e-1}$ ισοδύναμα γίνεται

$$\mathbf{[f(x)-e]+\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}+1\right]=0} \qquad \mathbf{(1)}$$

Αλλά αφού $f(A)=[e,\ +\infty)$ θα είναι

$$f(x)\geq e\Leftrightarrow f(x)-e\geq 0$$

Επίσης $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}\geq -1\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}+1\geq 0$ οπότε από την **(1)** προκύπτει

$$\begin{cases} f(x)-e=0 \\ \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}+1=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=e \\ \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}+1=0 \end{cases}$$

Είναι f(1)=e και για κάθε x>1, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι

$$f(x)>f(1)\Leftrightarrow f(x)>e$$

Άρα

$$\begin{cases} f(x)=e \\ \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}+1=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}+1=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \sigma\upsilon\nu\pi+1=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \sigma\upsilon\nu\pi=-1 \quad \text{ισχύει} \end{cases}$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{x=1}}$$

10ο

2.9 Ασύμπτωτες

10ο

ΘΕΜΑ Β

B1. Θέτουμε $u = 1 - \ln x$ οπότε $\ln x = 1 - u \Leftrightarrow x = e^{1-u}$

Οπότε

$$f(u) = 1 - e^{1-u} - (1-u) = u - e^{1-u}$$

Επίσης η συνάρτηση $u = 1 - \ln x,\ x > 0$ είναι γνησίως φθίνουσα αφού

$$u' = -\frac{1}{x} < 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ και}$$

έχει σύνολο τιμών το IR αφού

$$\lim_{x \to 0^+} u = 1 - (-\infty) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} u = 1 - (+\infty) = -\infty$$

Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $u \in \mathbb{R}$ οπότε

$$f(u) = u - e^{1-u} \quad \text{για κάθε } u \in \text{IR}.$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{f(x) = x - e^{1-x}}}$$

για κάθε $x \in$ IR .

B2. Είναι

$$f'(x) = 1 + e^{1-x} > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \text{IR}.$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο IR .

B3. Είναι $f(1) = 0$, οπότε

- Αν $x < 1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$
- Αν $x > 1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$

B4.
- Η f είναι συνεχής στο IR οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
- $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - e^{1-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{e^{1-x}}{x}\right) = 1 - (-\infty) = +\infty$ γιατί

$$\lim_{x \to -\infty} e^{1-x} = \lim_{u \to +\infty} e^{u} = +\infty$$

και

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{1-x}}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{\underset{D'LH}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{1-x}}{1}=-(+\infty)=-\infty$$

Άρα η γραφική παράσταση της f **δεν έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη** στο $-\infty$.

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-e^{1-x}}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D'LH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{1-x}}{1}=1+0=1=\lambda$$

γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}e^{1-x}=\lim_{u\to-\infty}e^{u}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to+\infty}\left[x-e^{1-x}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-e^{1-x}\right)=\lim_{u\to-\infty}\left(-e^{u}\right)=0=\beta$$

Άρα η $y=\lambda x+\beta\Leftrightarrow y=x$ είναι

πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

B5. Είναι

$$g'(x)=x^2+e^{1-x}-(x+1)e^{1-x}=x^2+e^{1-x}-xe^{1-x}-e^{1-x}=x^2-xe^{1-x}=x\left(x-e^{1-x}\right)=xf(x)$$

x	$-\infty$		**0**		**1**		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗	e Τ.Μ.	↘	Τ.Ε. 7/3	↗	

Η f παρουσιάζει στο

$x_1=0$ **τοπικό μέγιστο** το $g(0)=e$

και στο

$x_2=1$ **τοπικό ελάχιστο** το $g(1)=\frac{7}{3}$

10ο **ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Η g είναι συνεχής στο 0 οπότε

$$\lim_{x\to 0} g(x)=g(0).$$

Είναι :

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \overset{u=-\frac{1}{x^2}}{=} \lim_{u\to -\infty} e^{u}=0 \quad \text{και} \quad g(0)=f(1)$$

Άρα $f(1)=0$

Επίσης η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 οπότε

$$g'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u\to +\infty}\frac{e^{-u^2}}{\frac{1}{u}}=\lim_{u\to +\infty}\frac{u}{e^{u^2}} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{u\to +\infty}\frac{1}{2ue^{u^2}}=0$$

Οπότε $g'(0)=0$ και συνεπώς $f(4)=\ln 2$

Για κάθε $x\in(0,\ 2)\cup(2,\ +\infty)$ είναι

$$x f(x)=1+\left(2x-x^2\right)f'(x)\Leftrightarrow x f(x)-\left(2x-x^2\right)f'(x)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x f(x)+\left(x^2-2x\right)f'(x)=1\Leftrightarrow x f(x)+x(x-2)f'(x)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)+(x-2)f'(x)=\frac{1}{x}\Leftrightarrow((x-2)f(x))'=(\ln x)'$$

Αν $x\in(0,\ 2)$ είναι

$$(x-2)f(x)=\ln x+c_1.$$

Για x=1 παίρνουμε

$$(1-2)f(1)=\ln 1+c_1 \overset{f(1)=0}{\Leftrightarrow} c_1=0$$

Άρα

$$f(x)=\frac{\ln x}{x-2},\quad x\in(0,\ 2)$$

Αν $x\in(2,\ +\infty)$ είναι

$$(x-2)f(x)=\ln x+c_2.$$

Για x=4 παίρνουμε

$$(4-2)f(4)=\ln 4+c_2 \overset{f(4)=\ln 2}{\Leftrightarrow} 2\ln 2=\ln 2^2+c_2\Leftrightarrow 2\ln 2=2\ln 2+c_2\Leftrightarrow c_2=0$$

Άρα

$$f(x)=\frac{\ln x}{x-2},\quad x\in(2,\ +\infty)$$

Επομένως

$$\boxed{\mathbf{f(x)=\frac{\ln x}{x-2},\quad x\in(0,\ 2)\cup(2,\ +\infty)}}$$

Γ2. ● Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x-2}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x-2}\ln x\right)=-\frac{1}{2}(-\infty)=+\infty$$

Άρα η $\varepsilon_1: x=0$ (ο άξονας $y'y$) είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{\ln x}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x-2}\ln x\right)\overset{x-2<0}{=}(-\infty)\ln 2=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{\ln x}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x-2}\ln x\right)\overset{x-2>0}{=}(+\infty)\ln 2=+\infty$$

Άρα η $\varepsilon_2: x=2$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f.

● Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες

Είναι

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x-2}\underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

Άρα η $y=0$ (ο άξονας x'x) είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

Γ3. Για κάθε $x\in(0,\ 2)\cup(2,\ +\infty)$, είναι

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x-2)-\ln x}{(x-2)^2}=\frac{1-\frac{2}{x}-\ln x}{(x-2)^2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=1-\frac{2}{x}-\ln x,\ x>0$$

Είναι

$$g'(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{2-x}{x^2}$$

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Στο x=2 η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $g(2)=-\ln 2$.

Άρα

$$g(x)\le g(2)\Leftrightarrow g(x)\le -\ln 2<0$$

Άρα

$$g(x)<0\Leftrightarrow 1-\frac{2}{x}-\ln x<0,$$

οπότε :

$$f'(x)<0, \text{ για κάθε } x\in(0,\ 2)\cup(2,\ +\infty)$$

Επομένως η f είναι

γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0,\ 2)$ και $(2,\ +\infty)$

Αν $x\in A_1=(0,\ 2)$, τότε

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to 2^-} f(x),\ \lim_{x\to 0^+} f(x)\right)=(-\infty,\ +\infty)=\mathrm{IR}$$

Αν $x\in A_2=(2,\ +\infty)$, τότε

$$x\in f(A_2)=\left(\lim_{x\to +\infty} f(x),\ \lim_{x\to 2^+} f(x)\right)=(0,\ +\infty)$$

Το $2016\in f(A_1)=\mathrm{IR}$ άρα υπάρχει $x_1\in A_1=(0,\ 2)$ ώστε

$$f(x_1)=2016.$$

Το x_1 είναι **μοναδικό** στο A_1 αφού η f είναι **γνησίως φθίνουσα** άρα **1-1** στο A_1.

Το $2016\in f(A_2)=(0,\ +\infty)$ άρα υπάρχει $x_2\in A_2=(2,\ +\infty)$ ώστε

$$f(x_2)=2016.$$

Το x_2 είναι **μοναδικό** στο A_2 αφού η f είναι **γνησίως φθίνουσα** άρα **1-1** στο A_2.

Αρά η εξίσωση $f(x)=2016$ έχει **δυο ακριβώς ρίζες**.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = 2x + 1 - e^{2x}, \quad x \in IR$$

Είναι

$$h'(x) = 2 - 2e^{2x}, \quad x \in IR$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Αρα η h παρουσιάζει στο 0 ολικό μέγιστο το h(0)=0

Επομένως

$$h(x) \le 0 \Leftrightarrow 2x + 1 - e^{2x} \le 0 \text{ για κάθε } x \in IR$$

Οπότε

$$2\lambda + 1 - e^{2\lambda} \le 0 \text{ για κάθε } \lambda \in IR.$$

Συνεπώς για κάθε $\lambda \in IR$

$$2\lambda + 1 - e^{2\lambda} \in f(A_1)$$

ενώ

$$2\lambda + 1 - e^{2\lambda} \notin f(A_2)$$

Άρα υπάρχει $\rho \in A_1$ ώστε

$$f(\rho) = 2\lambda + 1 - e^{2\lambda},$$

δηλαδή το ρ είναι μια ρίζα της εξίσωσης

$$f(x) = 2\lambda + 1 - e^{2\lambda},$$

η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα 1-1 στο A_1.

10ο **Θ Ε Μ Α Δ**

Δ1. Είναι

$$P'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$$

Επειδή

$$P(\rho_1) = P(\rho_2) = P(\rho_3) = 0$$

από **Θ. Rolle** για την P (x) στα $[\rho_1, \rho_2]$ και $[\rho_2, \rho_3]$

υπάρχουν $x_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $x_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ ώστε

$$P'(x_1) = P'(x_2) = 0$$

Άρα η εξίσωση $3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ έχει δυο ρίζες x_1 , x_2 , άνισες , οπότε

$$\boxed{\mathbf{\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\beta^2 - 12\alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow \beta^2 > 3\alpha\gamma}}$$

Δ2. Επειδή είναι $\alpha > 0$, έχουμε

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$p'(x)$		+	0	−	0	+	
$p(x)$		↗	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.	↗	

Δ3. Είναι $P''(x) = 6\alpha x + 2\beta$

$$P''(x_1) + P''(x_2) = 6\alpha x_1 + 2\beta + 6\alpha x_2 + 2\beta = 6\alpha(x_1 + x_2) + 4\beta$$

Αλλά x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ οπότε από τους τύπους

Vieta έχουμε $x_1 + x_2 = -\dfrac{2\beta}{3\alpha}$ και συνεπώς

$$\boxed{\mathbf{P''(x_1) + P''(x_2) = 6\alpha\left(-\frac{2\beta}{3\alpha}\right) + 4\beta = -4\beta + 4\beta = 0}}$$

Δ4. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ παρουσιάζει σημείο καμπής σε κάποια από τις θέσεις x_1 , x_2 των ακρότατων του $P(x)$ τότε

$$P''(x_1) = 0 \quad ή \quad P''(x_2) = 0 .$$

Αν π.χ. $P''(x_1) = 0$ τότε αφού $P''(x_1) + P''(x_2) = 0$ θα είναι και $P''(x_2) = 0$,

δηλαδή το πολυώνυμο $P''(x) = 6\alpha x + 2\beta$ έχει 2 ρίζες που είναι **άτοπο** αφού είναι πρώτου βαθμού.

Δ5 Είναι $P'(x_1) = P'(x_2) = 0$, οπότε από **Θ. Rolle**

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$P''(\xi) = 0 ,$$

το οποίο είναι μοναδικό αφού το πολυώνυμο $P''(x)=6\alpha x+2\beta$ είναι πρώτου βαθμού.

Επειδή είναι $\alpha>0$,
έχουμε

x	$-\infty$	ξ	$+\infty$
$p''(x)$	$-$	0	$+$
$p(x)$	$\frown$	Σ.Κ.	$\smile$

Άρα το πολυώνυμο $P(x)$ έχει **ένα ακριβώς σημείο καμπής**

$$K(\xi,\ P(\xi)) \text{ με } \xi\in(x_1,\ x_2).$$

Δ6. Επειδή η $y=2x+25$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, θα ισχύουν

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2,$$
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=25$$

Οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{P(x)}{x^2+\gamma x+\delta}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}{x^3+\gamma x^2+\delta x}\overset{\alpha>0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^3}{x^3}=\alpha$$

Άρα $\alpha=2$.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}{x^2+\gamma x+\delta}-2x\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta-2x^3-2\gamma x^2-2\delta x}{x^2+\gamma x+\delta}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta x^2+\gamma x+\delta-2\gamma x^2-2\delta x}{x^2+\gamma x+\delta}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\beta-2\gamma+\dfrac{\gamma}{x}-\dfrac{2\delta}{x}+\dfrac{\delta}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{\gamma}{x}+\dfrac{\delta}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta-2\gamma+\dfrac{\gamma}{x}-\dfrac{2\delta}{x}+\dfrac{\delta}{x^2}}{1+\dfrac{\gamma}{x}+\dfrac{\delta}{x^2}}=\beta-2\gamma$$

Άρα

$$\beta-2\gamma=25.$$

Επειδή η C_f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες με εξισώσεις

$$x=-1 \text{ και } x=13\ ,$$

θα ισχύουν

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \quad ή \; -\infty \qquad ή$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \quad ή \; -\infty$$

και

$$\lim_{x \to 13^+} f(x) = +\infty \quad ή \; -\infty \qquad ή$$

$$\lim_{x \to 13^-} f(x) = +\infty \quad ή \; -\infty$$

Είναι

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{2x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}{x^2 + \gamma x + \delta} \qquad με$$

$$\lim_{x \to -1}\left(2x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta\right) = -2 + \beta - \gamma + \delta \qquad και$$

$$\lim_{x \to -1}\left(x^2 + \gamma x + \delta\right) = 1 - \gamma + \delta$$

Οπότε αν $1 - \gamma + \delta \neq 0$ τότε

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \frac{-2 + \beta - \gamma + \delta}{1 - \gamma + \delta} \in IR \text{, άτοπο.}$$

Άρα πρέπει $1 - \gamma + \delta = 0$.

Επίσης είναι

$$\lim_{x \to 13} f(x) = \lim_{x \to 13} \frac{2x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}{x^2 + \gamma x + \delta} \qquad με$$

$$\lim_{x \to 13}\left(2x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta\right) = 4394 + 169\beta + 13\gamma + \delta \qquad και$$

$$\lim_{x \to 13}\left(x^2 + \gamma x + \delta\right) = 169 + 13\gamma + \delta$$

Οπότε αν $169 + 13\gamma + \delta \neq 0$ τότε

$$\lim_{x \to 13} f(x) = \frac{4394 + 169\beta + 13\gamma + \delta}{169 + 13\gamma + \delta} \in IR \text{, άτοπο.}$$

Άρα πρέπει $169 + 13\gamma + \delta = 0$.

Άρα

$$\begin{cases} 1-\gamma+\delta=0 \\ 169+13\gamma+\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13-13\gamma+13\delta=0 \\ 169+13\gamma+\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13-13\gamma+13\delta=0 \\ 182+14\delta=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13-13\gamma+13\delta=0 \\ \delta=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13-13\gamma-169=0 \\ \delta=-13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13\gamma=-156 \\ \delta=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=-12 \\ \delta=-13 \end{cases}$$

Επομένως αφού $\beta - 2\gamma = 25$ θα είναι

$$\beta-2(-12)=25 \Leftrightarrow \beta=25-24 \Leftrightarrow \beta=1$$

Άρα

$P(x)=2x^3+x^2-12x-13, \; x \in IR.$