36. ΘΕΜΑ Β 2004

B1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A=(0,+\infty)$.

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f είναι :

$$f'(x)=2x\ln x+x^2\frac{1}{x}=x(2\ln x+1)$$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$

- $f'(x)>0 \Leftrightarrow x(2\ln x+1)>0 \Leftrightarrow 2\ln x+1>0 \Leftrightarrow \ln x>\ln e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x>e^{-\frac{1}{2}}$

Το πρόσημο της f', η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	

Δηλαδή η

f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,e^{-\frac{1}{2}}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right)$

Άρα στο

$x_0=e^{-\frac{1}{2}}$ παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** , το

$$\boxed{f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2\ln e^{-\frac{1}{2}}=e^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2e}}$$

B2. Μελέτη ως προς τα κοίλα

Είναι

$$f''(x)=\left[x\left(2\ln x+1\right)\right]'=2\ln x+1+x\left(2\frac{1}{x}\right)=2\ln x+3,$$

οπότε :

- $f''(x)=0 \Leftrightarrow 2\ln x+3=0 \Leftrightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}$
- $f''(x)>0 \Leftrightarrow 2\ln x+3>0 \Leftrightarrow \ln x>-\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \ln x>\ln e^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x>e^{-\frac{3}{2}}$

Το πρόσημο της f'', καθώς και τα κοίλα και τα κυρτά της f με τα σημεία καμπής φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f(x)			Σ.Κ.		

Δηλαδή η f στο

$$\left(e^{-\frac{3}{2}}, f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)\right)$$

παρουσιάζει καμπή,

Άρα **σημείο καμπής** είναι το

$$\boxed{\left(\mathbf{e}^{-\frac{3}{2}}, -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2e^3}}\right).}$$

B3. Για την εύρεση του συνόλου τιμών χρειαζόμαστε, εκτός από τη μονοτονία και τα ακρότατα, τη συμπεριφορά της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της, δηλαδή:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\ln x\right)=(+\infty)(+\infty)=+\infty \qquad \text{και}$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x^2\ln x\right)\overset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{2}=0$$

- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$,

οπότε

$$f\left(\left(0,e^{-\frac{1}{2}}\right]\right)=\left[-\frac{1}{2e},0\right)$$

- Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right)$

Οπότε

$$f\left(\left[e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right)\right)=\left[-\frac{1}{2e},+\infty\right)$$

Τελικά το **σύνολο τιμών** της f είναι :

$$\boxed{\mathbf{f(A)=\left[-\frac{1}{2e},+\infty\right)}}.$$

37. **ΘΕΜΑ Β** **study4exams**

B1. Το πεδίο ορισμού της g είναι το $(0,+\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό.

Επίσης η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$$g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}.$$

Οπότε έχουμε τον επόμενο πίνακα πρόσημου για την g':

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

το οποίο σημαίνει ότι η g είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$, το οποίο είναι το $g(1)=1$

Για το σύνολο τιμών βρίσκουμε τα εξής όρια:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-\ln x)=+\infty \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty,$$

αφού $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=1.$$

- Αν $A_1=(0,1]$ και επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1, είναι

$$\boxed{g(A_1)=\left[g(1),\lim_{x\to 0^+}g(x)\right)=[1,+\infty)}$$

- Αν $A_2=(1,+\infty)$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο A_2, είναι

$$\boxed{g(A_2)=\left(\lim_{x\to 1^+}g(x),\lim_{x\to+\infty}g(x)\right)=(1,+\infty)}$$

Από τα προηγούμενα έπεται ότι το σύνολο τιμών είναι το $[1,+\infty)$.

Σχόλιο: Μπορούμε να απαντήσουμε βρίσκοντας και το ένα από τα δύο όρια.

Β2. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$.

Κατακόρυφη ασύμπτωτη

Θεωρούμε το όριο

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(e^{\frac{1}{x}}\ln x\right)=-\infty,$$

αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}\overset{y=\frac{1}{x}}{=}\lim_{y\to+\infty}e^y=+\infty$$

Άρα η γραφική παράσταση της f έχει **κατακόρυφη ασύμπτωτη** την ευθεία $x=0$.

Πλάγιες ασύμπτωτες

Θεωρούμε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}\frac{\ln x}{x}=0$$

αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}\overset{y=\frac{1}{x}}{=}\lim_{y\to 0}e^y=1,$$

όμως

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-0x]=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}\ln x=+\infty, \text{ αφού } \lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty.$$

Άρα η γραφική παράσταση της f **δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη** στο $+\infty$.

Β3. Η παράγωγος της f ισούται με:

$$f'(x)=(e^{\frac{1}{x}}\ln x)'=e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln x+e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x}=e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}(x-\ln x)=e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}\,g(x)$$

και από το ερώτημα Β1 έπεται ότι

$$f'(x)>0 \ \text{ για κάθε } \ x\in(0,+\infty),$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Στο Β2 βρήκαμε επίσης ότι

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty \ \text{ και } \ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}\ln x=+\infty,$$

άρα το **σύνολο τιμών** της f είναι το $\mathbb{R}$.

38. **ΘΕΜΑ Β** **ΕΠΑΝ. ΕΣΠ. 2010**

Β1. Πρέπει και αρκεί

$$9-x^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2\le 9 \Leftrightarrow |x|\le 3 \Leftrightarrow -3\le x\le 3$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $D_f=[-3,3]$.

Β2. α. Για $x\in(-3,3)$ είναι:

$$f'(x)=(x+3)'\cdot\sqrt{9-x^2}+(x+3)\left(\sqrt{9-x^2}\right)'$$

$$=\sqrt{9-x^2}+(x+3)\frac{\left(9-x^2\right)'}{2\sqrt{9-x^2}}=\sqrt{9-x^2}+(x+3)\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$=\frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}}+\frac{-x(x+3)}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{-2x^2-3x+9}{\sqrt{9-x^2}}$$

β. Έχουμε

$$\lim_{x\to-3}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)\sqrt{9-x^2}}{x+3}=\lim_{x\to-3}\sqrt{9-x^2}=0$$

άρα

$$\boxed{f'(-3)=0}$$

Β3. Έχουμε

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x^2-3x+9=0 \Leftrightarrow x=-3$ ή $x=\dfrac{3}{2}$

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 3x + 9 > 0 \Leftrightarrow -3 < x < \dfrac{3}{2}$

x	−3		3/2		3
f′(x)		+	0	−	
f(x)		↗		↘	

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\left[-3, \dfrac{3}{2}\right]$, ενώ είναι

γνησίως φθίνουσα στο $\left[\dfrac{3}{2}, 3\right]$.

B4. Η συνάρτηση f παρουσιάζει

τοπικό ελάχιστο: $f(-3) = 0$

τοπικό μέγιστο: $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2} + 3\right)\sqrt{9 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$

τοπικό ελάχιστο: $f(3) = 0$.

39. **ΘΕΜΑ Β** **study4exams**

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 + 2x}{x^2 + 1} = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}.$$

Επειδή

$$f'(x) > 0 \text{ στο } (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

και η

$$f \text{ είναι συνεχής στο } -1,$$

έπεται ότι η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

B2. Ισχύει

$$x - 4 = \ln 17 - \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow x + \ln(x^2 + 1) = 4 + \ln(4^2 + 1) \Leftrightarrow f(x) = f(4)$$

και η f είναι «1−1» αφού είναι γνησίως αύξουσα, άρα η τελευταία σχέση μας δίνει:

$$x = 4$$

B3. Έχουμε:

$$x^3 - x^2 > \ln\frac{x^4+1}{x^6+1} \Leftrightarrow x^3 - x^2 > \ln(x^4+1) - \ln(x^6+1) \Leftrightarrow$$

$$x^3 + \ln((x^3)^2+1) > x^2 + \ln((x^2)^2+1) \Leftrightarrow$$

$$f(x^3) > f(x^2) \overset{f\ \text{γν.αξ.}}{\Leftrightarrow} x^3 > x^2 \Leftrightarrow x^2(x-1) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

40. **ΘΕΜΑ Β** **study4exams**

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

B1. Έχουμε

$$f'(x) = 2x - \text{συν}x \quad \text{και} \quad f''(x) = 2 + \text{ημ}x\,.$$

Ισχύει:

$$-1 \le \text{ημ}x \le 1 \Leftrightarrow 2-1 \le 2 + \text{ημ}x \le 2+1 \Leftrightarrow$$
$$1 \le 2 + \text{ημ}x \le 3 \Leftrightarrow 1 \le f''(x) \le 3$$

άρα

$$f''(x) > 0\,, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

το οποίο συνεπάγεται ότι η f είναι **κυρτή** στο $\mathbb{R}$.

B2. Έχουμε:

- $f'(0) = -\text{συν}0 = -1 < 0$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\,\frac{\pi}{2} - \text{συν}\,\frac{\pi}{2} = \pi > 0$
- και επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

έπεται από το **θεώρημα Bolzano** ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ τέτοιο, ώστε}$$

$$f'(x_0) = 0\,.$$

Όμως όπως δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα, $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, που σημαίνει ότι

υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

τέτοιο, ώστε

$$\boxed{f'(x_0) = 0\,.}$$

B3. Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0)=0,$$

οπότε:

$$\text{για}\quad x<x_0 \Leftrightarrow f'(x)<f'(x_0)=0 \quad \text{και}$$
$$\text{για}\quad x>x_0 \Leftrightarrow f'(x)>f'(x_0)=0.$$

Άρα η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$ και **γνησίως αύξουσα** στο $[x_0, +\infty)$.

41. **Θ Ε Μ Α Β** **ΕΣΠΕΡ. 2010**

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με παράγωγο:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+3}{x}+2x\right)'=\left(x+\frac{3}{x}+2x\right)'=\left(3x+\frac{3}{x}\right)'$$

$$=3-\frac{3}{x^2}=\frac{3x^2-3}{x^2},\quad x\in R^*$$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2-3}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=-1 \;\text{ ή }\; x=1$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2-3}{x^2}<0 \Leftrightarrow x\in(-1,0)\cup(0,1)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	

Άρα η συνάρτηση f έχει:

τοπικό μέγιστο: $f(-1)=-3-3=-6$

τοπικό ελάχιστο: $f(1)=3+3=6$

B2. Κατακόρυφες ασύμπτωτες

Είναι

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(3x+\frac{3}{x}\right)=+\infty$$

άρα η C_f έχει **κατακόρυφη ασύμπτωτη** την $x=0$ (ο άξονας y΄y)

Πλάγιες ασύμπτωτες

Είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+\frac{3}{x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(3+\frac{3}{x^2}\right)=3=\lambda$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(3x+\frac{3}{x}-3x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0=\beta$$

Άρα η C_f έχει **πλάγια ασύμπτωτη** στο $-\infty$ την $y=3x$.

Ομοίως είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\frac{3}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{3}{x^2}\right)=3=\lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(3x+\frac{3}{x}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0=\beta$$

Άρα η C_f έχει **πλάγια ασύμπτωτη** στο $+\infty$ την $y=3x$.

B3. Είναι

$$f(1)=6 \quad \text{και} \quad f'(1)=0,$$

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,\ f(1))$ είναι:

$$\boxed{(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow(\varepsilon): y-6=0\Leftrightarrow(\varepsilon):\ y=6}$$

B1. Έχουμε

$$\lambda_{AB}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{10-6}{2}=2$$

Πρέπει

$$f'(\xi)=2\Leftrightarrow 3-\frac{3}{\xi^2}=2\Leftrightarrow 1=\frac{3}{\xi^2}\Leftrightarrow \xi^2=3\overset{\xi>0}{\Leftrightarrow}\xi=\sqrt{3}$$

$$f\left(\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}+\frac{3}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}+\frac{3}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}+\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το

$$\boxed{M\left(\sqrt{3}, 4\sqrt{3}\right)}$$

42. **ΘΕΜΑ Β** **2015**

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - 2xe^x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2} > 0 \quad \text{για κάθε } x \neq 1,$$

συνεπώς η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$$(-\infty, 1) \text{ και } (1, +\infty).$$

Επειδή η f είναι συνεχής, θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης έχουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\left(e^x \cdot \frac{1}{x^2+1}\right) = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^x\right)'}{\left(x^2+1\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^x\right)'}{(2x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

Β2. Επειδή η f είναι 1-1, η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$f\left(e^{3-x} \cdot \left(x^2+1\right)\right) = \frac{e^2}{5} \Leftrightarrow f\left(e^{3-x} \cdot \left(x^2+1\right)\right) = f(2) \Leftrightarrow e^{3-x} \cdot \left(x^2+1\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^3}{e^x} \cdot \left(x^2+1\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^2+1} = \frac{e^3}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2}$$

Ο αριθμός $\frac{e^3}{2}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης, άρα υπάρχει αριθμός ρ, τέτοιος ώστε

$$f(\rho) = \frac{e^3}{2},$$

ο οποίος είναι μοναδικός, αφού η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Λόγω των ισοδυναμιών ο αριθμός ρ είναι και μοναδική ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

43. **ΘΕΜΑ Β** **ΕΣΠΕΡ. 2010**

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$f'(x)=\left(x^3+3x+\sigma\upsilon\nu x-2\right)'=3x^2+3-\eta\mu x>0,\ \text{διότι}$$

$$3x^2\geq 0 \quad \text{και} \quad 3-\eta\mu x>0 \quad \text{αφού} \quad -1\leq\eta\mu x\leq 1.$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

B2. Έχουμε

- η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$, ως άθροισμα συνεχών
- $f(0)=\sigma\upsilon\nu 0-2=1-2=-1<0$

  $f(\pi)=\pi^3+3\pi+\sigma\upsilon\nu\pi-2=\pi^3+3\pi-3=\pi^3+3(\pi-1)>0$

Από **Θ. Bolzano** η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,\pi)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\pi)$

η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

B3. Είναι

$$f\left(x^2+8\right)=f(6x)\overset{f\,\text{"1-1"}}{\underset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}} x^2+8=6x\Leftrightarrow x^2-6x+8=0\Leftrightarrow$$

$$x=2 \quad \text{ή} \quad x=4$$

B4. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x+\sigma\upsilon\nu x-2+1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(x^2+3\ \frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(x^2+3\right)-\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=3-0=3.$$

44. **Θ Ε Μ Α Β** **study4exams**

B1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=2x^3-15x^2+24x$ είναι το $\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με παράγωγο

$$f'(x)=6x^2-30x+24$$

Είναι

- $f'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-30x+24=0\Leftrightarrow x=1 \quad \text{ή} \quad x=4$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow 6x^2-30x+24<0\Leftrightarrow 1<x<4$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow 6x^2-30x+24>0\Leftrightarrow x<1 \quad \text{ή} \quad x>4$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	11	$\searrow$	-16	$\nearrow$	

Η f είναι λοιπόν **γνησίως αύξουσα** στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[4, +\infty)$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $[1, 4]$.

Επειδή είναι επίσης **συνεχής** στα σημεία 1 και 4, παρουσιάζει

στη θέση $x = 1$ **τοπικό μέγιστο** το $f(1) = 11$ και

στη θέση $x = 4$ **τοπικό ελάχιστο** το $f(4) = -16$.

B2. Ισχύει

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

B3. Τα επιμέρους σύνολα τιμών είναι

$$f\big((-\infty,1]\big) = (-\infty,11], \quad f\big([1,4]\big) = [-16,11] \quad \text{και} \quad f\big([4,+\infty)\big) = [-16,+\infty)$$

και από τη μονοτονία της συνάρτησης προκύπτει ότι

- Αν $\lambda < -16$,

  τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μια μοναδική λύση στο $(-\infty,1)$.

- Αν $\lambda = -16$,

  τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει δυο ακριβώς λύσεις,

  την $x = 4$ και μια δεύτερη στο $(-\infty,1)$.

- Αν $-16 < \lambda < 11$,

  τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει τρεις ακριβώς λύσεις,

  μια σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$, $(1,4)$ και $(4,+\infty)$.

- Αν $\lambda = 11$,

  τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει δυο ακριβώς λύσεις,

  την $x = 1$ και μια δεύτερη στο $(4,+\infty)$.

- Αν $\lambda > 11$,

  τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μια μοναδική λύση στο $(4,+\infty)$.

B4. Είναι

$$f''(x) = 12x - 30 \text{ και } f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}.$$

Οπότε έχουμε

x	$-\infty$		$5/2$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Άρα η f είναι

κοίλη στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ και **κυρτή** στο $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

Επειδή η f'' **μηδενίζεται** στο σημείο $x_0 = \frac{5}{2}$ και **εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημα**, το σημείο

$$A\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$$

είναι **σημείο καμπής** της C_f.

45. **ΘΕΜΑ Β** **ΕΠΑΝ. ΕΣΠ. 2011**

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x) = \left(\frac{\alpha}{x^2} - \frac{1}{x-\beta}\right)' = -\frac{2\alpha}{x^3} + \frac{1}{(x-\beta)^2}$$

Το σημείο Α ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f, οπότε είναι:

$$A\left(-2, \frac{5}{12}\right) \in C_f \Leftrightarrow f(-2) = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{\beta+2} = \frac{5}{12} \quad (1)$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $\frac{5}{18}$, άρα είναι:

$$f'(-2) = \frac{5}{18} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{(\beta+2)^2} = \frac{5}{18} \quad (2)$$

Από (1) και (2) με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{1}{(\beta+2)^2} - \frac{1}{\beta+2} = -\frac{5}{36}.$$

Θέτουμε όπου $\frac{1}{\beta+2} = \omega$, οπότε έχουμε

$$\omega^2 - \omega + \frac{5}{36} = 0$$

$$\Delta = \frac{4}{9} \text{ και ρίζες } \omega_1 = \frac{5}{6} \text{ και } \omega_2 = \frac{1}{6}$$

- $\omega_1 = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta+2} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \beta+2 = \frac{6}{5} \Leftrightarrow \beta = -\frac{4}{5} \notin Z$
- $\omega_2 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta+2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \beta+2 = 6 \Leftrightarrow \beta = 4 \in Z$

$$(1) \overset{\beta=4}{\Rightarrow} \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} \overset{12}{\Leftrightarrow} 3\alpha + 2 = 5 \Leftrightarrow 3\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

B2. Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 4$, τότε

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0,4\}$$

Οπότε

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{(x-4)^2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0,4\}$$

Για $x \neq 0$ και $x \neq 4$:

$$x^3 = 2\left(x^2 - 4x + 16\right) \Leftrightarrow x^3 = 2x^2 - 8x + 32 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 16x - 32 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+16\right) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	0		2		4	$+\infty$
x−2	−	‖	−	0	+	‖	+
x^3	−	‖	+		+	‖	+
f΄(x)	+	‖	−		+	‖	+
f(x)	↗	‖	↘		↗	‖	↗

Από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών παρατηρούμε ότι:

Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στα $(-\infty, 0)$, $[2,4)$ και $(4, +\infty)$, ενώ είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0,2]$.

Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** την τιμή $f(2) = \frac{3}{4}$.

B3. Έχουμε

- $\Delta_1=(-\infty,\ 0)$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_1

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x-4}\right)=0\\&\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x-4}\right)=+\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(\Delta_1)=(0,+\infty)$$

- $\Delta_2=(0,2]$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_2

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x-4}\right)=+\infty\\&f(2)=\frac{3}{4}\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(\Delta_2)=\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$$

- $\Delta_3=(2,4)$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_3

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to2^+} f(x)\overset{f\text{ συνεχής}}{=}f(2)=\frac{3}{4}\\&\lim_{x\to4^-} f(x)=\lim_{x\to4^-}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x-4}\right)=+\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(\Delta_3)=\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$$

- $\Delta_4=[4,+\infty)$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_4

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to4^+} f(x)=\lim_{x\to4^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x-4}\right)=-\infty\\&\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x-4}\right)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(\Delta_4)=(-\infty,\ 0)$$

Επομένως το **σύνολο τιμών** της f είναι:

$$\boxed{\mathbf{f(\Delta)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup f(\Delta_3)\cup f(\Delta_4)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)=R^*}}$$

B4. Είναι:

$$\kappa x^3+(1-4\kappa)x^2-x+4=0 \quad (1)$$

- Η (1) για $x=0$ δίνει $4=0 \rightarrow$ άτοπο
- Η (1) για $x=4$ δίνει $16=0 \rightarrow$ άτοπο

Άρα για $x \neq 0$ και $x \neq 4$ η (1) γίνεται:

$$\kappa x^3 + (1-4\kappa)x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow \kappa x^3 + x^2 - 4\kappa x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\kappa x^3 - 4\kappa x^2 = x - 4 - x^2 \Leftrightarrow \kappa x^2(x-4) = x - 4 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\kappa x^2(x-4)}{x^2(x-4)} = \frac{x-4}{x^2(x-4)} - \frac{x^2}{x^2(x-4)} \Leftrightarrow \kappa = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \kappa$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

$\kappa<0$	$\kappa \notin f(\Delta_1)$	$\kappa \notin f(\Delta_2)$	$\kappa \notin f(\Delta_3)$	$\kappa \notin f(\Delta_4)$	1 ρίζα
$\kappa=0$	$\kappa \notin f(\Delta_1)$	$\kappa \notin f(\Delta_2)$	$\kappa \notin f(\Delta_3)$	$\kappa \notin f(\Delta_4)$	0 ρίζες
$0<\kappa<\frac{3}{4}$	$\kappa \in f(\Delta_1)$	$\kappa \notin f(\Delta_2)$	$\kappa \notin f(\Delta_3)$	$\kappa \in f(\Delta_4)$	1 ρίζα
$\kappa=\frac{3}{4}$	$\kappa \in f(\Delta_1)$	$\kappa \in f(\Delta_2)$	$\kappa \notin f(\Delta_3)$	$\kappa \notin f(\Delta_4)$	2 ρίζες
$\kappa>\frac{3}{4}$	$\kappa \in f(\Delta_1)$	$\kappa \in f(\Delta_2)$	$\kappa \in f(\Delta_3)$	$\kappa \notin f(\Delta_4)$	3 ρίζες

Επομένως το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) είναι:

$$L = \begin{cases} 0, & \text{αν } \kappa = 0 \\ 1, & \text{αν } \kappa \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{3}{4}\right) \\ 2, & \text{αν } \kappa = \frac{3}{4} \\ 3, & \text{αν } \kappa \in \left(\frac{3}{4}, +\infty\right) \end{cases}$$

46. **ΘΕΜΑ Β** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2009**

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = (xe^{x-\alpha})' = (x)'e^{x-\alpha} + x(e^{x-\alpha})' = e^{x-\alpha} + xe^{x-\alpha} = (x+1)e^{x-\alpha}.$$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(0,f\left(0\right)\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=ex$, άρα είναι:

$$f'(0)=e \Leftrightarrow e^{-\alpha}=e \Leftrightarrow -\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=-1.$$

B2. **i.** Για $\alpha=-1$ είναι

$$f(x)=xe^{x+1} \quad \text{και} \quad f'(x)=(x+1)e^{x+1}$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$.
Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το

$$f\left(-1\right)=-1.$$

ii. Έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(xe^{x+1})=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x-1}}\underset{\text{L'Hospital}}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x-1}}=\lim_{x\to-\infty}(-e^{x+1})=0$$

άρα

η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=0$ (άξονας $x'x$).

47. **ΘΕΜΑ Β** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2010**

B1. Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ με πρώτη παράγωγο:

$$f'(x)=3x^2-\frac{3}{x},\quad x>0$$

και δεύτερη παράγωγο:

$$f''(x)=6x+\frac{3}{x^2}>0,\ \text{για}\ \ x>0,$$

Άρα

η f είναι κυρτή στο $\left(0,+\infty\right)$.

B2. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2 - 3\ln x) = +\infty$$

άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα $y'y$.

B3. Έχουμε

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με

$$g(x) = f(x) - 2,\ \ x \in [1, e],\ \text{δηλαδή}$$

$$g(x) = x^3 - 3\ln x - 2,\ \ x \in [1, e]$$

- η g είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως πράξεις συνεχών
- $g(1) = 1^3 - 3\ln 1 - 2 = -1 < 0$ και $g(e) = e^3 - 3\ln e - 2 = e^3 - 5 > 0$,

άρα

$$g(1)\cdot g(e) < 0$$

Επομένως από **Θ. Bolzano** υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της g στο διάστημα $(1, e)$

και επειδή

$$g'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x} = \frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x} > 0,\ \ \text{για}\ \ x \in (1, e]$$

η g είναι γν. αύξουσα στο $[1, e]$, οπότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική, άρα η εξίσωση

$$f(x) = 2$$

έχει μοναδική ρίζα στο $(1, e)$.

48. **ΘΕΜΑ Β** **ΕΣΠΕΡ. 2011**

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με παράγωγο:

$$f'(x) = \left(x^2 + \frac{2}{x}\right)' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2} = \frac{2(x^3-1)}{x^2},\ \ x \neq 0.$$

Άρα είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↘	‖	↘		↗	

Επομένως η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στα $(-\infty, 0)$ και $(0,1]$, ενώ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[1,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** για $x=1$, την τιμή $f(1)=3$.

Β2. Έχουμε

$$f(2)=5 \quad \text{και} \quad f'(2)=\frac{7}{2}.$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(2,f(2))$ είναι:

$$(\varepsilon):\ y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon):\ y-5=\frac{7}{2}(x-2) \Leftrightarrow (\varepsilon):\ y=\frac{7}{2}x-2$$

Β3. Έχουμε

- $$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^2+\frac{2}{x}\right)=+\infty,$$

διότι

$$\lim_{x\to 0^+} x^2=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x}=+\infty$$

άρα η C_f έχει **κατακόρυφη ασύμπτωτη** την $x=0$ (ο άξονας y΄y)

- $$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\left(x^2+\frac{2}{x}\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+\frac{2}{x}}{x}=\lim_{x\to -\infty}\left(x+\frac{2}{x^2}\right)=-\infty,$$

άρα η C_f **δεν έχει ασύμπτωτη** στο $-\infty$

- $$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(x^2+\frac{2}{x}\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+\frac{2}{x}}{x}=\lim_{x\to +\infty}\left(x+\frac{2}{x^2}\right)=+\infty,$$

άρα η C_f **δεν έχει ασύμπτωτη** στο $+\infty$.

Β4. Έχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)-3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}+2x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1\ +\ 2x^3-3x^2}{x^2}}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+2x^3-3x^2}{x^4-x^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{6x^2-6x}{4x^3-2x}=0$$

49. **ΘΕΜΑ Β** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2011**

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$f'(x)=\left[x-\ln(e^x+1)\right]'=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}>0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

B2. Έχουμε

$$f''(x)=\left(\frac{1}{e^x+1}\right)'=-\frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}<0,$$

άρα η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

B3. *α΄ τρόπος*

Για κάθε $x>0$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,x]$, άρα από **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $x_0\in(0,x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(x_0)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)-(-\ln 2)}{x}=\frac{f(x)+\ln 2}{x}$$

$$0<x_0<x\overset{f'\downarrow}{\Rightarrow}f'(x_0)>f'(x)\Leftrightarrow\frac{f(x)+\ln 2}{x}>f'(x)\overset{x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$f(x)+\ln 2>xf'(x)\Leftrightarrow xf'(x)<f(x)+\ln 2$$

β΄τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με

$$g(x)=xf'(x)-f(x)-\ln 2,\ \ x\geq 0$$

Είναι

$$g'(x)=[xf'(x)-f(x)-\ell n2]'=f'(x)+xf''(x)-f'(x)$$
$$=xf''(x)<0,\ \text{για}\ \ x>0$$

άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Επομένως έχουμε:

$$x>0 \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} g(x)<g(0) \Leftrightarrow xf'(x)-f(x)-\ln 2<0 \Leftrightarrow xf'(x)<f(x)+\ln 2$$

50. **ΘΕΜΑ Β** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2013**

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο:

$$f'(x)=\left(\frac{x}{2}\ln^2 x+x\right)'=\frac{1}{2}\ln^2 x+\frac{x}{2}2\ln x\frac{1}{x}+1=\frac{1}{2}\ln^2 x+\ln x+1$$

$$=\frac{\ln^2 x+2\ln x+2}{2}=\frac{(\ln x+1)^2+1}{2}>0$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

$$f''(x)=\left(\frac{1}{2}\ln^2 x+\ln x+1\right)'=\ln x\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{\ln x+1}{x}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\ln x+1}{x}=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1} \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$$

Άρα είναι:

x	$-\infty$		$1/e$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$	

Επομένως η f είναι κοίλη στο $\left(0,\frac{1}{e}\right]$, ενώ είναι κυρτή στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

B2. Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και “1–1”, οπότε είναι:

$$f(x^4+2x)=f(4) \overset{f\text{"1–1"}}{\Leftrightarrow} x^4+2x=4 \Leftrightarrow x^4+2x-4=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με

$$g(x)=x^4+2x-4,\quad x>0.$$

- Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική
- $g(1)=-1<0$ και $g(2)=16>0$, οπότε είναι $g(1)\cdot g(2)<0$

Άρα από **Θ. Bolzano**

η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

Άρα

$$\alpha=1$$

Σημείωση: Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ είναι $g(x) > 0$, για κάθε $x > 2$, άρα η τιμή του α είναι μοναδική.
Επίσης είναι

$$g'(x) = 4x^3 + 2 > 0,\ \text{για}\ x > 0,$$

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, επομένως η ρίζα επίσης είναι μοναδική.

B3. Έχουμε

$$x\ln^2 x < 2 - 2x \Leftrightarrow \frac{x}{2}\ln^2 x < 1 - x \Leftrightarrow \frac{x}{2}\ln^2 x + x < 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x) < f(1) \underset{x>0}{\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}} 0 < x < 1$$

51. **ΘΕΜΑ Β** **ΕΣΠΕΡ. 2013**

B1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) είναι $\frac{1}{3}$,

άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$ που είναι κάθετη στην (ε) θα έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$f'(2) = -3.$$

Αλλά είναι

$$f'(x) = \left(\frac{4}{x-1} + \alpha x\right)' = \alpha - \frac{4}{(x-1)^2},\ \text{οπότε}$$

$$\boxed{f'(2) = -3 \Leftrightarrow \alpha - \frac{4}{(2-1)^2} = -3 \Leftrightarrow \alpha - 4 = -3 \Leftrightarrow \alpha = 1}$$

B2. i. Για $\alpha = 1$ είναι:

$$f(x) = \frac{4}{x-1} + x,\quad x \neq 1$$

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

Είναι

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 3$

- $f'(x)<0 \Leftrightarrow x^2-2x-3<0 \Leftrightarrow x\in(-1,1)\cup(1,3)$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στα $(-\infty,-1]$ και $[3,+\infty)$, ενώ είναι **γνησίως φθίνουσα** στα $[-1,1)$ και $(1,3]$.

Η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** το $f(-1)=-3$, ενώ παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** το $f(3)=5$.

ii. Κατακόρυφες ασύμπτωτες

Έχουμε

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{4}{x-1}+x\right)=+\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} x=1$

άρα η C_f έχει **κατακόρυφη ασύμπτωτη** την $x=1$.

Πλάγιες ασύμπτωτες στο $-\infty$

α΄ τρόπος

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x}=0$$

β΄ τρόπος

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{4}{x-1}+x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4}{x^2-x}+1\right)=1=\lambda$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4}{x-1}+x-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x}=0=\beta$

άρα η C_f έχει **πλάγια ασύμπτωτη** στο $-\infty$ την $y=x$.

Πλάγιες ασύμπτωτες στο $-\infty$

α΄ τρόπος

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$$

β΄ τρόπος

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{4}{x-1}+x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{x^2-x}+1\right)=1=\lambda$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{x-1}+x-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0=\beta$

άρα η C_f έχει **πλάγια ασύμπτωτη** στο $+\infty$ την $y=x$.

iii. Έχουμε

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)f(x)-6}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)\left(\dfrac{4}{x-1}+x\right)-6}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{4+x(x-1)-6}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{(x+1)}(x-1)}=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x-1}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$$

52. **ΘΕΜΑ Β** **ΕΣΠΕΡ. 2012**

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο:

$$f'(x)=\left(\frac{2}{x}+\alpha x^2+\beta\right)'=-\frac{2}{x^2}+2\alpha x<0,\ \text{αφού}\ \ \alpha<0\ \text{και}\ x>0,$$

άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0,+\infty)$.

Β2. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta=(0,+\infty)$.

Άρα είναι $f(\Delta)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)$.

Αλλά

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}+\alpha x^2+\beta\right)\overset{\alpha<0}{=}-\infty$

- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2}{x}+\alpha x^2+\beta\right)=+\infty$

Άρα

$$f(\Delta)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

Επειδή $0\in f(\Delta)$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει **μια ακριβώς λύση** στο $(0,+\infty)$.

B3. i. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{x}+\alpha x^2+\beta\right)=+\infty,$$

άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

ii.

- αν $\alpha>0$, τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+\alpha x^2+\beta\right)\overset{\alpha>0}{=}+\infty$
- αν $\alpha<0$, τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+\alpha x^2+\beta\right)\overset{\alpha<0}{=}-\infty$
- αν $\alpha=0$, τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+\beta\right)=\beta\in\mathbb{R}$

άρα η C_f έχει **οριζόντια ασύμπτωτη** την $y=\beta$ μόνο αν $\alpha=0$ και για κάθε $\beta\in\mathbb{R}$.

B4. Για να παρουσιάζει η f τοπικό ακρότατο στο $x_0=1$ την τιμή 7 πρέπει

$$f'(1)=0 \quad \text{και} \quad f(1)=7$$

$$f'(1)=0\Leftrightarrow -2+2\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=1$$

$$f(1)=7\Leftrightarrow 2+\alpha+\beta=7\overset{\alpha=1}{\Leftrightarrow}\beta=4$$

Για $\alpha=1$ και $\beta=4$ είναι:

$$f(x)=\frac{2}{x}+x^2+4$$

$$f'(x)=\left(\frac{2}{x}+x^2+4\right)'=-\frac{2}{x^2}+2x=\frac{2x^3-2}{x^2}=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	Τ.Ε	↗	

Από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο**.

53. **ΘΕΜΑ Β**

Β1. Πρέπει $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$, άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο A ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x)=\frac{(x-2)-(x+2)}{(x-2)^2}-e^x=-\left(\frac{4}{(x-2)^2}+e^x\right)<0,\quad x\neq 2$$

Το πρόσημο της f΄ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$

Δηλαδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(-\infty,2)$ και γνησίως φθίνουσα στο $A_2=(2,+\infty)$.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(-\infty,2)$, οπότε

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to 2^-}f(x),\lim_{x\to -\infty}f(x)\right)=(-\infty,1),$$

επειδή

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x+2}{x-2}-e^x\right)=-\infty-e^2=-\infty \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to -\infty}f(x)=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}-e^x\right)=1-0=1$$

- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2=(2,+\infty)$, οπότε

$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to +\infty}f(x),\lim_{x\to 2^+}f(x)\right)=(-\infty,+\infty),$$

επειδή

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}-e^x\right)=1-\infty=-\infty \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x+2}{x-2}-e^x\right)=+\infty-e^2=+\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

B2.

- Είναι $f(A_1)=(-\infty,1)$, οπότε επειδή $0\in f(A_1)$

  η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ρίζα τουλάχιστον στο $A_1=(-\infty,2)$ και

  λόγω μονοτονίας της συνάρτησης f, η ρίζα αυτή ειναι μοναδική.

- Είναι $f(A_2)=(-\infty,+\infty)$, οπότε επειδή $0\in f(A_2)$

  η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ρίζα τουλάχιστον στο $A_2=(2,+\infty)$ και

  λόγω μονοτονίας της συνάρτησης f, η ρίζα αυτή ειναι μοναδική.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

B3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x)=(e^{x}-1)(x-2)$$

διέρχεται από το σημείο $A(\alpha,4)$ με $\alpha\neq 2$, άρα είναι

$$g(\alpha)=4\Leftrightarrow 4=(e^{\alpha}-1)(\alpha-2)\overset{\alpha\neq 2}{\Leftrightarrow}\frac{4}{\alpha-2}=e^{\alpha}-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{\alpha-2}+1\ e^{\alpha}\Leftrightarrow\frac{4+\alpha-2}{\alpha-2}=e^{\alpha}\Leftrightarrow\frac{2+\alpha}{\alpha-2}=e^{\alpha}\Leftrightarrow f(\alpha)=0$$

Επομένως το α είναι ρίζα της f.

B4. Έστω $\alpha_1,\ \alpha_2$ οι ρίζες της f.

Τότε

$$f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=0.$$

Αλλά από το B3 ερώτημα είναι

$$g(\alpha_1)=4\quad\text{και}\quad g(\alpha_2)=4$$

οπότε $g(\alpha_1)=g(\alpha_2)$, επομένως η g δεν είναι “1–1”.

54. **ΘΕΜΑ Β** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2002**

B1. Η παράγωγος της συνάρτησης

$$h(x)=\frac{f(x)}{x^{2}}$$

είναι :

$$h'(x)=\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'=\frac{f'(x)\cdot x^2-f(x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{x\left(x\cdot f'(x)-2f(x)\right)}{x^4}=\frac{x^2}{x^4}=\frac{1}{x^2}>0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

B2. Είναι

$$h'(x)=\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'=\left(-\frac{1}{x}\right)'$$

άρα σύμφωνα με το πόρισμα των συνεπειών **Θ.Μ.Τ.** έχουμε

$$\frac{f(x)}{x^2}=-\frac{1}{x}+c \Leftrightarrow f(x)=-x+cx^2,\ x>0 \quad (1)$$

Για $x=1$, η σχέση (1) γίνεται

$$f(1)=-1+c \Leftrightarrow 0=-1+c \Leftrightarrow c=1$$

Επομένως

$$f(x)=x^2-x,\ x>0.$$

55. **ΘΕΜΑ Β** **study4exams**

B1. Έχουμε:

$$g'(x)=\left(x^3f(x)\right)'=3x^2f(x)+x^3f'(x)=3x^2f(x)+x^2\left(-3f(x)\right)=0$$

άρα

$$g'(x)=0,\ \text{για κάθε }\ x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση g είναι **σταθερή** σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, δηλαδή

υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2\in\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

$$g(x)=\begin{cases} c_1, & x>0 \\ c_2, & x<0 \end{cases}$$

Επειδή η f είναι άρτια, έχουμε

$$f(1)=2\Leftrightarrow f(-1)=2$$

οπότε

$$g(1)=1^3 2=2=c_1 \quad \text{και} \quad g(-1)=(-1)^3 2=-2=c_2$$

Από τα προηγούμενα έπεται ότι

$$g(x)=\begin{cases} 2, & x>0 \\ -2, & x<0 \end{cases}.$$

B2. Για $x>0$

$$g(x)=2 \Leftrightarrow x^3 f(x)=2 \Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{x^3}.$$

Για $x<0$

$$g(x)=-2 \Leftrightarrow x^3 f(x)=-2 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{2}{x^3}.$$

$$\text{Άρα } f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^3}, & x>0 \\ -\dfrac{2}{x^3}, & x<0 \end{cases}.$$

B3. Επειδή

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty,$$

έπεται ότι η ευθεία $x=0$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f.

Επίσης ισχύει

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x)=0,$$

άρα η ευθεία $y=0$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο

$+\infty$ και στο $-\infty$.

Επειδή έχουμε **οριζόντιες ασύμπτωτες** της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$, έτσι **δεν έχουμε πλάγιες ασύμπτωτες**.

56. **ΘΕΜΑ Β** **ΕΠΑΝ. ΕΣΠΕΡ. 2013**

B1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$2xf(x)+x^2(f'(x)-3)=-f'(x) \Leftrightarrow$$

$$(x^2)' f(x)+x^2 f'(x)-3x^2+f'(x)=0 \Leftrightarrow (x^2 f(x)-x^3+f(x))'=0$$

από συνέπειες **Θ.Μ.Τ.** είναι

$$x^2 f(x)-x^3+f(x)=c \quad (1).$$

Για $x=1$ στην σχέση (1) έχουμε:

$$f(1)-1+f(1)=c \Leftrightarrow c=0.$$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$x^2 f(x)-x^3+f(x)=0 \Leftrightarrow x^2 f(x)+f(x)=x^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)f(x)=x^3 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}}}$$

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{x^2+1}\right)'=\frac{3x^2(x^2+1)-(x^3)2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{3x^4+3x^2-2x^4}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}\geq 0$$

και το “=” ισχύει μόνο για $x=0$, άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

B2. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα **δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες**.

Επίσης είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3}=1=\lambda$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}=0=\beta$$

άρα η C_f έχει **πλάγια ασύμπτωτη** στο $-\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y=x$.

Ομοίως είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1=\lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}=0=\beta$$

άρα η C_f έχει **πλάγια ασύμπτωτη** στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y=x$.

B3. Έχουμε

$$f\left(5(x^2+1)^3-8\right)\leq f\left(8(x^2+1)^2\right)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}5(x^2+1)^3-8\leq 8(x^2+1)^2\Leftrightarrow$$

$$5(x^2+1)^3\leq 8(x^2+1)^2+8\Leftrightarrow 5(x^2+1)^3\leq 8\left[(x^2+1)^2+1\right]\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(x^2+1\right)^3}{\left(x^2+1\right)^2+1}\le\frac{8}{5}\Leftrightarrow f\left(x^2+1\right)\le f\left(2\right)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2+1\le 2\Leftrightarrow x^2\le 1\Leftrightarrow |x|\le 1\Leftrightarrow$$

$$\boxed{-1\le x\le 1}$$

B4. Έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{f'(x)}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^4+3x^2}{x^4+2x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^4\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{x^4\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}}=\sqrt{\frac{1+0}{1+0+0}}=1$$

Άρα είναι:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{f'(x)}-\kappa\right)=5\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}\sqrt{f'(x)}-\kappa=5\Leftrightarrow 1-\kappa=5\Leftrightarrow\kappa=-4}.$$

57. **ΘΕΜΑ Β** **ΟΜΟΓΕΝΩΝ 2015**

B1. Πολλαπλασιάζουμε την

$$f'(x)=2xe^{-x}-f(x)\quad \text{με}\quad e^x\quad \text{και για κάθε}\quad x\in\mathbb{R}$$

έχουμε

$$e^xf'(x)=2x-e^xf(x)\Leftrightarrow e^xf'(x)+e^xf(x)=2x\Leftrightarrow(e^xf(x))'=(x^2)'$$

επομένως είναι

$$e^xf(x)=x^2+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

Για $x=1$ έχουμε

$$ef(1)=1+c\Leftrightarrow e\cdot e^{-1}=1+c\Leftrightarrow 1=1+c\Leftrightarrow c=0$$

Άρα

$$e^xf(x)=x^2$$

Οπότε

$$f(x)=\frac{x^2}{e^x}\ .$$

B2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{(x^2)'e^x - x^2(e^x)'}{e^{2x}} = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{xe^x(2-x)}{e^{2x}} = \frac{x(2-x)}{e^x}$$

Λύνουμε την εξίσωση

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x(2-x)}{e^x} = 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} x(2-x) = 0$$

άρα $x=0$ ή $x=2$.

Οπότε κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας της f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [0, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_3 = [2, +\infty)$.

Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^2e^{-x}) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty,\ f(0) = 0,\ f(2) = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2},$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2e^{-x}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} \underset{D.L'H.}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \frac{2x}{e^x} \underset{D.L'H.}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0]$. Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0]$ είναι το

$$f(\Delta_1) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = [0, +\infty).$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [0, 2]$ επομένως είναι

$$f(\Delta_2) = [f(0), f(2)] = \left[0, \frac{4}{e^2}\right]$$

και είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_3 = [2, +\infty)$, άρα

$$f(\Delta_3) = (\lim_{x\to+\infty} f(x),\, f(2)] = \left(0,\, \frac{4}{e^2}\right].$$

Συνεπώς το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(R) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = [0, +\infty)$$

B3. Έχουμε:

$$x^2 = 2e^{x-2} \overset{:e^x}{\Leftrightarrow} \frac{x^2}{e^x} = \frac{2e^{x-2}}{e^x} \Leftrightarrow f(x) = 2e^{x-2-x} \Leftrightarrow f(x) = 2e^{-2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{e^2} \quad (1)$$

- Το $\frac{2}{e^2} \in f(\Delta_1) = [0, +\infty)$

άρα η εξίσωση (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $f(\Delta_1)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 0]$, η ρίζα είναι μοναδική.

- Το $\frac{2}{e^2} \in f(\Delta_2) = \left[0, \frac{4}{e^2}\right]$

άρα η εξίσωση (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $f(\Delta_2)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [0, 2]$, η ρίζα είναι μοναδική.

- Το $\frac{2}{e^2} \in f(\Delta_3) = \left(0, \frac{4}{e^2}\right]$

άρα η εξίσωση (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $f(\Delta_3)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_3 = [2, +\infty)$, η ρίζα είναι μοναδική.

Συνεπώς η εξίσωση (1) άρα και η ισοδύναμη της

$$x^2 = 2e^{x-2} \text{ έχει ακριβώς 3 ρίζες στο } R.$$

B4. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(-1, f(-1))$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon: y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y - e = -3e(x+1) \Leftrightarrow y = -3ex - 2e$$

αφού η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$

η εφαπτομένη της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$ βρίσκεται κάτω από τη C_f που σημαίνει ότι

$$-3ex - 2e \le f(x) \text{ για κάθε } x \le 0 \text{, άρα είναι}$$

$$f(x) + 3ex + 2e \ge 0 \quad \text{για κάθε } x \le 0$$

58. **Θ Ε Μ Α Β** **ΕΠΑΝ. ΕΣΠΕΡ. 2013**

B1. Έχουμε

$$\sqrt{x^2+1}\cdot f'(x)+\frac{xf(x)}{\sqrt{x^2+1}}-1=0\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2+1}\cdot f'(x)+\left(\sqrt{x^2+1}\right)'f(x)=1\Leftrightarrow\left(f(x)\sqrt{x^2+1}\right)'=(x)'\overset{\text{συνέπειες ΘΜΤ}}{\Rightarrow}$$

$$f(x)\sqrt{x^2+1}=x+c \quad (1)$$

Για $x=0$ στην (1) είναι $f(0)=c\overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow}c=0$

Άρα

$$f(x)\sqrt{x^2+1}=x\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\quad x\in\mathbb{R}}}$$

B2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}>0$$

άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

B3. Έχουμε

$$f\left(x^4+1\right)=f\left(3x^3+2x^2+3x\right)\underset{f\text{ "1-1"}}{\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}}x^4+1=3x^3+2x^2+3x\Leftrightarrow$$

$$x^4-3x^3-2x^2-3x+1=0$$

Θεωρούμε συνάρτηση φ, με

$$\varphi(x)=x^4-3x^3-2x^2-3x+1.$$

- η φ είναι συνεχής στα $[0,1]$ και $[1,4]$ ως πολυωνυμική
- $\varphi(0)=1>0$, $\varphi(1)=-6<0$ και $\varphi(4)=21>0$, οπότε

$$\varphi(0)\varphi(1)<0 \quad \text{και} \quad \varphi(1)\varphi(4)<0$$

Άρα από **Θεώρημα Bolzano** υπάρχουν:

ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_1)=0$

ένα τουλάχιστον $x_2 \in (1,4)$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_2)=0$

Β4. Έχουμε

$$\varphi'(x)=\left(x^4-3x^3-2x^2-3x+1\right)'=4x^3-9x^2-4x-3$$

- η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$
- $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$ από ερώτημα 3

Άρα από **Θ. Rolle**

υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (0,4)$, τέτοιο ώστε $\varphi'(\xi)=0$,

άρα

$$4\xi^3-9\xi^2-4\xi-3=0 \Leftrightarrow 4\xi^3-9\xi^2=4\xi+3$$

Επομένως η εξίσωση

$$4x^3-9x^2=4x+3$$

έχει **μια τουλάχιστον ρίζα** στο $(0,4)$.

59. **ΘΕΜΑ Β** **ΕΠΑΝ. ΕΣΠ. 2010**

Β1. Έχουμε

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$
- $f(\alpha)=5\beta>0$ και $f(\beta)=5\alpha<0$, άρα $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$

Επομένως από **Θ. Bolzano** υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα (α,β).

Β2. Είναι $\lambda_\varepsilon=\dfrac{1}{5}$, άρα για να είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ κάθετη στην ευθεία (ε), αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-5$.

1η λύση

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

- η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β)

Επομένως από **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{5\alpha-5\beta}{\beta-\alpha}=\frac{-5(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=-5$$

2η λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με

$$h(x)=f(x)+5x$$

- η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, ως άθροισμα συνεχών
- η h είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), με $h'(x)=f'(x)+5$
- $h(\alpha)=f(\alpha)+5\alpha=5\beta+5\alpha$ και $h(\beta)=f(\beta)+5\beta=5\alpha+5\beta$, οπότε είναι $h(\alpha)=h(\beta)$

Επομένως από **Θ. Rolle** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)+5=0\Leftrightarrow f'(\xi)=-5\,.$$

Β3. 1η λύση

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$
- $f(\beta)=5\alpha<\frac{5}{\alpha}(\alpha+\beta)<5\beta=f(\alpha)$, διότι $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$

Επομένως από **Θ. ενδιάμεσων τιμών** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε

$$f(\xi)=\frac{5}{2}(\alpha+\beta)$$

2η λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με

$$g(x)=f(x)-\frac{5}{2}(\alpha+\beta)$$

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$
- $g(\alpha)=f(\alpha)-\frac{5}{2}(\alpha+\beta)=5\beta-\frac{5}{2}(\alpha+\beta)=\frac{5}{2}(\beta-\alpha)>0$
  $g(\beta)=f(\beta)-\frac{5}{2}(\alpha+\beta)=5\alpha-\frac{5}{2}(\alpha+\beta)=\frac{5}{2}(\alpha+\beta)<0$

Επομένως από **Θ. Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε

$$g(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)-\frac{5}{2}(\alpha+\beta)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=\frac{5}{2}(\alpha+\beta)$$

60. **ΘΕΜΑ Β** **study4exams**

B1. Η συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ και
- παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$

Άρα σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$$

τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(3)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{3-\frac{1}{2}}=\frac{12-2}{\frac{5}{2}}=4.$$

Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda=f'(\xi)=4,$$

άρα είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=4x+2$.

B2. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B(\gamma, f(\gamma))$ έχει εξίσωση:

$$y-f(\gamma)=f'(\gamma)(x-\gamma)$$

και αφού διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$ έχουμε

$$-f(\gamma)=f'(\gamma)\cdot(-\gamma) \Leftrightarrow f(\gamma)=\gamma\cdot f'(\gamma) \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}, \quad x\in\left[\frac{1}{2}, 3\right].$$

Η g είναι

- συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και
- παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

- $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$ και $g(3)=\frac{12}{3}=4$, άρα $g\left(\frac{1}{2}\right)=g(3)$,

που σημαίνει ότι εφαρμόζεται το **θεώρημα Rolle** για τη g στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$.

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$

τέτοιο, ώστε

$$g'(\gamma)=0\Leftrightarrow\frac{f'(\gamma)\gamma-f(\gamma)\cdot 1}{\gamma^2}=0\Leftrightarrow f(\gamma)=\gamma f'(\gamma)$$

Άρα αποδείχτηκε η (1), συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$$

τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $B(\gamma,f(\gamma))$ να διέρχεται από το $O(0,0)$.

61. **ΘΕΜΑ Β**

Β1. Έστω

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ με } x_1<x_2<x_3$$

οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (α,β), άρα $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0 \quad (1)$

Είναι προφανές ότι στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η συνάρτηση φ με

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{x}$$

ικανοποιεί τις απαιτήσεις του **Θ. Rolle,** αφού

- η φ είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων
- η φ είναι παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με $\varphi'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$
- $\varphi(x_1)=\frac{f(x_1)}{x_1}\overset{(1)}{=}0$ και $\varphi(x_2)=\frac{f(x_2)}{x_2}\overset{(1)}{=}0$, άρα $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$

Συνεπώς η εξίσωση $\varphi'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο (x_1,x_2), δηλαδή υπάρχει

$$\xi_1\in(x_1,x_2)$$

τέτοιο ώστε

$$\varphi'(\xi_1)=0 \quad (2)$$

Με ανάλογο τρόπο διαπιστώνουμε ότι υπάρχει

$$\xi_2 \in (x_2, x_3)$$

τέτοιο ώστε

$$\varphi'(\xi_2)=0 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της φ στα ξ_1, ξ_2 είναι παράλληλες προς τον άξονα των τετμημένων, άρα υπάρχουν τουλάχιστον δύο εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης φ, οι οποίες είναι παράλληλες προς τον άξονα των τετμημένων.

B2. Είναι προφανές λόγω των (2) και (3) ότι για τη συνάρτηση

$$\varphi' : [\xi_1, \xi_2] \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \varphi'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

ικανοποιούνται οι απαιτήσεις του **Θεωρήματος Rolle,** επειδή:

- η φ' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ ως παραγωγίσιμη
- η φ' είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2)
- $\varphi'(\xi_1)=\varphi'(\xi_2)$

και συνεπώς η εξίσωση

$$\varphi''(x)=0$$

δηλαδή η

$$\frac{x^2f''(x)-2xf'(x)\ +\ 2f(x)}{x^3}=0 \quad \text{ή} \quad x^2f''(x)-2xf'(x)+2f(x)=0$$

έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \beta)$.

62. **ΘΕΜΑ Β** **ΕΣΠΕΡ. 2011**

B1. Για την συνάρτηση f ισχύει:

$$f(x)+xf'(x)=\eta\mu x \quad (1)$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$g'(x)=\left(xf(x)+\sigma\upsilon\nu x\right)'=f(x)+xf'(x)-\eta\mu x\overset{(1)}{=}0$$

Άρα η συνάρτηση g είναι **σταθερή** στο $\mathbb{R}$.

B2. Η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, άρα είναι $g(x)=c$.

Για $x=0$, είναι $g(0)=c \Leftrightarrow c=1$, άρα

$$g(x)=1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Επομένως

$$xf(x)+\text{συν}x=1 \Leftrightarrow xf(x)=1-\text{συν}x$$

Για $x\neq 0$ είναι

$$\boxed{\mathbf{f(x)=\frac{1-\text{συν}x}{x}}}$$

B3. Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με

$$h(x)=x\text{ημ}x+\text{συν}x-1$$

- Η h είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών

- $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\text{ημ}\frac{\pi}{2}+\text{συν}\frac{\pi}{2}-1>0$
- $h\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}\text{ημ}\frac{3\pi}{2}+\text{συν}\frac{3\pi}{2}-1=-\frac{3\pi}{2}-1<0$

Από **Θ. Bolzano** η εξίσωση $h(x)=0$ έχει **μια τουλάχιστον ρίζα** στο $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

B3. Θεωρούμε τη συνάρτηση φ, με

$$\varphi(x)=x\text{ημ}x+\text{συν}x-1-\frac{2}{\pi^2}x^2$$

- Η φ είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ ως πράξεις συνεχών

- $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\text{ημ}\frac{\pi}{2}+\text{συν}\frac{\pi}{2}-1-\frac{1}{2}=\frac{\pi-3}{2}>0$

  $\varphi(\pi)=\pi\text{ημ}\pi+\text{συν}\pi-1-2=-4<0$,

οπότε

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\varphi(\pi)<0$$

Από **Θ. Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \subseteq (0, \pi)$,

τέτοιο ώστε

$$\varphi(\xi) = 0 \quad \text{ή}$$

$$\boxed{\xi\eta\mu\xi + \sigma\upsilon\nu\xi = 1 + \frac{2}{\pi^2}\xi^2}$$

63. **ΘΕΜΑ Β** **ΕΣΠΕΡ. 2012**

B1. Θεωρούμε συνάρτηση φ, με

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + \eta\mu x}{x^2 - x}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0,1\}.$$

Είναι: $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = 2$ και

$$f(x) + \eta\mu x = \varphi(x)(x^2 - x) \Leftrightarrow f(x) = -\eta\mu x + \varphi(x)(x^2 - x) \quad (1)$$

- $$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 0}\left[-\eta\mu x + \varphi(x)(x^2 - x)\right] =$$
$$= \lim_{x\to 0}(-\eta\mu x) + \lim_{x\to 0}\varphi(x)\lim_{x\to 0}(x^2 - x) = 0 + 2\cdot 0 = 0$$

- $$f(1) = f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu x + \varphi(x)\cdot x\cdot(x-1)}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\left[-\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varphi(x)\cdot x\cdot(x-1)}{x}\right] =$$
$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} + \lim_{x\to 0}\varphi(x)\lim_{x\to 0}(x-1) = -3$$

B2. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$g'(x) = f'(x) + 2\alpha(x+1)$$

Οπότε είναι:

$$g(0) = f(0) + \alpha = 0 + \alpha = \alpha, \qquad g(1) = f(1) + 4\alpha = 4\alpha - 3$$

Για να ικανοποιεί η g τις υποθέσεις του **Θ. Rolle** πρέπει

$$4\alpha - 3 = \alpha \Leftrightarrow 3\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Για $\alpha = 1$ είναι:

$$g(x)=f(x)+(x+1)^2$$
$$g'(x)=f'(x)+2(x+1)$$
$$g''(x)=f''(x)+2$$

B3. • Από το **Θ. Rolle** με τη συνάρτηση g, προκύπτει ότι η $g'(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

• $g''(x)=f''(x)+2>0$, διότι $f''(x)>-2$,

άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα άρα η $g'(x)=0$ έχει μια το πολύ ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως υπάρχει ένα μοναδικό $\xi\in(0,1)$, τέτοιο ώστε

$$g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)+2(\xi+1)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=-2(\xi+1)$$

B4. Το ξ είναι η μοναδική ρίζα της g', οπότε είναι

$$g'(x)>0\Leftrightarrow g'(x)>g'(0)\overset{g'\uparrow}{\Leftrightarrow}x>0$$

x	0	ξ	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=\xi$.

64. **ΘΕΜΑ Β** **ΕΣΠΕΡ. 2013**

B1. Έχουμε

$$f'(x)=\left(x^2+x\sqrt{x^2+1}\right)'=2x+\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{2x\sqrt{x^2+1}+x^2+1+x^2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}>0$$

άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

B2. Έχουμε

$$f\left(x^3-x+1\right)=f(2)\overset{f\text{ "1-1"}}{\Leftrightarrow}x^3-x+1=2\Leftrightarrow x^3-x-1=0.$$

Θεωρούμε $Q(x)=x^3-x-1$

- η Q είναι συνεχής στο $[1,3]$ ως πολυωνυμική
- $Q(1)=1^3-1-1=-1<0$ και $Q(3)=3^3-3-1=23>0$, οπότε είναι

$$Q(1)\cdot Q(3)<0$$

Άρα από **Θ. Bolzano** η Q έχει **μια τουλάχιστον ρίζα** στο $(1,3)$.

B3. Η f είναι παραγωγίσιμη στα $[1,2]$, $[2,3]$ και $[1,3]$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** σε καθένα από τα παραπάνω διαστήματα.

Από **Θ.Μ.Τ.** με την f στα $[1,2]$, $[2,3]$ και $[1,3]$ έχουμε ότι υπάρχουν:

- $\xi_1\in(1,2)$ με $f'(\xi_1)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1)$
- $\xi_2\in(2,3)$ με $f'(\xi_2)=\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}=f(3)-f(2)$
- $\xi_3\in(1,3)$ με $f'(\xi_3)=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{f(3)-f(1)}{2}$

Επομένως έχουμε:

$$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=f(3)-f(2)+f(2)-f(1)=f(3)-f(1)=2f'(\xi_3).$$

65. **ΘΕΜΑ Β**

B1. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$ έχει εξίσωση

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Πρέπει, επομένως, να βρούμε τα

$$f(x_0) \quad \text{και} \quad f'(x_0).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι

$$f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x).$$

Θέτουμε

$$g(x)=\frac{f(x)-2x+5}{x-x_0} \text{ με } x\neq x_0, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=0 \quad \text{και} \quad f(x)=(x-x_0)\cdot g(x)+2x-5 \quad (1)$$

Οπότε είναι

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=2x_0-5 \quad \text{και συνεπώς} \quad f(x_0)=2x_0-5 \qquad (2)$$

Για την $f'(x_0)$ έχουμε:

Με $x \neq x_0$ είναι

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{(1),(2)}{=} \frac{(x-x_0)\cdot g(x)+2x-5-(2x_0-5)}{x-x_0} = g(x)+2.$$

άρα

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left[g(x)+2\right]=\lim_{x\to x_0} g(x)+2=2.$$

Επομένως η εφαπτομένη έχει εξίσωση

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-(2x_0-5)=2(x-x_0)$$
$$\Leftrightarrow y-2x_0+5=2x-2x_0 \Leftrightarrow y=2x-5.$$

B2. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$f(x)=x-2 \Leftrightarrow f(x)-x+2=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(x_0,3)$.

Έστω η συνάρτηση σ με

$$\sigma(x)=f(x)-x+2 \text{ ορισμένη στο } [x_0,3].$$

- Η σ είναι συνεχής στο $[x_0,3]$
- $\sigma(x_0)=f(x_0)-x_0+2 \overset{(2)}{=} 2x_0-5-x_0+2=x_0-3<0$ και
  $\sigma(3)=f(3)-1=5-1=4>0.$

Επομένως από το **θεώρημα Bolzano** προκύπτει το ζητούμενο, δηλαδή ότι η ευθεία με εξίσωση $y=x-2$ έχει με τη γραφική παράσταση της f ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(x_0,3)$.

66. **ΘΕΜΑ Β** **ΕΠΑΝ. ΕΣΠΕΡ. 2012**

B1. Έχουμε

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^3+\alpha)=1+\alpha\\&\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-\beta)^2=(1-\beta)^2\\&f(1)=(1-\beta)^2\end{aligned}\right\} \underset{\text{στο } x_0=1}{\overset{\text{f συνεχής}}{\Longrightarrow}} (1-\beta)^2=1+\alpha \qquad (1)$$

$$(1) \overset{(1-\beta)^2\geq 0}{\Longrightarrow} 1+\alpha\geq 0 \Leftrightarrow \alpha\geq -1$$

$$(1)\Rightarrow \cancel{1}-2\beta + \beta^2=\cancel{1}+\alpha \Leftrightarrow \beta^2-2\beta=\alpha \quad (2)$$

B2. Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f \text{ συνεχής στο } [-1,1) \text{ ως πολυωνυμική} \\ \bullet\ f \text{ συνεχής στο } x_0=1 \text{ από υπόθεση}\end{array}\right\}\Rightarrow f \text{ συνεχής στο } [-1,1]$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f(-1)=\ \alpha-1\le 0 \\ \bullet\ f(1)=\ (1-\beta)^2\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow f(-1)\cdot f(1)\le 0$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $f(-1)\cdot f(1)<0$, τότε από **Θ. Bolzano**, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$.
- Αν $f(-1)\cdot f(1)=0$, τότε $f(-1)=0$ ή $f(1)=0$.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[-1,1]$.

B3. Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(x^3+\alpha)-(1-\beta)^2}{x-1}\overset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^3+\cancel{\alpha}-1-\cancel{\alpha}}{x-1} \\ \qquad =\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^3-1}{x-1}\underset{DL'H}{=}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{3x^2}{1}=3 \\ \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-\beta)^2-(1-\beta)^2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x-\beta+1-\beta)}{\cancel{x-1}} \\ \qquad =\lim\limits_{x\to1^+}(x-2\beta+1)=2-2\beta\end{array}\right\}\underset{\text{στο } x_0=1}{\overset{f \text{ παρ/μη}}{\Longrightarrow}}$$

$$3=2-2\beta\Leftrightarrow 2\beta=-1\Leftrightarrow \beta=-\frac{1}{2}$$

$$(2)\overset{\beta=-\frac{1}{2}}{\Rightarrow}\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)=\alpha\Leftrightarrow \frac{1}{4}+1=\alpha\Leftrightarrow \alpha=\frac{5}{4}$$

B3. Για $\alpha=\dfrac{5}{4}$ και $\beta=-\dfrac{1}{2}$ έχουμε:

$$f(x)=\begin{cases}x^3+\dfrac{5}{4}, & x<1\\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2, & x\ge 1\end{cases} \quad \text{και} \quad f'(x)=\begin{cases}3x^2, & x<1\\ 2x+1, & x\ge 1\end{cases}$$

Άρα η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι:

$$(\varepsilon):\ y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow(\varepsilon):\ y-\frac{9}{4}=3(x-1)\Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon):\ y-\frac{9}{4}=3x-3\Leftrightarrow(\varepsilon):\ y=3x-\frac{3}{4}$$

67. **Θ Ε Μ Α Β** **ΕΠΑΝ. ΕΣΠ. 2012**

Β1. Έχουμε

$$g(x)=\frac{1}{1-x^2}f(x),\ \text{για κάθε}\ \ x\in(-1,1)\quad(1)$$

- $(1)\overset{x=0}{\Rightarrow}g(0)=\dfrac{1}{1-0^2}f(0)=f(0)=-3$

άρα οι C_f, C_g έχουν κοινό σημείο το $A(0,-3)$.

- Από την (1) προκύπτει ότι η g είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων,

άρα παραγωγίζοντας την (1) έχουμε

$$g'(x)=\left[\frac{f(x)}{1-x^2}\right]'=\frac{f'(x)(1-x^2)-2xf(x)}{(1-x^2)^2}$$

και για $x=0$ προκύπτει $g'(0)=f'(0)$ άρα οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $A(0,-3)$.

Β2. Θεωρούμε συνάρτηση φ, με

$$\varphi(x)=g(x)-\beta x+3,\quad x\in(-1,1).$$

Είναι

$$g(x)\le\beta x-3\Leftrightarrow\varphi(x)\le 0=\varphi(0).$$

- Η φ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=0$.
- Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με $\varphi'(x)=g'(x)-\beta$
- Το $x_0=0$ είναι εσωτερικό σημείο του $(-1,1)$.

Από **Θ. Fermat** ισχύει ότι

$$\varphi'(0)=0\Leftrightarrow g'(0)=\beta.$$

Η **κοινή εφαπτομένη** στο κοινό τους σημείο $A(0,-3)$ είναι:

$$\boxed{(\varepsilon):\ y-g(0)=g'(0)(x-0)\Leftrightarrow(\varepsilon):\ y-(-3)=\beta x\Leftrightarrow(\varepsilon):\ y=\beta x-3}$$

B3. Η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα η εξίσωση $f'(x)=\beta$ έχει μια το πολύ ρίζα στο $(-1,1)$.

Όμως

$$f'(0)=g'(0)=\beta,$$

άρα η εξίσωση $f'(x)=\beta$ έχει **μοναδική ρίζα** στο $(-1,1)$ το 0.

B4. Η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα η f είναι **κυρτή** στο $(-1,1)$.

Η C_f βρίσκεται **πάνω** από την εφαπτομένη της (ε) με **εξαίρεση** το σημείο επαφής $A(0,-3)$.

Άρα

$$\boxed{f(x)\geq\beta x-3},\ \text{για κάθε}\ x\in(-1,1).$$

68. **ΘΕΜΑ Β** **study4exams**

B1. Παραγωγίζουμε τη σχέση

$$f\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)=2e^x$$

και παίρνουμε

$$f'\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)'=\left(2e^x\right)'\Leftrightarrow f'\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)\left(e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)=2e^x\quad(1)$$

Για $x=0$ η σχέση (1) μας δίνει

$$f'(0)=2.$$

B2. Για $x=0$ η σχέση

$$f\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)=2e^x$$

γίνεται

$$f(0)=2.$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(0,f(0))$ είναι:

$$\boxed{\varepsilon:\ y-2=2(x-0)\Leftrightarrow\varepsilon:\ y=2x+2}$$

B3. Η τετμημένη x του σημείου είναι συνάρτηση του χρόνου t και

$$x'(t)=2\ \text{cm}/\text{sec},$$

οπότε και η τεταγμένη του y του σημείου θα είναι συνάρτηση του χρόνου t και θα ισχύει

$$y(t)=2x(t)+2$$

οπότε παραγωγίζουμε και έχουμε

$$\boxed{\mathbf{y'(t)=2x'(t)=4\ cm/sec}}$$

69. **ΘΕΜΑ Β** **ΕΠΑΝ. ΕΣΠ. 2011**

Β1. Είναι $x'(t)=16 \Leftrightarrow x'(t)=(16t)'$, $t\geq 0$. Επομένως από συνέπειες **Θ.Μ.Τ.** είναι

$$x(t)=16t+c,\ \ t\geq 0.$$

Για $x=0$ είναι $x(0)=0 \Leftrightarrow c=0$, άρα

$$x(t)=16t,\ \ t\geq 0.$$

Β2. Παρατήρηση: Έπρεπε να εξηγηθεί γιατί ο παρατηρητής χάνει την οπτική επαφή με το κινητό στο A.

Έστω

$$f(x)=\sqrt{x}\,,\ \ x\geq 0\,,$$

οπότε είναι

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,,\ \ x>0\,.$$

Η εφαπτομένη (ε) της C_f που διέρχεται από το σημείο $\Pi(0,1)$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon):\ y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\ \Leftrightarrow (\varepsilon):\ y-\sqrt{x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)\,,$$

όπου $A(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής.

Αλλά $\Pi\in C_f$, άρα είναι

$$1-\sqrt{x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(-x_0)\Leftrightarrow 2\sqrt{x_0}-2x_0=-x_0\Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x_0}=x_0\Leftrightarrow 4x_0=x_0^2\Leftrightarrow x_0=0\quad ή\quad x_0=4.$$

Για $x_0=4\Rightarrow y_0=2$, άρα $A(4,\ 2)$, οπότε

$$x(t_0)=4\Leftrightarrow 16t_0=4\Leftrightarrow t_0=\frac{1}{4}\ \min\ \ ή\ \ t_0=15\ \sec$$

Επομένως η οπτική επαφή διαρκεί 15 δευτερόλεπτα.

B3. Είναι

$$y(t)=\sqrt{x(t)}, \text{ άρα } y'(t)=\left(\sqrt{x(t)}\right)'=\frac{x'(t)}{2\sqrt{x(t)}}=\frac{16}{2\sqrt{16t}}=\frac{2}{\sqrt{t}}$$

Αλλά τη χρονική στιγμή t_0 ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του κινητού είναι 4 m/min, άρα έχουμε:

$$y'(t_0)=4 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{t_0}}=4 \Leftrightarrow \sqrt{t_0}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow t_0=\frac{1}{4}$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι 4 m/min τη χρονική στιγμή

$$t_0=\frac{1}{4}\text{ min} \quad \text{ή} \quad t_0=15 \text{ sec}.$$

B4. Είναι

$$M(x,y)\to M\left(x, \sqrt{x}\right)\to M\left(16t, 4\sqrt{t}\right)$$

Άρα η απόσταση $\mathbf{d=(\Pi M)}$ του παρατηρητή από το κινητό είναι

$$d(t)=(\Pi M)=\sqrt{(16-0)^2+(4\sqrt{t}-1)^2}=\sqrt{256t^2+16t-8\sqrt{t}+1}$$

$$d'(t)=\left(\sqrt{256t^2+16t-8\sqrt{t}+1}\right)'=\frac{256t+8-\frac{2}{\sqrt{t}}}{\sqrt{256t^2+16t-8\sqrt{t}+1}}$$

Θεωρούμε συνάρτηση g με $g(t)=256t+8-\frac{2}{\sqrt{t}}$, $t>0$, οπότε

$g'(t)=256t+\frac{1}{t\sqrt{t}}>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

α΄ τρόπος

- Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{64},\frac{1}{4}\right]$ ως πράξεις συνεχών
  - $g\left(\frac{1}{64}\right)=4+8-16=-4<0$
  - $g\left(\frac{1}{4}\right)=64+8-4=68>0$

Από **Θ. Bolzano** η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα t_0 στο $\left(\frac{1}{64}, \frac{1}{4}\right) \subseteq \left(0, \frac{1}{4}\right)$ και επειδή g γνησίως αύξουσα, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

β΄ τρόπος

- Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta = \left(0, \frac{1}{4}\right]$

  - $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = \lim\limits_{t\to 0^+}\left(256t + 8 - \frac{2}{\sqrt{t}}\right) = -\infty$
  - $g\left(\frac{1}{4}\right) = 64 + 8 - 4 = 68$

Άρα $g(\Delta) = (-\infty,\ 68]$.

Είναι $0 \in (-\infty, 68]$, άρα η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ και επειδή g γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

$$d'(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(t_0) \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} x > t_0$$

x	0		t_0		$+\infty$
$d'(x)$		$-$	0	$+$	
$d(x)$		$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	

Η d είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, t_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[t_0, +\infty)$.

Η απόσταση d γίνεται ελάχιστη τη χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$.

70. **ΘΕΜΑ Β**

Β1. Είναι

$$f(t) = 2f'(t) \Leftrightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{2},$$

επομένως

$$[\ln f(t)]' = \left(\frac{1}{2}t\right)'$$

Άρα

$$\ln f(t)=\frac{1}{2}t+c \Leftrightarrow f(t)=e^{\frac{1}{2}t+c} \quad (1)$$

Επειδή η αρχική τιμή του προϊόντος είναι **5€** έχουμε $f(0)=5$.

Η σχέση (1) για $t=0$:

$$f(0)=e^{\frac{1}{2}\cdot 0+c} \Leftrightarrow f(0)=e^{c} \text{ , άρα } e^{c}=5$$

Επομένως είναι

$$f(t)=e^{\frac{1}{2}t+c}=e^{\frac{1}{2}t}\cdot e^{c}=5\cdot e^{\frac{t}{2}},\ t\in[0,3].$$

B2. Η τιμή του προϊόντος θα τριπλασιαστεί τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία

$$f(t_0)=3f(0).$$

Άρα έχουμε

$$\boxed{\mathbf{f(t_0)=3f(0)\Leftrightarrow 5\cdot e^{\frac{t_0}{2}}=3\cdot 5\Leftrightarrow e^{\frac{t_0}{2}}=3\Leftrightarrow \frac{t_0}{2}=\ln 3\Leftrightarrow t_0=\ 2\ln 3}}$$

B3.

- Η f είναι συνεχής στο $[0,3]$,
- $f(0)=5$ και $f(3)=5\cdot e^{\frac{3}{2}}$, δηλαδή $f(0)\neq f(3)$

Σύμφωνα με το **Θεώρημα των Ενδιάμεσων Τιμών** η f θα παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ του $f(0)=5$ και $f(3)=5\cdot e^{\frac{3}{2}}$.

Επειδή

$$5<18<e^{\frac{3}{2}}$$

η f θα παίρνει την τιμή 18 δηλαδή θα υπάρχει

$$t_0\in(0,3)$$

τέτοιο ώστε

$$f(t_0)=18.$$

71. **ΘΕΜΑ Β** **ΕΠΑΝ. 2000**

B1. Η τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά είναι:

$$P(0)=4+\frac{0-6}{0^2+\frac{25}{4}}=4-\frac{6}{\frac{25}{4}}=4-\frac{24}{25}=\frac{100-24}{25}=\frac{76}{25}=3{,}04\,.$$

Άρα η τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά είναι 3,04 χιλιάδες δραχμές δηλαδή 3.040 δραχμές.

B2. Είναι

$$P'(t)=\frac{t^2+\frac{25}{4}-(t-6)2t}{\left(t^2+\frac{25}{4}\right)^2}=\frac{t^2+\frac{25}{4}-2t^2+12t}{\left(t^2+\frac{25}{4}\right)^2}=\frac{-t^2+12t+\frac{25}{4}}{\left(t^2+\frac{25}{4}\right)^2}\,.$$

$$P'(t)=0\Rightarrow -t^2+12t+\frac{25}{4}=0\Rightarrow t=-\frac{1}{2}\ \text{ ή }\ t=\frac{25}{2}\,.$$

Σύμφωνα με τον επόμενο πίνακα και με τον περιορισμό ότι $t\geq 0$, έχουμε:

t	0		$25/2$		$+\infty$
$P'(t)$		$+$	0	$-$	
$P(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Οπότε συμπεραίνουμε ότι το χρονικό διάστημα, στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται είναι για $t\in\left[0,\frac{25}{2}\right]$.

B3. Η συνάρτηση είναι:

- γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{25}{2}\right]$ και
- γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{25}{2},+\infty\right]$

άρα η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη όταν

$$t=\frac{25}{2}\ \text{μήνες.}$$

B4. Είναι

$$\lim_{t\to+\infty}P(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(4+\frac{t-6}{t^2+\frac{25}{4}}\right)=4+\lim_{t\to+\infty}\frac{t-6}{t^2+\frac{25}{4}}=4+\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{t^2}=4+0=4$$

Επομένως η τιμή του προϊόντος μειώνεται μετά από τους πρώτους

$$\frac{25}{2}=12{,}5\ \text{ μήνες και}$$

δεν μπορεί να γίνει μικρότερη από 4 χιλιάδες δραχμές,
άρα είναι πάντα μεγαλύτερη από την αρχική τιμή του προϊόντος (3.040 δραχμές).

72. **ΘΕΜΑ Β** **2000**

B1. Επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στη θέση 6 (το οποίο είναι εσωτερικό σημείο) το 15 και είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty]$ θα έχουμε

$$f'(6)=0 \quad \text{και} \quad f(6)=15.$$

Για κάθε $t\ge 0$ έχουμε :

$$f(t)=\frac{\beta^2\alpha t}{\beta^2+t^2} \quad \text{και}$$

$$f'(t)=\beta^2\alpha\cdot\left(\frac{t}{\beta^2+t^2}\right)'=\beta^2\alpha\cdot\frac{(t)'(\beta^2+t^2)-t(\beta^2+t^2)'}{(\beta^2+t^2)^2}=\beta^2\alpha\cdot\frac{\beta^2+t^2-2t^2}{(\beta^2+t^2)^2}=\beta^2\alpha\cdot\frac{\beta^2-t^2}{(\beta^2+t^2)^2}$$

Επομένως (α και β θετικοί αριθμοί) :

- $$f'(6)=0\Leftrightarrow\frac{\beta^2-6^2}{(\beta^2+6^2)^2}=0\Leftrightarrow\beta=6$$
- $$f(6)=15\Leftrightarrow\frac{36\alpha\cdot 6}{36+36}=15\Leftrightarrow\alpha=5 \ .$$

B2. Είναι (για $\alpha=5$ και $\beta=6$)

$$f(t)=\frac{\beta^2\alpha t}{\beta^2+t^2}=\frac{180t}{36+t^2},\ t\ge 0$$

Η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική , όταν

$$f(t)\ge 12\Leftrightarrow\frac{180t}{36+t^2}\ge 12\Leftrightarrow t^2-15t+36\le 0 \ \Leftrightarrow\ t\in[3,12].$$

73. **ΘΕΜΑ Β** **ΕΠΑΝ. 2007**

B1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο:

$$f'(x)=e^x-\frac{e}{x}=\frac{xe^x-e}{x}.$$

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=xe^x-e,\ \ x>0$, οπότε είναι:

$$h'(x)=xe^x+e^x>0\ ,$$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $h(1)=e-e=0$, οπότε για

$$x>1 \overset{h \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} h(x)>h(1)=0.$$

Συνεπώς και $f'(x)>0$ για $x>1$,

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Γ2. Είναι:

- Για $0<x<1 \overset{h \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} h(x)<h(1)=0$, οπότε $f'(x)<0$,

  άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

- Για $x>1 \overset{h \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} h(x)>h(1)=0$, οπότε $f'(x)>0$,

  άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(1)=e$	$\nearrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών παρατηρούμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$. Άρα για κάθε $x>0$ είναι:

$$f(x)\ge f(1)\Leftrightarrow f(x)\ge e-e\ln1\Leftrightarrow f(x)\ge e.$$

74. **ΘΕΜΑ Β**

Β1. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=G(x)+\frac{e^{2x}}{2}-x.$$

Η συνάρτηση f είναι

- παραγωγίσιμη στο (α,β) ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων
- συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)=G(\alpha)+\dfrac{e^{2\alpha}}{2}-\alpha,\qquad f(\beta)=G(\beta)+\dfrac{e^{2\beta}}{2}-\beta.$

Αφαιρώντας τις δυο αυτές σχέσεις έχουμε:

$$\begin{aligned} f(\alpha)-f(\beta) &= G(\alpha)+\frac{e^{2\alpha}}{2}-\alpha-G(\beta)-\frac{e^{2\beta}}{2}+\beta \\ &= [G(\alpha)-G(\beta)+\beta-\alpha]+\frac{e^{2\alpha}-e^{2\beta}}{2} \\ &= \frac{e^{2\beta}-e^{2\alpha}}{2}+\frac{e^{2\alpha}-e^{2\beta}}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

οπότε $f(\alpha)=f(\beta)$

Άρα σύμφωνα με το **Θεώρημα Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi\in(\alpha,\beta) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$f'(\xi)=0 \quad (1).$$

Αλλά

$$f'(x)=G'(x)+\frac{e^{2x}(2x)'}{2}-1 \Leftrightarrow f'(x)=g(x)+e^{2x}-1.$$

Η παραπάνω σχέση για $x=\xi$ δίνει:

$$f'(\xi)=g(\xi)+e^{2\xi}-1 \overset{(1)}{\Rightarrow} 0=g(\xi)+e^{2\xi}-1 \Rightarrow g(\xi)+e^{2\xi}=1$$

B2. Έστω

$$h(x)=g(x)+e^{2x}-1.$$

Έστω

$$x_1,x_2\in(\alpha,\beta) \text{ με } x_1<x_2$$

οπότε

$$e^{2x_1}<e^{2x_2} \qquad (\text{ επειδή η } e^{2x} \text{ είναι γνησίως αύξουσα})$$

Επίσης $g(x_1)<g(x_2)$ (από την υπόθεση)

Προσθέτοντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$\begin{aligned} &e^{2x_1}+g(x_1)<e^{2x_2}+g(x_2) \\ &e^{2x_1}+g(x_1)-1<e^{2x_2}+g(x_2)-1 \\ &h(x_1)<h(x_2) \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση h είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[\alpha,\beta]$, οπότε η εξίσωση

$$g(x)+e^{2x}=1$$

έχει **μοναδική λύση** στο (α,β).

75. **ΘΕΜΑ Β**

Β1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=\alpha \Leftrightarrow [f(x)g(x)]'=(\alpha x)',$$

οπότε είναι:

$$f(x)g(x)=\alpha x+c \quad (1)$$

Οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν κοινό σημείο το $A(1,2)$, άρα

$$f(1)=g(1)=2 \quad (2).$$

Επίσης η εξίσωση $f(x)=0$ έχει λύση το 0, άρα

$$f(0)=0 \quad (3)$$

- Η σχέση (1) για $x=1$, γίνεται

$$f(1)g(1)=\alpha+c \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 4=\alpha+c \quad (4)$$

- Η σχέση (1) για $x=0$, γίνεται

$$f(0)g(0)=c \overset{(3)}{\Leftrightarrow} c=0$$

Άρα από την (4) έχουμε $\alpha=4$, οπότε η σχέση (1) γράφεται

$$f(x)g(x)=4x \Leftrightarrow f(x)=\frac{4x}{g(x)}$$

(αφού $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$).

Β2. Είναι

$$g(x)=x^2+1$$

Οπότε λόγω του ερωτήματος Β1 έχουμε:

$$f(x)=\frac{4x}{x^2+1}\ .$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=\frac{4(x^2+1)-8x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Η συνάρτηση f' ως ρητή

- είναι συνεχής στο $[-1,1]$
- είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και
- $f'(-1)=f'(1)=0$

Επομένως από το **Θεώρημα Rolle** προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-1,1)$, τέτοιο ώστε

$$\boxed{\mathbf{f''(\xi)=0}}$$