23ο

23ο **ΘΕΜΑ Β**

B1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} - x + 1\right)' = -\frac{1}{x^2} - 1 = -\left(\frac{1}{x^2} + 1\right) < 0,$$

οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = (0, +\infty)$.

Έχουμε :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x} - x + 1\right) \overset{(0-(+\infty)+1)}{=} -\infty.$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}\left(\frac{1}{x} - x + 1\right) \overset{((+\infty)-0+1)}{=} +\infty.$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = (0, +\infty)$, έχουμε :

$$\boxed{f(A) = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x),\ \lim_{x \to 0^+} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = IR}$$

B2. Επειδή η f είναι **γνησίως φθίνουσα** θα είναι και **«1–1»,** άρα υπάρχει η **αντίστροφη** συνάρτηση f^{-1} της f με πεδίο ορισμού το $f(A) = \mathbb{R}$.

Για οποιαδήποτε $y_1, y_2 \in f(A) = IR$ με $y_1 < y_2$ έχουμε :

$$y_1 < y_2 \Rightarrow f\left(f^{-1}(y_1)\right) < f\left(f^{-1}(y_2)\right), \text{ (αφού } f\left(f^{-1}(y)\right) = y \text{, για κάθε } y \in f(A))$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2), \text{ (αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση).}$$

Επομένως η f^{-1} **είναι γνησίως φθίνουσα** συνάρτηση .

B3. • Το **πεδίο ορισμού** της f^{-1} είναι το **σύνολο τιμών**

$$f(A) = (-\infty, +\infty) \text{ της } f$$

Έτσι έχουμε :

$$f^{-1}(x) > x : (\alpha) \quad , \text{με } x \in f\left((0, +\infty)\right) = \mathbb{R}.$$

Για κάθε $x \in f\left((0, +\infty)\right) = \mathbb{R}$ ισχύει $f^{-1}(x) \in f^{-1}(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$,

δηλαδή : $f^{-1}(x) > 0$, $\forall x \in f\left((0, +\infty)\right) = \mathbb{R}$.

Έτσι για κάθε $x \le 0$ ισχύει $f^{-1}(x) > 0 \ge x \Rightarrow f^{-1}(x) > x$.

Για $x > 0$, έχουμε :

$$\begin{cases} f^{-1}(x) > x \\ x > 0 \end{cases} \overset{(f \downarrow (0,+\infty))}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f\left(f^{-1}(x)\right) < f(x) \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < f(x) \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{1}{x} - x + 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 1 < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} < x < 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0,1)$$

Επομένως η δοθείσα ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in (-\infty, 0] \cup (0,1)$,

δηλαδή αληθεύει για κάθε $x \in (-\infty, 1)$

B4

- Το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού $A = (0, +\infty)$ της δηλαδή

$$f^{-1}(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$$

- Επειδή η f^{-1} είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση έπεται ότι

$$f^{-1}(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \to +\infty} f^{-1}(x), \lim_{x \to -\infty} f^{-1}(x)\right).$$

Επομένως είναι :

$$f^{-1}(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \to +\infty} f^{-1}(x), \lim_{x \to -\infty} f^{-1}(x)\right) = (0, +\infty),$$

οπότε

$$\lim_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = 0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to -\infty} f^{-1}(x) = +\infty$$

Επομένως είναι:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)} \overset{\left(\substack{u = f^{-1}(x) \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f^{-1}(x) = +\infty \\ x = f(u)}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{u - f(u)}{f(u) + u} = \lim_{x \to +\infty} \frac{u - \left(\dfrac{1}{u} - u + 1\right)}{\left(\dfrac{1}{u} - u + 1\right) + u}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2u - \dfrac{1}{u} - 1}{\dfrac{1}{u} + 1} = \lim_{x \to +\infty} \left(u \, \frac{2 - \dfrac{1}{u^2} - \dfrac{1}{u}}{\dfrac{1}{u} + 1} \right) \overset{((+\infty).2)}{=} +\infty .$$

- Έχουμε :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f^{-1}(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{f^{-1}(x)}f(x)\right]$$

Είναι :

$$\left.\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x)=0\\ \text{και}\\ f^{-1}(x)>0,\text{για κάθε } x\in f(\mathbb{R})=\mathbb{R}\ \left(\text{αφού το σύνολο τιμών της } f^{-1}(x)\text{ είναι το }(0,\ +\infty)\right)\end{array}\right\}$$

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f^{-1}(x)}=+\infty$$

Επομένως:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{f^{-1}(x)}f(x)\right]\overset{((+\infty)(-\infty))}{=}-\infty}.$$

23ο **ΘΕΜΑ Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Γ1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x)f''(x)+2(f'(x))^2=3f(x)f'(x)$$

$$\Rightarrow\left(f(x)f''(x)+2(f'(x))^2\right)f(x)=3f^2(x)f'(x)$$

$$\Rightarrow f^2(x)f''(x)+(2f(x)f'(x))f'(x)=3f^2(x)f'(x)$$

$$\Rightarrow(f'(x))'f^2(x)+f'(x)(f^2(x))'=(f^3(x))'$$

$$\Rightarrow(f'(x)f^2(x))'=(f^3(x))'$$

$$\Rightarrow f'(x)f^2(x)=f^3(x)+c_1\quad(c_1\in\mathbb{R})$$

Για $x=0$ έχουμε:

$$f'(0)f^2(0)=f^3(0)+c_1$$

$$\Leftrightarrow 1\cdot 1^2 = 1^3 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x)f^2(x) = f^3(x)$$

$$\Rightarrow 3f^2(x)f'(x) = 3f^3(x)$$

$$\Rightarrow \left(f^3(x)\right)' = 3f^3(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = 3g(x) \text{ , (όπου } g(x) = f^3(x), x \in \mathbb{R}\text{)}$$

$$\Rightarrow g'(x) - 3g(x) = 0$$

$$\Rightarrow \left(g'(x) - 3g(x)\right)e^{-3x} = 0$$

$$\Rightarrow g'(x)e^{-3x} + g(x)\left(e^{-3x}\right)' = 0$$

$$\Rightarrow \left(g(x)e^{-3x}\right)' = 0$$

$$\Rightarrow g(x)e^{-3x} = c_2 \quad \left(c_2 \in \mathbb{R}\right)$$

$$\Rightarrow g(x) = c_2 e^{3x}$$

$$\Rightarrow f^3(x) = c_2 e^{3x}$$

Για $x = 0$ έχουμε

$$f^3(0) = c_2 e^{3\cdot 0} \Rightarrow 1^3 = c_2 \cdot 1 \Rightarrow c_2 = 1 .$$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^3(x) = e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)\right)^3 = \left(e^x\right)^3$$

$$\Leftrightarrow f(x) = e^x ,$$

η οποία ικανοποιεί την υπόθεση.

Άρα

$$\boxed{\mathbf{f(x)=e^{x},\ \ x\in\mathbb{R}}}.$$

Γ2. Είναι

$$x^2\left(f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)=$$

$$=x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)=$$

$$=x^2e^{\frac{1}{x+1}}\left(e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1\right)=$$

$$=x^2e^{\frac{1}{x+1}}\left(e^{\frac{1}{x^2+x}}-1\right)=$$

$$=x^2e^{\frac{1}{x+1}}\frac{e^{\frac{1}{x^2+x}}-1}{\frac{1}{x^2+x}}\frac{1}{x^2+x}=$$

$$=\left(\frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{1+\frac{1}{x}}\right)\cdot\left(\frac{e^{\frac{1}{x^2+x}}-1}{\frac{1}{x^2+x}}\right)\ \text{για κάθε}\ x>0\,.$$

Είναι:

- $$\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x+1}}\underset{\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0\right)}{\overset{\left(y=\frac{1}{x+1}\right)}{=}}\lim_{y\to0}e^{y}=1$$
- $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+0=1$$
- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2+x}}-1}{\frac{1}{x^2+x}}\underset{\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+x}=0\right)}{\overset{\left(y=\frac{1}{x^2+x}\right)}{=}}\lim_{y\to0}\frac{e^{y}-1}{y}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{y\to0}\frac{\left(e^{y}-1\right)'}{(y)'}=\lim_{y\to0}\frac{e^{y}}{1}=1$$

Επομένως είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{1+\frac{1}{x}}\right)\cdot\left(\frac{e^{\frac{1}{x^2+x}}-1}{\frac{1}{x^2+x}}\right)\right)=\frac{1}{1}\cdot 1=1$$

Διαφορετικά :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)\right]\overset{\left(\substack{u=\frac{1}{x}\\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0}\right)}{=}\lim_{u\to0^+}\frac{f(u)-f\left(\frac{u}{u+1}\right)}{u^2}=$$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-e^{\frac{u}{u+1}}}{u^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{u\to0^+}\frac{\left(e^u-e^{\frac{u}{u+1}}\right)'}{\left(u^2\right)'}=\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-e^{\frac{u}{u+1}}\frac{1}{(u+1)^2}}{2u}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{\left(e^u-e^{\frac{u}{u+1}}\frac{1}{(u+1)^2}\right)'}{(2u)'}=\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-e^{\frac{u}{u+1}}\frac{1}{(u+1)^4}+2e^{\frac{u}{u+1}}\frac{1}{(u+1)^3}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Γ3. Θεωρώ τη συνάρτηση

$$\varphi(x)=f(x)+f(-x)-x^2-2, x\in\mathbb{R}.$$

Είναι

$$\varphi(x)=e^x+e^{-x}-x^2-2,$$

$$\varphi'(x)=e^x-e^{-x}-2x \text{ και}$$

$$\varphi''(x)=e^x+e^{-x}-2=e^x+\frac{1}{e^x}-2=\frac{e^{2x}+1-2e^x}{e^x}=\frac{\left(e^x-1\right)^2}{e^x}\geq 0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο αν:

$$e^x-1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x=e^0$$

$$\Leftrightarrow x=0$$

Επομένως η φ' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η φ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Είναι

$$\varphi(0)=e^0+e^{-0}-0^2-2=0\ ,\ \varphi'(0)=e^0-e^{-0}-2.0=0\ ,$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_φ στο σημείο της $N(0,\varphi(0))$ είναι

$$y-\varphi(0)=\varphi'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-0=0.x\Leftrightarrow \boxed{y=0}$$

Επειδή η φ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι η C_φ βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της ευθεία $(\varepsilon):y=0$,σε όλο το $\mathbb{R}$ με εξαίρεση το κοινό σημείο επαφής τους $N(0,\varphi(0))$.

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi(x)\geq 0\Rightarrow f(x)+f(-x)-x^2-2\geq 0\Rightarrow f(x)+f(-x)\geq x^2+2}}$$

Γ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $M(x_0,f(x_0))$ είναι:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

$$\Leftrightarrow y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y=e^{x_0}x+e^{x_0}(1-x_0)}$$

Για να διέρχεται η (ε) από το σημείο $A(\alpha,\beta)$ πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$\beta=e^{x_0}\alpha+e^{x_0}(1-x_0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\alpha+1-x_0)e^{x_0}=\beta$$

Επομένως για να διέρχονται ακριβώς δύο εφαπτομένες της C_f από το σημείο $A(\alpha,\beta)$ πρέπει και αρκεί η εξίσωση $(\alpha+1-x_0)e^{x_0}=\beta\ :(E)$, με άγνωστο το x_0 να έχει ακριβώς δύο λύσεις (δεδομένου ότι η f' είναι 1-1).

Θεωρώ τη συνάρτηση

$$H(x)=(\alpha+1-x)e^x\ .$$

Η εξίσωση (E) γράφεται

$$H(x)=\beta\ :(E_1)\ .$$

Είναι

$$H'(x) = -e^x + (1+\alpha-x)e^x = (\alpha-x)e^x .$$

Έχουμε:

- $H'(x) > 0 \Leftrightarrow (\alpha-x)e^x > 0 \overset{(e^x>0)}{\Leftrightarrow} \alpha - x > 0 \Leftrightarrow x < \alpha$
- $H'(x) < 0 \Leftrightarrow (\alpha-x)e^x < 0 \overset{(e^x>0)}{\Leftrightarrow} \alpha - x < 0 \Leftrightarrow x > \alpha$ και
- $H'(x) = 0 \Leftrightarrow (\alpha-x)e^x = 0 \overset{(e^x\neq 0)}{\Leftrightarrow} \alpha - x = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$H'(x)$		+	0	−	
$H(x)$		↗		↘	

Επομένως η $H(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\alpha]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,+\infty)$.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} H(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+\alpha-x}{e^{-x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(1+\alpha-x)'}{\left(e^{-x}\right)'} = = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{-e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to\alpha^-} H(x) = \lim\limits_{x\to\alpha^+} H(x) = H(\alpha) = e^\alpha$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[(1+\alpha-x)e^x\right] \overset{(-\infty)(+\infty)}{=} -\infty$

Η συνάρτηση $H(x)$ είναι:

- συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\alpha]$
- συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha,+\infty)$

Επομένως είναι:

$$H((-\infty,\alpha]) = \left(\lim_{x\to-\infty} H(x), H(\alpha)\right] = \left(0, e^\alpha\right] \text{ και}$$

$$H((\alpha,+\infty)) = \left(\lim_{x\to+\infty} H(x), \lim_{x\to\alpha^+} H(x)\right) = \left(-\infty, e^\alpha\right)$$

Επομένως, για να έχει η εξίσωση $H(x) = \beta$ ακριβώς δύο λύσεις πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$\begin{cases}\beta\in H\left(\left(-\infty,\alpha\right]\right)\\ \text{και}\\ \beta\in H\left(\left(\alpha,+\infty\right)\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta\in\left(0,e^{\alpha}\right]\\ \text{και}\\ \beta\in\left(-\infty,e^{\alpha}\right)\end{cases}\Leftrightarrow 0<\beta<e^{\alpha}$$

Άρα τα σημεία του επιπέδου από τα οποία διέρχονται **ακριβώς δύο εφαπτόμενες** της C_f, είναι όλα τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται **πάνω** από τον άξονα $x'x$ και **κάτω** από τη C_f.

23ο **ΘΕΜΑ Δ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Δ1. Είναι:

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}\overset{(f(0)=0)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0=g(0)$$

Άρα ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)$, οπότε η g είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x)=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}.$$

Η συνάρτηση $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g''(x)=\left(\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\right)'$$

$$=\frac{\left(xf'(x)-f(x)\right)'x^2-\left(xf'(x)-f(x)\right)\left(x^2\right)'}{x^4}$$

$$=\frac{x^2\cdot\left(xf''(x)\right)-2x\left(xf'(x)-f(x)\right)}{x^4}$$

$$=\frac{x^2f''(x)-2xf'(x)+2f(x)}{x^3}>0,$$

αφού:

$$x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } x^3 > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Επειδή ισχύει $g''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ (αφού η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$),

έπεται ότι η g είναι **κυρτή** στο $[0, +\infty)$.

Δ2. Επειδή είναι $g''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, έπεται ότι η συνάρτηση $g'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

- Η g' ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και επειδή είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, έχουμε:

$$g'((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \to 0^+} g'(x), \lim_{x \to +\infty} g'(x) \right)$$

Είναι

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2}.$$

- Έχουμε: $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{x} \overset{(f'(0)=0)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = f''(0) = 0.$

- Για το όριο $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x^2}$ έχουμε την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$, αφού

  $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$ καθώς η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$.

Επομένως,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x^2} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{(f(x))'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{2x} =$$

$$\overset{(f'(0)=0)}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{1}{2} f''(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

Έτσι έχουμε

$$\lim_{x \to 0^+} g'(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} \right) = 0 - 0 = 0.$$

Επομένως

$$g'\left(\left(0,+\infty\right)\right)=\left(0,\lim_{x\to+\infty}g'(x)\right),$$

δηλαδή είναι $g'(x)>0$ για κάθε $x>0$. Επειδή ισχύει $g'(x)>0$ για κάθε $x>0$ και η g είναι συνεχής στο $x_0=0$ έπεται ότι η g είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0,+\infty)$.

Δ3. Για κάθε $x_1,x_2,x_3\in(0,+\infty)$ και $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>1$ έχουμε:

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3>x_1>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)>g(x_1) \text{ (αφού η } g \text{ γνησίως αύξουσα στο } (0,+\infty))$$

$$\Rightarrow \frac{f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)}{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3}>\frac{f(x_1)}{x_1}$$

$$\underset{(x_1>0)}{\overset{(\lambda_1>1>0)}{\Rightarrow}} \frac{\lambda_1x_1}{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3}f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)>\lambda_1f(x_1)\quad :(\alpha)$$

Ομοίως ισχύουν:

$$\frac{\lambda_2x_2}{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3}f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)>\lambda_2f(x_2)\quad :(\beta)$$

και

$$\frac{\lambda_3x_3}{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3}f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)>\lambda_3f(x_3)\quad :(\gamma)$$

Από τις σχέσεις (α), (β) και (γ) με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\frac{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3}{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3}f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)>\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\lambda_3f(x_3)$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)>\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\lambda_3f(x_3)}}$$

Δ4. Είναι $g(1)=\frac{f(1)}{1}=f(1)=1$ και

$$g'(1)=\frac{1\cdot f'(1)-f(1)}{1^2}=f'(1)-f(1)=3-1=2.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_g στο σημείο της $M(1,g(1))$ είναι:

$$y-g(1)=g'(1)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow y-1=2(x-1)$$

$$\Leftrightarrow y=2x-1$$

Επειδή η g είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$, έπεται ότι η C_g βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της ευθεία (ε) σε όλο το $[0,+\infty)$, με εξαίρεση το κοινό σημείο επαφής της $M(1,g(1))$.

Επομένως για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει:

$$g(x)\geq 2x-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x}\geq 2x-1$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x^2}\geq 2-\frac{1}{x}$$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Έτσι, για κάθε $\alpha>0$ και για κάθε $x\in\left[\frac{1}{\alpha},\alpha\right]$, ισχύει $\frac{f(x)}{x^2}-2+\frac{1}{x}\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$, οπότε:

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}\left(\frac{f(x)}{x^2}-2+\frac{1}{x}\right)dx>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}\frac{f(x)}{x^2}dx-\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}2dx+\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}\frac{1}{x}dx>0$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}\frac{f(x)}{x^2}dx-2\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)+\left[\ln x\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}>0$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}\frac{f(x)}{x^2}dx>2\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)-2\ln\alpha$$

$$\boxed{\Rightarrow \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}\frac{f(x)}{x^2}dx>2\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}-\ln\alpha\right)}$$

24ο

24ο

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f ως **γνησίως μονότονη** στο πεδίο ορισμού της είναι « 1–1 » , οπότε η f είναι **αντιστρέψιμη**.

Β2. $f(3-x)+f(x+5)=0:(1)$

Από την (1) για $x=-1$ έχουμε :

$$f(3-(-1))+f(-1+5)=0\Leftrightarrow 2f(4)=0\Leftrightarrow f(4)=0$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο A(4, 0). Η C_f δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$,αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

Β3. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\eta\mu x\le 1<2$ ενώ $f(\eta\mu x)>f(2)$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη αναγκαστικά θα είναι γνησίως φθίνουσα.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε :

$$f\left(8-f^{-1}(x^2-4)\right)>0\overset{(f(4)=0)}{\Leftrightarrow}f\left(8-f^{-1}(x^2-4)\right)>f(4)\overset{(f\downarrow\mathbb{R})}{\Leftrightarrow}8-f^{-1}(x^2-4)<4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x^2-4)>4\overset{(f\downarrow\mathbb{R})}{\Leftrightarrow}f\left(f^{-1}(x^2-4)\right)<f(4)\overset{(f(4)=0)}{\Leftrightarrow}x^2-4<0\Leftrightarrow x^2<4\Leftrightarrow|x|<2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2<x<2$$

Β4. Για κάθε $x<0$ έχουμε

- $x+4<4\overset{(f\downarrow\mathbb{R})}{\Rightarrow}f(x+4)>f(4)\overset{(f(4)=0)}{\Rightarrow}f(x+4)>0$
- $x<0\overset{(e^x\uparrow\mathbb{R})}{\Rightarrow}e^x<e^0\Rightarrow e^x-1<0$

Άρα

$$\frac{f(x+4)}{e^x-1}<0\ ,\ \text{για κάθε}\ \ x<0\,.$$

Για κάθε $x>0$ έχουμε

- $x+4>4\overset{(f\downarrow\mathbb{R})}{\Rightarrow}f(x+4)<f(4)\overset{(f(4)=0)}{\Rightarrow}f(x+4)<0$
- $x>0\overset{(e^x\uparrow\mathbb{R})}{\Rightarrow}e^x>e^0\Rightarrow e^x-1>0$

Άρα

$$\frac{f(x+4)}{e^x-1}<0 \quad , \text{ για κάθε } \quad x>0.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ισχύει :

$$\boxed{\frac{\mathbf{f(x+4)}}{\mathbf{e^x-1}}<\mathbf{0}} \text{, για κάθε } x \neq 0.$$

B5. Ο αριθμός $x_1=0$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$f(3x)+f(8x)=f(5x)+f(10x) \;,$$

αφού ισχύει $f(3.0)+f(8.0)=f(5.0)+f(10.0)(=2f(0))$.

Για $x<0$ έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} 3<5 \overset{(x<0)}{\Rightarrow} 3x>5x \overset{(f\downarrow\mathbb{R})}{\Rightarrow} f(3x)<f(5x) \\ 8<10 \overset{(x<0)}{\Rightarrow} 8x>10x \overset{(f\downarrow\mathbb{R})}{\Rightarrow} f(8x)<f(10x) \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} f(3x)+f(8x)<f(5x)+f(10x)$$

Για $x>0$ έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} 3<5 \overset{(x>0)}{\Rightarrow} 3x<5x \overset{(f\downarrow\mathbb{R})}{\Rightarrow} f(3x)>f(5x) \\ 8<10 \overset{(x>0)}{\Rightarrow} 8x<10x \overset{(f\downarrow\mathbb{R})}{\Rightarrow} f(8x)>f(10x) \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} f(3x)+f(8x)>f(5x)+f(10x)$$

Άρα

$$f(3x)+f(8x)\neq f(5x)+f(10x) \text{ , για κάθε } x\neq 0.$$

Επομένως η εξίσωση

$$f(3x)+f(8x)=f(5x)+f(10x)$$

έχει **μια μόνο ρίζα** στο $\mathbb{R}$, τον αριθμό $x_1=0$.

24ο **ΘΕΜΑ Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Γ1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^3(x)-f^2(x)e^x=e^x$$

$$\Rightarrow f^3(x)=e^x\left(1+f^2(x)\right) : (1)$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$\left\{\begin{array}{l} e^x>0 \\ 1+f^2(x)>0 \end{array}\right. \Rightarrow e^x\left(1+f^2(x)\right)>0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f^3(x)>0 \Rightarrow f(x)>0$$

Επομένως είναι $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ2. Είναι $1+f^2(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

οπότε από την (1) έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\frac{f^3(x)}{1+f^2(x)}=e^x:(2).$$

Θεωρώ τη συνάρτηση

$$g(x)=\frac{x^3}{1+x^2},x\in\mathbb{R}.$$

Είναι

$$g'(x)=\frac{3x^2(1+x^2)-x^3\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{x^4+3x^2}{(1+x^2)^2}\geq 0,$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η σχέση (2) με τη βοήθεια της g γράφεται

$$g(f(x))=e^x:(3).$$

Έστω $x_{1,}x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$.

Έχουμε:

$$x_1<x_2\overset{(e^x:\text{γν.αύξουσα})}{\Rightarrow}e^{x_1}<e^{x_2}\Rightarrow$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow}g(f(x_1))<g(f(x_2))$$

$$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$, (αφού η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$).

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Από το (**Γ1**) ερώτημα έχουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε είναι $f(\mathbb{R})\subseteq(0,+\infty)$.

Έστω τώρα ένας οποιοσδήποτε αριθμός $y\in(0,+\infty)$.

Θεωρούμε την εξίσωση $f(x)=y$. Έχουμε:

$$\begin{cases}f(x)=y\\ y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}g(f(x))=g(y)\\ y>0\end{cases}(\text{η } g\text{, ως γνησίως μονότονη στο }\mathbb{R}\text{, είναι } 1-1)$$

$$\overset{(3)}{\Leftrightarrow}\begin{cases} e^x=\dfrac{y^3}{1+y^2} \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(e^x\right)=\ln\left(\dfrac{y^3}{1+y^2}\right) \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\ln\left(\dfrac{y^3}{1+y^2}\right)\in D_f=\mathbb{R}\ ,(\text{για κάθε } y>0) \\ y>0 \end{cases}$$

Επομένως για οποιοδήποτε $y\in(0,+\infty)$ η εξίσωση $f(x)=y$ έχει λύση , ως προς x , στο $D_f=\mathbb{R}$, η οποία είναι η $x=\ln\left(\dfrac{y^3}{1+y^2}\right)$, οπότε είναι : $(0,+\infty)\subseteq f(\mathbb{R})$.

Επειδή ισχύουν $f(\mathbb{R})\subseteq(0,+\infty)$ και $(0,+\infty)\subseteq f(\mathbb{R})$, έπεται ότι

$$\boxed{\mathbf{f(\mathbb{R})=(0,+\infty)}}.$$

Γ4. Η f ως γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της $D_f=\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση $1-1$, οπότε η f είναι αντιστρέψιμη και το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$.

Ακόμη ισχύει η ισοδυναμία :

$$\left(f(x)=y,(y>0)\right)\Leftrightarrow\left(x=\ln\left(\frac{y^3}{1+y^2}\right),(y>0)\right).$$

Επομένως η αντίστροφη συνάρτηση της f ορίζεται ως εξής:

$$f^{-1}:(0,+\infty)\to\mathbb{R} \text{ με } \boxed{\mathbf{f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x^3}{1+x^2}\right)}}.$$

Γ5. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x)=f^{-1}(x)+\frac{2}{3}x-3\ ,\ x>0.$$

Η συνάρτηση $f^{-1}(x)$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{2}{3}x-3$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Οπότε η $\varphi(x)=f^{-1}(x)+\dfrac{2}{3}x-3$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Επομένως η $\varphi(x)$ είναι συνεχής στο $[3,4]$.

Ακόμη είναι

$$\varphi(3)=f^{-1}(3)+\frac{2}{3}\cdot 3-3==\ln\left(\frac{27}{10}\right)-1=\ln(2,7)-\ln e<0$$

$$(\text{αφού } 2,7<e\Rightarrow \ln(2,7)<\ln e\Rightarrow \ln(2,7)-\ln e<0\,)$$

$$\text{και } \varphi(4)=f^{-1}(4)+\frac{2}{3}\cdot 4-3=\ln\left(\frac{64}{17}\right)-\frac{1}{3}>\ln e-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}>0$$

$$(\text{αφού } \frac{64}{17}>3>e\Rightarrow \ln\left(\frac{64}{17}\right)>\ln e\,).$$

Οπότε είναι

$$\varphi(3)\varphi(4)<0.$$

Άρα η φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θεωρήματος Bolzano** στο $[3,4]$, οπότε υπάρχει $x_0\in(3,4)$ ώστε:

$$\varphi(x_0)=0\Leftrightarrow f^{-1}(x_0)+\frac{2}{3}x_0-3=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9-2x_0}{3}=f^{-1}(x_0)$$

$$\boxed{\Leftrightarrow f\left(\frac{9-2x_0}{3}\right)=x_0}$$

24ο **ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. Για κάθε $x\neq 0$ έχουμε :

$$x f'(x)-f(x)=\frac{-x^2e^x}{\left(e^x-1\right)^2}\Leftrightarrow \frac{x f'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{-\left(e^x-1\right)'}{\left(e^x-1\right)^2}\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(\frac{1}{e^x-1}\right)'$$

Οπότε

- $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{e^x-1}+c_1$, για κάθε $x\in(-\infty,\ 0)$
- $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{e^x-1}+c_2$, για κάθε $x\in(0,\ +\infty)$

Είναι

$$f(-1)=\frac{e}{e-1}\qquad\text{και}\qquad f(1)=\frac{1}{e-1}$$

Για $x=-1$ παίρνουμε:

$$\frac{f(-1)}{-1}=\frac{1}{e^{-1}-1}+c_1 \Leftrightarrow -\frac{e}{e-1}=\frac{1}{\frac{1}{e}-1}+c_1 \Leftrightarrow \frac{e}{1-e}=\frac{e}{1-e}+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$$

Για $x=1$ παίρνουμε :

$$f(1)=\frac{1}{e^1-1}+c_2 \Leftrightarrow \frac{1}{e-1}=\frac{1}{e-1}+c_2 \Leftrightarrow c_2=0$$

Άρα

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{e^x-1} \quad \text{για κάθε } x\in(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty),$$

οπότε για κάθε $x\neq 0$ είναι $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$

Επειδή η f είναι και συνεχής στο $x_0=0$ έχουμε:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D'LH}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(x)'}{(e^x-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{e^0}=1$$

Επομένως

$$\boxed{\mathbf{f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1}, & x\neq 0\\ 1\ , & x=0\end{cases}}}$$

Δ2. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x-e^x+1}{e^x-1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-e^x+1}{xe^x-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D'LH}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-e^x+1)'}{(xe^x-x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{e^x+xe^x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D'LH}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(1-e^x)'}{(e^x+xe^x-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{e^x+e^x+xe^x}=-\frac{1}{2}$$

οπότε η f είναι **π α ρ α γ ω γ ί σ ι μ η** στο $x_0=0$ με

$$\boxed{\mathbf{f'(0)=-\frac{1}{2}}}$$

Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων , με παράγωγο

$$f'(x)=\left(\frac{x}{e^x-1}\right)'=\frac{(x)'(e^x-1)-x(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$H(x)=e^x-1-xe^x,\quad x\in IR.$$

Η $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο IR με παράγωγο

$$H'(x)=\left(e^x-1-xe^x\right)'=e^x-\left(e^x+xe^x\right)=-xe^x$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$H'(x)$	+	0	−
$H(x)$	↗	0	↘

Από το πρόσημο της $H'(x)$ που φαίνεται στον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η $H(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ οπότε η $H(x)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο μόνο στο $x_0=0$,το

$$\max H(x)=H(0)=0.$$

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει :

$$H(x)\le 0 \Leftrightarrow e^x-1-xe^x\le 0\ ,$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

Άρα ισχύει $f'(x)=\dfrac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}<0$,για κάθε $x\neq 0$ και επειδή είναι $f'(0)=-\dfrac{1}{2}<0$

προκύπτει ότι είναι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.,

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$G(x)=\int_0^x f(t)dt-(1-x)f(x)\quad ,\quad x\in[0,\ 1]$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι η συνάρτηση $h(x)=\int_0^x f(t)dt$ είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,οπότε είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Η G είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$,αφού προκύπτει από πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων . Ακόμη είναι :

$$G(0)=\int_0^0 f(t)dt-f(0)=-1<0$$

$$G(1)=\int_0^1 f(t)dt\,.$$

Για κάθε $t\in(0,1]$ είναι $f(t)=\dfrac{t}{e^t-1}>0$

$$\left(\text{αφού } t>0\Rightarrow\begin{cases}t>0\\ e^t>e^0=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t>0\\ e^t-1>0\end{cases}\Rightarrow\frac{t}{e^t-1}>0\right)$$

και $f(0)=1>0$,οπότε είναι $f(t)>0$,για κάθε $t\in[0,1]$ ‘

Επομένως είναι

$$\int_0^1 f(t)dt>0\Rightarrow G(1)>0\,.$$

Έτσι είναι $G(0)G(1)<0$ και η G είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$,

οπότε σύμφωνα με το **Θ. Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\ 1)$ τέτοιο ώστε

$$G(\xi)=0\Leftrightarrow\int_0^\xi f(t)dt-(1-\xi)f(\xi)=0\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\int_0^\xi \mathbf{f(t)dt=(1-\xi)f(\xi)}}$$

Δ5. i. Η συνάρτηση $L(x)=g(x)-h(x)$ **είναι συνεχής στο** $x\in[\alpha,\ \beta]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και για κάθε $x\in[\alpha,\ \beta]$ είναι

$$g(x)\ge h(x)\Rightarrow g(x)-h(x)\ge 0\Rightarrow L(x)\ge 0\,,$$

οπότε

$$\int_\alpha^\beta L(x)dx\ge 0\Rightarrow\int_\alpha^\beta (g(x)-h(x))dx\ge 0\Rightarrow\int_\alpha^\beta g(x)dx-\int_\alpha^\beta h(x)dx\ge 0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\int_\alpha^\beta g(x)dx\ge\int_\alpha^\beta h(x)dx$$

ii. α τρόπος

Για κάθε $x>0$ και για κάθε $t\in[x,2x]$ έχουμε :

$$x\le t\le 2x\overset{(\text{f γν. φθιν.})}{\Leftrightarrow} f(x)\ge f(t)\ge f(2x)\overset{(t>0)}{\Leftrightarrow}\frac{f(2x)}{t}\le\frac{f(t)}{t}\le\frac{f(x)}{t}$$

Λόγω του **Δ.5. i)** ερωτήματος ισχύει :

$$\int_x^{2x}\frac{f(2x)}{t}dt\le\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt\le\int_x^{2x}\frac{f(x)}{t}dt$$

$$\Rightarrow f(2x)\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\le\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt\le f(x)\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt$$

$$\Rightarrow f(2x)[\ln t]_x^{2x}\le\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt\le f(x)[\ln t]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow f(2x)(\ln 2x-\ln x)\le\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt\le f(x)(\ln 2x-\ln x)$$

$$\Rightarrow f(2x)\ln\frac{2x}{x}\le\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt\le f(x)\ln\frac{2x}{x}$$

$$\Rightarrow f(2x)\ln 2\le\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt\le f(x)\ln 2\ :(\alpha)$$

Είναι

- $\lim\limits_{x\to0^+}(f(2x)\ln 2)\overset{\left(\substack{u=2x\\ \lim\limits_{x\to0^+}(2x)=0}\right)}{=}\lim\limits_{u\to0^+}(f(u)\ln 2)\overset{(f\text{ συνεχής})}{=}f(0)\ln 2=1.\ln 2=\ln 2$ και
- $\lim\limits_{x\to0^+}(f(x)\ln 2)\overset{(f\text{ συνεχής})}{=}f(0)\ln 2=1.\ln 2=\ln 2$,

οπότε , λόγω της (α) και του **Κριτηρίου παρεμβολής** , συμπεραίνουμε ότι

$$\boxed{\lim_{x\to0^+}\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt=\ln 2}$$

β’ τρόπος

Είναι :

$$\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt=\int_x^{2x}\frac{\frac{t}{e^t-1}}{t}dt=\int_x^{2x}\frac{1}{e^t-1}dt=\int_x^{2x}\frac{e^t-e^t+1}{e^t-1}dt=\int_x^{2x}\frac{e^t-(e^t-1)}{e^t-1}dt=$$

$$=\int_x^{2x}\left(\frac{e^t}{e^t-1}-1\right)dt=\int_x^{2x}\frac{e^t}{e^t-1}dt-\int_x^{2x}1\,dt=\int_x^{2x}\frac{(e^t-1)'}{e^t-1}dt-\int_x^{2x}1\,dt=$$

$$=\left[\ln(e^t-1)\right]_x^{2x}-[t]_x^{2x}=\ln(e^{2x}-1)-\ln(e^x-1)-(2x-x)=\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}\right)-x$$

οπότε

$$\lim_{x\to0^+}\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt=\lim_{x\to0^+}\left[\ln(e^x+1)-x\right]=\ln 2-0=\ln 2$$

25ο

25ο **ΘΕΜΑ Β** ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ

B1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^{2015}+x$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι

$$g'(x)=2015x^{2014}+1>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για την f ισχύει

$$\left(f(x)\right)^{2015}+f(x)=2x-2 \quad :(1).$$

Η σχέση (1) με τη βοήθεια της g γράφεται:

$$g\left(f(x)\right)=2x-2 \quad :(2).$$

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$.

Έχουμε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2$$

$$\Rightarrow 2x_1-2<2x_2-2$$

$$\Rightarrow g\left(f(x_1)\right)<g\left(f(x_2)\right)$$

$$\overset{(g\text{ γν.αύξουσα})}{\Rightarrow} f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

B2. Έστω $x_0\in\mathbb{R}$. Λόγω της (1) ισχύουν :

- $\left(f(x)\right)^{2015}+f(x)=2x-2 \quad :(\alpha)$
- $\left(f(x_0)\right)^{2015}+f(x_0)=2x_0-2 \quad :(\beta)$

Από τις (α) και (β) με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$\left(f(x)\right)^{2015}-\left(f(x_0)\right)^{2015}+f(x)-f(x_0)=2(x-x_0) \quad :(\gamma)$$

Επειδή η συνάρτηση

$$h(x)=x^{2015},\ x\in\mathbb{R} \text{ είναι γνησίως αύξουσα},$$

έπεται ότι οι

$$f(x)-f(x_0) \text{ και } (f(x))^{2015}-(f(x_0))^{2015}$$

είναι ομόσημοι ή ίσοι με το μηδέν,

οπότε:

$$\begin{aligned}&\left|(f(x))^{2015}-(f(x_0))^{2015}+f(x)-f(x_0)\right|\\&=\left|(f(x))^{2015}-(f(x_0))^{2015}\right|+\left|f(x)-f(x_0)\right|\geq\left|f(x)-f(x_0)\right|\end{aligned}.$$

Έτσι έχουμε:

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|\leq\left|(f(x))^{2015}-(f(x_0))^{2015}+f(x)-f(x_0)\right|\overset{(\gamma)}{=}\left|2(x-x_0)\right|=2\left|x-x_0\right|$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\left|f(x)-f(x_0)\right|\leq2\left|x-x_0\right|\\&\Rightarrow-2\left|x-x_0\right|\leq f(x)-f(x_0)\leq2\left|x-x_0\right|\\&\Rightarrow f(x_0)-2\left|x-x_0\right|\leq f(x)\leq f(x_0)+2\left|x-x_0\right| \ :(3).\end{aligned}$$

Είναι:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x_0)-2\left|x-x_0\right|\right)=f(x_0) \text{ και } \lim_{x\to x_0}\left(f(x_0)+2\left|x-x_0\right|\right)=f(x_0),$$

οπότε λόγω της (3) και του **κριτηρίου παρεμβολής**, προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

Άρα για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)},$$

οπότε η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

B3. Έστω $y\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε την εξίσωση $f(x)=y$ με άγνωστο το x.

Έχουμε:

$$f(x)=y\Leftrightarrow g(f(x))=g(y), (\text{η } g \text{ είναι } 1-1, \text{ ως γνησίως μονότονη στο } D_g=\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}&\overset{(2)}{\Leftrightarrow}2x-2=y^{2015}+y\\&\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\left(y^{2015}+y+2\right)\in D_f=\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $y \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x)=y$ έχει λύση ως προς x στο $D_f=\mathbb{R}$ η οποία είναι $x=\frac{1}{2}\left(y^{2015}+y+2\right)$. Επομένως είναι $\mathbb{R} \subseteq f(\mathbb{R})$.

Είναι όμως και $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, οπότε είναι

$$\boxed{\mathbf{f(\mathbb{R})=\mathbb{R}}}.$$

Η f ως γνησίως μονότονη στο $D_f=\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση $1-1$, οπότε η f έχει αντίστροφη συνάρτηση και το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f, δηλαδή το $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Ακόμη ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)=y \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\left(y^{2015}+y+2\right),$$

οπότε είναι

$$f^{-1}(y)=\frac{1}{2}\left(y^{2015}+y+2\right).$$

Επομένως η αντίστροφη συνάρτηση της f ορίζεται ως εξής:

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \text{με}\ \boxed{\mathbf{f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\left(x^{2015}+x+2\right)}}$$

B4 Επειδή η f είναι **συνεχής** και **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right).$$

Είναι όμως και

$$f(\mathbb{R})=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty),$$

οπότε είναι:

$$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty),$$

που σημαίνει ότι

$$\boxed{\mathbf{\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}}\ \text{και}\ \boxed{\mathbf{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}}.$$

- Για κάθε $x>0$ είναι:

$$f^{2015}(x)+f(x)=2x-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)\left(f^{2014}(x)+1\right)=2x-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}\left(f^{2014}(x)+1\right)=2-\frac{2}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=\left(2-\frac{2}{x}\right)\frac{1}{f^{2014}(x)+1}$$

Οπότε

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(2-\frac{2}{x}\right)\frac{1}{f^{2014}(x)+1}\right]=(2-0)\cdot 0=0},$$

(αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f^{2014}(x)+1\right)=+\infty$).

25ο **Θ Ε Μ Α Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Γ1. Είναι

$$f(g(x))=x \ :(1) \quad \text{και} \quad f''(g(x))=x \ :(2).$$

Από την (1) παραγωγίζοντας τα μέλη της ως προς x έχουμε:

$$\left(f(g(x))\right)'=(x)'\Rightarrow f'(g(x))g'(x)=1\neq 0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} g'(x)\neq 0 \\ f'(g(x))=\dfrac{1}{g'(x)} \ :(3)\end{cases}$$

Από την (3) παραγωγίζοντας τα μέλη της ως προς x έχουμε:

$$\left(f'(g(x))\right)'=\left(\frac{1}{g'(x)}\right)'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(g(x))g'(x)=-\frac{g''(x)}{\left(g'(x)\right)^2}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} xg'(x)=-\frac{g''(x)}{\left(g'(x)\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\left(g'(x)\right)^{-3}g''(x)=2x$$

$$\Rightarrow\left(\left(g'(x)\right)^{-2}\right)'=\left(x^2\right)'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(g'(x)\right)^2} = x^2 + c_1$$

Για $x = 1$ έχουμε:

$$\frac{1}{\left(g'(1)\right)^2} = 1^2 + c_1 \overset{(g'(1)=1)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{1^2} = 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

Άρα για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$\frac{1}{\left(g'(x)\right)^2} = x^2 \Leftrightarrow \left(g'(x)\right)^2 = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left|g'(x)\right| = \frac{1}{x} \quad :(4)$$

Η $g'(x)$, ως παραγωγίσιμη, είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει $g'(x) \neq 0$, οπότε η $g'(x)$ διατηρεί στο $(0,+\infty)$ σταθερό πρόσημο και επειδή είναι $g'(1) = 1 > 0$ συμπεραίνουμε ότι $g'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Έτσι από την (4) έχουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$g'(x) = \frac{1}{x} \overset{(x>0)}{\Leftrightarrow} \left(g(x)\right)' = (\ln x)' \Leftrightarrow g(x) = \ln x + c_2 .$$

Είναι

$$g(1) = 0 \Leftrightarrow \ln 1 + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0 .$$

Επομένως

$$g(x) = \ln x \, , \; x > 0 .$$

Από την (1) και επειδή είναι $g(x) = \ln x$ έχουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(\ln x) = x \quad :(5)$$

Από την (5) ,θέτοντας όπου x το e^x (είναι $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$) ,έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f\left(\ln\left(e^x\right)\right) = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^x .$$

Οι συναρτήσεις

$$\boxed{\mathbf{f(x) = e^x}} \quad \text{και} \quad \boxed{\mathbf{g(x) = \ln x}}$$

ικανοποιούν την υπόθεση, οπότε είναι οι ζητούμενες.

Γ2. Θ.Δ.Ο. η εξίσωση $xe^x = 1 : (E)$, έχει ακριβώς μία λύση η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$.

- Έχουμε:

$$xe^x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \text{, όπου } \varphi(x) = x - e^{-x} \text{ , } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η εξίσωση $xe^x = 1$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\varphi(x) = 0$.

- Είναι $\varphi'(x) = 1 + e^{-x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η $\varphi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Είναι

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e} - 2}{2\sqrt{e}} < 0$$

$$\left(\text{ αφού } e < 4 \Rightarrow \sqrt{e} < \sqrt{4} \Rightarrow \sqrt{e} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{e} - 2}{2\sqrt{e}} < 0\right) \quad \text{και}$$

- $\varphi\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} - e^{-\frac{2}{3}} == \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} = \frac{\sqrt[3]{8e^2} - \sqrt[3]{27}}{3\sqrt[3]{e^2}} > 0$

  (αφού $e^2 > 4 \Rightarrow 8e^2 > 32 \Rightarrow \sqrt[3]{8e^2} > \sqrt[3]{32} > \sqrt[3]{27} \Rightarrow \sqrt[3]{8e^2} - \sqrt[3]{27} > 0$)

Επομένως είναι $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\varphi\left(\frac{2}{3}\right) < 0$ και η φ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$,

οπότε σύμφωνα με το **Θεώρημα Bolzano**, υπάρχει $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ ώστε $\varphi(x_0) = 0$.

Επομένως η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει λύση στο $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ (το x_0) και μάλιστα είναι μοναδική στο $\mathbb{R}$, αφού η φ είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εξίσωση $xe^x = 1$ έχει **ακριβώς μία λύση** στο $\mathbb{R}$ η οποία μάλιστα ανήκει στο $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση,

$$h(x) = f(x) - g(x) = e^x - \ln x, x > 0$$

Είναι

$$h'(x)=e^x-\frac{1}{x}, x>0 \text{ και } h''(x)=e^x+\frac{1}{x^2} \text{ για κάθε } x>0.$$

Οπότε η h' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι η εξίσωση $xe^x=1$ έχει μοναδική ρίζα x_0 η οποία μάλιστα ανήκει στο $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$.

Δηλαδή ισχύει:

$$x_0e^{x_0}=1\Rightarrow e^{x_0}=\frac{1}{x_0}\Rightarrow e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0\Rightarrow h'(x_0)=0$$

x	0		x_0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

- Για κάθε $x>x_0$ έχουμε:

  $x>x_0\Rightarrow h'(x)>h'(x_0)$, (αφού η h' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$)

Όμως $h'(x_0)=0$, οπότε $h'(x)>0$, για κάθε $x>x_0$.

- Για κάθε $x\in(0,x_0)$ έχουμε:

  $0<x<x_0\Rightarrow h'(x)<h'(x_0)$ (αφού η h' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$)

Όμως $h'(x_0)=0$, οπότε $h'(x)<0$, για κάθε $x\in(0,x_0)$.

Από το πρόσημο της $h'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$.

Επομένως η h παρουσιάζει στο $x_0\in\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$ ολικό ελάχιστο το οποίο είναι:

$$\min h(x)=h(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0$$

Για το x_0 ισχύει

$$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}\Rightarrow\begin{cases}e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}\\ x_0=\ln\dfrac{1}{x_0}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}\\ \ln x_0=-x_0\end{cases}$$

Επομένως

$$\min h(x)=e^{x_0}-\ln x_0=\frac{1}{x_0}+x_0 .$$

Η συνάρτηση $G(x)=\frac{1}{x}+x, x\in\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$ είναι παραγωγίσιμη με

$$G'(x)=-\frac{1}{x^2}+1=\frac{x^2-1}{x^2}<0 \text{ για κάθε } x\in\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right],$$

οπότε η $G(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$.

Έτσι έχουμε:

$$\frac{1}{2}<x_0<\frac{2}{3}\ \underset{\text{στο }\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]}{\overset{\text{η G γν.φθ.}}{\Longrightarrow}}\ G\left(\frac{1}{2}\right)>G(x_0)>G\left(\frac{2}{3}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}>G(x_0)>\frac{1}{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{3}{2}+\frac{2}{3}<G(x_0)<2+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{13}{6}<\min h(x)<\frac{5}{2}$$

$$\boxed{\Rightarrow\frac{13}{6}<\min\big(f(x)-g(x)\big)<\frac{5}{2}}$$

25ο **ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$$

Για $x>0$ είναι

- $|f(x)-x-1| \le \dfrac{2x}{x^2+2} \Leftrightarrow -\dfrac{2x}{x^2+2} \le f(x)-(x+1) \le \dfrac{2x}{x^2+2}$: (α)
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2x}{x^2+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{x}\right)=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$

οπότε , λόγω της (α) και του **κριτηρίου παρεμβολής** προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0\,,$$

Επομένως η ευθεία ε : **y=x+1**, είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Δ2. i. Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{x^2}{\alpha x+\beta}$, (α, β $\in$ IR*) έχει στο $+\infty$ την ίδια ασύμπτωτη με την γραφική παράσταση της f, ισχύουν :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=1 \quad \& \quad \lim_{x\to+\infty}[g(x)-x]=1$$

- Είναι όμως

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x^2}{\alpha x+\beta}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\alpha x+\beta}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\alpha x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$$

οπότε

$$\frac{1}{\alpha}=1\Leftrightarrow \alpha=1$$

- Ακόμη

$$\lim_{x\to+\infty}[g(x)-x]\overset{(\alpha=1)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x+\beta}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-\beta x}{x+\beta}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\beta x}{x+\beta}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\beta x}{x}=\lim_{x\to+\infty}(-\beta)=-\beta$$

Άρα

$$-\beta=1\Leftrightarrow\beta=-1$$

Επομένως είναι

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha=1\,,\,\beta=-1}}$$

ii. Κοντά στο $x_0=0$ έχουμε :

$$g(x)\eta\mu\left(\frac{2016}{x}\right)=\frac{x^2}{x-1}\eta\mu\left(\frac{2016}{x}\right)=\frac{2016}{1-\frac{1}{x}}.\frac{\eta\mu\left(\frac{2016}{x}\right)}{\frac{2016}{x}}.$$

Για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\left(\frac{2016}{x}\right)}{\frac{2016}{x}}$ θέτουμε $u=\frac{2016}{x}$.

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2016}{x}=0,$$

οπότε όταν $x\to+\infty$, έχουμε $u\to 0^+$

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\left(\frac{2016}{x}\right)}{\frac{2016}{x}}=\lim_{u\to 0^+}\frac{\eta\mu u}{u}=1.$$

Επομένως είναι :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)\eta\mu\left(\frac{2016}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2016}{1-\frac{1}{x}}.\frac{\eta\mu\left(\frac{2016}{x}\right)}{\frac{2016}{x}}\right)=\frac{2016}{1-0}.1=2016$$

Δ3. Το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=4$ είναι

$$E=\int_2^4\left|f(x)-(x+1)\right|dx=\int_2^4\left|f(x)-x-1\right|dx$$

Είναι

$$\left|f(x)-x-1\right|\le\frac{2|x|}{x^2+2}\Leftrightarrow\frac{2|x|}{x^2+2}-\left|f(x)-x-1\right|\ge 0$$

Άρα

$$\int_2^4 \left(\frac{2|x|}{x^2+2} - |f(x)-x-1|\right)dx \geq 0 \Rightarrow \int_2^4 \frac{2|x|}{x^2+2}dx - \int_2^4 |f(x)-x-1|dx \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_2^4 |f(x)-x-1|dx \leq \int_2^4 \frac{2|x|}{x^2+2}dx \overset{x\in[2,\,4]}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow E \leq \int_2^4 \frac{2x}{x^2+2}dx \Rightarrow E \leq \int_2^4 \frac{(x^2+2)'}{x^2+2}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E \leq \left[\ln|x^2+2|\right]_2^4 \Rightarrow E \leq \ln 18 - \ln 6 \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{E \leq \ln\frac{18}{6} \Rightarrow E \leq \ln 3}}$$

26ο

26ο **Θ Ε Μ Α Β** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Β1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = e^{x^3} + e^{-x^3}$: (1)

Από τη (1) θέτοντας όπου x το $-x$ έχουμε:

$$f'(-x) = e^{(-x)^3} + e^{-(-x)^3} = e^{-x^3} + e^{x^3} = e^{x^3} + e^{-x^3}$$

Από **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x) = f'(-x) \Leftrightarrow f'(x) = -f'(-x)(-x)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x))' = (-f(-x))' \Leftrightarrow f(x) = -f(-x) + c \ , \ (c \in \mathbb{R})$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = -f(-0) + c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = 2f(0) = 2\cdot 0 = 0$$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x) = -f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$$

Έτσι για κάθε $x \in D_f = \mathbb{R}$ ισχύει : $-x \in D_f$ και $f(-x) = -f(x)$, οπότε η f είναι περιττή.

Β2. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Είναι

$$g'(x)=f'(x)-2=$$
$$=e^{x^3}+e^{-x^3}-2=$$
$$=e^{x^3}+\frac{1}{e^{x^3}}-2=\frac{e^{2x^3}-2e^{x^3}+1}{e^{x^3}}=\frac{\left(e^{x^3}-1\right)^2}{e^{x^3}}\geq 0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο αν

$$e^{x^3}-1=0\Leftrightarrow e^{x^3}=e^0\overset{(e^x\ "1-1")}{\Leftrightarrow}x^3=0\Leftrightarrow x=0$$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x>0$ ισχύει :

$$g(x)>g(0)\Rightarrow f(x)-2x>f(0)-2\cdot 0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x)-2x>f(0)=0\Rightarrow f(x)>2x$$

B3. Για κάθε $x>0$ είναι

$$f(x)>2x>0\Rightarrow 0<\frac{1}{f(x)}<\frac{1}{2x}:(\alpha)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}0=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$,

οπότε λόγω της (α) προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$ και για κάθε $x>0$ είναι $\frac{1}{f(x)}>0$,

Οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)}=+\infty\ ,\ \text{δηλαδή}\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

- Ακόμη $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\overset{(f\ \text{περιττή})}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-f(-x)\right)\underset{\left(\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty\right)}{\overset{(\omega=-x)}{=}}\lim\limits_{\omega\to+\infty}\left(-f(\omega)\right)=-\infty$

$$(\text{αφού}\ \lim_{\omega\to+\infty}f(\omega)=+\infty).$$

- Ακόμη είναι

$$f'(x)=e^{x^3}+e^{-x^3}>0\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R},$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Επειδή η f είναι συνεχής και **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι

$$\boxed{\mathbf{f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}}}.$$

B4. Θα δείξουμε ότι

$$|f(\alpha)\text{-}f(\beta)|\geq 2|\alpha\text{-}\beta| \ :(1) \text{ για κάθε } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Διακρίνουμε :

1. Για $\alpha=\beta$ η (1) είναι φανερό ότι ισχύει ως ισότητα .

2. Έστω $\alpha<\beta$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ** στο $[\alpha,\beta]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Έχουμε:

$$\left|\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right|=|f'(\xi)|=\left|e^{\xi^3}+e^{-\xi^3}\right|=e^{\xi^3}+e^{-\xi^3}=e^{\xi^3}+e^{-\xi^3}-2+2=$$

$$=\left(\sqrt{e^{\xi^3}}\right)^2+\left(\sqrt{e^{-\xi^3}}\right)^2-2\sqrt{e^{\xi^3}}\sqrt{e^{-\xi^3}}+2=\left(\sqrt{e^{\xi^3}}-\sqrt{e^{-\xi^3}}\right)^2+2\geq 2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right|\geq 2\Rightarrow\frac{|f(\beta)-f(\alpha)|}{|\beta-\alpha|}\geq 2\Rightarrow|f(\beta)-f(\alpha)|\geq 2|\beta-\alpha|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|f(\alpha)-f(\beta)|\geq 2|\alpha-\beta|.$$

3. Έστω $\alpha>\beta$.

Εργαζόμενοι ομοίως, καταλήγουμε ότι και πάλι ισχύει:

$$|f(\alpha)-f(\beta)|\geq 2|\alpha-\beta|.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\boxed{\mathbf{|f(\alpha)-f(\beta)|\geq 2|\alpha-\beta|}}$$

26ο **ΘΕΜΑ Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Γ1. Έχουμε:

$$f(x)f'(-x)\sqrt{x^2+1}=1 \ :(1).$$

Από την (1) θέτοντας όπου x το $-x$, έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(-x)f'(x)\sqrt{(-x)^2+1}=1$$

$$\Rightarrow f(-x)f'(x)\sqrt{x^2+1}=1 \quad :(2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x)f'(-x)\sqrt{x^2+1}=f(-x)f'(x)\sqrt{x^2+1}$$

$$\overset{\sqrt{x^2+1}\neq 0}{\Rightarrow} f(x)f'(-x)=f(-x)f'(x)$$

$$\Rightarrow f'(x)f(-x)-f(x)f'(-x)=0$$

$$\Rightarrow f'(x)f(-x)+f(x)\big(f(-x)\big)'=0$$

$$\Rightarrow \big(f(x)f(-x)\big)'=0$$

$$\Rightarrow f(x)f(-x)=c_1,\ c_1\in\mathbb{R} \text{ σταθερά.}$$

Για $x=0$ έχουμε:

$$f(0)f(-0)=c_1 \Leftrightarrow c_1=f^2(0)=1^1=1.$$

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)f(-x)=1$.

Γ2. Για την $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ είναι:

$$D_g:\begin{cases} x^2+1\geq 0 \ (\text{ισχύει για κάθε } x\in\mathbb{R}) \\ x+\sqrt{x^2+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>-x \quad :(3)$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$x^2+1>x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x|<\sqrt{x^2+1} \Rightarrow -\sqrt{x^2+1}<x<\sqrt{x^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1}>-x \\ \sqrt{x^2+1}>x \end{cases}$$

Επομένως η (3) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι το $D_g = \mathbb{R}$.

Η $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$g'(x) = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)'$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'\right)$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Άρα είναι

$$\boxed{\mathbf{g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}}}.$$

Γ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x)f(-x) = 1 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) \neq 0 \\ f(-x) = \dfrac{1}{f(x)} : (\alpha) \end{cases}$$

Ακόμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f(-x)f'(x)\sqrt{x^2+1} = 1 \Rightarrow$$

$$\overset{(\alpha)}{\Rightarrow}\frac{1}{f(x)}f'(x)\sqrt{x^2+1}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow\left(\ln|f(x)|\right)'=\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)'$$

$$\Rightarrow\ln|f(x)|=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c_2$$

Για $x=0$ έχουμε:

$$\ln|f(0)|=\ln\left(0+\sqrt{0^2+1}\right)+c_2\overset{(f(0)=1)}{\Leftrightarrow}\ln1=\ln1+c_2\Leftrightarrow c_2=0$$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\ln|f(x)|=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Leftrightarrow$$

$$|f(x)|=x+\sqrt{x^2+1}\quad:(\beta)$$

Η συνάρτηση f, ως παραγωγίσιμη , είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και επειδή ισχύει $f(x)\neq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έπεται ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή είναι $f(0)=1>0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έτσι από τη σχέση (β) προκύπτει ότι

$$\boxed{\mathbf{f(x)=x+\sqrt{x^2+1}}}$$

η οποία ικανοποιεί την υπόθεση.

Γ4. Για τη συνάρτηση $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ ισχύει : $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$ (σχέση (α)).

Έχουμε:

$$\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+25}\right)\left(\beta+\sqrt{\beta^2+16}\right)=20\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+25}}{5}\,\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+16}}{4}=1\qquad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\alpha}{5}+\sqrt{\frac{\alpha^2+25}{25}}\right)\left(\frac{\beta}{4}+\sqrt{\frac{\beta^2+16}{16}}\right)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\alpha}{5}+\sqrt{\left(\frac{\alpha}{5}\right)^2+1}\right)\left(\frac{\beta}{4}+\sqrt{\left(\frac{\beta}{4}\right)^2+1}\right)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\alpha}{5}\right)f\left(\frac{\beta}{4}\right)=1\Rightarrow f\left(\frac{\alpha}{5}\right)=\frac{1}{f\left(\frac{\beta}{4}\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\alpha}{5}\right)=f\left(-\frac{\beta}{4}\right)\quad ,\ (\text{αφού}\quad f(-x)=\frac{1}{f(x)}\ )$$

Είναι όμως

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}>0\,,$$

(αφού $\sqrt{x^2+1}>0$ και $x+\sqrt{x^2+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$).

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι $1-1$.

Έτσι από την ισότητα $f\left(\frac{\alpha}{5}\right)=f\left(-\frac{\beta}{4}\right)$ και επειδή η f είναι $1-1$ προκύπτει ότι:

$$\frac{\alpha}{5}=-\frac{\beta}{4}\Leftrightarrow 4\alpha=-5\beta\Leftrightarrow 4\alpha+5\beta=0\,.$$

Γ5. Έχουμε:

$$\begin{cases} f(x\ln x).f\left(x\ln x-\dfrac{e}{x}\right)=1 \\ x>0 \end{cases}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} f(x\ln x)=\dfrac{1}{f\left(x\ln x-\dfrac{e}{x}\right)} \\ x>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f\left(x\ln x\right)=f\left(-x\ln x+\dfrac{e}{x}\right) \\ x>0 \end{cases} \quad , (\text{αφού } f\left(-x\right)=\dfrac{1}{f\left(x\right)} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ln x=-x\ln x+\dfrac{e}{x} \\ x>0 \end{cases} \quad , \ (\text{ αφού η } f \text{ είναι } 1-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x\ln x=\dfrac{e}{x} \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\ln x-\dfrac{e}{x^2}=0 \\ x>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow G\left(x\right)=0\ ,\ x>0 \quad ,$$

όπου

$$G\left(x\right)=2\ln x-\frac{e}{x^2},\ x>0 .$$

Επομένως η δοθείσα εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $G\left(x\right)=0$.

Είναι

$$G'\left(x\right)=\frac{2}{x}+\frac{2e}{x^3}>0 \quad \text{για κάθε } x>0,$$

οπότε η $G\left(x\right)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,+\infty\right)$.

Παρατηρούμε ότι:

$$G\left(\sqrt{e}\right)=2\ln\left(\sqrt{e}\right)-\frac{e}{\left(\sqrt{e}\right)^2}=2\cdot\frac{1}{2}-\frac{e}{e}=1-1=0$$

Οπότε ο αριθμός $x_0=\sqrt{e}$ είναι λύση της εξίσωσης $G\left(x\right)=0$ και μάλιστα μοναδική στο $\left(0,+\infty\right)$, αφού η $G\left(x\right)$ είναι γνησίως μονότονη (άρα και $1-1$) στο $\left(0,+\infty\right)$.

Επομένως η δοθείσα εξίσωση έχει **ακριβώς μία λύση**, τον αριθμό $x_0=\sqrt{e}$.

26ο **Θ Ε Μ Α Δ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Δ1. Έστω

$$\left(f\left(x\right)\right)^3+f\left(x\right)=10x \quad :(1).$$

Θεωρώ τη συνάρτηση

$$g(x)=x^3+x,\ \ x\in\mathbb{R}.$$

Είναι $g'(x)=3x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$(f(x))^3+f(x)=10x \Leftrightarrow g(f(x))=10x \ :(2).$$

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$

Έχουμε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow 10x_1<10x_2 \Rightarrow$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} g(f(x_1))<g(f(x_2)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$, (αφού η g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$).

Επομένως η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Έστω $y\in\mathbb{R}$ τυχαίο. Θεωρούμε την εξίσωση $f(x)=y$.

Έχουμε:

$$f(x)=y \Leftrightarrow g(f(x))=g(y)$$, (g είναι $1-1$, ως γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow \ 10x=y^3+y \ \ \Leftrightarrow \ \ x=\frac{y^3+y}{10}\in D_f=\mathbb{R}$$

Επομένως για κάθε $y\in\mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x)=y$ έχει λύση ως προς x στο $D_f=\mathbb{R}$, οπότε είναι $\mathbb{R}\subseteq f(\mathbb{R})$. Είναι όμως και $f(\mathbb{R})\subseteq\mathbb{R}$, οπότε $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Δ3. Η συνάρτηση f, ως γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της $D_f=\mathbb{R}$, είναι $1-1$, οπότε η f έχει αντίστροφη συνάρτηση και το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Ακόμη ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x)=y \Leftrightarrow x=\frac{1}{10}(y^3+y),$$

οπότε και

$$f^{-1}(y)=\frac{1}{10}(y^3+y).$$

Επομένως η αντίστροφη συνάρτηση της f ορίζεται ως εξής:

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ με } \boxed{\mathbf{f^{-1}(x)=\frac{1}{10}\left(x^3+x\right)}}.$$

Δ4. Έστω $x_0\in\mathbb{R}$ τυχαίο.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left(f(x)\right)^3+f(x)=10x \quad : \ (\alpha)$$

και για $x=x_0$ ισχύει επίσης:

$$\left(f(x_0)\right)^3+f(x_0)=10x_0 \ :(\beta)$$

Από (α) και (β) με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$\left(f(x)\right)^3-\left(f(x_0)\right)^3+f(x)-f(x_0)=10x-10x_0 \ : (\gamma)$$

- Αν $f(x)\geq f(x_0)$, τότε

$$f(x)\geq f(x_0)\Rightarrow\begin{cases} f(x)\geq f(x_0) \\ \left(f(x)\right)^3\geq\left(f(x_0)\right)^3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f(x)-f(x_0)\geq 0 \\ \left(f(x)\right)^3-\left(f(x_0)\right)^3\geq 0 \end{cases}$$

- Αν $f(x)\leq f(x_0)$, τότε

$$f(x)\leq f(x_0)\Rightarrow\begin{cases} f(x)\leq f(x_0) \\ \left(f(x)\right)^3\leq\left(f(x_0)\right)^3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f(x)-f(x_0)\leq 0 \\ \left(f(x)\right)^3-\left(f(x_0)\right)^3\leq 0 \end{cases}$$

Επομένως οι

$\left(f(x)\right)^3-\left(f(x_0)\right)^3$ και $f(x)-f(x_0)$ είναι ομόσημοι ή ίσοι με το μηδέν ,οπότε

$$\left|\left(f(x)\right)^3-\left(f(x_0)\right)^3+f(x)-f(x_0)\right|$$
$$=\left|\left(f(x)\right)^3-\left(f(x_0)\right)^3\right|+\left|f(x)-f(x_0)\right|:(\alpha)(\text{για κάθε } x_0,x\in\mathbb{R})$$

Έτσι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$(\gamma)\Rightarrow|10x-10x_0|=\left|(f(x))^3-(f(x_0))^3+f(x)-f(x_0)\right|\overset{(\alpha)}{=}$$

$$=\left|(f(x))^3-(f(x_0))^3\right|+|f(x)-f(x_0)|\geq|f(x)-f(x_0)|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|\leq|10x-10x_0|=10|x-x_0|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-10|x-x_0|\leq f(x)-f(x_0)\leq 10|x-x_0|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0)-10|x-x_0|\leq\ f(x)\ \leq f(x_0)+10|x-x_0|:(\delta)$$

Είναι

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x_0)-10|x-x_0|\right)=f(x_0)-10|x_0-x_0|=f(x_0)$$

και

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x_0)+10|x-x_0|\right)=f(x_0)+10|x_0-x_0|=f(x_0)$$
,

οπότε , λόγω της (δ) και του **κριτηρίου παρεμβολής** , προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

Επομένως η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι **συνεχής** στο $\mathbb{R}$

Δ5. Το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.είναι το $E=\int_0^1|f(x)|dx$.

Θέτουμε $u=f(x)$, οπότε είναι $x=f^{-1}(u)=\frac{1}{10}(u^3+u)$ και

$$dx=\frac{1}{10}(3u^2+1)du$$

- Για $x=0$ έχουμε $u=f(0)=f\left(f^{-1}(0)\right)=0$, αφού $f^{-1}(0)=\frac{1}{10}(0^3+0)=0$ και
- Για $x=1$ έχουμε $u=f(1)=f\left(f^{-1}(2)\right)=2$, αφού $f^{-1}(2)=\frac{1}{10}(2^3+2)=1$.

Οπότε:

$$E=\int_0^2|u|\frac{1}{10}(3u^2+1)du=$$

$$=\int_0^2 u\left(\frac{3}{10}u^2+\frac{1}{10}\right)du=$$

$$=\int_0^2\left(\frac{3}{10}u^3+\frac{1}{10}u\right)du=$$

$$=\frac{3}{10}\int_0^2 u^3du+\frac{1}{10}\int_0^2 udu==\frac{3}{10}\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^2+\frac{1}{10}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^2=$$

$$=\frac{3}{10}(4-0)+\frac{1}{10}(2-0)=\frac{6}{5}+\frac{1}{5}=\frac{7}{5} \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

27ο

27ο **ΘΕΜΑ Β** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

B1. Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$f(x)f''(x)+(f'(x))^2=1\Leftrightarrow (f'(x))'f(x)+f'(x)f'(x)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f'(x)f(x))'=(x)',\ x\in R,$$

άρα, υπάρχει $c\in R$ (πραγματική σταθερά), ώστε:

$$f'(x)f(x)=x+c \quad :(1).$$

Από την (1) για $x=0$ έχουμε:

$$f'(0)f(0)=0+c\Leftrightarrow 0\cdot 1=c\Leftrightarrow c=0.$$

Άρα, για κάθε $x\in R$, ισχύει:

$$f'(x)f(x)=x.$$

B2. Για κάθε $x\in R$ είναι

$$f'(x)f(x)=x\Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=2x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f^2(x))'=(x^2)', \text{ για κάθε } x\in R,$$

οπότε υπάρχει $c_1\in R$ (πραγματική σταθερά), ώστε:

$$f^2(x)=x^2+c_1 \quad :(2).$$

Από την (2) για $x=0$ έχουμε:

$$f^2(0)=0^2+c_1 \Leftrightarrow c_1=1.$$

Άρα, για κάθε $x\in R$, ισχύει:

$$f^2(x)=x^2+1 \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)}=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow |f(x)|=\sqrt{x^2+1} \quad :(E)$$

Επειδή είναι

$\sqrt{x^2+1}>0$ για κάθε $x\in R$, προκύπτει ότι:

$|f(x)|>0 \Leftrightarrow f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in R$.

Η συνάρτηση f ως παραγωγίσιμη στο R είναι συνεχής στο R και επειδή $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$, έπεται ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και επειδή $f(0)=1>0$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει :

$f(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

Έτσι από την (E) έχουμε ότι :

$$f(x)=\sqrt{x^2+1},\ x\in R.$$

B3. Για $x\in(-\infty,\ 0)$ είναι :

$$f(x)\,\eta\mu\frac{\pi}{x}=\sqrt{x^2+1}\cdot\eta\mu\frac{\pi}{x}=|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{\eta\mu\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\cdot\frac{\pi}{x}=$$

$$\overset{(x<0)}{=}\ -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{\eta\mu\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\cdot\frac{\pi}{x}=-\pi\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,\frac{\eta\mu\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}$$

Είναι : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\ \underset{\left(\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\pi}{x}=0\right)}{\overset{\left(u=\frac{\pi}{x}\right)}{=}}\ \lim\limits_{u\to0^-}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$, οπότε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)\,\eta\mu\frac{\pi}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\pi\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\ \frac{\eta\mu\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\right)=-\pi\sqrt{1+0}\cdot1=-\pi.$$

B4. Είναι,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+2)-f(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+2)^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2+1}\right)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+5}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+1}}\right)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+4}{|x|\sqrt{1+4\frac{1}{x}+5\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)\overset{(x>0)}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\left(4+4\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+4\frac{1}{x}+5\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}\right)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4+4\frac{1}{x}}{\sqrt{1+4\frac{1}{x}+5\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)=\frac{4+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0}}=2$$

27ο **ΘΕΜΑ Γ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Γ1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x^2+4>0$ και

$$x^2+4>x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+4}>\sqrt{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x|<\sqrt{x^2+4} \Rightarrow -\sqrt{x^2+4}<x<\sqrt{x^2+4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\sqrt{x^2+4}>0 \\ x-\sqrt{x^2+4}<0 \end{cases}$$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$x+\sqrt{x^2+4}>0 \text{ και } x-\sqrt{x^2+4}<0.$$

Γ2. Είναι

$$g'(x)=\left(e^x-e^{-x}\right)'=e^x+e^{-x}>0 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε:

- $$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x-e^{-x}\right)\overset{(0-(+\infty))}{=}-\infty,$$

  (αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}\underset{\left(\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty\right)}{\overset{(w=-x)}{=}}\lim\limits_{w\to+\infty} e^w=+\infty$).

- $$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-e^{-x}\right)\overset{((+\infty)-0)}{=}+\infty,$$

  αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\underset{\left(\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty\right)}{\overset{(w=-x)}{=}}\lim\limits_{w\to-\infty} e^w=0$

Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι

$$g(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty} g(x),\ \lim_{x\to+\infty} g(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}.$$

Γ3. i. Έχουμε

$$f\left(e^x-e^{-x}\right)=2x \Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=2x \quad :(1).$$

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$.

Επειδή $x_1,x_2\in g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, έπεται ότι υπάρχουν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $x_1=g(\alpha)$ και $x_2=g(\beta)$.

Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f\left(g(\alpha)\right)=f\left(g(\beta)\right)\Rightarrow$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} 2\alpha=2\beta\Rightarrow\alpha=\beta\Rightarrow g(\alpha)=g(\beta)\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι $1-1$.

ii. Είναι

$$f\left(e^x-e^{-x}\right)=2x \quad :(2).$$

Από την (2) θέτοντας όπου x το $\dfrac{f(x)}{2}$ έχουμε:

$$f\left(e^{\frac{f(x)}{2}}-e^{-\frac{f(x)}{2}}\right)=2\frac{f(x)}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(e^{\frac{f(x)}{2}}-e^{-\frac{f(x)}{2}}\right)=f(x)$$

$$\overset{(f:1-1)}{\Leftrightarrow} e^{\frac{f(x)}{2}}-e^{-\frac{f(x)}{2}}=x$$

$$\overset{\left(w=\frac{f(x)}{2}\right)}{\Leftrightarrow} e^{w}-e^{-w}=x$$

$$\Leftrightarrow\left(e^{w}\right)^{2}-1=xe^{w}$$

$$\Leftrightarrow\left(e^{w}\right)^{2}-xe^{w}-1=0\ ,\quad ((\Delta=(-x)^{2}-4\cdot 1\cdot(-1)=x^{2}+4))$$

$$\Leftrightarrow e^{w}=\frac{x\pm\sqrt{x^{2}+4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} e^{w}=\dfrac{x-\sqrt{x^{2}+4}}{2}<0 \\ \text{ή} \\ e^{w}=\dfrac{x+\sqrt{x^{2}+4}}{2}>0 \end{cases}$$

Η $e^{w}=\dfrac{x-\sqrt{x^{2}+4}}{2}<0$ απορρίπτεται , ενώ από την

$$e^{w}=\frac{x+\sqrt{x^{2}+4}}{2}>0$$

έχουμε:

$$e^{w}=\frac{x+\sqrt{x^{2}+4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow w=\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^{2}+4}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{2}=\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^{2}+4}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(x)=2\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$$

iii. Είναι,

$$f'(x)=\left(2\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)\right)'$$

$$=2\frac{1}{\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)'$$

$$=2\frac{1}{x+\sqrt{x^2+4}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}2x\right)$$

$$=\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}>0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

iv. Για κάθε $x\in D_f=\mathbb{R}$ ισχύει $-x\in D_f=\mathbb{R}$ και

$$f(-x)=2\ln\left(\frac{-x+\sqrt{(-x)^2+4}}{2}\right)=$$

$$=2\ln\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}{2\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}\right)$$

$$=2\ln\left(\frac{x^2+4-x^2}{2\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}\right)$$

$$=2\ln\left(\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$=2\ln\left[\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{-1}\right]$$

$$=-2\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)=-f(x)$$

Επομένως η f είναι **περιττή.**

v. Έχουμε:

$$f(x^6)+f(x^2-10)=0$$

$$\Leftrightarrow f(x^6)=-f(x^2-10)$$

$$\overset{(f\ \text{περιττή})}{\Leftrightarrow} f(x^6)=f(-(x^2-10))$$

$$\overset{(f\ 1-1)}{\Leftrightarrow} x^6=-(x^2-10)$$

$$\Leftrightarrow x^6+x^2-10=0$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x^2)=0,\ \text{όπου}\ \varphi(x)=x^3+x-10,\ x\in\mathbb{R}.$$

Είναι $\varphi'(x)=3x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως η φ είναι συνάρτηση $1-1$.

Έχουμε:

$$\varphi(x^2)=0\Leftrightarrow\varphi(x^2)=\varphi(2),\ (\text{αφού}\ \varphi(2)=2^3+2-10=0)$$

$$\overset{(\varphi:1-1)}{\Leftrightarrow} x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}.$$

27ο **ΘΕΜΑ Δ** **ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ**

Δ1. i. Έχουμε

$$2\int_0^{f(x)}\frac{1}{1-t^2}dt=x\ :(1)$$

Η συνάρτηση $g(t)=\dfrac{1}{1-t^2}$ έχει πεδίο ορισμού το

$D_g = \mathbb{R} - \{-1,1\} = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$ και είναι συνεχής ως ρητή.

Επομένως για να ορίζεται το

$$\int_0^{f(x)} \frac{1}{1-t^2}\,dt \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

πρέπει και αρκεί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$\begin{cases} 0\,,\ f(x) \in (-\infty,-1)\,, \text{ αδύνατο} \\ \text{ή} \\ 0\,,\ f(x) \in (-1,1) \\ \text{ή} \\ 0\,,\ f(x) \in (1,+\infty), \text{ αδύνατο} \end{cases} \Leftrightarrow 0\,,\ f(x) \in (-1,1) \Leftrightarrow f(x) \in (-1,1).$$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$-1 < f(x) < 1.$$

ii. Είναι:

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{2}\frac{(1+t)+(1-t)}{(1-t)(1+t)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{(1-t)'}{1-t} + \frac{(1+t)'}{1+t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\left(\ln(1-t)\right)' + \left(\ln(1+t)\right)'\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\ln(1-t) + \ln(1+t)\right)'$$

$$= \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right)', \text{ για κάθε } t \in (-1,1).$$

Οπότε μια παράγουσα της

$$\varphi(t) = \frac{1}{1-t^2} \text{ στο } (-1,1) \text{ είναι η}$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right).$$

Έτσι έχουμε:

$$2\int_0^{f(x)} \frac{1}{1-t^2}\,dt = x$$

$$\Leftrightarrow 2\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right]_0^{f(x)} = x$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right) - \ln 1 = x$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+f(x)}{1-f(x)} = e^x$$

$$\Leftrightarrow 1+f(x) = e^x - e^x f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x)\left(1+e^x\right) = e^x - 1$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \mathbf{f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}}}$$

Δ2. Είναι:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)' = \frac{\left(e^x-1\right)'\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2} =$$

$$= \frac{e^x\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = \frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2} > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Επομένως η f είναι και $1-1$.
Επειδή η f είναι $1-1$, έχει αντίστροφη συνάρτηση και το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών $f(\mathbb{R})$ της f.

Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι:

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-1,1).$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το

$$D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = (-1,1).$$

Για κάθε $y \in (-1,1)$ έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = y$$

$$\Leftrightarrow e^x - 1 = ye^x + y$$

$$\Leftrightarrow (1-y)e^x = 1 + y$$

$$\underset{y\in(-1,1)}{\overset{1-y\neq 0}{\Leftrightarrow}} e^x = \frac{1+y}{1-y}$$

$$\underset{\forall y\in(-1,1)}{\overset{\frac{1+y}{1-y}>0}{\Leftrightarrow}} x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

Άρα είναι

$$f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Έτσι η αντίστροφη συνάρτηση της f ορίζεται ως εξής:

$$f^{-1} : (-1,1) \to \mathbb{R} \text{ με}$$

$$\boxed{\mathbf{f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}}.$$

Δ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{e^{x}}-1}{\frac{1}{e^{x}}+1}=\frac{\frac{1-e^{x}}{e^{x}}}{\frac{1+e^{x}}{e^{x}}}=\frac{1-e^{x}}{1+e^{x}}=-\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}=-f(x).$$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(-x)=-f(x)\ :(\alpha).$$

Ακόμη, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f\left(f(-x)\right)\overset{(\alpha)}{=}f\left(-f(x)\right)\overset{(\alpha)}{=}-f\left(f(x)\right)\ :(\beta).$$

Για το ολοκλήρωμα

$$I=\int_{-\alpha}^{\alpha}f\left(f(x)\right)dx\ ,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

θέτουμε $u=-x$, οπότε είναι $x=-u$ και $dx=(-1)du$.

- Για $x=-\alpha$ είναι $u=\alpha$
- Για $x=\alpha$ είναι $u=-\alpha$

Άρα,

$$\begin{aligned}I=\int_{-\alpha}^{\alpha}f\left(f(x)\right)dx&=\int_{\alpha}^{-\alpha}f\left(f(-u)\right)(-1)du\\&=\int_{-\alpha}^{\alpha}f\left(f(-u)\right)du\\&\overset{(\beta)}{=}\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(-f\left(f(u)\right)\right)du\\&=-\int_{-\alpha}^{\alpha}f\left(f(x)\right)dx=-I\end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}I=-I&\Leftrightarrow 2I=0\\&\Leftrightarrow I=0\end{aligned}.$$

Δηλαδή

$$\boxed{\int_{-\alpha}^{\alpha}f\left(f(x)\right)dx=0}$$

Δ4. • Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \neq \pm\infty .$$

Επομένως η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

- Είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \in \mathbb{R}$,

οπότε η ευθεία

$$(\varepsilon_1): y = 1 \text{ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της } C_f \text{ στο } +\infty .$$

- Είναι $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \in \mathbb{R}$,

οπότε η ευθεία

$$(\varepsilon_2): y = -1 \text{ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της } C_f \text{ στο } -\infty .$$

Δ5. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_0^{\ln 2} |f(x)| dx .$$

Για $x \geq 0$ είναι:

$$x \geq 0 \overset{(e^x \text{ γν.αύξουσα})}{\Rightarrow} e^x \geq e^0 = 1 \Rightarrow e^x - 1 \geq 0 .$$

Επιπλέον είναι

$$e^x + 1 > 0 \text{ για κάθε } x \geq 0 .$$

Οπότε είναι

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \geq 0$$

για κάθε $x \in [0, \ln 2]$.

Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι :

$$E = \int_0^{\ln 2} f(x) dx =$$

$$= \int_0^{\ln 2} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x (1 - e^{-x})}{e^x (1 + e^{-x})} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{1 + e^{-x} - 2e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^{\ln 2} \left(1 - \frac{2e^{-x}}{1 + e^{-x}}\right) dx =$$

$$= \int_0^{\ln 2} 1 dx \ + 2\int_0^{\ln 2} \frac{\left(1+e^{-x}\right)'}{\left(1+e^{-x}\right)} dx = 1.\left(\ln 2 - 0\right) + 2\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^{\ln 2}$$

$$= \ln 2 + 2\left(\ln\left(1+e^{-\ln 2}\right) - \ln\left(1+e^{-0}\right)\right)$$

$$= \ln 2 + 2\left(\ln\left(1+\frac{1}{e^{\ln 2}}\right) - \ln 2\right)$$

$$= 2\ln\left(1+\frac{1}{e^{\ln 2}}\right) - \ln 2$$

$$= 2\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) - \ln 2$$

$$= 2\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln 2$$

$$= \ln\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right) - \ln 2$$

$$= \ln\left(\frac{\left(\frac{9}{4}\right)}{2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{9}{8}\right) \text{τ.μ.}$$