ΛΥΣΕΙΣ ΚΕΦ 3ο ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ 144-392

144. **α.** Είναι

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ , άρα συνx} > 0 \text{ ,οπότε έχουμε:}$$

$$(2\sigma\upsilon\nu x + 1)\cdot(5\sigma\upsilon\nu x - 4) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0 \text{ ή } 5\sigma\upsilon\nu x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \text{ (απορ. επειδή συνx} > 0\text{) ή } \sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}\text{ . Άρα } \sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}.$$

β. $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x + \frac{16}{25} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{9}{25}$.

Άρα

$$\eta\mu x = \frac{3}{5} \text{ ή } \eta\mu x = -\frac{3}{5}\text{. Αλλά } 0 < x < \frac{\pi}{2}\text{, άρα } \eta\mu x > 0\text{, οπότε } \eta\mu x = \frac{3}{5}$$

Επίσης

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi x = \frac{1}{\varepsilon\varphi x} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

145. **α.** Έχουμε

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ (x+y)^2-2xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ 1-2xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x=0 \text{ ή } y=0 \end{cases}$$

Οπότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με τα συστήματα

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x+y=-1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$$

Επομένως οι λύσεις είναι $(x,y)=(0,-1)$ ή $(x,y)=(-1,0)$.

β. Από την σχέση $\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega = -1$ και την ταυτότητα $\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega = 1$, έχουμε:

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu\omega=-1 \\ \sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega=1 \end{cases} \overset{\sigma\upsilon\nu\omega=x,\,\eta\mu\omega=y}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \quad \text{με} \quad -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$$

Αλλά σύμφωνα με το α) ερώτημα είναι: $(x,y)=(0,-1)$ ή $(x,y)=(-1,0)$, που είναι δεκτές. Επομένως έχουμε :

- $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$ και $\eta\mu\omega = -1$ και επειδή $0 \le \omega \le 2\pi$, είναι $\omega = \frac{3\pi}{2}$ ή
- $\sigma\upsilon\nu\omega = -1$ και $\eta\mu\omega = 0$ και επειδή $0 \le \omega \le 2\pi$, είναι $\omega = \pi$.

146. Έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = \frac{1}{1+(\frac{1}{4})^2} = \frac{16}{17} \text{ οπότε } \eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \frac{16}{17} = \frac{1}{17}$$

$$\text{Άρα} \quad A = 17\left(\frac{1}{17} - \frac{16}{17}\right) + 14 = -1$$

147. Έχουμε

$$\left(3\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^2 \geq 12 \Leftrightarrow 9\sigma\upsilon\nu^2 x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + 6\sigma\upsilon\nu x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \geq 12$$

$$\Leftrightarrow 9\sigma\upsilon\nu^2 x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 6 \geq 0 \Leftrightarrow \left(3\sigma\upsilon\nu x - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^2 \geq 0 \quad \text{που} \quad \text{ισχύει}$$

148. Έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu^3 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu^2 x = \sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^2 x)$$

$$= \sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)^2 \leq 0 \ \text{ διότι}$$

$$(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)^2 \geq 0 \ \text{ και } \sigma\upsilon\nu x < 0 \ \text{ καθόσον } \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

149. Έχουμε

$$\varepsilon\varphi^2\alpha + \sigma\varphi^2\alpha + 2 = \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha} + 2 = \frac{\eta\mu^4\alpha + \sigma\upsilon\nu^4\alpha + 2\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha}$$

$$= \frac{(\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha)^2}{\eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{1}{\eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha}$$

150. Έχουμε

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu^3\alpha}{\eta\mu\alpha} = \frac{\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{1 + \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}} + \frac{\sigma\upsilon\nu^3\alpha}{\eta\mu\alpha} = \frac{\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}} + \frac{\sigma\upsilon\nu^3\alpha}{\eta\mu\alpha}$$

$$= \frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot 1} + \frac{\sigma\upsilon\nu^3\alpha}{\eta\mu\alpha} = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \frac{\sigma\upsilon\nu^3\alpha}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu^3\alpha}{\eta\mu\alpha}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha(\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha)}{\eta\mu\alpha} = \sigma\varphi\alpha$$

151. Έχουμε

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^3\alpha - \eta\mu^3\alpha}{1 + \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{(\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu^2\alpha)}{1 + \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}$$

$$= \frac{(\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha)(1 + \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha)}{1 + \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} = \sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha$$

152. Έχουμε

$$1 + \frac{2}{\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha} = 1 + \frac{2}{\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}} = 1 + \frac{2}{\frac{\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}} = 1 + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$= \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = (\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2$$

153. Έχουμε

$$\eta\mu^3\alpha(1+\sigma\varphi\alpha)+\sigma\upsilon\nu^3\alpha(1+\varepsilon\varphi\alpha)=\eta\mu^3\alpha(1+\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha})+\sigma\upsilon\nu^3\alpha(1+\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha})$$

$$=\eta\mu^3\alpha(\frac{\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha})+\sigma\upsilon\nu^3\alpha(\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha})$$

$$=\eta\mu^2\alpha(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)+\sigma\upsilon\nu^2\alpha(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)$$

$$=(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)(\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha)=\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha$$

154. Έχουμε

$$\frac{\sigma\varphi\theta-\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\varphi\theta}+\sigma\upsilon\nu\theta\varepsilon\varphi\theta=\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}-\sigma\upsilon\nu\theta}{\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}}+\sigma\upsilon\nu\theta\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}+\eta\mu\theta=\frac{\sigma\upsilon\nu\theta(1-\eta\mu\theta)}{\sigma\upsilon\nu\theta}+\eta\mu\theta=1-\eta\mu\theta+\eta\mu\theta=1$$

155. Έχουμε

$$\eta\mu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\beta-\eta\mu^2\beta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\eta\mu^2\alpha(1-\eta\mu^2\beta)-\eta\mu^2\beta(1-\eta\mu^2\alpha)$$

$$=\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta-\eta\mu^2\beta+\eta\mu^2\beta\eta\mu^2\alpha=\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta$$

156. Έχουμε

$$\varepsilon\varphi\theta+\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta}=\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}+\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta}=\frac{\eta\mu\theta+\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta(1+\eta\mu\theta)}=\frac{(1+\eta\mu\theta)}{\sigma\upsilon\nu\theta(1+\eta\mu\theta)}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$$

157. Έχουμε

$$\eta\mu^2x\cdot\varepsilon\varphi x-\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\sigma\varphi x=\eta\mu^2x\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}-\sigma\upsilon\nu^2x\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\frac{\eta\mu^4x-\sigma\upsilon\nu^4x}{\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x}$$

$$=\frac{(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)(\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x)}{\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x}=\frac{\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x}-\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x}=\varepsilon\varphi x-\sigma\varphi x$$

158. Έχουμε

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^3\theta-\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\sigma\upsilon\nu^2\theta-1+\varepsilon\varphi\theta=\varepsilon\varphi\theta-(1-\sigma\upsilon\nu^2\theta)=\varepsilon\varphi\theta-\eta\mu^2\theta$$

159. Έχουμε

$$\frac{1-2\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}-\frac{1-3\eta\mu\theta}{1-\eta\mu\theta}=\frac{(1-2\eta\mu\theta)(1-\eta\mu\theta)-\sigma\upsilon\nu^2\theta(1-3\eta\mu\theta)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(1-\eta\mu\theta)}$$

$$=\frac{(1-2\eta\mu\theta)(1-\eta\mu\theta)-(1-\eta\mu^2\theta)(1-3\eta\mu\theta)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(1-\eta\mu\theta)}$$

$$=\frac{(1-\eta\mu\theta)[(1-2\eta\mu\theta)-(1+\eta\mu\theta)(1-3\eta\mu\theta)]}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(1-\eta\mu\theta)}$$

$$=\frac{1-2\eta\mu\theta-1+3\eta\mu\theta-\eta\mu\theta+3\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}=3\varepsilon\varphi^2\theta$$

160. Έχουμε

$$\frac{\eta\mu^4\alpha}{1-\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\frac{\eta\mu^4\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\frac{\eta\mu^4\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)}$$

$$=\frac{\eta\mu^4\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha)}=\varepsilon\varphi^4\alpha$$

161. Έχουμε

$$\sigma\varphi^2\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega}-\sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega(1-\eta\mu^2\omega)}{\eta\mu^2\omega}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega}\sigma\upsilon\nu^2\omega$$

$$=\sigma\varphi^2\omega\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega$$

162. Έχουμε

$$\frac{1+\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi^2\alpha}=\frac{1+\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}+\frac{1}{\varepsilon\varphi^2\alpha}}=\frac{1+\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi^2\alpha}{\frac{1+\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi^2\alpha}{\varepsilon\varphi^2\alpha}}=\varepsilon\varphi^2\alpha$$

163. Έχουμε

$$\frac{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}{\eta\mu^3 x}=\frac{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}-\eta\mu x}{\eta\mu^3 x}=\frac{\frac{\eta\mu x-\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{\eta\mu^3 x}=\frac{\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu x\eta\mu^3 x}$$

$$=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x\eta\mu^2 x}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu x}$$

164. Έχουμε

$$\sqrt{2\varepsilon\varphi x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}=\sqrt{2\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}=\sqrt{\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}$$

$$=\sqrt{\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}$$

$$=\sqrt{\frac{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}=\sqrt{(\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x})^2}=\left|\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right|=\frac{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=1+\varepsilon\varphi x$$

$(\eta\mu x>0,\ \sigma\upsilon\nu x>0)$

165. Έχουμε

$$A^2+B^2=(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha)^2+(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta)^2$$

$$=\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta+\eta\mu^2\beta\sigma\upsilon\nu^2\alpha+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha+$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta+\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta-2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

$$=\sigma\upsilon\nu^2\beta(\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha)+\eta\mu^2\beta(\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha)=\sigma\upsilon\nu^2\beta+\eta\mu^2\beta=1$$

166. Έχουμε

$$\frac{\varepsilon\varphi^3 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}+\frac{\sigma\varphi^3 x}{1+\sigma\varphi^2 x}=\frac{\frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}}{1+\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}+\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^3 x}}{1+\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x}}=\frac{\frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}}{\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}+\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^3 x}}{\frac{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x}}$$

$$=\frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu x\cdot 1}+\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu x\cdot 1}=\frac{\eta\mu^4 x+\sigma\upsilon\nu^4 x}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}=\frac{(\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x)^2-2\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}$$

$$=\frac{1-2\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}$$

167. Έχουμε

$$A^2+B^2=(2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha)^2+(\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha)^2$$

$$=4\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^4\alpha+\eta\mu^4\alpha-2\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha$$

$$=\sigma\upsilon\nu^4\alpha+\eta\mu^4\alpha-2\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha=(\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha)^2=1$$

168. Έχουμε

$$x^2+y^2+z^2=(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu\varphi)^2+(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\varphi)^2+(\alpha\eta\mu\theta)^2$$

$$=\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\theta\eta\mu^2\varphi+\alpha^2\eta\mu^2\theta$$

$$=\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\theta(\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\eta\mu^2\varphi)+\alpha^2\eta\mu^2\theta=\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\theta\cdot 1+\alpha^2\eta\mu^2\theta=\alpha^2(\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta)=\alpha^2$$

169. Έχουμε

$$\frac{ημx-συνx+1}{ημx+συνx+1}=\frac{ημx}{συνx+1}\Leftrightarrow(ημx-συνx+1)(συνx+1)=ημx(ημx+συνx+1)$$

$$\Leftrightarrow ημxσυνx+ημx-συν^2x-συνx+συνx+1=ημ^2x+ημxσυνx+ημx$$

$$\Leftrightarrow ημ^2x+συν^2x=1 \quad \text{που ισχύει.}$$

170. Έχουμε

$$\left(1+σφx-\frac{1}{ημx}\right)\left(1+εφx+\frac{1}{συνx}\right)=\left(1+\frac{συνx}{ημx}-\frac{1}{ημx}\right)\left(1+\frac{ημx}{συνx}+\frac{1}{συνx}\right)$$

$$=\left(\frac{ημx+συνx-1}{ημx}\right)\left(\frac{συνx+ημx+1}{συνx}\right)=\frac{(ημx+συνx)^2-1}{ημxσυνx}$$

$$=\frac{ημ^2x+συν^2x+2ημxσυνx-1}{ημxσυνx}=\frac{1+2ημxσυνx-1}{ημxσυνx}=2$$

171. Έχουμε

$$A=εφα+σφα-ημ^2αεφα-συν^2ασφα-2ημασυνα$$

$$=εφα(1-ημ^2α)+σφα(1-συν^2α)-2ημασυνα$$

$$=εφασυν^2α+σφαημ^2α-2ημασυνα=\frac{ημα}{συνα}συν^2α+\frac{συνα}{ημα}ημ^2α-2ημασυνα$$

$$=ημασυνα+συναημα-2ημασυνα=0$$

172. Έχουμε

$$\frac{α^2}{x^2}-\frac{β^2}{y^2}=\frac{(\frac{x}{συνx})^2}{x^2}+\frac{(yεφx)^2}{y^2}=\frac{x^2}{συν^2x\cdot x^2}-\frac{y^2εφ^2x}{y^2}=\frac{1}{συν^2x}-εφ^2x$$

$$=\frac{1}{συν^2x}-\frac{ημ^2x}{συν^2x}=\frac{1-ημ^2x}{συν^2x}=\frac{συν^2x}{συν^2x}=1$$

173. Έχουμε

$$ημ^2θ+συν^2θ=(-\frac{1}{3})^2+(-\frac{2\sqrt{2}}{3})=\frac{1}{9}+\frac{8}{9}=1$$

Άρα υπάρχει τέτοια γωνία θ και βρίσκεται στο $3^{ο}$ τεταρτημόριο αφού ημθ<0 και συνθ<0

174. Έχουμε

$$ημθ>\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{οπότε} \quad ημ^2θ>\frac{9}{4} \qquad συνθ\geq\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{οπότε} \quad συν^2θ\geq\frac{1}{2}$$

όμως $ημ^2θ+συν^2θ\geq\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}>1$ άτοπο άρα δεν υπάρχει τέτοια γωνία

175. **α.** Έχουμε

$$3ημx + 4συνx = 5 \Leftrightarrow 3ημx = 5 - 4συνx \ \text{ οπότε}$$

$$(3ημx)^2 = (5 - 4συνx)^2 \Leftrightarrow 9ημ^2x = 25 + 16συν^2x - 40συνx$$

$$\Leftrightarrow 9(1 - συν^2x) = 25 + 16συν^2x - 40συνx$$

$$\Leftrightarrow 9 - 9συν^2x = 25 + 16συν^2x - 40συνx \Leftrightarrow 25συν^2x - 40συνx + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (5συνx - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow συνx = \frac{4}{5}$$

$$\text{Οπότε} \quad 3ημx + 4\frac{4}{5} = 5 \Leftrightarrow ημx = \frac{3}{5}$$

β.

$$2συνx = 2 - ημx \ \text{ οπότε}$$

$$(2συνx)^2 = (2 - ημx)^2 \Leftrightarrow 4συν^2x = 4 + ημ^2x - 4ημx$$

$$\Leftrightarrow 4(1 - ημ^2x) = 4 + ημ^2x - 4ημx$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4ημ^2x = 4 + ημ^2x - 4ημx \Leftrightarrow 5ημ^2x - 4ημx = 0$$

$$\Leftrightarrow ημx = 0 \quad \text{ή} \quad ημx = \frac{4}{5}$$

$$\text{Για } ημx = 0 \text{ οπότε} \quad 2συνx = 2 \Leftrightarrow συνx = 1$$

$$\text{Για } ημx = \frac{4}{5} \quad \text{οπότε} \quad \frac{4}{5} + 2συνx = 2 \Leftrightarrow συνx = \frac{3}{5}$$

176. Έχουμε

$$ημx + συνx = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ \text{ οπότε}$$

$$(ημx + συνx)^2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 \Leftrightarrow ημ^2x + συν^2x + 2ημxσυνx = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2ημxσυνx = \frac{3}{4} \Leftrightarrow ημxσυνx = -\frac{1}{8} \quad \text{άρα } \ A = -\frac{1}{8}$$

$$B = ημ^3x + συν^3x = (ημx + συνx)(ημ^2x - ημxσυνx + συν^2x)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}[1 - (-\frac{1}{8})] = -\frac{9\sqrt{3}}{16}$$

$$Γ = (ημ^2x)^2 + (συν^2x)^2 = (ημ^2x + συν^2x)^2 - 2ημ^2xσυν^2x$$

$$= 1 - 2(ημxσυνx)^2 = 1 - 2(-\frac{1}{8})^2 = \frac{31}{32}$$

177. Έχουμε

$$\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1 \Leftrightarrow \left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^2+\left(\frac{2\lambda}{\lambda-1}\right)^2=1 \overset{\lambda\neq 1}{\Leftrightarrow} \frac{(\lambda+1)^2}{(\lambda-1)^2}+\frac{4\lambda^2}{(\lambda-1)^2}=1$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+1)^2+4\lambda^2=(\lambda-1)^2 \Leftrightarrow \lambda^2+2\lambda+1+4\lambda^2=\lambda^2-2\lambda+1$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda^2+\lambda^2=0 \Leftrightarrow 4\lambda(\lambda+1)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ ή } \lambda=-1$$

178. Έχουμε

$$\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\varphi x=1 \Leftrightarrow \frac{-\lambda}{\lambda-1}\cdot\frac{3\lambda}{\lambda+1}=1 \overset{\lambda\neq\pm 1}{\Leftrightarrow} -\frac{3\lambda^2}{\lambda^2-1}=1 \Leftrightarrow -3\lambda^2=\lambda^2-1$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{2} \text{ ή } \lambda=-\frac{1}{2}$$

§3.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1° ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙ

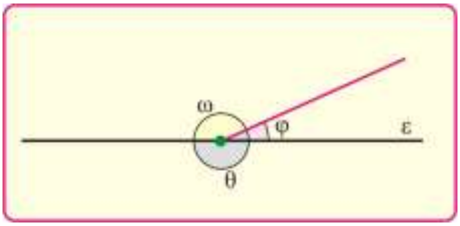
179. **α.** Είναι

$$\eta\mu^2\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi=1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2\varphi=1 \Leftrightarrow \frac{9}{25}+\sigma\upsilon\nu^2\varphi=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\varphi=\frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{4}{5} \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\varphi=-\frac{4}{5}.$$

Αλλά επειδή η γωνία φ είναι οξεία, είναι $\sigma\upsilon\nu\varphi>0$ και επομένως $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{4}{5}$.

β. Παρατηρούμε ότι $\omega=\pi-\varphi$ και $\theta=2\pi-\omega$,



άρα είναι: $\eta\mu\omega=\eta\mu(\pi-\varphi)=\eta\mu\varphi=\frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=\sigma\upsilon\nu(\pi-\varphi)=-\sigma\upsilon\nu\varphi=-\frac{4}{5}$

$$\eta\mu\theta=\eta\mu(2\pi-\omega)=\eta\mu(-\omega)=-\eta\mu\omega=-\frac{3}{5} \text{ και}$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\sigma\upsilon\nu(2\pi-\omega)=\sigma\upsilon\nu(-\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{4}{5}.$$

180. Έχουμε

$$-2040^0 = (-6)360^0 + 120^0$$

$$\eta\mu(-2040^0) = \eta\mu120^0 = \eta\mu(180^0 - 60^0) = \eta\mu60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu(-2040^0) = \sigma\upsilon\nu120^0 = \sigma\upsilon\nu(180^0 - 60^0) = -\sigma\upsilon\nu60^0 = -\frac{1}{2}$$

$$\varepsilon\varphi(-2040^0) = \varepsilon\varphi120^0 = \varepsilon\varphi(180^0 - 60^0) = -\varepsilon\varphi60^0 = -\sqrt{3}$$

$$\sigma\varphi(-2040^0) = \sigma\varphi120^0 = \sigma\varphi(180^0 - 60^0) = -\sigma\varphi60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{27\pi}{4} = 6\pi + \frac{3\pi}{4}$$

$$\eta\mu\frac{27\pi}{4} = \eta\mu(6\pi + \frac{3\pi}{4}) = \eta\mu\frac{3\pi}{4} = \eta\mu(\pi - \frac{\pi}{4}) = \eta\mu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{27\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu(6\pi + \frac{3\pi}{4}) = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{27\pi}{4} = \varepsilon\varphi(6\pi + \frac{3\pi}{4}) = \varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4} = \varepsilon\varphi(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sigma\varphi\frac{27\pi}{4} = \sigma\varphi(6\pi + \frac{3\pi}{4}) = \sigma\varphi\frac{3\pi}{4} = \sigma\varphi(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sigma\varphi\frac{\pi}{4} = -1$$

181. Έχουμε

$$\eta\mu(-\frac{23\pi}{6}) = \eta\mu(-4\pi + \frac{\pi}{6}) = \eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\varphi(\frac{9\pi}{4}) = \varepsilon\varphi(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu(-\frac{17\pi}{3}) = \sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu(6\pi - \frac{\pi}{3}) = \sigma\upsilon\nu(-\frac{\pi}{3}) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{74\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu(12\pi + \frac{2\pi}{6}) = \sigma\upsilon\nu(12\pi + \frac{\pi}{3}) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\varphi(-\frac{95\pi}{4}) = \sigma\varphi(-24\pi + \frac{\pi}{4}) = \sigma\varphi\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\text{Άρα } A = \frac{6\frac{1}{2} + 1 + 2\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = -10$$

182. Έχουμε

$$ημ(π+α) = -ημα, \quad συν(2π+θ) = συνθ$$

$$συν(\frac{3π}{2} - α) = -ημα, \quad εφ(\frac{3π}{2} + α) = -σφα,$$

$$ημ(2π-α) = ημ[π+(π-α) = -ημ(π-α) = -ημα$$

$$\text{Άρα } \; Α = \frac{-ημα(-ημα)(-σφα)}{-ημα} = ημασφα = ημα\frac{συνα}{ημα} = συνα$$

183. Έχουμε

$$ημ(180^\circ - α) = ημα, \; εφ(270^0 - α) = εφ[180^0 + (90^0 - α)] = εφ(90^0 - α) = σφα$$

$$συν(α - 360^\circ) = συν[-(360^0 - α)] = συν(360^0 - α) = συν(-α) = συνα$$

$$σφ(180^\circ + α) = σφα \qquad εφ(90^0 + α) = εφ[90^0 - (-α)] = σφ(-α) = -σφα$$

$$συν(270^\circ + α) = συν[360^0 + (-90^0 + α)] = συν(α - 90^0) = συν(90^0 - α) = ημα$$

$$Α = \frac{ημασφασυνα}{σφα(-σφα)ημα} = -\frac{συνα}{σφα} = -\frac{συνα}{\frac{συνα}{ημα}} = -ημα$$

184. Έχουμε

$$εφ(π-θ) = -εφθ, \quad συν(2π+θ) = συνθ$$

$$συν(\frac{π}{2}+θ) = συν[π - (\frac{π}{2} - θ)] = -συν(\frac{π}{2} - θ) = -ημθ$$

$$ημ(π+θ) = -ημθ, \qquad συν(-θ) = συνθ, \quad σφ(\frac{π}{2} - θ) = εφθ$$

$$\text{Άρα } \; Α = \frac{-εφθσυνθ(-ημθ)}{-ημθσυνθεφθ} = -1$$

185. Έχουμε

$$συν210^0 = συν(180^0 + 30^0) = -συν30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$συν225^0 = συν(180^0 + 45^0) = -συν45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$συν240^0 = συν(180^0 + 60^0) = -συν60^0 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } \quad Α = -\frac{\sqrt{3}}{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{1}{2}) = -\frac{\sqrt{6}}{8}$$

186. Έχουμε

$$ημ22^0 = ημ(90^0 - 68^0) = συν68^0 \quad ημ112^0 = ημ(180^0 - 68^0) = ημ68^0$$

$$συν112^0 = συν(180^0 - 68^0) = -συν68^0$$

Άρα $A=\eta\mu^2 68^\circ+\eta\mu^2 22^\circ-2\eta\mu^2 112^\circ+\sigma\upsilon\nu^3 112^\circ+\sigma\upsilon\nu^3 68^\circ-2\sigma\upsilon\nu^2 68^\circ$

$=\eta\mu^2 68^\circ+\sigma\upsilon\nu^2 68^\circ-2\eta\mu^2 68^\circ+(-\sigma\upsilon\nu 68^\circ)^3+\sigma\upsilon\nu^3 68^\circ-2\sigma\upsilon\nu^2 68^\circ$

$=-\eta\mu^2 68^\circ-\sigma\upsilon\nu^2 68^\circ-\sigma\upsilon\nu^3 68^\circ+\sigma\upsilon\nu^3 68^\circ=-(\eta\mu^2 68^\circ+\sigma\upsilon\nu^2 68^\circ)=-1$

187. Έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}=\frac{1}{1+(\frac{5}{12})^2}=\frac{1}{1+\frac{25}{144}}=\frac{144}{169} \text{ οπότε } \sigma\upsilon\nu x=\frac{12}{13} \text{ αφού } x\in(0,\frac{\pi}{2})$$

$$\eta\mu^2 x=1-\sigma\upsilon\nu^2 x=1-(\frac{12}{13})^2=1-\frac{144}{169}=\frac{25}{169} \text{ οπότε } \eta\mu x=\frac{5}{13} \text{ αφού } x\in(0,\frac{\pi}{2})$$

Άρα $A=\eta\mu x(-\sigma\upsilon\nu x)=-\frac{5}{13}\cdot\frac{12}{13}=-\frac{60}{169}$

188. Έχουμε

$\eta\mu(\alpha-90^\circ)=-\eta\mu(90^\circ-\alpha)=-\sigma\upsilon\nu\alpha \quad \eta\mu(\alpha-180^\circ)=-\eta\mu(180^0-\alpha)=-\eta\mu\alpha$

$\eta\mu(\alpha-270^\circ)=-\eta\mu(270^\circ-\alpha)=-\eta\mu[180+(90^\circ-\alpha)]=\eta\mu(90^\circ-\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha$

$\eta\mu(\alpha-360^\circ)=-\eta\mu(360^\circ-\alpha)=-\eta\mu(-\alpha)=\eta\mu\alpha$

$A=\eta\mu\alpha-\eta\mu(\alpha-90^\circ)-\eta\mu(\alpha-180^\circ)-\eta\mu(\alpha-270^\circ)-\eta\mu(\alpha-360^\circ)$

$=\eta\mu\alpha-(-\sigma\upsilon\nu\alpha)-(-\eta\mu\alpha)-\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha=\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha=\eta\mu\alpha$

189. Έχουμε

$\eta\mu(\pi+\theta)=-\eta\mu\theta, \quad \sigma\upsilon\nu(\theta-\frac{\pi}{2})=\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}-\theta)=\eta\mu\theta$

$\varepsilon\varphi(7\pi+\theta)=\varepsilon\varphi[6\pi+(\pi+\theta)]=\varepsilon\varphi(\pi+\theta)=\varepsilon\varphi\theta$

$\eta\mu(\frac{3\pi}{2}+\theta)=\eta\mu[2\pi+(-\frac{\pi}{2}+\theta)]=\eta\mu(-\frac{\pi}{2}+\theta)=-\eta\mu(\frac{\pi}{2}-\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta$

$\sigma\upsilon\nu(3\pi-\theta)=\sigma\upsilon\nu[2\pi+(\pi+\theta)]=\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta$

$\varepsilon\varphi(2\pi+\theta)=\varepsilon\varphi\theta$

Άρα $A=\frac{-\eta\mu\theta\eta\mu\theta\varepsilon\varphi\theta}{-\sigma\upsilon\nu\theta(-\sigma\upsilon\nu\theta)\varepsilon\varphi\theta}=-\varepsilon\varphi^2\theta$

190. Έχουμε

$$\eta\mu(\pi+\theta)=-\eta\mu\theta,\quad \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}-\theta)=\eta\mu\theta\quad \sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\eta\mu(\frac{3\pi}{2}+\theta)=\eta\mu[2\pi+(-\frac{\pi}{2}+\theta)]=\eta\mu(-\frac{\pi}{2}+\theta)=-\eta\mu(\frac{\pi}{2}-\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\varepsilon\varphi(\frac{3\pi}{2}-\theta)=\varepsilon\varphi[\pi+(\frac{\pi}{2}-\theta)=\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sigma\varphi\theta$$

$$\varepsilon\varphi(-\theta)=-\varepsilon\varphi\theta,\quad \varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sigma\varphi\theta,\ \ \varepsilon\varphi(2\pi+\theta)=\varepsilon\varphi\theta$$

Άρα $A=\dfrac{-\eta\mu\theta\eta\mu\theta-(-\sigma\upsilon\nu\theta)(-\sigma\upsilon\nu\theta)}{\sigma\varphi\theta(-\varepsilon\varphi\theta)+(-\sigma\varphi\theta)\varepsilon\varphi\theta}=\dfrac{-\eta\mu^2\theta-\sigma\upsilon\nu^2\theta}{-1-1}=\dfrac{1}{2}$

191. Έχουμε

$\eta\mu^2\theta=1-\sigma\upsilon\nu^2\theta=1-(\frac{4}{5})^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$ οπότε $\eta\mu\theta=\frac{3}{5}$ αφού $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$

$$\eta\mu(\pi+\theta)=-\eta\mu\theta=-\frac{3}{5}$$

$$\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sigma\upsilon\nu[\pi-(\frac{\pi}{2}-\theta)]=\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}-\theta)=-\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}-\theta)=-\eta\mu\theta=-\frac{3}{5}$$

$$\sigma\upsilon\nu(2\pi-\theta)=\sigma\upsilon\nu(-\theta)=\frac{4}{5},\quad \eta\mu(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{4}{5},\quad \varepsilon\varphi(\pi+\theta)=\varepsilon\varphi\theta=\frac{3}{4}$$

$$\eta\mu(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{4}{5}$$

Άρα $A=\dfrac{-\frac{3}{5}(-\frac{3}{5})+\frac{4}{5}\frac{4}{5}}{\frac{3}{4}\frac{4}{5}}=\dfrac{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{1}{\frac{3}{5}}=\dfrac{5}{3}$

192. Έχουμε

$$\varepsilon\varphi(\pi+x)=\varepsilon\varphi x,\quad \sigma\upsilon\nu(-x)=\sigma\upsilon\nu x$$

$$\eta\mu(9\pi+x)=\eta\mu[8\pi+(\pi+x)]=\eta\mu(\pi+x)=-\eta\mu x$$

$$\sigma\varphi(\frac{17\pi}{2}-x)=\sigma\varphi[8\pi+(\frac{\pi}{2}-x)]=\sigma\varphi(\frac{\pi}{2}-x)=\varepsilon\varphi x$$

$$\sigma\upsilon\nu(x-2\pi)=\sigma\upsilon\nu(2\pi-x)=\sigma\upsilon\nu(-x)=\sigma\upsilon\nu x$$

$$\sigma\upsilon\nu(\frac{13\pi}{2}+x)=\sigma\upsilon\nu[6\pi+(\frac{\pi}{2}+x)=\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+x)=-\eta\mu x$$

Άρα $A=\dfrac{\varepsilon\varphi x\sigma\upsilon\nu x(-\eta\mu x)}{\varepsilon\varphi x\sigma\upsilon\nu x(-\eta\mu x)}=1$

193. Έχουμε

$\varepsilon\varphi 91^0 = \varepsilon\varphi(180^0 - 89^0) = -\varepsilon\varphi 89^0 = -\sigma\varphi 1^0$

$\varepsilon\varphi 92^0 = \varepsilon\varphi(180^0 - 88^0) = -\varepsilon\varphi 88^0 = -\sigma\varphi 2^0$

Άρα $A = \varepsilon\varphi 1^0(-\sigma\varphi 1^0)\varepsilon\varphi 2^0(-\sigma\varphi 2^0) = (-1)(-1) = 1$

$\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} + x) = -\eta\mu x \qquad \eta\mu(\frac{\pi}{2} + x) = \sigma\upsilon\nu x$

$\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x, \qquad \sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x, \qquad \eta\mu(-x) = -\eta\mu x$

Άρα $B = (-\eta\mu x)^2 - \eta\mu x(-\eta\mu x) - 2\sigma\upsilon\nu x(-\sigma\upsilon\nu x) = \eta\mu^2 x + \eta\mu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x$

$= 2(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) = 2$

Τελικά $B = 2A$

194. Έχουμε

$$\eta\mu 135^0 = \eta\mu(180^0 - 45^0) = \eta\mu 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 120^0 = \eta\mu(180^0 - 60^0) = -\sigma\upsilon\nu 60^0 = -\frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 135^0 = \sigma\upsilon\nu(180^0 - 45^0) = -\sigma\upsilon\nu 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi(-120^0) = -\varepsilon\varphi 120^0 = -\varepsilon\varphi(180^0 - 60^0) = \varepsilon\varphi 60^0 = \sqrt{3}$$

$$\varepsilon\varphi 135^0 = \varepsilon\varphi(180^0 - 45^0) = -\varepsilon\varphi 45^0 = -1$$

$$\text{Άρα} \quad A = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{1}{2}) + (-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}(-1)} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}}{-\sqrt{3}} = 0$$

195. Έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu 135^0 = \sigma\upsilon\nu(180^0 - 45^0) = -\sigma\upsilon\nu 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\eta\mu 120^0 = \eta\mu(180^0 - 60^0) = \eta\mu 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\eta\mu 150^0 = \eta\mu(180^0 - 30^0) = \eta\mu 30^0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα} \quad A = (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2(\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{2}{4}\cdot 2 = 1$$

196. Έχουμε

$\varepsilon\varphi(45^\circ - x) + \varepsilon\varphi(45^\circ + x) = 10$ οπότε $[\varepsilon\varphi(45^\circ - x) + \varepsilon\varphi(45^\circ + x)]^2 = 10^2$

$$εφ^2(45^\circ - x) + εφ^2(45^\circ + x) + 2εφ(45^\circ - x)εφ(45^\circ + x) = 100$$
$$εφ^2(45^\circ - x) + εφ^2(45^\circ + x) + 2εφ(45^\circ - x)σφ(45^\circ - x) = 100$$
$$εφ^2(45^\circ - x) + εφ^2(45^\circ + x) + 2 \cdot 1 = 100$$
$$εφ^2(45^\circ - x) + εφ^2(45^\circ + x) = 98$$

197. Έχουμε

i. $Β + Γ = 90^0$ άρα ημΒ = συνΓ και συνΒ = ημΓ οπότε ημΒ + συνΒ = συνΓ + ημΓ

ii. $Β + Γ = 90^0$ άρα εφΒ = σφΓ και σφΒ = εφΓ οπότε εφΒ + σφΒ = σφΓ + εφΓ

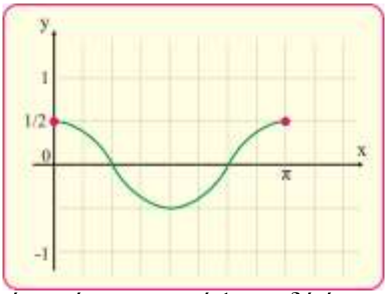
§3.4 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

198. **α.** Η f έχει ελάχιστη τιμή

$$f_{min} = -\frac{1}{2} \text{ , μέγιστη τιμή } f_{max} = \frac{1}{2}$$

και η περίοδος της είναι $T = \frac{2π}{2} = π$

β.



γ. Η συνάρτηση f δεν μπορεί να πάρει την τιμή 1, επειδή έχει μέγιστη τιμή το $\frac{1}{2}$.

Άλλωστε αν η συνάρτηση f μπορούσε να πάρει την τιμή 1, θα είχαμε

$$\frac{1}{2}συν2x = 1 \Leftrightarrow συν2x = 2 \text{, άτοπο γιατί } -1 \le συν2x \le 1$$

199. **α.** Είναι

$συν\frac{17π}{10} = συν\left(π + \frac{7π}{10}\right) = -συν\frac{7π}{10} = συν\frac{3π}{10}$ (1) .Αλλά $\frac{π}{6} < \frac{π}{4} < \frac{3π}{10} < π$ και επειδή η συνάρτηση $f(x) = συνx$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, π]$, είναι

$συν\frac{π}{6} > συν\frac{π}{4} > συν\frac{3π}{10}$ και λόγω της (1) προκύπτει $συν\frac{17π}{10} < συν\frac{π}{4} < συν\frac{π}{6}$.

β. Είναι $ημ\left(\frac{π}{2} - x_1\right) = συνx_1$ και $ημ\left(\frac{π}{2} - x_2\right) = συνx_2$.

Αλλά $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$ και επειδή η συνάρτηση $f(x) = συνx$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, είναι : $x_1 < x_2 \Rightarrow συνx_1 < συνx_2 \Leftrightarrow ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) < ημ\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$

200. **α.** Η περίοδος της συνάρτησης

$$f(x) = -3συν2x \text{ είναι } T = \frac{2\pi}{2} = \pi .$$

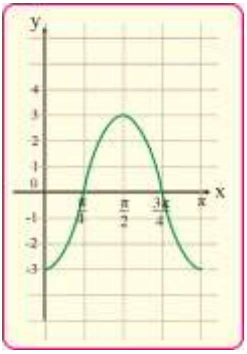
Η μέγιστη τιμή της f είναι $f_{max} = 3$, όταν:

$συν2x = -1 \Leftrightarrow 2x = 2κ\pi + \pi \Leftrightarrow x = κ\pi + \frac{\pi}{2},\ κ \in R$ και η ελάχιστη τιμή της είναι $f_{min} = -3$, όταν: $συν2x = 1 \Leftrightarrow 2x = 2κ\pi \Leftrightarrow x = κ\pi,\ κ \in R$.

β.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
συν2x	1	0	-1	0	1
$f(x) = -3συν2x$	-3	0	3	0	-3

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα τιμών σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση στο διάστημα $[0, \pi]$.

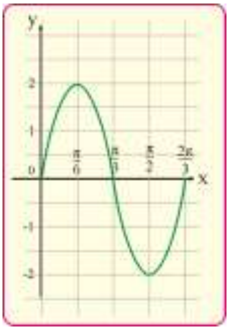


201. **α.** Είναι

$$ημ(\pi - 3x) = ημ3x \text{ και } συν\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = ημ3x ,$$

άρα: $f(x) = ημ(\pi - 3x) + συν\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = ημ3x + ημ3x = 2ημ3x$.

β. Η συνάρτηση έχει μέγιστο $f_{max} = 2$, ελάχιστο $f_{min} = -2$ και περίοδο $T = \frac{2\pi}{3}$.



202. **α.** Για τη συνάρτηση

$$g(t) = 6\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) \text{ είναι : } \max g(t) = 6 \quad \text{και} \quad \min g(t) = -6$$

Συνεπώς $\max h(t) = 8 + \max g(t) = 8 + 6 = 14$ και $\min h(t) = 8 + \min g(t) = 8 - 6 = 2$, δηλαδή το μέγιστο ύψος που φτάνει το κάθισμα είναι $14\,m$ και το ελάχιστο $2\,m$.

Όταν το κάθισμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος έχουμε:

$$h(t) = 14 \Leftrightarrow 8 + 6\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) = 14 \Leftrightarrow 6\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) = 6 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi t}{30} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{\pi t}{30} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \pi t = 60\kappa\pi + 15\pi \Leftrightarrow t = 60\kappa + 15, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Αλλά $0 \le t \le 180 \Leftrightarrow 0 \le 60\kappa + 15 \le 180 \Leftrightarrow -15 \le 60\kappa \le 165 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le \kappa \le \frac{11}{4}$,

οπότε

$$\kappa = 0 \text{ ή } \kappa = 1 \text{ ή } \kappa = 2 \text{ και άρα } t = 15 \text{ ή } t = 75 \text{ ή } t = 135.$$

- Όταν το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο ύψος έχουμε:

$$h(t) = 2 \Leftrightarrow 8 + 6\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) = 2 \Leftrightarrow 6\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) = -6 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi t}{30} = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{\pi t}{30} = 2\lambda\pi + \pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi t = 60\lambda\pi - 15\pi \Leftrightarrow t = 60\lambda - 15,\ \lambda \in R.$$

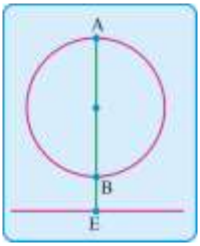
Αλλά

$$0 \le t \le 180 \Leftrightarrow 0 \le 60\lambda - 15 \le 180 \Leftrightarrow 15 \le 60\lambda \le 195 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \lambda \le \frac{13}{4},$$

οπότε

$$\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = 3 \text{ και άρα } t = 45 \text{ ή } t = 105 \text{ ή } t = 165.$$

β. Για την διάμετρο της ρόδας έχουμε:



$d=(AE)-(BE)=\max h(t)-\min h(t)=14-2=12m$, οπότε η ακτίνα της ρόδας είναι 6 m.

γ. Η περίοδος της κίνησης είναι $T=\dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{30}}=60\text{ sec}$ και επομένως οι δύο φίλες έκαναν

$\dfrac{180}{60}=3$ γύρους.

δ. **i.** Είναι: $h(0)=8+6\eta\mu\left(\dfrac{0}{30}\right)=8$, $h(15)=8+6\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=14$,

$h(30)=8+6\eta\mu(\pi)=8$, $h(45)=8+6\eta\mu\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=2$,

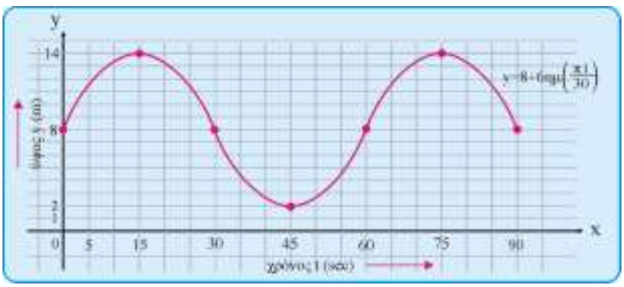
$h(60)=8+6\eta\mu(2\pi)=8$, $h(75)=8+6\eta\mu\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)=8+6\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=14$

$h(90)=8+6\eta\mu(3\pi)=8+6\eta\mu(\pi)=8$

Άρα έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

t	0	15	30	45	60	75	90
$h(t)$	8	14	8	2	8	14	8

ii. Επομένως το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)$ με $0\le t\le 90$ στο σύστημα συντεταγμένων είναι:



203. **α.** Ξέρουμε ότι η περίοδος δίνεται από τον τύπο $T = \frac{2\pi}{\omega}$, μας δίνεται από τα δεδομένα της άσκησης ότι η περίοδος είναι 6 sec, επομένως έχουμε:

$$\frac{2\pi}{\omega} = 6 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{3}$$

β. Έχουμε

$$h(0) = 20 \Leftrightarrow \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega \cdot 0) + \beta = 20 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1 + \beta = 20 \Leftrightarrow \boxed{\alpha + \beta = 20}$$

Εφόσον η περίοδος του ελατηρίου είναι 6 sec και μια πλήρη ταλάντωση σημαίνει κίνηση στις θέσεις: ελάχιστο-ηρεμία-μέγιστο-ηρεμία-ελάχιστο, άρα το παιγνίδι θα χρειαστεί το μισό χρόνο (3 sec) για να φτάσειστο μέγιστο ύψος του.

$$h(3) = 100 \Leftrightarrow \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} \cdot 3\right) + \beta = 100 \Leftrightarrow \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\pi + \beta = 100 \Leftrightarrow \boxed{-\alpha + \beta = 100}$$

Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων και έχουμε:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 20 \\ -\alpha + \beta = 100 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2\beta = 120 \Rightarrow \boxed{\beta = 60}. \text{ Επομένως: } \alpha + 60 = 20 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -40}$$

Άρα η συνάρτηση θα έχει τύπο:

$$h(t) = -40 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 60$$

γ. Έχουμε

$$h(14) = -40 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{14\pi}{3}\right) + 60 = -40 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{12\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + 60 = -40 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2 \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + 60$$

$$= -40 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 60 = -40 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 60 = -40 \cdot \left(-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + 60$$

$$= -40 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 60 = 20 + 60 = 80$$

δ) Η γραφική παράσταση φαίνεται δίπλα.

204. **α.** Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f παρατηρούμε ότι η περίοδος της είναι ίση με $T = \pi$. Επίσης γνωρίζουμε ότι $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

$$\text{Άρα}: \left.\begin{matrix} T = \pi \\ T = \frac{2\pi}{\omega} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\omega} = \pi \Leftrightarrow 2\pi = \pi \cdot \omega \Leftrightarrow \omega = 2$$

Εφόσον η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f είναι 3 και ισχύει ότι ρ>0 έχουμε ότι ρ=3.

β. Η συνάρτηση $g(x)=\alpha x+\beta$ διέρχεται (όπως φαίνεται από το σχήμα) από τα σημεία

$O(0,0)$ και $A(\frac{\pi}{4},3)$ άρα οι συντεταγμένες τους την επαληθεύουν , δηλαδή ισχύουν

τα εξής : $g(0)=0 \Leftrightarrow \alpha\cdot 0+\beta=0 \Leftrightarrow \beta=0$ και

$$g(\frac{\pi}{4})=3 \Leftrightarrow \alpha\cdot\frac{\pi}{4}+0=3 \Leftrightarrow \alpha=\frac{3\cdot 4}{\pi} \Leftrightarrow \alpha=\frac{12}{\pi}$$

Άρα η συνάρτηση είναι η $g(x)=\frac{12}{\pi}x$.

γ. Έχουμε ότι $3\eta\mu(2x)-\frac{12x}{\pi}=0$, ισοδύναμα η εξίσωση γίνεται :

$3\eta\mu(2x)=\frac{12x}{\pi} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ δηλαδή οι λύσεις της εξίσωσης είναι τα σημεία τομής

των δύο γραφικών παραστάσεων f και g στο διάστημα $[0,\pi]$ τα οποία είναι τα :

$O(0,0)$ και $A(\frac{\pi}{4},3)$, άρα το πλήθος των λύσεων στο διάστημα αυτό είναι δύο.

205. **α.** Επειδή

$$f(t)=-2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right)+2,\ \text{έχουμε,}$$

$$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$$

δηλαδή η f ορίζεται σε πλάτος μιας περιόδου της.

β. Είναι

$$-1\le\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right)\le 1 \overset{(-2)}{\Leftrightarrow} 2\ \ge -2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right)\ge -2 \overset{+2}{\Leftrightarrow} 4\ge -2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right)+2\ \ge 0 \Leftrightarrow 0\le f(t)\le 4$$

Η τιμή 0 επιτυγχάνεται όταν

$$f(t)=0 \Leftrightarrow -2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right)+2=0 \Leftrightarrow -2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right)=-2 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right)=1$$

και αφούη f (και συνεπώς και το $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right)$) ορίζεται σε πλάτος μιας περιόδου της, θα είναι

$$\frac{\pi}{2}t=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t=1\ (\text{δεκτή})$$

Η τιμή 4 επιτυγχάνεται όταν

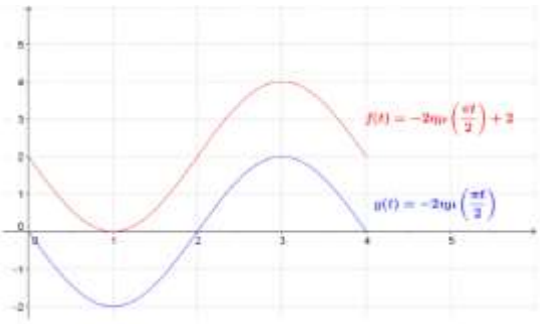
$$f(t) = 4 \Leftrightarrow -2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 2 = 4 \Leftrightarrow -2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 2 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) = -1$$

οπότε, όπως και παραπάνω, θα είναι

$$\frac{\pi}{2}t = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow t = 3 \text{ (δεκτή)}$$

Επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με 0 για $t = 1$ και μέγιστο ίσο με 4 για $t = 3$.

γ.



206. **α.** Η περίοδος της συνάρτησης f είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = \frac{8\pi}{\pi}\ 8$$

β. i. Το σημείο Δ ανήκει στη γραφική παράσταση της f κι έχει τετμημένη $\frac{2}{3}$, οπότε

$$\Delta\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3}\right) = 2\eta\mu\ \frac{2\pi}{12} = 2\eta\mu\ \frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

Άρα

$$\Delta\left(\frac{2}{3}, 1\right)$$

ii. Το σημείο Γ έχει τεταγμένη 1 κι επειδή ανήκει στη γραφική παράσταση της f, λύνω την εξίσωση $f(x) = 1$. Οπότε:

$$f(x)=1 \Leftrightarrow 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}x\right)=1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}x\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}x\right)=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{\pi}{4}x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\ \frac{\pi}{4}x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases},\kappa\in Z \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\pi}{4}x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\ \frac{\pi}{4}x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases},\kappa\in Z \Leftrightarrow \begin{cases}x=8\kappa+\frac{2}{3}\\ x=8\kappa+\frac{10}{3}\end{cases},\kappa\in Z$$

Λύνω την ανίσωση $x>\frac{2}{3}$

1η περίπτωση:

$8\kappa+\frac{2}{3}>\frac{2}{3} \Leftrightarrow 8\kappa>0 \Leftrightarrow \kappa>0$ κι αφού $\kappa\in Z$ η μικρότερη τιμή για την οποία ισχύει

είναι $\kappa=1$ για την οποία έχουμε τη λύση $x=8+\frac{2}{3}=\frac{26}{3}$

2η περίπτωση:

$8\kappa+\frac{10}{3}>\frac{2}{3} \Leftrightarrow 8\kappa>-\frac{8}{3} \Leftrightarrow \kappa>-\frac{1}{3}$ κι αφού $\kappa\in Z$ η μικρότερη τιμή για την οποία

ισχύει είναι $\kappa=0$ για την οποία έχουμε τη λύση $x=0+\frac{10}{3}=\frac{10}{3}$.

Επειδή $\frac{10}{3}<\frac{26}{3}$ οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι $\Gamma\left(\frac{10}{3},1\right)$.

Επομένως $B\left(\frac{10}{3},0\right)$.

207. **α.** Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f παρατηρούμε ότι έχει περίοδο

$T=\frac{\pi}{2}$.

β. Ισχύει ότι:

Ο αριθμός α είναι η μέγιστη τιμή της f, οπότε $\alpha=3$ και

$$T=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \omega\pi=4\pi \Leftrightarrow \omega=4$$

γ. Για $\alpha=3$ και $\omega=4$ έχουμε: $f(x)=3\eta\mu(4x)$.

Από τη γραφική παράσταση της f παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $\kappa \in R$ για τους οποίους η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μοναδική λύστη στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι το 3 και το -3.

Οπότε:

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow 3\eta\mu(4x) = 3 \Leftrightarrow \eta\mu(4x) = 1 \Leftrightarrow 4x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, \kappa \in Z$$

Όμως

$$0 \le \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{8} \le \frac{\kappa\pi}{2} < \frac{3\pi}{8} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \le \kappa\pi < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le \kappa < \frac{3}{4} \overset{\kappa \in Z}{\Leftrightarrow} \kappa = 0$$

Άρα η μοναδική λύση αυτής της εξίσωσης είναι

$$x = \frac{0 \cdot \pi}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$$

$$f(x) = -3 \Leftrightarrow 3\eta\mu(4x) = -3 \Leftrightarrow \eta\mu(4x) = -1 \Leftrightarrow 4x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, \kappa \in Z$$ Όμως

$$0 \le \frac{\kappa\pi}{2} - \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{8} \le \frac{\kappa\pi}{2} < \frac{5\pi}{8} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \le \kappa\pi < \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \kappa < \frac{5}{4} \overset{\kappa \in Z}{\Leftrightarrow} \kappa = 1$$

Άρα η μοναδική λύση αυτής της εξίσωσης είναι

$$x = \frac{1 \cdot \pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$$

208. Η περίοδος των συναρτήσεων της μορφής

ημωx ή συνωx είναι $\frac{2\pi}{\omega}$, άρα η περίοδος της $f(x) = \eta\mu\frac{3x}{4}$ είναι $T = \frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi}{3}$.

Η περίοδος της $g(x) = \sigma\upsilon\nu\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ είναι ίδια με την περίοδο της συν3x, αφού η g προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της συν3x, αφού η g προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της συν3x κατά $\frac{\pi}{4}$ προς τα «αριστερά». Άρα η περίοδος της g είναι $\frac{2\pi}{3}$. Η περίοδος των συναρτήσεων της μορφής εφωx ή σφωx είναι $\frac{\pi}{\omega}$, άρα η περίοδος της $h(x)=\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$ είναι $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$ ενώ της $t(x)=\sigma\varphi 4x$ είναι $\frac{\pi}{4}$.

209. Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή μιας συνάρτησης της μορφής ρημωx είναι $|\rho|$ και $-|\rho|$ αντίστοιχα. Άρα για την f μέγιστη τιμή η $|-2|=2$ και ελάχιστη η $-|-2|=-2$. Η g προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της 4συνx κατά 3 προς τα κάτω. Άρα αφού η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της 4συνx είναι 4 και -4 αντίστοιχα της g θα είναι $4-3=1$ και $-4-3=-7$ αντίστοιχα.

210. Έχουμε

i. Ελάχιστο-μέγιστο της $\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}$ είναι τα -1 και 1 αντίστοιχα, της $3\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}$ τα -3 και 3 αντίστοιχα και της f(x) τα -6 και 0 αντίστοιχα.

ii. Περίοδος της f(x) είναι η $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$

211. Η γραφική παράσταση της $\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της συνx με μετατόπιση προς τα αριστερά κατά $\frac{\pi}{2}$. Η περίοδος της f είναι Τ=2π και τη μελετούμε στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

Για $x=-\frac{\pi}{2},\ 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$ παίρνουμε αντίστοιχα $-3,\ 0,\ 3,\ 0,\ -3$ για την f ......

212. Η περίοδος μιας συνάρτησης της μορφής αυτής είναι:

$$T=\frac{2\pi}{\frac{\beta}{2}}=\frac{4\pi}{\beta}.\ \text{Άρα}\ \frac{4\pi}{\beta}=4\pi\Leftrightarrow\beta=1.$$

Η μέγιστη τιμή της είναι $|\alpha|=\alpha$, γιατί α>0. Επομένως α=2.

213. Η περίοδος μιας συνάρτησης αυτής της μορφής είναι:

$$T=\frac{\pi}{\frac{3\beta}{4}},\ \text{δηλαδή}\ \frac{4\pi}{3\beta}=\pi\Leftrightarrow\beta=\frac{4}{3}$$

214. Έχουμε

$$f(x)=2ημ\left(3x-\frac{π}{4}\right)-3συν\left(\frac{3π}{4}-3x\right)=2ημx\left(3x-\frac{π}{4}\right)-3συν\left[\frac{π}{2}-\left(3x-\frac{π}{4}\right)\right]$$

$$=2ημ\left(3x-\frac{π}{4}\right)-3ημ\left(3x-\frac{π}{4}\right)=-ημ\left(3x-\frac{π}{4}\right)$$

Η συνάρτηση $-ημ\left(3x-\frac{π}{4}\right)$ έχει μέγιστη τιμή 1 και ελάχιστη τιμή -1.

215. Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της συνάρτησης εφ2x κατά μια μονάδα προς τα πάνω και είναι περιοδική με περίοδο $\frac{π}{2}$. Τη σχεδιάζουμε στο διάστημα $\left(-\frac{π}{4},\frac{π}{4}\right)$ αφού δώσουμε στο x τις τιμές

$-\frac{π}{6},\ -\frac{π}{8},\ -\frac{π}{12},\ 0,\ \frac{π}{12},\ \frac{π}{8},\ \frac{π}{6}$, με αντίστοιχες τιμές για την f

$$1-\sqrt{3},\ 0,\ 1-\frac{\sqrt{3}}{3},\ 1,\ 1+\frac{\sqrt{3}}{3},\ 2,\ 1+1\sqrt{3}$$

216. Η f είναι περιοδική με περίοδο

$\frac{π}{2}$ και θα τη μελετήσουμε στο $\left(0,\frac{π}{2}\right)$. Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{π}{2}\right)$ με ασύμπτωτες τις x=0 και $x=\frac{π}{2}$. Δίνοντας στο x τις τιμές

$\frac{π}{12},\ \frac{π}{6},\ \frac{π}{4},\ \frac{π}{3},\ \frac{5π}{12},\ \frac{π}{2}$ οι αντίστοιχες τιμές για την f είναι $\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ \frac{-\sqrt{3}}{3},\ -\sqrt{3}$ οπότε …

217. Η συνάρτηση g έχει περίοδο

$$T=\frac{π}{\frac{1}{2}}=2π \text{ άρα τη μελετούμε στο } (-π,π).$$

Για $x=-\frac{π}{2},\ -\frac{π}{3},\ 0,\ \frac{π}{3},\ \frac{π}{2}$ έχουμε αντίστοιχα $-2,\ \frac{2\sqrt{3}}{3},\ 0,\ \frac{2\sqrt{3}}{1},\ 2$ για την g…

218. Η πρώτη καμπύλη έχει περίοδο Τ=2π, έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή 3, -3 και για x=0 παίρνει τη μέγιστη τιμή 3. Η συνάρτηση είναι η f(x)=3συνx.

Η δεύτερη καμπύλη έχει περίοδο Τ΄=6π. Η συνάρτηση είναι της μορφής g(x)=ασυνβx. Επειδή η μέγιστη και ελάχιστη τιμή είναι 1, –1 αντίστοιχα και Τ΄=6π, θα έχουμε: $g(x)=\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}$.

§3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

219. **α.** Για να είναι η τιμή $x=\frac{\pi}{4}$ λύση της εξίσωσης $3\sigma\upsilon\nu 4x+3=0$, πρέπει να την επαληθεύει. Πράγματι $3\sigma\upsilon\nu 4\frac{\pi}{4}+3=0 \Leftrightarrow 3(\sigma\upsilon\nu\pi+1)0 \Leftrightarrow 3(-1+1)=0$.

β. Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\sigma\upsilon\nu 4x$ με την ευθεία $y=-1$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=y$.

$$\text{Είναι: } \sigma\upsilon\nu 4x=-1=\sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow 4x=2\kappa\pi+\pi \Leftrightarrow x=\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, \kappa\in R$$

220. **α.** Είναι

$$(\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega)^2=1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega+2\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega=1$$

$$\Leftrightarrow 1+2\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega=1 \Leftrightarrow 2\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega=0 \Leftrightarrow \eta\mu\omega=0 \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu\omega=0$$

β.
- Αν $\eta\mu\omega=0 \Leftrightarrow \omega=2\kappa\pi$ ή $\omega=2\kappa\pi+\pi=(2\kappa+1)\pi$, $\kappa\in R$, άρα $\omega=\kappa\pi$, $\kappa\in R$
- Αν $\sigma\upsilon\nu\omega=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \omega=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in R$,

$$\text{άρα} \quad \omega=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}, \ \kappa\in R .$$

221. **α.** Η συνάρτηση

$g(x)=2\eta\mu x$ έχει ελάχιστη τιμή -2 και μέγιστη 2,

άρα η συνάρτηση $f(x)=g(x)+1$ έχει

ελάχιστη τιμή $f_{min}=-2+1=-1$ και μέγιστη $f_{max}=2+1=3$.

β. Είναι $f(x)=3 \Leftrightarrow 2\eta\mu x+1=3 \Leftrightarrow 2\eta\mu x=2 \Leftrightarrow \eta\mu x=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2} \overset{x\in[0,2\pi]}{\Leftrightarrow} x=\frac{\pi}{2}$$

222. **α.** Είναι:

- $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right)=\sigma\upsilon\nu(-x)=\sigma\upsilon\nu x$ (1)
- $\sigma\upsilon\nu(\pi+x)=-\sigma\upsilon\nu x$ (2)

Άρα από της σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι : $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sigma\upsilon\nu(\pi+x)=\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x=0$

β. Είναι $\sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}\sigma\upsilon\nu x=-\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2},\kappa\in Z.$$

Αλλά $x\in[0,2\pi)$, επομένως

$$0\le 2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}<2\pi\Leftrightarrow 0\le 4\kappa\pi+\pi<4\pi\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\le\kappa<\frac{3}{4},\ \kappa\in Z.$$

Άρα $\kappa=0$, οπότε $x=\frac{\pi}{2}$

$$0\le 2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}<2\pi\Leftrightarrow 0\le 4\kappa\pi-\pi<4\pi\Leftrightarrow \frac{1}{4}\le\kappa<\frac{5}{4},\ \kappa\in Z.$$

Άρα $\kappa=1$, οπότε $x=\frac{3\pi}{2}$.

223. **α.** Είναι

$$A=\frac{\eta\mu^2x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\frac{(1+\sigma\upsilon\nu x)(1-\sigma\upsilon\nu x)}{1-\sigma\upsilon\nu x}=1+\sigma\upsilon\nu x.$$

β. Από το ερώτημα α) για $x\ne 2\kappa\pi,\ \kappa\in R$ η εξίσωση $\frac{\eta\mu^2x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1}{2}$

είναι ισοδύναμη με την $1+\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$

και επειδή $x\in(0,2\pi)$, έχουμε $x=\frac{2\pi}{3}$ ή $x=\frac{4\pi}{3}$ (δεκτές).

224. **α.** Έχουμε

Για $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ είναι:

$$\eta\mu(\pi-x)-\eta\mu(\pi+x)=1\Leftrightarrow\eta\mu x-\eta\mu(-x)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\eta\mu x+\eta\mu x=1\Leftrightarrow 2\eta\mu x=1\Leftrightarrow\eta\mu x=\frac{1}{2}.$$

β. Είναι $\eta\mu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}$ ή $x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}$, $\kappa\in R$

- $\frac{\pi}{2}<x<\pi\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}<2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}<\pi\Leftrightarrow\frac{2}{12}<\kappa<\frac{5}{12}$, αδύνατο επειδή $\kappa\in Z$

- $\frac{\pi}{2}<x<\pi\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}<2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}<\pi\Leftrightarrow-\frac{2}{12}<\kappa<\frac{1}{12}$

και επειδή $\kappa \in Z$ είναι $\kappa = 0$, οπότε $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

225. **α.** Για $x \neq \kappa\pi,\ \kappa \in R$ έχουμε:

$$\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)+\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x)}{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)} =$$

$$= \frac{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x+1-\sigma\upsilon\nu x)}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2\eta\mu x}{\eta\mu^2 x} = \frac{2}{\eta\mu x}.$$

β. Για $x \neq \kappa\pi, \kappa \in R$ έχουμε:

$$\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{4}{\sqrt{3}} \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} \frac{2}{\eta\mu x} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 4\eta\mu x = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \ \text{ή}\ x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \ \text{ή}\ x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3},\ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

226. **α.** Έχουμε

Οι ορίζουσες $D,\ D_x,\ D_y$ του συστήματος είναι:

- $D = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda - 2$

- $D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 2\lambda = -\lambda$

- $D_y = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda - 1$

i. Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow -\lambda - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -2$, το σύστημα έχει μοναδική λύση την :

$$(x,y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{-\lambda}{-\lambda-2}, \frac{-\lambda-1}{-\lambda-2}\right) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+2}, \frac{\lambda+1}{\lambda+2}\right)$$

ii. Αν $D = 0 \Leftrightarrow -\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} -x+2y=1 \\ x-2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-1 \\ x-2y=-2 \end{cases}$$, προφανώς αδύνατο.

β. Αν $\lambda = -1$, τότε η λύση του συστήματος είναι: $(x_o, y_o) = \left(\dfrac{-1}{-1+2}, \dfrac{-1+1}{-1+2}\right) = (-1, 0)$.

Αλλά $\pi \in [0, 2\pi)$ και επειδή $\sigma\upsilon\nu\pi = -1 = x_o$ και $\eta\mu\pi = 0 = y_o$, η ζητούμενη γωνία είναι θ=π.

γ. Αν $\lambda = 1$, τότε η λύση του συστήματος είναι: $(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{1+2}, \frac{1+1}{1+2}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Έστω ότι υπάρχει γωνία ω τέτοια ώστε , $\sigma\upsilon\nu\omega = x_1 = \frac{1}{3}$ και $\eta\mu\omega = y_1 = \frac{2}{3}$,

οπότε : $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{9} = 1$, που είναι άτοπο.

Επομένως δεν υπάρχει δεν υπάρχει γωνία ω, τέτοια ώστε $x_1 = \sigma\upsilon\nu\omega$ και $y_1 = \eta\mu\omega$ **.**

227. **α.** Η συνάρτηση f έχει τύπο της μορφής $\rho\eta\mu(\omega x)$, με

$$\rho = |\alpha + 1| \text{ και } \omega = \beta\pi > 0, \text{ οπότε είναι:}$$

$$\max f(x) = |\alpha+1| \Leftrightarrow 3 = |\alpha+1| \Leftrightarrow \alpha+1 = 3 \text{ ή } \alpha+1 = -3 \Leftrightarrow \alpha = 2 \text{ ή } \alpha = -4.$$

Επίσης είναι $T = 4 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\beta\pi} = 4 \Leftrightarrow 4\beta = 2 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2}$.

β. Για $\alpha = 2$ και $\beta = \frac{1}{2}$ είναι $f(x) = 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, οπότε είναι:

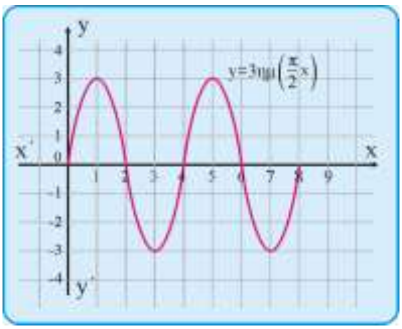
i. $f(x) = 3 \Leftrightarrow 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 3 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{\pi}{2}x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi x = 4\kappa\pi + \pi \Leftrightarrow x = 4\kappa + 1, \kappa \in R.$$

ii. Στο διάστημα $[0,8]$, έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	0	3	0	-3	0	3	0	-3	0

και η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



228. **α.** Είναι :

- $f(0)=\sigma\upsilon\nu 0=1$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{4}=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}=0,\quad f\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{4}=\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

και $f(2\pi)=\sigma\upsilon\nu 2\pi=1$.

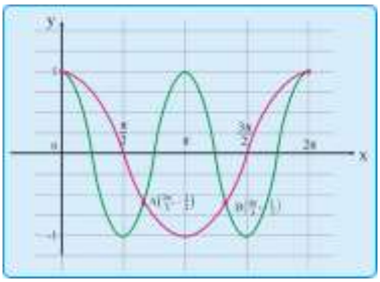
- $g(0)=\sigma\upsilon\nu 0=1$, $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\pi=-1$

$$g\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}=0,\quad g\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0,$$

$$g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu 3\pi=\sigma\upsilon\nu\pi=-1,\quad g\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}=0$$

και $g(2\pi)=\sigma\upsilon\nu 4\pi=1$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$g(x)$	1	0	-1	0	0	-1	0	1



β. Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $συν2x = συνx$ στο διάστημα $[0,\ 2π]$ είναι το πλήθος των κοινών σημείων των C_f και C_g στο $[0,\ 2π]$. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι το πλήθος των κοινών σημείων είναι 4,

άρα η εξίσωση (1) έχει 4 λύσεις στο $[0,\ 2π]$.

γ. Είναι $συν2x = συνx \Leftrightarrow 2x = 2κπ + x$ ή $2x = 2κπ - x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 2κπ \quad ή \quad 3x = 2κπ \Leftrightarrow x = 2κπ \quad ή \quad x = \frac{2κπ}{3},\ κ \in R.$$

Αλλά οι λύσεις $2κπ$ και $\frac{2κπ}{3}$ να ανήκουν στο διάστημα $[0,\ 2π]$, άρα:

- $0 \le 2κπ \le 2π \Leftrightarrow 0 \le κ \le 1$ με $κ \in Z$, οπότε $κ = 0$ ή $κ = 1$

  Επομένως για $κ = 0$ είναι $x = 0$ και για $κ = 1$ είναι $x = 2π$

- $0 \le \frac{2κ\cancel{π}}{3} \le 2\cancel{π} \Leftrightarrow 0 \le 2κ \le 6 \Leftrightarrow 0 \le κ \le 3$ με $κ \in Z$, οπότε $κ = 0$ ή $κ = 1$ ή $κ = 2$ ή $κ = 3$

  Επομένως είναι $x = 0$, $x = \frac{2π}{3}$, $x = \frac{4π}{3}$, $x = 2π$

Άρα η εξίσωση (1) στο διάστημα $[0,\ 2π]$ έχει 4 λύσεις, τις :

$$x = 0, \quad x = \frac{2π}{3}, \quad x = \frac{4π}{3}, \quad x = 2π$$

οι οποίες είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

Τα κοινά σημεία , όπως φαίνονται και στην παραπάνω γραφική παράσταση είναι τα :

$$(0,1),\ \left(\frac{2π}{3}, -\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{4π}{3}, -\frac{1}{2}\right),\ (2π,1)$$

229. α. Η συνάρτηση

$$f(t) = 12ημ\frac{πt}{4} + 13 \text{ είναι της μορφής } f(t) = ρημωt,$$

$$\text{άρα } T = \frac{2π}{ω} = \frac{2π}{\frac{π}{4}} = \frac{8π}{π} = 8 \text{ ώρες.}$$

β. Η απόσταση του σώματος από το έδαφος τις χρονικές στιγμές $t = 5$ και $t = 8$

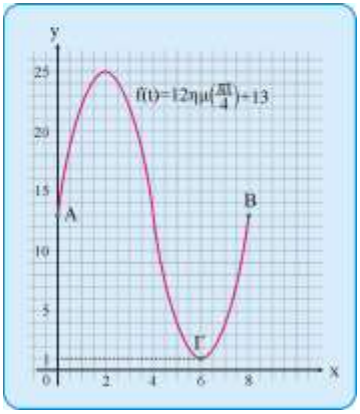
είναι αντίστοιχα :

- $f\left(5\right)=12\eta\mu\frac{5\pi}{4}+13=12\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+13=12\left(-\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)+13$

$$=12\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+13=-6\sqrt{2}+13 \quad cm$$

- $$f\left(8\right)=12\eta\mu\frac{8\pi}{4}+13=12\eta\mu 2\pi+13=12\cdot 0+13=13 \quad cm$$

γ. Κατά το χρονικό διάστημα από $t=0$ έως $t=8$, δηλαδή κατά την διάρκεια μιας περιόδου, η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο όταν $\frac{\pi t}{4}=\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow\pi t=6\pi\Leftrightarrow t=6$ ώρες και η ελάχιστη απόσταση του σώματος από το έδαφος είναι $\min f\left(x\right)=-12+13=1\,cm$.



230. **α.** Η συνάρτηση

$h\left(t\right)=8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{12}$ είναι της μορφής $\rho\cdot\eta\mu\omega x$ με $\rho=8>0$ και $\omega=\frac{\pi}{12}>0$, άρα η μέγιστη τιμή της είναι $\max h\left(t\right)=8$ και η ελάχιστη τιμή της $\min h\left(t\right)=-8$. Άρα και η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $g\left(t\right)=-8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{12}$ είναι

$$\max g\left(t\right)=\left|-8\right|=8 \text{ και } \min g\left(t\right)=-\left|-8\right|=-8 \text{ αντίστοιχα.}$$

Τέλος, η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f\left(t\right)=-8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{12}+4$ είναι

$\max f\left(t\right)=8+4=12$ και $\min f\left(t\right)=-8+4=-4$ αντίστοιχα.

Επομένως η μέγιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια του εικοσιτετραώρου είναι: $12\ ^0C$ και η ελάχιστη $-4\ ^0C$.

β. Οι χρονικές στιγμές που η θερμοκρασία είναι ίση με 0^0C είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f\left(t\right)=0,\ t\in\left[0,24\right]$.Άρα είναι:

$$f(t)=0 \Leftrightarrow -8\text{συν}\frac{\pi t}{12}+4=0 \Leftrightarrow \text{συν}\frac{\pi t}{12}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{συν}\frac{\pi t}{12}=\text{συν}\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{12}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{\pi t}{12}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi t=24\kappa\pi+4\pi \quad \text{ή} \quad \Leftrightarrow \pi t=24\kappa\pi-4\pi$$

$$\Leftrightarrow t=24\kappa+4 \quad \text{ή} \quad \Leftrightarrow t=24\kappa-4,\ \kappa\in\mathbb{Z} \ .$$

Αλλά $0\le t\le 24$. Επομένως:

$$0\le 24\kappa+4\le 24 \Leftrightarrow -4\le 24\kappa\le 20 \Leftrightarrow \frac{-4}{24}\le\kappa\le\frac{20}{24},\ \ \text{με } \kappa\in Z$$

Άρα κ=0 οπότε t=4 ώρες.

$$0\le 24\kappa-4\le 24 \Leftrightarrow 4\le 24\kappa\le 28 \Leftrightarrow \frac{4}{24}\le\kappa\le\frac{28}{24} \ \ \text{με } \kappa\in Z$$

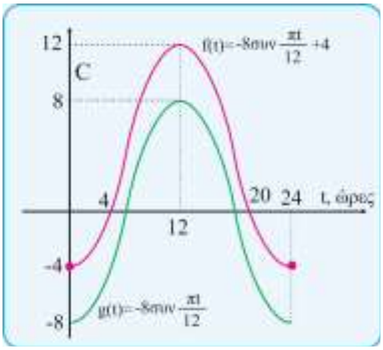
Άρα $\kappa=1 \Rightarrow t=24-4=20$ ώρες .

γ. Η συνάρτηση f έχει περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{12}}=\dfrac{24\pi}{\pi}=24$ ώρες,

επομένως η ζητούμενη γραφική παράσταση αναφέρεται σε μία περίοδο της f .

Επίσης επειδή $h(t)=8\text{συν}\frac{\pi t}{12}$ και $g(t)=-8\text{συν}\frac{\pi t}{12}$ η C_g είναι συμμετρική της C_h , ως προς τον άξονα $x'x$. Τέλος η γραφική παράσταση της $f(t)=-8\text{συν}\frac{\pi t}{12}+4$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της C_g κατά 4 μονάδες προς τα πάνω.

Επομένως προκύπτει η παρακάτω γραφική παράσταση:



δ. Από την γραφική παράσταση προκύπτει ότι η θερμοκρασία είναι πάνω από 0^0C όλο το χρονικό διάστημα $(4,20)$.

231. **α.** Με βάση τη γραφική παράσταση, η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f είναι 4 και η ελάχιστη τιμή είναι -8.

β. Η περίοδος είναι:

i. Αλγεβρικά: $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

ii. Γεωμετρικά: Από τη γραφική παράσταση $T=\pi$.

γ. Α΄ τρόπος

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$,

άρα είναι $\beta>0$, οπότε: $-1\le \sigma\upsilon\nu 2x\le 1, x\in\mathbb{R} \overset{(\beta>0)}{\Leftrightarrow} -\beta\le \beta\sigma\upsilon\nu 2x\le \beta, x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha-\beta\le \alpha+\beta\sigma\upsilon\nu 2x\le \alpha+\beta$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$$\text{Άρα } \begin{cases}\max f=\alpha+\beta\\ \min f=\alpha-\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=4\\ \alpha-\beta=-8\end{cases}\Leftrightarrow \alpha=-2 \text{ και } \beta=6.$$

Β΄ τρόπος

Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x=0$ μέγιστο, το $f(0)=4$ και στο $x=\frac{\pi}{2}$ παρουσιάζει ελάχιστο, το $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-8$. Οπότε είναι: $\begin{cases}f(0)=4\\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=4\\ \alpha-\beta=-8\end{cases}\Leftrightarrow \alpha=-2$ και $\beta=6$.

δ. Για $\alpha=-2$ και $\beta=6$ είναι $f(x)=-2+6\sigma\upsilon\nu 2x$.

Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f και της ευθείας $y=1$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x)=1\Leftrightarrow -2+6\sigma\upsilon\nu 2x=1\Leftrightarrow 6\sigma\upsilon\nu 2x=3\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{3}\\ \quad\text{ή}\\ 2x=2k\pi-\frac{\pi}{3}\end{cases},\text{με } k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}x=k\pi+\frac{\pi}{6}\\ \quad\text{ή}\\ x=k\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases},\text{με } k\in\mathbb{Z}\overset{x\in[0,2\pi]}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{6} \quad\text{ή}\quad x=\pi+\frac{\pi}{6}\\ x=\pi-\frac{\pi}{6} \quad\text{ή}\quad x=2\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{6} \text{ ή } x=\frac{7\pi}{6}\\ x=\frac{5\pi}{6} \text{ ή } x=\frac{11\pi}{6}\end{cases}$$

Επομένως τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=1$ στο διάστημα $[0,2\pi]$ είναι τα σημεία: $A\left(\frac{\pi}{6},1\right)$, $B\left(\frac{5\pi}{6},1\right)$, $\Gamma\left(\frac{7\pi}{6},1\right)$ και $\Delta\left(\frac{11\pi}{6},1\right)$.

232. **α.** **i.** Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της είναι το 5 και η ελάχιστη τιμή της το -1.

ii. Η περίοδο της συνάρτησης είναι $T=4\pi$.

β. Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f είναι το 5 και πραγματοποιείται όταν $\eta\mu(\omega x)=1$.

Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f είναι το -1 και πραγματοποιείται όταν $\eta\mu(\omega x)=-1$

Κάνοντας αντικατάσταση τα παραπάνω δεδομένα στην συνάρτηση $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)+k$, έχουμε:

$$\left.\begin{matrix}5=\rho\cdot 1+k\\ -1=\rho\cdot(-1)+k\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\rho+k=5\\ -\rho+k=-1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\rho+k=5\\ 2k=4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\rho+k=5\\ k=2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow k=2,\rho=3.$$

Από τον τύπο $T=\frac{2\pi}{\omega}$ έχουμε $4\pi=\frac{2\pi}{\omega}\Leftrightarrow\omega=\frac{2\pi}{4\pi}\Leftrightarrow\omega=\frac{1}{2}$.

Άρα η συνάρτηση $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)+k$ είναι η $f(x)=3\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{2}x\right)+2$.

γ. Αν $\rho=3$, $\omega=\frac{1}{2}$ και $k=2$ η συνάρτηση είναι η $f(x)=3\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{2}x\right)+2$. Το σημείο $A\left(x_0,\frac{7}{2}\right)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f, άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης με $x_0\in(5\pi,6\pi)$.

$$\frac{7}{2}=3\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{2}x_0\right)+2\Leftrightarrow\frac{7}{2}-2=3\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{2}x_0\right)\Leftrightarrow\frac{3}{2}=3\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{2}x_0\right)\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\eta\mu\left(\frac{1}{2}x_0\right)$$

$$\Leftrightarrow\eta\mu\left(\frac{1}{2}x_0\right)=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\frac{1}{2}x_0=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6},\kappa\in Z\quad\eta\quad\frac{1}{2}x_0=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6},\kappa\in Z$$

$$\frac{1}{2}x_0=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6},\kappa\in Z\quad\eta\quad\frac{1}{2}x_0=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6},\kappa\in Z$$

$$x_0=4\kappa\pi+\frac{\pi}{3},\kappa\in Z\quad\eta\quad x_0=4\kappa\pi+\frac{5\pi}{3},\kappa\in Z$$

Επειδή $x_0\in(5\pi,6\pi)$ από το δεύτερο σύνολο λύσεων για κ=1 προκύπτει

$$x_0=4\pi+\frac{5\pi}{3}\Leftrightarrow x_0=\frac{17\pi}{3}.$$

233. **α.** Η συνάρτηση

$$f(x) = 2\eta\mu(3x) + 1$$

$$\text{έχει περίοδο} \quad T = \frac{2\pi}{3} \quad \text{και μέγιστη τιμή} \ \ 2 + 1 = 3$$

β. **i.** Αφού η συνάρτηση

$$g(x) = \alpha\eta\mu(\beta x) + \gamma$$

διέρχεται αόπό το σημείο $(0, 1)$ ισχύει

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow \alpha\eta\mu 0 + \gamma = 1 \Leftrightarrow \gamma = 1$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση έχει περίοδο

$$T = 2\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \Leftrightarrow \beta = 1$$

Επίσης παρατηρούμε ότι η συνάρτηση έχει αντίθετο είδος μονοτονίας από τη συνάρτηση ημx. Συνεπώς $\alpha < 0$.

Αφού η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή 3 ισχύει

$$|\alpha| + 1 = 3 \ \Leftrightarrow \ |\alpha| = 2 \ \Leftrightarrow \ \alpha = -2 \quad (\text{αφού} \ \ \alpha < 0)$$

Άρα $g(x) = -2\eta\mu x + 1$.

ii. Είναι

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2\eta\mu(3x) + 1 = -2\eta\mu x + 1 \Leftrightarrow \eta\mu(3x) = -\eta\mu x \Leftrightarrow \eta\mu(3x) = \eta\mu(-x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi - x \\ 3x = 2\kappa\pi + \pi + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2\kappa\pi \\ 2x = 2\kappa\pi + \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\kappa\pi}{2} \\ x = \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2}, \kappa \in Z$$

Είναι

$$0 \le x < \pi \Leftrightarrow 0 \le \frac{\kappa\pi}{2} < \pi \Leftrightarrow 0 \le \frac{\kappa}{2} < 1 \Leftrightarrow 0 \le \kappa < 2$$

$$\text{Άρα} \quad \kappa = 0 \ \text{ή} \ \kappa = 1 \quad \text{οπότε} \quad x = 0 \ \text{ή} \ x = \frac{\pi}{2}$$

234. Έχουμε

$$\sqrt{3}\varepsilon\varphi\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = -3 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x-\frac{\pi}{3}=\kappa\pi-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow 4x=\kappa\pi\Leftrightarrow x=\frac{\kappa\pi}{4},\ \kappa\in Z$$

Επειδή $x\in\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$ έχουμε $\frac{\pi}{2}\le\frac{\kappa\pi}{4}<\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le\frac{\kappa}{4}<\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2\le\kappa<6$ και επειδή $\kappa\in Z$ έχουμε κ=2, 3, 4, 5, οπότε οι αντίστοιχες τιμές για το x είναι $\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi,\ \frac{5\pi}{4}$ που είναι και οι ζητούμενες.

235. Έχουμε

$$\eta\mu x=-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=-\sqrt{3}=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{3},\ \kappa\in Z\,.$$

(συνx≠0 διότι αν συνx=0, τότε και ημx=0 άτοπο).

236. Περιορισμοί

$$x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ x\neq\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{2},\ x\neq\kappa\pi\,.$$

Έχουμε

$$\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi 2x=1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi 2x=\frac{1}{\varepsilon\varphi x}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi 2x=\sigma\varphi x\Leftrightarrow\varepsilon\varphi 2x=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow 2x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{6},\ \kappa\in Z$$

237. Έχουμε

$$\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x=0\Leftrightarrow(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)=0\,.\ \text{Οπότε:}$$

- $\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$
  $\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\ \kappa\in Z$

  (συνx≠0 διότι αν συνx=0, τότε και ημx=0 άτοπο) ή

- $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=-1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\ \kappa\in Z$

238. Έχουμε

$$\varepsilon\varphi^2x-\sigma\varphi^2x=0\Leftrightarrow\varepsilon\varphi^2x-\frac{1}{\varepsilon\varphi^2x}=0\Leftrightarrow(\varepsilon\varphi^2x+1)(\varepsilon\varphi^2-1)=0\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=1=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$$

$$\text{ή}\ \ \varepsilon\varphi x=-1=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\ \text{ή}\ x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4}\ \text{με}\ \kappa\in Z\,.$$

$$\text{Τελικά}\quad x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}\ \text{με}\ \kappa \in Z.$$

239. Έχουμε

$(\sigma\upsilon\nu^2 x - 1)(\sigma\upsilon\nu x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 1$ ή

$$\sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \text{ ή } x = 2\kappa\pi \pm \pi,\ \kappa \in Z.$$

240. Έχουμε

$\eta\mu^2 x \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^3 x = 1 \Leftrightarrow (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x)\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^3 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x - \eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^3 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) - (1 - \eta\mu x) = 0 \Leftrightarrow (1 - \eta\mu^2 x)(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) - (1 - \eta\mu x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1 - \eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1 - \eta\mu x)[(\sigma\upsilon\nu x - 1) + \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x - 1) + (\sigma\upsilon\nu^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1 - \eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x - 1)(1 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 1) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 1 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu x = 1 \text{ ή } \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = -2,$

αδύνατη άρα $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ή $x = 2\kappa\pi,\ \kappa \in Z$

241. Έχουμε

$\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ και $\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$$\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3},\ \kappa \in Z,\ \text{όμως}\ \ x \in [0, 2\pi],\ \text{άρα}\ x = \frac{2\pi}{3}\ \text{ ή }\ x = \frac{5\pi}{3}$$

$$\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{6},\ \kappa \in Z,\ \text{ όμως }\ x \in [0, 2\pi],$$

άρα $x = \frac{\pi}{6}$ ή $x = \frac{2\pi}{3}$ ή $x = \frac{7\pi}{6}$ ή $x = \frac{5\pi}{3}$. Οι κοινές λύσεις είναι: $x = \frac{2\pi}{3}$ ή $x = \frac{5\pi}{3}$.

242. $2\sigma\upsilon\nu^4 x + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x = 2 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^4 x - \sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 0 \quad (1)$

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu^2 x = \omega$ οπότε η (1) γράφεται: $2\omega^2 - \omega - 1 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1$ ή $\omega = -\frac{1}{2}$ απορ. άρα

$\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \pm 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi$. Τελικά $x = \kappa\pi,\ \kappa \in Z$.

243. $\eta\mu x \neq 0$.

$$2\sigma\varphi x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x\sigma\varphi x + 2\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sigma\varphi x(2 - \sigma\upsilon\nu x) + \sqrt{3}(2 - \sigma\upsilon\nu x) = 0$$

$\Leftrightarrow (\sigma\varphi x + \sqrt{3})(2 - \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\varphi x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{6},\ \kappa \in Z$ (συνx=2 άτοπο)

244. Έχουμε

ημx≠0, συνx≠0. Έχουμε $\text{εφxεφxσφx} = 1 \Leftrightarrow \text{εφx} = 1 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4},\ \kappa \in Z$

245. Έχουμε

$$\ldots\ \text{συν}(2x + 20^\circ) = -\frac{1}{2} = -\text{συν}60^\circ = \text{συν}120^\circ \Leftrightarrow 2x + 20^\circ = \kappa \cdot 360^\circ \pm 120^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa \cdot 180^\circ + 50^\circ \ \text{ ή } \ x = \kappa \cdot 180^\circ - 70^\circ,\ \kappa \in Z$$

246. Έχουμε

$$\text{συν}^2 2x = \text{συν}^2 x \Leftrightarrow \text{συν}2x = \text{συν}x \ \text{ ή } \ \text{συν}2x = -\text{συν}x$$

$$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \text{ ή } x = \frac{2\kappa\pi}{3} \text{ ή } x = 2\kappa\pi - \pi \text{ ή } x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

και επειδή $x \in (\pi, 3\pi)$ βρίσκουμε τελικά $x = \frac{4\pi}{3}$ ή $\frac{5\pi}{3}$ ή 2π ή $\frac{7\pi}{3}$ ή $\frac{8\pi}{3}$.

247. Περιορισμός: συνx≠0

$$\ldots\ \text{ημ}x + \text{συν}^2 x = 1 \Leftrightarrow \text{ημ}x = \text{ημ}^2 x \Leftrightarrow \text{ημ}x = 0 \text{ ή } \text{ημ}x = 1 \text{ απορ.}$$

$$\text{Άρα} \ \ \text{ημ}x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi,\ \kappa \in Z.$$

248. Η f έχει μέγιστο 3+2=5 άρα

$$f(x) = 5 \Leftrightarrow \text{συν}\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -1 = \text{συν}\pi \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = -\kappa\pi - \frac{\pi}{3},\ \kappa \in Z.$$

$$\text{Όμως} \ \ x \in [0, 2\pi],\ \text{άρα} \ \ x = \frac{2\pi}{3} \ \text{ ή } \ \frac{5\pi}{3}.$$

249. .Πρέπει $\text{ημ}x \neq \pm 1$

$$\frac{1}{1 - \text{ημ}x} + \frac{\text{ημ}x}{(1 - \text{ημ}x)(1 + \text{ημ}x)} = \frac{1}{1 + \text{ημ}x} \Leftrightarrow 1 + \text{ημ}x + \text{ημ}x = 1 - \text{ημ}x$$

$$\Leftrightarrow \text{ημ}x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi,\ \kappa \in Z$$

250. . συνx≠0. $2\text{ημ}^2 x - 4\text{συν}x + 4\text{συν}^2 x = \text{συν}x$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 2\text{συν}^2 x - 5\text{συν}x + 2 = 0 \Leftrightarrow \text{συν}x = \frac{1}{2} \text{ ή } \text{συν}x = 2 \text{ απορ.}$$

Άρα $\text{συν}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3},\ \kappa \in Z$.

251. Έχουμε

$$\ldots \Leftrightarrow 4\text{ημ}^2 x + 4\text{ημ}x + 1 - 4(2\text{ημ}x + 1 - 2\text{ημ}^2 x - \text{ημ}x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\eta\mu^2x+4\eta\mu x+1-8\eta\mu x-4+8\eta\mu^2x+4\eta\mu x=0 \Leftrightarrow 12\eta\mu^2x-3=0 \Leftrightarrow \eta\mu^2x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x=\frac{1}{2} \quad \acute{\eta} \quad \eta\mu x=-\frac{1}{2}$$

Οπότε:

- $$\eta\mu x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \\ \acute{\eta} \\ x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad \kappa\in Z$$

$$\eta\mu x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=-\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6} \\ \acute{\eta} \\ x=2\kappa\pi+\pi+\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6} \end{cases} \quad \kappa\in Z$$

§3.6 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΓΩΝΙΩΝ

252. **α.** Είναι

$$\varepsilon\varphi(\omega+\theta)=\varepsilon\varphi 135^0=\varepsilon\varphi\left(180^0-45^0\right)=-\varepsilon\varphi 45^0=-1 .$$

β. Είναι $\sigma\upsilon\nu\omega\neq 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta\neq 0$, άρα ορίζονται οι $\varepsilon\varphi\omega$ και $\varepsilon\varphi\theta$, οπότε έχουμε:

$$\varepsilon\varphi(\omega+\theta)=-1 \Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi\omega+\varepsilon\varphi\theta}{1-\varepsilon\varphi\omega\cdot\varepsilon\varphi\theta}=-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega+\varepsilon\varphi\theta=-1+\varepsilon\varphi\omega\cdot\varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega+\varepsilon\varphi\theta+1=\varepsilon\varphi\omega\cdot\varepsilon\varphi\theta .$$

253. **α.** Σύμφωνα με τον τύπο $\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta$ έχουμε:

$$\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu\frac{\pi}{3}=\eta\mu x\cdot\frac{1}{2}+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{2}\eta\mu x .$$

β. $$\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{2}\eta\mu x=0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi,\ \kappa\in Z \ \ \acute{\eta} \ \ x+\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi+\pi,\ \kappa\in Z \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}=\lambda\pi,\ \lambda\in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\lambda\pi-\frac{\pi}{3},\ \lambda\in Z .$$

Αλλά $x\in(0,\pi)$, άρα είναι:

$$0<x<\pi \Leftrightarrow 0<\lambda\pi-\frac{\pi}{3}<\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}<\lambda\pi<\frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3}<\lambda<\frac{4}{3} \ \text{ και}$$

επειδή $\lambda \in Z$ είναι $\lambda = 1$, άρα $x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

254. α. Έχουμε

$$\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+\eta\mu\frac{\pi}{4}\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-\eta\mu\frac{\pi}{4}\sigma\upsilon\nu x$$

$$=\eta\mu x\frac{\sqrt{2}}{2}+\eta\mu x\frac{\sqrt{2}}{2}=2\eta\mu x\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\,\eta\mu x$$

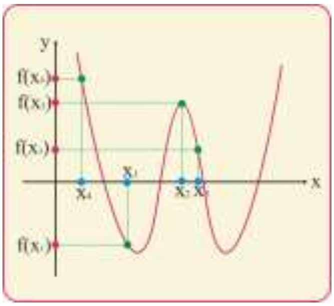
β) Από το ερώτημα α) έχουμε $f(x) = \sqrt{2}\,\eta\mu x$.

Για κάθε $x \in R$ ισχύει,

$$-1 \le \eta\mu x \le 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \le \sqrt{2}\,\eta\mu x \le \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \le f(x) \le \sqrt{2}$$

Άρα η συνάρτηση f έχει μέγιστη τιμή το $\sqrt{2}$ και ελάχιστη τιμή το $-\sqrt{2}$.

255. **α.** Προβάλλουμε στον άξονα y′y τα σημεία με τετμημένες x_1, x_2, x_3 και παρατηρούμε ότι: $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$.



β. Η συνάρτηση f δεν είναι ούτε γνησίως αύξουσα ούτε γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της, άρα δεν είναι γνησίως μονότονη.
Αν ήταν γνησίως αύξουσα, τότε: για $x_1 < x_2 < x_3$ θα ίσχυε $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$, ενώ αν ήταν γνησίως φθίνουσα, τότε: για $x_1 < x_2 < x_3$ θα ίσχυε $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$.
Αλλά από το ερώτημα α) έχουμε $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$, άρα η συνάρτηση δεν είναι γνησίως μονότονη.
γ. Αν φέρουμε την οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(x_2, f(x_2))$ παρατηρούμε ότι η συνάρτηση παίρνει και τιμές μεγαλύτερες του $f(x_2)$, για παράδειγμα $f(x_4) > f(x_2)$. Άρα το x_2 δεν είναι θέση μεγίστου.

256. $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta)(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta)$

$$=\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta-\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta=\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta-(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)(1-\sigma\upsilon\nu^2\beta)=$$
$$=\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta-1+\sigma\upsilon\nu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta=\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta-1=$$
$$=1-\eta\mu^2\alpha+1-\eta\mu^2\beta-1=1-\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta$$

257. Έχουμε

$$A'=\frac{(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta)(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta}=\frac{(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta)^2-(\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta)^2}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta}$$

$$=\frac{\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta-\sigma\upsilon\nu^2\alpha\eta\mu^2\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta}=\frac{\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta}-\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\eta\mu^2\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta}=\varepsilon\varphi^2\alpha-\varepsilon\varphi^2\beta$$

258. $\eta\mu(120^\circ-\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu(120^\circ-\alpha)\eta\mu\alpha=\eta\mu780^\circ\Leftrightarrow\eta\mu(120^\circ-\alpha+\alpha)=\eta\mu780^\circ$

$$\Leftrightarrow\eta\mu120^\circ=\eta\mu(2\cdot360^\circ+60^\circ)\ \text{ που ισχύει.}$$

259. $A'=\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu(\alpha+x)[2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu(\alpha+x)]$

$$=\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu(\alpha+x)(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu\alpha\eta\mu x)$$
$$=\sigma\upsilon\nu^2x-(\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2x)=\sigma\upsilon\nu^2x-(1-\eta\mu^2\alpha)\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2x=$$
$$=\eta\mu^2\alpha(\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2x)=\eta\mu^2\alpha$$

260. Έχουμε

$$\ldots\sqrt{3}\frac{\sigma\upsilon\nu(19^\circ+11^\circ)}{\eta\mu(10^\circ+20^\circ)}+\sqrt{2}\frac{\eta\mu(9^\circ-39^\circ)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{28}-\frac{3\pi}{7}\right)}=\sqrt{3}\frac{\sigma\upsilon\nu30^\circ}{\eta\mu30^\circ}-\sqrt{2}\frac{\eta\mu30^\circ}{\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\ldots=2\,.$$

261. Είναι: $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta$ οπότε

$$\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\Leftrightarrow\eta\mu\alpha\eta\mu\beta=0\ \text{ άρα}$$

$$\eta\mu^2(\alpha+\beta)=(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta)^2=\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\alpha\eta\mu^2\beta+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta=$$
$$=\eta\mu^2\alpha(1-\eta\mu^2\beta)+(1-\eta\mu^2\alpha)\eta\mu^2\beta+2\cdot0=\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta+\eta\mu^2\beta-\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta=$$
$$=\eta\mu^2\alpha+\eta\mu^2\beta-2(\eta\mu\alpha\eta\mu\beta)^2=\eta\mu^2\alpha+\eta\mu^2\beta$$

262. Έχουμε

$$4\sigma\upsilon\nu2x+3\eta\mu2x=4\left(\sigma\upsilon\nu2x+\frac{3}{4}\eta\mu2x\right)=4(\sigma\upsilon\nu2x+\varepsilon\varphi x\eta\mu2x)$$

$$=4\left(\sigma\upsilon\nu2x+\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\eta\mu2x\right)=\ldots=4\frac{\sigma\upsilon\nu(2x-x)}{\sigma\upsilon\nu x}=4$$

263. Έχουμε:

$$\frac{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}}{1+\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{\varepsilon\varphi x}=1\Leftrightarrow\frac{\varepsilon\varphi x-1}{1+\varepsilon\varphi x}+\frac{1}{\varepsilon\varphi x}=1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\ \kappa\in Z$$

264. Έχουμε

$$A'=\frac{1-\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\cdot\frac{\eta\mu2\alpha}{\sigma\upsilon\nu2\alpha}}{1+\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\cdot\frac{\eta\mu2\alpha}{\sigma\upsilon\nu2\alpha}}=\frac{\sigma\upsilon\nu(2\alpha+\alpha)}{\sigma\upsilon\nu(2\alpha-\alpha)}=\frac{\sigma\upsilon\nu3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$$

265. Έχουμε

$$A'=\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}}{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}-\frac{\sigma\upsilon\nu3\alpha}{\eta\mu3\alpha}}+\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}}{\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}-\frac{\eta\mu3\alpha}{\sigma\upsilon\nu3\alpha}}=\ldots=\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1}}{\frac{\eta\mu(3\alpha-\alpha)}{\eta\mu3\alpha}}+\frac{\frac{\eta\mu\alpha}{1}}{\frac{\eta\mu(\alpha-3\alpha)}{\sigma\upsilon\nu3\alpha}}$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu3\alpha}{\eta\mu2\alpha}+\frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu3\alpha}{-\eta\mu2\alpha}=\frac{\eta\mu(3\alpha-\alpha)}{\eta\mu2\alpha}=1$$

266. Έχουμε

$$A'=\frac{(\varepsilon\varphi4\alpha+\varepsilon\varphi\alpha)(\varepsilon\varphi4\alpha-\varepsilon\varphi\alpha)}{(1-\varepsilon\varphi4\alpha\varepsilon\varphi\alpha)(1+\varepsilon\varphi4\alpha\varepsilon\varphi\alpha)}=\varepsilon\varphi(4\alpha+\alpha)\varepsilon\varphi(4\alpha-\alpha)=\varepsilon\varphi5\alpha\varepsilon\varphi3\alpha$$

267. Έχουμε

$$A'=\frac{1}{\varepsilon\varphi3\alpha+\varepsilon\varphi\alpha}-\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon\varphi3\alpha}+\frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}}=\frac{1}{\varepsilon\varphi3\alpha+\varepsilon\varphi\alpha}-\frac{\varepsilon\varphi3\alpha\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi3\alpha+\varepsilon\varphi\alpha}=\frac{1-\varepsilon\varphi3\alpha\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi3\alpha+\varepsilon\varphi\alpha}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon\varphi(3\alpha+\alpha)}=\sigma\varphi4\alpha$$

268. Έχουμε

$$A'=(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)\frac{\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}}{1-\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}}=(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)\frac{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+1}{1-\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}$$

$$=(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$$

269. Έχουμε

$$\varepsilon\varphi7\alpha=\varepsilon\varphi(4\alpha+3\alpha)=\frac{\varepsilon\varphi4\alpha+\varepsilon\varphi3\alpha}{1-\varepsilon\varphi4\alpha\varepsilon\varphi3\alpha}\quad\text{ή}\quad\varepsilon\varphi7\alpha-\varepsilon\varphi7\alpha\varepsilon\varphi4\alpha\varepsilon\varphi3\alpha=\varepsilon\varphi4\alpha+\varepsilon\varphi3\alpha\quad\text{ή}$$

$$\varepsilon\varphi7\alpha-\varepsilon\varphi4\alpha-\varepsilon\varphi3\alpha=\varepsilon\varphi7\alpha\varepsilon\varphi4\alpha\varepsilon\varphi3\alpha.$$

270. Έχουμε

$$A' = \frac{σφασφβ - 1}{σφβ + σφα} \cdot \frac{σφασφβ + 1}{σφβ - σφα} = ... = \frac{\frac{συν^2α}{ημ^2α} \cdot \frac{συν^2β}{ημ^2β} - 1}{\frac{συν^2β}{ημ^2β} - \frac{συν^2α}{ημ^2α}} = ...$$

$$= \frac{συν^2α(1 - ημ^2β) - (1 - συν^2α)ημ^2β}{ημ^2α(1 - ημ^2β) - (1 - ημ^2α)ημ^2β} = ... = \frac{συν^2α - ημ^2β}{ημ^2α - ημ^2β}$$

271. Έχουμε

$$B' = \frac{σφασφ\frac{π}{4} + 1}{σφ\frac{π}{4} - σφα} = \frac{\frac{συνα + ημα}{ημα}}{\frac{ημα - συνα}{ημα}} = \frac{συνα + ημα}{ημα - συνα}$$

272. Έχουμε

$$A' = \frac{1 + ημx}{ημx + συνx}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}συνx + \frac{\sqrt{2}}{2}ημx\right) + \frac{1 - ημx}{ημx - συνx}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}ημx - \frac{\sqrt{2}}{2}συνx\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + ημx) + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - ημx) = \sqrt{2}$$

273. Έχουμε

$$\frac{ημ(α - β)}{ημαημβ} = \frac{ημασυνβ}{ημαημβ} - \frac{συνασυνβ}{ημαημβ} = σφβ - σφα\ .$$

Όμοια $\frac{ημ(β - γ)}{ημβημγ} = σφγ - σφβ,\ \frac{ημ(γ - α)}{ημαημγ} = σφα - σφγ$.

Άρα $A' = σφβ - σφα + σφγ - σφβ + σφα - σφγ = 0$.

274. Έχουμε

$$A' = \frac{1}{\frac{ημ3α}{συν3α} - \frac{ημα}{συνα}} - \frac{1}{\frac{συν3α}{ημ3α} - \frac{συνα}{ημα}} = \frac{συν3ασυνα}{ημ2α} - \frac{ημ3αημα}{ημ(-2α)} = \frac{συν2α}{ημ2α} = σφ2α$$

275. Έχουμε

$$A' = \frac{2ημxσυνy + 2συνxημy}{ημxσυνy + συνxημy + ημxσυνy - συνxημy}$$

$$= \frac{2ημxσυνy}{2ημxσυνy} + \frac{2συνxημy}{2ημxσυνy} = 1 + σφxεφy$$

276. Έχουμε

$$B' = \frac{1}{1+\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu y}\cdot\frac{\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x}} = \frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu 2x}{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu x\eta\mu 2x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu 2x}{\sigma\upsilon\nu(x-2x)} = \sigma\upsilon\nu 2x$$

277. Έχουμε

$$A' = \frac{(\sigma\varphi 7\alpha - \sigma\varphi 4\alpha)(\sigma\varphi 7\alpha + \sigma\varphi 4\alpha)}{(1+\sigma\varphi 7\alpha\sigma\varphi 4\alpha)(1-\sigma\varphi 7\alpha\sigma\varphi 4\alpha)} = \frac{1}{\sigma\varphi(4\alpha-7\alpha)}\cdot\left[\frac{-1}{\sigma\varphi(7\alpha+4\alpha)}\right]$$

$$= \varepsilon\varphi(-3\alpha)[-\varepsilon\varphi(11\alpha)] = \varepsilon\varphi 3\alpha\varepsilon\varphi 11\alpha$$

278. Έχουμε

$$A' = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu\alpha - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu\alpha\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu\alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu\alpha\right)} = \ldots = \frac{\sqrt{2}\eta\mu\alpha}{\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$$

279. Έχουμε

$$A' = \frac{\left(\frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\varepsilon\varphi\alpha}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\varepsilon\varphi\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{\left(\frac{1+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi\alpha}\right)^2 - 1}{\left(\frac{1+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{(1+\varepsilon\varphi\alpha)^2 - (1-\varepsilon\varphi\alpha)^2}{(1+\varepsilon\varphi\alpha)^2 + (1-\varepsilon\varphi\alpha)^2} = \ldots = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$$

280. Έχουμε

$$A = \left[\left(\frac{5\pi}{18}+3x\right)+\left(\frac{2\pi}{9}-2x\right)\right] = \varepsilon\varphi\left(\frac{9\pi}{18}+x\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sigma\varphi x$$

$$B = \varepsilon\varphi\left[\left(\frac{5\pi}{12}+x\right)-\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right] = \varepsilon\varphi\frac{3\pi}{12} = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = 1$$

281. **i.** Έχουμε

$$\ldots \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 40^\circ + \varepsilon\varphi 40^\circ\eta\mu 10^\circ = \sigma\upsilon\nu 10^\circ \Leftrightarrow \frac{\eta\mu 40^\circ}{\sigma\upsilon\nu 40^\circ} + \frac{\eta\mu 40^\circ\eta\mu 10^\circ}{\sigma\upsilon\nu 40^\circ} = \sigma\upsilon\nu 10^\circ$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu 40^\circ + \eta\mu 40^\circ\eta\mu 10^\circ = \sigma\upsilon\nu 40^\circ\sigma\upsilon\nu 10^\circ \Leftrightarrow \eta\mu 40^\circ = \sigma\upsilon\nu 40^\circ\sigma\upsilon\nu 10^\circ - \eta\mu 40^\circ\eta\mu 10^\circ \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \eta\mu 40^\circ = \sigma\upsilon\nu 50^\circ$ που ισχύει.

ii. $$A' = \frac{1-\frac{\eta\mu^2 40^\circ}{\sigma\upsilon\nu^2 40^\circ}}{1+\frac{\eta\mu^2 40^\circ}{\sigma\upsilon\nu^2 40^\circ}} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 40^\circ - \eta\mu^2 40^\circ}{\sigma\upsilon\nu^2 40^\circ + \eta\mu^2 40^\circ} = \sigma\upsilon\nu 40^\circ\sigma\upsilon\nu 40^\circ - \eta\mu 40^\circ\eta\mu 40^\circ$$

$$=\sigma\upsilon\nu(40^\circ+40^\circ)=\eta\mu 10^\circ$$

282. Έχουμε

$$\varepsilon\varphi(\varphi+\theta)=\frac{\varepsilon\varphi\varphi+\varepsilon\varphi\theta}{1-\varepsilon\varphi\varphi\varepsilon\varphi\theta}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}}=\frac{11}{13}.$$

Ομοίως $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\omega\right)=\frac{11}{13}$. Και επειδή φ, θ, ω οξείες $\varphi+\theta=\frac{\pi}{4}-\omega\Leftrightarrow\varphi+\theta+\omega=\frac{\pi}{4}$.

283. Έχουμε

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\varepsilon\varphi 135^\circ\Leftrightarrow\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}=-1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta=-1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta$$

$$\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta+1=2\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta\Leftrightarrow(\varepsilon\varphi\alpha+1)+\varepsilon\varphi\beta(\varepsilon\varphi\alpha+1)=2\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\varepsilon\varphi\alpha+1)(\varepsilon\varphi\beta+1)=2\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta$$

284. Έχουμε

$$\sigma\varphi(\alpha-\beta)=\sigma\varphi\frac{\pi}{6}\quad\text{οπότε}\quad\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta+1=\sqrt{3}\sigma\varphi\beta-\sqrt{3}\sigma\varphi\alpha$$

$$\Leftrightarrow\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta-\sqrt{3}\sigma\varphi\beta+\sqrt{3}\sigma\varphi\alpha+1-4=-4\Leftrightarrow(\sigma\varphi\beta+\sqrt{3})(\sigma\varphi\alpha-\sqrt{3})=-4$$

285. Έχουμε

$$\sigma\varphi(A+\Gamma)=\sigma\varphi 135^\circ\Leftrightarrow\frac{\sigma\varphi A\sigma\varphi\Gamma-1}{\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi A}=-1\Leftrightarrow\sigma\varphi A\sigma\varphi\Gamma-1=-\sigma\varphi A-\sigma\varphi\Gamma$$

$$\Leftrightarrow\sigma\varphi A+\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi A\sigma\varphi\Gamma=1\Leftrightarrow 1+\sigma\varphi A+\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi A\sigma\varphi\Gamma=1+1\Leftrightarrow(1+\sigma\varphi A)(1+\sigma\varphi\Gamma)=2$$

286. Είναι

$$1+\sigma\varphi(45^\circ-B)=1+\varepsilon\varphi(45^\circ+B)=1+\frac{1+\varepsilon\varphi B}{1-\varepsilon\varphi B}=\frac{2}{1-\varepsilon\varphi B}.$$

Οπότε η αρχική σχέση γράφεται: $(1-\sigma\varphi\Gamma)\frac{2}{1-\varepsilon\varphi B}=2\Leftrightarrow 1-\sigma\varphi\Gamma=1-\varepsilon\varphi B\Leftrightarrow\varepsilon\varphi B=\sigma\varphi\Gamma$.

Άρα $B+\Gamma=90^\circ$, οπότε $A=90^\circ$.

287. Έχουμε

$$\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\Leftrightarrow\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}=\varepsilon\varphi\gamma\Leftrightarrow\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}=\frac{1}{\sigma\varphi\gamma}$$

$$\Leftrightarrow\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\gamma=\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta\sigma\varphi\gamma$$

288. Η προς απόδειξη σχέση γράφεται:

$$2\sigma\varphi A\sigma\varphi B = (1+\sigma\varphi A)(1+\sigma\varphi B) \Leftrightarrow 2\sigma\varphi A\sigma\varphi B = 1+\sigma\varphi B+\sigma\varphi A+\sigma\varphi B\sigma\varphi A \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sigma\varphi A\sigma\varphi B - 1 = \sigma\varphi A + \sigma\varphi B$$

που ισχύει διότι $A+B=225^\circ$, οπότε

$$\sigma\varphi(A+B) = \sigma\varphi(180^\circ + 45^\circ) \Leftrightarrow \frac{\sigma\varphi A\sigma\varphi B - 1}{\sigma\varphi B + \sigma\varphi A} = 1 \Leftrightarrow \sigma\varphi A\sigma\varphi B - 1 = \sigma\varphi B + \sigma\varphi A$$

289. Επειδή

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ άρα 0<συνα<1, ομοίως $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ άρα 0<συνβ<1. Επομένως

$$\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha < \eta\mu\alpha\cdot 1 + \eta\mu\beta\cdot 1 = \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta .$$

Άρα $\eta\mu(\alpha+\beta) < \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta$.

290. Έχουμε

$\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$ (1).

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) - \eta\mu\alpha\eta\mu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\alpha\eta\mu\beta =$$
$$\overset{(1)}{=} \sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu\beta(\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha) = \sigma\upsilon\nu\beta$$

291. $\eta\mu(x-\alpha) = \sigma\upsilon\nu(x-\alpha) \Leftrightarrow$

$$\ldots \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) = \eta\mu\alpha(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}$$

Επίσης $\varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\varepsilon\varphi x - 1}{1+\varepsilon\varphi x} = \ldots = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}$

292. $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = 0$,

$$\sigma\upsilon\nu(2\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu[(2\alpha-2\beta)+\beta] = \sigma\upsilon\nu(2\alpha-2\beta)\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu(2\alpha-2\beta)\eta\mu\beta .$$

Αλλά $\sigma\upsilon\nu(2\alpha-2\beta) = \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) - \eta\mu(\alpha-\beta)\eta\mu(\alpha-\beta) = -1$ και

$$\eta\mu(2\alpha-2\beta) = \eta\mu(\alpha-\beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) + \eta\mu(\alpha-\beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = 0$$

Οπότε $\sigma\upsilon\nu(2\alpha-\beta) = -1\sigma\upsilon\nu\beta - 0\cdot\eta\mu\beta = -\sigma\upsilon\nu\beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(2\alpha-\beta) + \sigma\upsilon\nu\beta = 0$

293. Έχουμε

$$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta) = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta} = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta = -1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta - 1 = -2 \Leftrightarrow (\varepsilon\varphi\beta+1)(1-\varepsilon\varphi\alpha) = 2$$

294. Έχουμε

$$\sigma\varphi(B+\Gamma)=\frac{\sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma-1}{\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi B}=.....=0 \quad \text{Άρα} \quad \sigma\varphi(\pi-A)=0\Leftrightarrow\sigma\varphi A=0\Leftrightarrow A=\frac{\pi}{2}.$$

295. Έχουμε

$$\varepsilon\varphi(A+B)=\varepsilon\varphi(\pi-\Gamma)\Leftrightarrow\frac{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B}{1-\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B}=-\varepsilon\varphi\Gamma\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\Gamma=-\frac{38}{9}$$

296. Έχουμε

$$\sigma\varphi(A+B)=\frac{2\cdot3-1}{3+2}=1. \quad \text{Άρα} \quad \sigma\varphi(\pi-\Gamma)=1\Leftrightarrow\Gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

297. Έχουμε

$$\varepsilon\varphi(A+B)=\frac{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B}{1-\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B}=...=-1. \quad \text{Άρα} \quad \varepsilon\varphi(\pi-\Gamma)=-1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\Gamma=1\Leftrightarrow\Gamma=45^\circ$$

298. Έχουμε

$$2\sigma\upsilon\nu\theta=\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu30^\circ+\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu30^\circ\Leftrightarrow2\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\eta\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\theta\Leftrightarrow\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\theta=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\theta=\kappa\pi+\frac{\pi}{3},\ \kappa\in Z$$

299. Έχουμε

$$\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu x=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu x-2\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu x\Leftrightarrow\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu x=3\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu x$$

$$\Leftrightarrow\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1}{3}\varepsilon\varphi\alpha\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\ \kappa\in Z.$$

Αλλά $x\in[-\pi,\pi]$ οπότε $x=-\frac{3\pi}{4}$ ή $x=\frac{\pi}{4}$.

300. Έχουμε

$\frac{\sigma\varphi x+1}{1-\sigma\varphi x}+\varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow2\sigma\varphi x+\varepsilon\varphi x-1=0\Leftrightarrow2+\varepsilon\varphi^2x-\varepsilon\varphi x=0$ που είναι αδύνατη διότι Δ<0.

301. Έχουμε

$$\frac{1+\varepsilon\varphi x}{1-\varepsilon\varphi x}+\frac{1-\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi x}=-4\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=\pm\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3},\ \kappa\in Z.$$

Αλλά $x\in[0,\pi]$, οπότε $x=\frac{\pi}{3}$ ή $x=\frac{2\pi}{3}$.

302. Έχουμε

$3\dfrac{\sqrt{3}+\varepsilon\varphi x}{1-\sqrt{3}\varepsilon\varphi x}+\varepsilon\varphi x+2\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\sqrt{3}\varepsilon\varphi^2 x+2\varepsilon\varphi x-5\sqrt{3}=0$. Θέτουμε εφx=ω οπότε έχουμε: $\sqrt{3}\omega^2+2\omega-5\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\omega=-\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ απορ. ή $\omega=\sqrt{3}$.

$$\text{Άρα}\quad \varepsilon\varphi x=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}.\quad \text{Στο } [0,\pi/2),\ x=\frac{\pi}{3}.$$

303. Έχουμε

$$\sigma\varphi\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\Gamma}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{\sigma\varphi\frac{A}{2}\sigma\varphi\frac{B}{2}-1}{\sigma\varphi\frac{B}{2}+\sigma\varphi\frac{A}{2}}=\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\frac{1}{\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\sigma\varphi\frac{A}{2}\sigma\varphi\frac{B}{2}\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{B}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$$

§3.7 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ 2α

304. **α.** Σύμφωνα με τον τύπο $\sigma\upsilon\nu 2\alpha=1-2\eta\mu^2\alpha$ (1) έχουμε:

$$-\sigma\upsilon\nu 2\omega+5\eta\mu\omega-2=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}-1+2\eta\mu^2\omega+5\eta\mu\omega-2=0\Leftrightarrow 2\eta\mu^2\omega+5\eta\mu\omega-3=0.$$

β. Θέτοντας $x=\eta\mu\omega$ στην εξίσωση $2\eta\mu^2\omega+5\eta\mu\omega-3=0$ έχουμε:

$2x^2+5x-3=0\Leftrightarrow x=-3$ ή $x=\dfrac{1}{2}$. Άρα $\eta\mu\omega=-3$ (αδύνατη επειδή $-1\le\eta\mu\omega\le 1$) ή $\eta\mu\omega=\dfrac{1}{2}$ (δεκτή). Επομένως $\eta\mu\omega=\dfrac{1}{2}$.

305. **α.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι :

$$f(x)=(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2=\eta\mu^2 x+2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2 x=$$
$$=(\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x)+2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=1+\eta\mu 2x.$$

β. Η συνάρτηση $g(x)=\eta\mu 2x$ είναι της μορφής $\rho\cdot\eta\mu\omega x$ με $\rho=1>0$ και $\omega=2>0$, άρα η μέγιστη τιμή της συνάρτησης g είναι $\max g(x)=1$,

η ελάχιστη τιμή της είναι $\min g(x)=-1$ και η περίοδός της είναι $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

Επομένως η συνάρτηση $f(x)=1+\eta\mu 2x=1+g(x)$ έχει:

μέγιστη τιμή: $\max f(x)=1+\max g(x)=1+1=2$

ελάχιστη τιμή: $\min f(x)=1+\min g(x)=1-1=0$ και περίοδο $T=\pi$.

306. **α.** Για την γωνία ω ισχύει ότι $5\sigma\upsilon\nu 2\omega+28\sigma\upsilon\nu\omega+21=0$ (1).

Αλλά $συν2ω = 2συν^2ω - 1$ (2), οπότε η σχέση (1) λόγω της (2) γράφεται:

$$5(2συν^2ω-1)+28συνω+21=0 \Leftrightarrow 10συν^2ω-5+28συνω+21=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10συν^2ω+28συνω+16=0 \Leftrightarrow 5συν^2ω+14συνω+8=0 \ (3)$$

Θέτουμε $συνω = y$ με $y \in [-1,1]$, οπότε η σχέση (3) γράφεται: $5y^2+14y+8=0$

Είναι $Δ=β^2-4αγ=14^2-4\cdot5\cdot8=196-160=36>0$, άρα το τριώνυμο έχει δυο άνισες και πραγματικές ρίζες, τις : $y_{1,2}=\frac{-14\pm6}{10}$, οπότε $y_1=\frac{-14+6}{10}=-\frac{4}{5}$ (δεκτή) και $y_2=\frac{-14-6}{10}=-2<-1$ (απορρίπτεται). Επομένως: $συνω=-\frac{4}{5}$.

β. Για την γωνία ω ισχύει $\frac{π}{2}<ω<π \Leftrightarrow π<2ω<2π$ και επομένως η γωνία ω είναι στο 2ο τεταρτημόριο, ενώ η διπλάσια της $2ω$ βρίσκεται στο 3ο ή στο 4ο τεταρτημόριο.

i. Είναι : $συν^2ω+ημ^2ω=1 \Leftrightarrow ημ^2ω=1-συν^2ω \Leftrightarrow ημ^2ω=1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2 \Leftrightarrow ημ^2ω=\frac{9}{25}$.

Άρα $ημω=\pm\frac{3}{5}$. Επειδή $\frac{π}{2}<ω<π$ έχουμε $ημω=\frac{3}{5}$.

Επίσης είναι: $συν2ω=2συν^2ω-1=2\left(-\frac{4}{5}\right)^2-1=2\cdot\frac{16}{25}-1=\frac{32}{25}-\frac{25}{25}=\frac{7}{25}$

και $ημ2ω=2ημω\cdot συνω=2\cdot\frac{3}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25}$.

ii. $$Π=\frac{13\cdot[ημ^2 2ω+συν^2 2ω]+12}{18\cdot εφ2ω\cdot σφ2ω+25[ημ2ω+συν2ω]}=\frac{13\cdot1+12}{18\cdot1+25\left(\frac{7}{25}-\frac{24}{25}\right)}=$$

$$=\frac{25}{18+25\left(-\frac{17}{25}\right)}=\frac{25}{18-17}=25$$

307. Έχουμε

$$A'=\frac{ημ3ασυνα-συν3αημα}{ημασυνα}=\frac{ημ(3α-α)}{ημασυνα}=2$$

308.

$$A'=2\left(1-\frac{ημx}{συνx}\cdot\frac{συν2x}{ημ2x}\right)=2\frac{ημ2xσυνx-συν2xημx}{συνxημ2x}=2\frac{ημx}{συνx2ημxσυνx}=\frac{1}{συν^2x}$$

309. Έχουμε

$$A'=\frac{2συν^2x-1+4συνx+3}{1+συνx}+\frac{2συν^2x-1-4συνx+3}{1-συνx}$$

$$=2\frac{(\sigma\upsilon\nu x+1)^2}{1+\sigma\upsilon\nu x}+2\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)^2}{1-\sigma\upsilon\nu x}=2(\sigma\upsilon\nu x+1)+2(1-\sigma\upsilon\nu x)=4$$

310. Έχουμε

$$B'=\frac{2}{\left(1+\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\right)\left(1+\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}\right)}=\frac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)^2}=...=\frac{\eta\mu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha}.$$

311. Έχουμε

$$A'=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha-(1-2\eta\mu^2\alpha)}{\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1}=\frac{2\eta\mu\alpha(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)}{2\sigma\upsilon\nu\alpha(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)}=\varepsilon\varphi\alpha$$

312. Έχουμε

$$A=3-(1-2\eta\mu^2x)[4-(1-2\eta\mu^2x)]-(2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)^2$$

$$=3-3-2\eta\mu^2x+6\eta\mu^2x+4\eta\mu^4x-4\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu^2x=4\eta\mu^2x+4\eta\mu^4x-4\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu^2x=$$

$$=4\eta\mu^2x(1-\sigma\upsilon\nu^2x)+4\eta\mu^4x=4\eta\mu^4x+4\eta\mu^4x=8\eta\mu^4x$$

313. Έχουμε

$$A'=\frac{\varepsilon\varphi 45^\circ+\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1-\varepsilon\varphi 45^\circ\,\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}+\varepsilon\varphi\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1+\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1-\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}+\frac{1-\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}=...=2\frac{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$$

314. Έχουμε

$$...\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x(2\sigma\upsilon\nu x-1)=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=0\ \text{ ή }\ \sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}\ \text{ ή }\ x=\frac{\pi}{3}.$$

315. Έχουμε

$...\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 2x+3\sigma\upsilon\nu x-5=0$. Θέτουμε συνx=y οπότε έχουμε

$2y^2+3y-5=0\Leftrightarrow y=1$ ή $y=-2,5$ απορ. Άρα $\sigma\upsilon\nu x=1\Leftrightarrow x=2\kappa\pi,\ \kappa\in Z$.

316. Έχουμε

$$...\Leftrightarrow 2\eta\mu^2\frac{x}{2}-\eta\mu 2x=1-2\sigma\upsilon\nu x$$

$$\Leftrightarrow 1-\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=1-2\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x(1-2\eta\mu x)=0$$

$$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=0\ \text{ ή }\ \eta\mu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\ \text{ ή }\ \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\ \text{ ή }\ \left(x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\ \text{ ή }\ x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}\right),\ \kappa\in Z$$

317. $...\Leftrightarrow 3\sigma\upsilon\nu^3 2x=2+2\sigma\upsilon\nu^2 2x-1$. Θέτουμε συν2x=y οπότε έχουμε:

$3y^3-2y^2-1=0 \Leftrightarrow y=1$ ή $y^2+y+1=0$ αδύνατη. Άρα $συν2x=1 \Leftrightarrow x=0$.

318. Έχουμε

$$... \Leftrightarrow ημ^2x+5(1-2ημ^2x)=(2ημxσυνx)^2-4 \Leftrightarrow ημ^2x+5-10ημ^2x=4ημ^2xσυν^2x-4 \Leftrightarrow ...$$
$$\Leftrightarrow -9ημ^2x+9=4ημ^2x-4ημ^4x \Leftrightarrow 4ημ^4x-13ημ^2x+9=0$$

Θέτουμε $ημ^2x=y$ οπότε λύνοντας την αντίστοιχη εξίσωση έχουμε: y=1 ή $y=\frac{9}{4}$ απορ.

$$\text{Άρα } ημx=1 \Leftrightarrow x=2κπ+\frac{π}{2} \text{ ή } ημx=-1 \Leftrightarrow x=2κπ-\frac{π}{2},\ κ\in Z$$

319. Έχουμε

$$συν^2α=1-ημ^2α \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow συνα=-\frac{4}{5}. \quad συνα=1$$

$$-2ημ^2\frac{α}{2} \Leftrightarrow ημ\frac{α}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{10} \quad \left(\frac{π}{2}<α<\frac{3π}{4}\right).$$

320. Έχουμε

$$συν\frac{α}{2}=2συν^2\frac{α}{4}-1=...=-\frac{7}{8} \quad \text{και} \quad συνα=2συν^2\frac{α}{2}-1=...=\frac{17}{32}.$$

321. Έχουμε

$$ημ2α=\frac{2εφα}{1+εφ^2α}=\frac{6}{10} \qquad συν2α=\frac{1-εφ^2α}{1+εφ^2α}=-\frac{8}{10}$$

$$A'=\frac{0,6-0,8}{ημ^2α+συν^2α+2συν^2α-\frac{1}{2}ημ2α}=-\frac{2}{9}.$$

322. Από την

$$ημ^2α+συν^2α=1 \text{ έχουμε } συνα=-\frac{12}{13} \text{ και από την } συνα=1-2συν^2\frac{α}{2}$$

έχουμε $συν\frac{α}{2}=-\frac{\sqrt{26}}{26}$.

323. Έχουμε

$$A'=\frac{(ημ^2α-συν^2α)(ημ^2α+συν^2α)+ημ2α}{\frac{ημ2α}{συν2α}-1}=\frac{-(συν^2α-ημ^2α)+ημ2α}{\frac{ημ2α-συν2α}{συν2α}}$$

$$=\frac{ημ2α-συν2α}{\frac{ημ2α-συν2α}{συν2α}}=συν2α$$

324. Έχουμε

$$B' = \frac{1+\frac{ημx}{συνx}}{1-\frac{ημx}{συνx}} = \frac{συνx+ημx}{συνx-ημx} = \frac{συν^2x+ημ^2x+2ημxσυνx}{συν^2x-ημ^2x} = \frac{1+ημ2x}{συν2x}$$

325. Έχουμε

$$A' = \frac{ημ^3xσυνx+ημ3xσυνx+ημxσυν^3x-ημxσυν3x}{ημxσυνx}$$

$$= \frac{ημxσυνx(ημ^2x+συν^2x)+(ημ3xσυνx-συν3xημx)}{ημxσυνx} =$$

$$= \frac{ημxσυνx+ημ(3x-x)}{ημxσυνx} = \frac{ημxσυνx+ημ2x}{ημxσυνx} = 3$$

326. Έχουμε

$$A' = \frac{1+ημ2α}{ημα+συνα} - \frac{\dfrac{συν^2\frac{α}{2}-ημ^2\frac{α}{2}}{συν^2\frac{α}{2}}}{\dfrac{συν^2\frac{α}{2}+ημ^2\frac{α}{2}}{συν^2\frac{α}{2}}} = \frac{1+ημ2α}{ημα+συνα} - συνα$$

$$= \frac{1+ημ2α-ημασυνα-συν^2α}{ημα+συνα} = \ldots = \frac{ημ^2α+ημασυνα}{ημα+συνα} = \ldots = ημα.$$

327. Έχουμε

$$A' = \frac{1+εφα}{1-εφα} - \frac{1-εφα}{1+εφα} = \ldots = \frac{4εφα}{1-εφ^2α} = 2εφ2α$$

328. Έχουμε

$$A' = (2συν^2 2α-1)-4συν2α+3 = 2συν^2 2α-4συν2α+2$$

$$= 2(συν2α-1)^2 = 2(1-2ημ^2α-1)^2 = 8ημ^4α$$

329. Έχουμε

$$A' = \frac{\dfrac{συν^2(45^\circ-α)-ημ^2(45^\circ-α)}{συν^2(45^\circ-α)}}{\dfrac{συν^2(45^\circ-α)+ημ^2(45^\circ-α)}{συν^2(45^\circ-α)}} = συν^2(45^\circ-α)-ημ^2(45^\circ-α)$$

$$= συν[2(45^\circ-α)] = ημ2α$$

330. Έχουμε

$$A' = \ldots = \frac{4\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha} = \frac{2\eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = 2\varepsilon\varphi 2\alpha$$

331. Έχουμε

$$A' = \ldots = 1 + 1 - 2(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta) = 2 - 2\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = 2[1 - \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)]$$

$$= 2\cdot 2\eta\mu^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 4\eta\mu^2\frac{\alpha-\beta}{2}$$

332. Έχουμε

$$\eta\mu\frac{\pi}{8} = \eta\mu\frac{7\pi}{8} \quad \text{και} \quad \eta\mu\frac{3\pi}{8} = \eta\mu\frac{5\pi}{8}. \ \text{Άρα} \ A' = 2\eta\mu^4\frac{\pi}{8} + 2\eta\mu^4\frac{3\pi}{8}$$

$$= 2\left(\eta\mu^2\frac{\pi}{8}\right)^2 + 2\left(\eta\mu^2\frac{3\pi}{8}\right)^2 = 2\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}}{2}\right)^2 = \ldots = \frac{3}{2}$$

333. Έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{8} = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8} \qquad \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{8} = -\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8} \qquad \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8} = \eta\mu\frac{\pi}{8}$$

$$A' = \sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{8} + \sigma\upsilon\nu^4\frac{3\pi}{8} + \sigma\upsilon\nu^4\frac{3\pi}{8} + \sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{8} = 2\sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{8} + 2\sigma\upsilon\nu^4\frac{3\pi}{8} = 2\sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{8} + 2\eta\mu^4\frac{\pi}{8} =$$

$$= 2\left[\left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{8} + \eta\mu^2\frac{\pi}{8}\right)^2 - 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{8}\eta\mu^2\frac{\pi}{8}\right] = 2\left(1 - \frac{1}{2}\eta\mu^2\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

334. Έχουμε

$$A' = \frac{1 + \eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} - \left(1 - 2\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + 2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} + 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} - 1} = \ldots = \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$$

335. Έχουμε

$$A' = \frac{2\eta\mu 2\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2\eta\mu^2 2\alpha}\cdot\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu 2\alpha} = \frac{2\eta\mu^2\alpha}{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$$

336. Έχουμε

$$A' = (1+\eta\mu\alpha)\frac{1-\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}} = \left(1 + \frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}\right)\cdot\frac{1-\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}} = \frac{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2} + 2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1-\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\left(1+\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1-\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}=\frac{\left(1+\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}=\sigma\upsilon\nu\frac{2\alpha}{2}=\sigma\upsilon\nu\alpha$$

337. Έχουμε

$$\frac{1}{\eta\mu^2\alpha}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}+\frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=7\Leftrightarrow\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^4\alpha+\eta\mu^4\alpha}{\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=7$$

$$\Leftrightarrow 1+(\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha)^2-2\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha=7\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha\Leftrightarrow 2=9\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{9}=\frac{1}{4}4\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha\Leftrightarrow\frac{8}{9}=(\eta\mu 2\alpha)^2$$

338. Έχουμε

$$A'=(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1)^2-(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)=\ldots=4\sigma\upsilon\nu^4\alpha-3\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha(4\sigma\upsilon\nu^2\alpha-3).$$

339. Έχουμε

$\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{12}=\eta\mu\frac{\pi}{12}$, οπότε η σχέση γίνεται $\eta\mu^2\frac{\pi}{12}-\eta\mu^4\frac{\pi}{12}=\frac{1}{16}$ αλλά

$$\eta\mu^2\frac{\pi}{12}-\eta\mu^4\frac{\pi}{12}=\eta\mu^2\frac{\pi}{12}\left(1-\eta\mu^2\frac{\pi}{12}\right)=\eta\mu^2\frac{\pi}{12}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{12}=\left(\frac{1}{2}2\eta\mu\frac{\pi}{12}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{2}\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)^2=\frac{1}{16}$$

340. Έχουμε

$\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{12}=\eta\mu\frac{\pi}{12}$, οπότε

$$\sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{12}+\sigma\upsilon\nu^4\frac{5\pi}{12}=\sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{12}+\eta\mu^4\frac{\pi}{12}=\left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{12}+\eta\mu^2\frac{\pi}{12}\right)^2-2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{12}\eta\mu^2\frac{\pi}{12}=$$

$$=1-\frac{1}{2}\eta\mu^2\frac{\pi}{6}=\frac{7}{8}$$

341. Έχουμε

$$\Leftrightarrow 4\frac{2\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi^2x}+3\frac{1-\varepsilon\varphi^2x}{1+\varepsilon\varphi^2x}=3\Leftrightarrow 8\varepsilon\varphi x+3-3\varepsilon\varphi^2x=3+3\varepsilon\varphi^2x$$

$$\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=0\ \text{ ή }\ \varepsilon\varphi x=\frac{4}{3}$$

342. Έχουμε

$$\eta\mu 2x=\sigma\upsilon\nu^2x-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu^2x\Leftrightarrow\eta\mu 2x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{12} \;\; \acute{\eta} \;\; x = \kappa\pi + \frac{5\pi}{12},\; \kappa \in Z$$

343. Έχουμε

$$... \Leftrightarrow 4\eta\mu^2 x - (1 - 2\eta\mu^2 x) = 5 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \eta\mu x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\; \kappa \in Z$$

344. Έχουμε

$2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - 3\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 0 \Leftrightarrow (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 - 3(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 3) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 3$ (άτοπο) ή

$\eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -1 \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4},\; \kappa \in Z$

345. Έχουμε

$$... \Leftrightarrow (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)^2 - 2\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \eta\mu 2x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{4},\; \kappa \in Z$$

και τελικά $x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{3\pi}{4}$.

346. Έχουμε

$$... \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = 3 \qquad \eta\mu 2x = \frac{2\varepsilon\varphi x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x} = \frac{3}{5}, \qquad \sigma\upsilon\nu 2x = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2 x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x} = \frac{4}{5}$$

347. Έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu 2\beta = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\beta}{1 + \varepsilon\varphi^2\beta} = \frac{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\gamma}{1 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\gamma} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\gamma - \eta\mu\alpha\eta\mu\gamma}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\alpha\eta\mu\gamma} = \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \gamma)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha - \gamma)}$$

348. Η συνάρτηση είναι της μορφής: $f(x) = \alpha\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x$ όπου $\alpha = \sqrt{3},\; \beta = -1$

$$\text{Άρα: } \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ 2000-2004

349. **α.** $2\sigma\upsilon\nu 3\alpha(\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu 2\alpha + \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha) = 2\sigma\upsilon\nu 3\alpha\eta\mu(\alpha + 2\alpha) =$

$= 2\sigma\upsilon\nu 3\alpha\eta\mu 3\alpha = \eta\mu(2 \cdot 3\alpha) = \eta\mu 6\alpha$

β. Από (α) ερώτημα έχουμε:

$\eta\mu 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu 6x = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 6x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\;\; \kappa \in Z$.

350. **α.** Έχουμε

$$εφ(α-β)=\frac{εφα-εφβ}{1+εφαεφβ}=...=\frac{1}{7}$$

β. $εφ(α+β)=\frac{εφα+εφβ}{1-εφαεφβ}=...=1$

γ. $α+β=45^\circ$ οπότε $2α+2β=90^\circ$ άρα 2α και 2β συμπληρωματικές.

351. **α.** Έχουμε:

$$ημ6x+ημ4x=2ημ\left(\frac{6x+4x}{2}\right)\ συν\left(\frac{6x-2x}{3}\right)=2ημ5xσυνx$$

β. Έχουμε: $ημ6x+ημ4x+4ημ5x=0 \Leftrightarrow 2ημ5xσυνx+4ημ5x=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2ημ5x(συνx+2)=0 \quad (1)$$

Από την ισότητα (1) προκύπτει ότι: $συνx+2=0 \Leftrightarrow συνx=-2$ (αδύνατη)

$$ημ5x=0 \Leftrightarrow ημ5x=ημ0 \Leftrightarrow 5x=κπ \Leftrightarrow x=\frac{κπ}{5}\ κ\in Z\ .$$

352. **α.** Έχουμε:

$$5(2συν^2α-1)-14συνα-7=0 \Leftrightarrow 5συν^2α-7συνα-6=0 \quad (1)$$

Θέτουμε συνα=x οπότε η (1) γράφεται:

$$5x^2-7χ-6=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ απορ. } x=-\frac{3}{5}.\ \text{Άρα } συνα=-\frac{3}{5}.$$

β. Έχουμε $συνα=-\frac{3}{5}$ οπότε: $ημ^2α=1-συν^2α=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$ δηλαδή $ημα=\pm\frac{4}{5}$

και επειδή $π\le α\le\frac{3π}{2}$ έχουμε $ημα=-\frac{4}{5}$

$$ημ2α=2ημασυνα=2\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{24}{25}\quad συν2α=2συν^2α-1=2\frac{9}{25}-1=\frac{18}{25}-1=-\frac{7}{25}$$

$$εφ2α=\frac{ημ2α}{συν2α}=\frac{\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}}=-\frac{24}{7}$$

353. $συνx(ημ2x+4ημx)=(συν2x+4συνx+1)ημx$

$$συνx(2ημxσυνx+4ημx)=(2συν^2x-1+4συνx+1)ημx$$

$$2ημxσυν^2x+4ημxσυνx=2συν^2xημx+4συνxημx \text{ που ισχύει}$$

Είναι:

$συν2x+4συνx+1=0$ ή $2συν^2x-1+4συνx+1=0$ ή $2συνx(συνx+2)=0$ (1).

Από την (1) έχουμε: συνx=0 ή $συνx=-2$ άτοπο $\Leftrightarrow x=κπ+\frac{π}{2},\ κ\in Z$

354. **α.** $$\eta\mu 2x-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x(2\eta\mu x-\sqrt{3})=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0 \;\text{ ή }\; 2\eta\mu x-\sqrt{3}=0$$

Έχουμε: $\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ ή $2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$

$2\eta\mu x-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow \eta\mu x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}$ ή $x=2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}$, $\kappa\in Z$

β. $$\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha+\eta\mu 2\alpha}=\frac{1-(1-2\eta\mu^2\alpha)}{2\eta\mu\alpha+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{2\eta\mu^2\alpha}{2\eta\mu\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)}=$$
$$=\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{1+\left(2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}=\frac{\eta\mu\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{2}{2}}=\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$$

355. **α.** Η f έχει μέγιστο 3 άρα α=2 και περίοδο

$$T=\frac{2\pi}{\beta\pi}=\frac{2}{\beta}=4\Leftrightarrow \beta=\frac{1}{2}.$$

β. $3\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \frac{\pi x}{2}=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3}$ και $x=4\kappa\pm\frac{2}{3}$ με $\kappa\in Z$

356. **α.** Έχουμε

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2} \text{ και } \sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4} \text{ οπότε } 2\alpha=\frac{\pi}{2} \text{ και άρα } \eta\mu 2\alpha=1.$$

Ομοίως $\beta=\frac{\pi}{6}$ οπότε $\sigma\upsilon\nu 2\beta=\frac{1}{2}$.

β. $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta=...=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)+\eta\mu(\alpha-\beta)=...=\frac{\sqrt{6}}{2}$

γ.

357. **α.** Έχουμε

$$2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}=1+\sigma\upsilon\nu 2\cdot\frac{x}{2}=1+\sigma\upsilon\nu x$$

β. $2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}(2-\sigma\upsilon\nu x)=(1+\sigma\upsilon\nu x)(2-\sigma\upsilon\nu x)$
$$=2-\sigma\upsilon\nu x+2\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^2x=1+1+\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^2x=1+\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x$$

γ. $1+\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu^2x=0\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}(2-\sigma\upsilon\nu x)=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}=0=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}$
$$\Leftrightarrow x=4\kappa\pi\pm\pi \;\; \kappa\in Z.$$

ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε 2004-2015

358. **Β1.** Έχουμε

$$A=\frac{1-\eta\mu 2\theta}{(\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta)^2}=\frac{1-\eta\mu 2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta-2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{1-\eta\mu 2\theta}{1-\eta\mu 2\theta}=1$$

Β2. $2\eta\mu^3 x-4\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}+\sigma\upsilon\nu^2 x=0\Leftrightarrow 2\eta\mu^3 x-2\eta\mu x+1-\eta\mu^2 x=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu^3 x-\eta\mu^2 x-2\eta\mu x+1=0$$

Θέτουμε ημx=ω και έχουμε την εξίσωση: $2\omega^3-\omega^2-2\omega+1=0$

Με σχήμα Horner (για ρ=1) έχουμε: $(\omega-1)(2\omega^2+\omega-1)=0\Leftrightarrow \omega=1,\ \omega=-1,\ \omega=\frac{1}{2}$

Άρα ημx=1 ή $\eta\mu x=-1$ ή $\eta\mu x=\frac{1}{2}$ και επειδή $x\in[0,\pi]$, έχουμε τελικά: $x=\frac{\pi}{2}$ ή $x=\frac{\pi}{6}$

359. α. Η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\eta\mu 2x-\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x(2\eta\mu x-\sqrt{2})=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0 \text{ ή } \eta\mu x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Οι λύσεις είναι: $\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2},\ \kappa\in Z$

$$\eta\mu x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4} \text{ ή } x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4} \text{ ή } x=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{4},\ \kappa\in Z$$

β. Για κάθε $x\in[0,\pi]$ έχουμε:

$$0\le x\le\pi\Leftrightarrow 0\le 2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\le\pi\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\le 2\kappa\pi\le\pi-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\le\kappa\le\frac{1}{4}$$

Άρα κ=0. Τότε $x=\frac{\pi}{2}$

$$0\le x\le\pi\Leftrightarrow 0\le 2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\le\pi\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}\le 2\kappa\pi\le\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{4}\le\kappa\le\frac{3}{4}$$

Άρα ο κ δεν ορίζεται.

$$0\le x\le\pi\Leftrightarrow 0\le 2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\le\pi\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}\le 2\kappa\pi\le\pi-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow -\frac{1}{8}\le\kappa\le\frac{3}{8}$$

Άρα κ=0. Τότε $x=\frac{\pi}{4}$.

$$0\le x\le\pi\Leftrightarrow 0\le 2\kappa\pi+\frac{3\pi}{4}\le\pi\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4}\le 2\kappa\pi\le\pi-\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow -\frac{3}{8}\le\kappa\le\frac{1}{8}$$

Άρα κ=0. Τότε $x=\frac{3\pi}{4}$

Δηλαδή οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι: $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{2}$ και $x_3=\frac{3\pi}{4}$

Ακόμα $x_1+x_3=\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=\pi=2\frac{\pi}{2}=2x_2$ που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

$$\frac{3-4συν2α+συν4α}{3+4συν2α+συν4α}=\frac{3-4συν2α+2συν^2 2α-1}{3+4συν2α+2συν^2 2α-1}=$$
$$=\frac{2συν^2 2α-4συν2α+2}{2συν^2 2α+4συν2α+2}=\frac{(2συν^2α-1)^2-2(2συν^2α-1)+1}{(2συν^2α-1)^2+2(2συν^2α-1)+1}=$$
$$=\frac{4συν^4α-4συν^2α+1-4συν^2α+2+1}{4συν^4α-4συν^2α+1+4συν^2α-2+1}=\frac{(2συν^2α-2)^2}{4συν^4α}=$$
$$=\frac{[-2(1-συν^2α)]^2}{4συν^4α}=\frac{(-2ημ^2α)^2}{4συν^4α}=\frac{4ημ^4α}{4συν^4α}=εφ^4α$$

360. **B.1.** Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A_f=R$.

Επειδή τα σημεία A(0, β+5), και $B\left(\frac{4\pi}{\beta},4\beta^2\right)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχουμε: $f(0)=\beta+5\Leftrightarrow α\cdot συν0=\beta+5\Leftrightarrow α=\beta+5$ (1)

$$f\left(\frac{4\pi}{\beta}\right)=4\beta^2\Leftrightarrow α\cdot συν\left(\frac{\beta}{2}\cdot\frac{4\pi}{\beta}\right)=4\beta^2\Leftrightarrow α=4\beta^2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$4\beta^2=\beta+5\Leftrightarrow 4\beta^2-\beta-5=0 \text{ και } \Delta=(-1)^2-4\cdot4\cdot(-5)=81$$

$$\text{Άρα } \beta=\frac{1\pm\sqrt{81}}{8}=\frac{1\pm9}{8}=\begin{cases}\beta=-1 \text{ δεκτή } (\beta<0)\\ \beta=\frac{5}{4} \text{ (απορ.)}\end{cases}$$

Επομένως από τη σχέση (1) έχουμε α=4

Άρα το σύστημα των σχέσεων (1) και (2) έχει λύση α=4 και $\beta=-1$.

Άρα ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x)=4συν\left(-\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow f(x)=4συν\left(\frac{x}{2}\right)$

B.2. Έχουμε: $f(x)=4\Leftrightarrow 4\cdot συν\frac{x}{2}=4\Leftrightarrow συν\frac{x}{2}=1\Leftrightarrow\frac{x}{2}=2κ\pi\Leftrightarrow x=4κ\pi,\ κ\in Z$

Αλλά $0\le x\le 12\pi\Leftrightarrow 0\le 4k\pi\le 12\pi\Leftrightarrow 0\le κ\le 3$. Άρα κ=0, 1, 2, 3

Για κ=0 $x_1=0$ Για κ=1 $x_2=4\pi$ Για κ=2 $x_3=8\pi$ Για κ=3 $x_4=12\pi$

Άρα τα σημεία τομής της f με την ευθεία y=3 είναι: (0,4), (4π,4), (8π,4), (12π,4).

B.3. Επειδή ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x)=4συν\left(\frac{1}{2}x\right)$ και είναι της μορφής f(x)=ρσυν(ωx) οπότε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι το 4 και η ελάχιστη τιμή της το -4.

Η περίοδός της είναι $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

B.4. Έχουμε: $A=f(4\pi)-f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=4\cdot συν(2\pi)-4\cdot συν\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\right)=4-4\cdot\frac{1}{2}=2$

Ακόμα $f(0)=4\cdot συν0=4$ οπότε:

$$B=3\cdot f(0)\cdot\frac{f(0)^{2010}-1}{f(0)-1}+4=3\cdot 4\cdot\frac{4^{2010}-1}{4-1}+4=3\cdot 4\cdot\frac{4^{2010}-1}{3}+4=4(4^{2010}-1)+4=4^{2011}$$

361. **Γ1.** Απλοποιούμε τους συντελεστές των αγνώστων του συστήματος, με αναγωγή τους στο 1ο τεταρτημόριο:

$$ημ(\pi+\theta)=-ημ\theta\,,\quad συν(-\theta)=συν\theta\,,\quad ημ\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=συν\theta$$

$$ημ(\theta-\pi)=ημ[-(\pi-\theta)]=-ημ(\pi-\theta)=-ημ\theta$$

Τότε το αρχικό σύστημα γίνεται: $\begin{cases}-ημ\theta x+συν\theta y=1\\ συν\theta x+ημ\theta y=1\end{cases}$

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες του συστήματος:

$$D=\begin{vmatrix}-ημ\theta & συν\theta\\ συν\theta & ημ\theta\end{vmatrix}=-ημ^2\theta-συν^2\theta=-(ημ^2\theta+συν^2\theta)=-1\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}1 & συν\theta\\ 1 & ημ\theta\end{vmatrix}=ημ\theta-συν\theta \qquad D_y=\begin{vmatrix}-ημ\theta & 1\\ συν\theta & 1\end{vmatrix}=-ημ\theta-συν\theta$$

Αφού D≠0 το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)\Leftrightarrow(x,y)=\left(\frac{ημ\theta-συν\theta}{-1},\frac{-ημ\theta-συν\theta}{-1}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x,y)=(συν\theta-ημ\theta,συν\theta+ημ\theta)$$

Γ2. i. Η $f(x)=(10^\alpha-3)συνx-4$ είναι της μορφής f(x)=ρσυνx+c με $\rho=10^\alpha-3$ και $c=-4$. Η μέγιστη τιμή της f(x) είναι $|\rho|+c=|10^\alpha-3|-4$, οπότε:

$$|10^\alpha-3|-4=3\Leftrightarrow|10^\alpha-3|=3+4\Leftrightarrow|10^\alpha-3|=7\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}10^\alpha-3=-7\\ ή\\ 10^\alpha-3=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10^\alpha=-4 \text{ (αδύνατη αφού } 10^\alpha>0)\\ ή\\ 10^\alpha=10\end{cases}\Leftrightarrow 10^\alpha=10^1\Leftrightarrow\alpha=1$$

ii. Έχουμε:

$$xy=f(\theta)\Leftrightarrow xy=7συν\theta-4\Leftrightarrow(συν\theta-ημ\theta)(συν\theta+ημ\theta)=7συν\theta-4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow συν^2\theta-ημ^2\theta=7συν\theta-4\Leftrightarrow συν^2\theta-(1-συν^2\theta)=7συν\theta-4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow συν^2\theta-1+συν^2\theta-7συν\theta+4=0\Leftrightarrow 2συν^2\theta-7συν\theta+3=0$$

Θέτουμε συνθ=ω με $-1\le\omega\le1$, οπότε η εξίσωση γίνεται $2\omega^2-7\omega+3=0$.

Οι ρίζες της είναι ω=3 (απορρίπτεται) και $\omega=\frac{1}{2}$.

Τότε: $\omega=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \begin{cases}\theta=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}\\ \text{ή}\\ \theta=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3}\end{cases}\quad \kappa\in Z$

362. **Γ1.** Επειδή

$$\left(\frac{3\pi}{2}+\beta x\right)=-\sigma\upsilon\nu(\beta x) \text{ τότε } f(x)=-\alpha\sigma\upsilon\nu(\beta x).$$

Πρέπει $f(0)=-2$ και $f(\pi)=-1$.

Άρα $-\alpha\sigma\upsilon\nu 0=-2\Leftrightarrow \alpha=2$ και $-\alpha\sigma\upsilon\nu(\beta\pi)=-1\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\beta\pi)=\frac{1}{\alpha}$

$$\text{δηλ. } \sigma\upsilon\nu(\beta\pi)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \beta\pi=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \text{ ή } \beta\pi=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3}\quad (\kappa\in Z)$$

Έτσι $\beta=2\kappa+\frac{1}{3}$ ή $\beta=2\kappa-\frac{1}{3}$ $(\kappa\in Z)$.

Έστω $\beta=2\kappa+\frac{1}{3}$, πρέπει $0\le 2\kappa+\frac{1}{3}\le 1\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\le 2\kappa\le\frac{2}{3}\Leftrightarrow -\frac{1}{6}\le\kappa\le\frac{1}{3}$

Άρα κ=0, οπότε $\beta=\frac{1}{3}$.

Έστω $\beta=2\kappa-\frac{1}{3}$, πρέπει $0\le 2\kappa-\frac{1}{3}\le 1\Leftrightarrow \frac{1}{3}\le 2\kappa\le\frac{4}{3}\Leftrightarrow \frac{1}{6}\le\kappa\le\frac{2}{3}$ που είναι αδύνατη γιατί $\kappa\in Z$. Έχουμε λοιπόν α=2 και $\beta=\frac{1}{3}$. Άρα $f(x)=-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}\right)$.

Γ2. α. Επειδή για κάθε $x\in R$ ισχύει

$$-1\le\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}\right)\le 1\Leftrightarrow -2\le 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}\right)\le 2\Leftrightarrow -2\le f(x)\le 2$$

και αφού είναι $f(0)=-2$ και f(3π)=2 έχουμε $f(0)\le f(x)\le f(3\pi)$ για κάθε $x\in R$

Έτσι, η f παρουσιάζει ελάχιστο για x=0 το $f(0)=-2$ μέγιστο για x=3π το f(3π)=2

Εναλλακτικά:

Επειδή $f(x)=-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}\right)$, το ελάχιστο της f είναι το -2 και το μέγιστο το 2.

$$\text{Η περίοδος της f είναι } T=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$$

β. Ένας πίνακας τιμών της συνάρτησης f στο διάστημα [0,6π] είναι ο εξής:

x	0	$\frac{3\pi}{2}$	3π	$\frac{9\pi}{2}$	6π
f(x)	-2	0	2	0	-2

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση.
Παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0,3π] και γνησίως φθίνουσα στο [3π,6π].

Γ3. Είναι: $f(0)=-2,\ f(-\pi)=-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1,\ f(2\pi)=-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right)=1$ και

$$f(2014\pi)=-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2014\pi}{3}\right)=-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{671\cdot 3\pi+\pi}{3}\right)=-2\sigma\upsilon\nu\left(671\pi+\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=-2\sigma\upsilon\nu\left(670\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-2\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=1$$

Έτσι το σύστημα γίνεται: $\begin{cases}-2\lambda x+y=4\lambda\\ -\lambda x+\lambda y=0\end{cases}$

Έχουμε $D=\begin{vmatrix}-2\lambda & 1\\ -\lambda & \lambda\end{vmatrix}=-2\lambda^2+\lambda=-\lambda(2\lambda-1)$. Πρέπει $D=0\Leftrightarrow\lambda=0$ ή $\lambda=\frac{1}{2}$.

Για λ=0 το σύστημα γίνεται $\begin{cases}y=0\\ 0=0\end{cases}$ που είναι αόριστο.

Για $\lambda=\frac{1}{2}$ το σύστημα γίνεται $\begin{cases}-x+y=2\\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y=2\\ -x+y=0\end{cases}$ που είναι αδύνατο.

Άρα το (Σ) για λ=0 έχει άπειρες λύσεις της μορφής (x,y)=(κ,0) για κάθε $\kappa\in R$.

363. **Γ1.** Έχουμε

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}=\frac{1+\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x(1+\eta\mu x)}=\frac{\eta\mu x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x(1+\eta\mu x)}=\frac{\eta\mu x(1+\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x(1+\eta\mu x)}=\varepsilon\varphi x$$

Γ2. $\sqrt{12}\varepsilon\varphi\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)-2009\varepsilon\varphi\left(\frac{35\pi}{4}\right)=\sqrt{12}\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}-2009\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{32\pi}{4}\right)=$

$$=\sqrt{12}\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}-2009\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{4}+8\pi\right)=\sqrt{12}\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}-2009\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{12}\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}-2009\varepsilon\varphi\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{12}\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}+2009\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{12}\sqrt{3}+2009\cdot 1=6+2009=2015$$

Γ3. $f(x)=-\varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}-x+\kappa\pi\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+\kappa\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{\kappa\pi}{2},\ \kappa\in Z$$

364. **Δ1. α.**

$$D=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 8\\ \lambda & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+3)-8\lambda=\lambda^2+3\lambda+\lambda+3-8\lambda=\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = 4\lambda + 12 - 16 = 4\lambda - 4 = 4(\lambda - 1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 4 \\ \lambda & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda + 2 - 4\lambda = 2 - 2\lambda = -2(\lambda - 1)$$

β. Το σύστημα έχει μοναδική λύση αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$ και $\lambda \neq 3$. Τότε η λύση είναι:

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{4(\lambda-1)}{(\lambda-1)(\lambda-3)}, \frac{-2(\lambda-1)}{(\lambda-1)(\lambda-3)}\right) = \left(\frac{4}{\lambda-3}, \frac{-2}{\lambda-3}\right).$$

Δ2. Η λύση επαληθεύει την εξίσωση:

$$x_0 + y_0 = 2 \Leftrightarrow \frac{4}{\lambda-3} + \frac{-2}{\lambda-3} = 2 \Leftrightarrow 4 - 2 = 2(\lambda-3) \Leftrightarrow 2 = 2\lambda - 6 \Leftrightarrow 2\lambda = 8 \Leftrightarrow \lambda = 4$$

Τότε $(x_0, y_0) = \left(\frac{4}{4-3}, \frac{-2}{4-3}\right) = (4, -2)$

Δ3. Η συνάρτηση για $\lambda=4$, $x_0 = 4$, $y_0 = -2$ γράφεται:

$$g(t) = 4\eta\mu\left(\frac{-2\pi}{6(-2)}t\right) + 4 = 4\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4$$

που έχει περίοδο $T = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$ και

μέγιστη τιμή $M = 4 \cdot 1 + 4 = 8$ και ελάχιστη τιμή $\varepsilon = 4(-1) + 4 = 0$.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 28

365. **α.** $\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x(2\eta\mu x + 1) = 0$

$$\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2},\ \kappa \in Z$$

ή $2\eta\mu x + 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6},\ \kappa \in Z$

β. $\dfrac{\eta\mu 2\alpha + \eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \dfrac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha}{1 + 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \dfrac{\eta\mu\alpha(2\sigma\upsilon\nu\alpha + 1)}{\sigma\upsilon\nu\alpha(2\sigma\upsilon\nu\alpha + 1)} = \varepsilon\varphi\alpha$

366. **α.** Έχουμε

$$\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1} = \frac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$$

β. **i.** Πρέπει

$$\sigma\upsilon\nu 2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x \neq -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x \neq \sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow 2x \neq 2\kappa\pi + \pi \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$$

οπότε η εξίσωση με τη βοήθεια του (α) γίνεται

$$\varepsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \text{ δεκτή.}$$

ii. $0 \le x \le 2\pi$ $\quad 0 \le \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le \kappa + \frac{1}{4} \le 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le \kappa \le \frac{7}{4} \Leftrightarrow \kappa = 0$ ή $\kappa = 1$

$$\text{άρα } \ x = \frac{\pi}{4},\ x = \frac{5\pi}{4}.$$

367. **α.** Έχουμε

$$\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\eta\mu 2\alpha} = \frac{1-(1-2\eta\mu^2\alpha)+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1-1+2\eta\mu^2\alpha+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} =$$

$$= \frac{2\eta\mu\alpha(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)}{2\sigma\upsilon\nu\alpha(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)} = \varepsilon\varphi\alpha$$

β. $\sigma\upsilon\nu 2x - 2\eta\mu^2 x = 0 \Leftrightarrow 1-2\eta\mu^2 x - 2\eta\mu^2 x = 0 \Leftrightarrow 4\eta\mu^2 x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{1}{4}$

$$\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6},\ \kappa \in Z$$

ή $\eta\mu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6},\ \kappa \in Z$

368. α. Έχουμε

$$\frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu 3x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\sigma\upsilon\nu 3x}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu(3x-x)}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu 2x}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x} = 2$$

β. $\frac{\eta\mu 2x}{1+\sigma\upsilon\nu 2x}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{1+2\sigma\upsilon\nu^2 x-1}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}-1}$

$$= \frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{2\sigma\upsilon\nu^2 x}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}} = \frac{\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}} = \frac{2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}} = \varepsilon\varphi\frac{x}{2}$$

369. **α.** Έχουμε

$$\frac{2\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)} = \frac{2(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta} =$$

$$= \frac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+2\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta} = \frac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta} + \frac{2\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta} = \varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta$$

β. $\frac{\eta\mu 2\alpha+\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha}{1+2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1+\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\eta\mu\alpha(2\sigma\upsilon\nu\alpha+1)}{\sigma\upsilon\nu\alpha(2\sigma\upsilon\nu\alpha+1)} = \varepsilon\varphi\alpha$

370. **α.** Έχουμε

$$A = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{12} - 2\eta\mu^2\frac{\pi}{12} = 2\frac{1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}}{2} - 2\frac{1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}}{2} =$$

$$= 1 + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} - 1 + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

β. $B = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \dfrac{1-(1-2\eta\mu^2\alpha)+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} =$

$$= \frac{2\eta\mu^2\alpha + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{2\eta\mu\alpha(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)}{2\sigma\upsilon\nu\alpha(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)} = \varepsilon\varphi\alpha$$

γ. $A + B = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} + \varepsilon\varphi\alpha = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha = \varepsilon\varphi\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \alpha = \kappa\pi - \dfrac{\pi}{3}$ δεκτή.

371. **α.** Έχουμε

$$\frac{\eta\mu 4\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 4\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{2\eta\mu 2\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1+2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha - 1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{\eta\mu 2\alpha(2\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 1)}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha(2\sigma\upsilon\nu 2\alpha+1)} = \varepsilon\varphi 2\alpha$$

β. $\sigma\upsilon\nu 2x - \eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu^2 x - \eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x + \eta\mu x = 0$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x(2\eta\mu x + 1) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi$$

ή $\eta\mu x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \dfrac{7\pi}{6}$, $\kappa \in Z$

372. **α.** Έχουμε

$$\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}-x\right) - \sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}-x\right) = \eta\mu\left[\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right] = \eta\mu 2x$$

ενώ $\dfrac{\eta\mu 2x + \eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu x} = \dfrac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x}{1+2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 + \sigma\upsilon\nu x} = \dfrac{\eta\mu x(2\sigma\upsilon\nu x+1)}{\sigma\upsilon\nu x(2\sigma\upsilon\nu x+1)} = \varepsilon\varphi x$

β. Η εξίσωση με τη βοήθεια του (α) γίνεται για συνx≠0:

$$\eta\mu 2x = \varepsilon\varphi x \Leftrightarrow 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x(2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1) = 0$$

$$\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi,\ \kappa \in Z \text{ ή } \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \dfrac{\pi}{4}$ ή $x = 2\kappa\pi \pm \dfrac{3\pi}{4}$, $\kappa \in Z$ δεκτές.

373. Ισχύει ότι:

$$(2\eta\mu\theta)^2 = \frac{1}{\eta\mu\theta}(1-\sigma\upsilon\nu 2\theta) \Leftrightarrow 4\eta\mu^2\theta = \frac{1-1+2\eta\mu^2\theta}{\eta\mu\theta} \Leftrightarrow 4\eta\mu^2\theta = 2\eta\mu\theta \Leftrightarrow$$

$$\overset{\eta\mu\theta\neq 0}{\Leftrightarrow} 2\eta\mu\theta = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } \theta = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$$

και επειδή $\theta \in (0,\pi)$ άρα $\theta = \frac{\pi}{6}$ ή $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

374. **α.** συνφ>0

$$\sigma\upsilon\nu^2\varphi + \eta\mu^2\varphi = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\varphi = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{3}{5}$$

συνθ>0

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \frac{25}{169} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{144}{169} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{12}{13}$$

β. **i.** $\eta\mu 2\varphi = 2\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi = 2\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$

$$\sigma\upsilon\nu 2\theta = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta - 1 = 2\frac{144}{169} - 1 = \frac{188-169}{169} = \frac{119}{169}$$

ii. $\eta\mu(\varphi+\theta) = \eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} + \frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5} = \frac{48}{65} + \frac{15}{65} = \frac{63}{65}$

$$\varepsilon\varphi(\varphi-\theta) = \frac{\varepsilon\varphi\varphi - \varepsilon\varphi\theta}{1+\varepsilon\varphi\varphi\varepsilon\varphi\theta} = \frac{\frac{4}{3}-\frac{5}{12}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{12}} = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{36+20}{36}} = \frac{\frac{11}{1}}{\frac{56}{3}} = \frac{33}{56}$$

375. Έχουμε

$$\eta\mu\alpha = \frac{\alpha}{5} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{άρα συνα>0 και}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \frac{16}{25} = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{3}{5}$$

Ομοίως $\sigma\upsilon\nu\beta = -\frac{5}{13}$ $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ άρα ημβ<0 και

$$\sigma\upsilon\nu^2\beta + \eta\mu^2\beta = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\beta = 1 - \frac{25}{169} \Leftrightarrow \eta\mu^2\beta = \frac{144}{169} \Leftrightarrow \eta\mu\beta = -\frac{12}{13}$$

Επομένως $\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{4}{5}\left(-\frac{5}{13}\right) - \left(-\frac{12}{13}\right)\frac{3}{5} = \frac{-20}{65} + \frac{36}{65} = \frac{16}{65}$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) + \frac{4}{5}\left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{15}{65} - \frac{48}{65} = -\frac{63}{65}$$

376. **α.** Έχουμε

$$A = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu 2x}{1+\sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu 2x} = \frac{1-(1-2\eta\mu^2 x) + 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{1+2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 + 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{2\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x} =$$

$$=\frac{2\eta\mu x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}{2\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)}=\varepsilon\varphi x$$

β. $A=\varepsilon\varphi\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\frac{\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}}{1-\varepsilon\varphi x\cdot\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}}-1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\frac{\varepsilon\varphi x+1}{1-\varepsilon\varphi x}-1$

Για $x\neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ και $x\neq \kappa\pi+\frac{\pi}{4}$ η εξίσωση γίνεται:

$$\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi^2 x=\varepsilon\varphi x+1-1+\varepsilon\varphi x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2 x+\varepsilon\varphi x=0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x(\varepsilon\varphi x+1)=0$$

$$\varepsilon\varphi x=0 \Leftrightarrow x=\kappa\pi \;\; ή \;\; \varepsilon\varphi x+1=0 \Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\ \kappa\in Z \;\; \text{δεκτές.}$$

377. **α.** Έχουμε

$$K=\frac{\eta\mu 2x}{1+\sigma\upsilon\nu 2x}=\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{1+2\sigma\upsilon\nu^2 x-1}=\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{2\sigma\upsilon\nu^2 x}=\varepsilon\varphi x$$

β. $K\sqrt{3}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\varepsilon\varphi x-1=0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{6},\ \kappa\in Z$ δεκτή.

378. **α.** Έχουμε

$$f(x)=2-8\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x=2-2(2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)^2=2-2\eta\mu^2 2x=1+1-2\eta\mu^2 2x=1+\sigma\upsilon\nu 4x$$

β. $2f\left(\frac{x}{2}\right)-1=0 \Leftrightarrow 2(1+\sigma\upsilon\nu 2x)-1=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 2x+1=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x=\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

379. Έχουμε

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}=1 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}+\varepsilon\varphi\beta}{1-\frac{1}{2}\varepsilon\varphi\beta}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+2\varepsilon\varphi\beta=2-\varepsilon\varphi\beta \Leftrightarrow 3\varepsilon\varphi\beta=1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\beta=\frac{1}{3}$$

380. **α.** Έχουμε

$$\frac{\pi}{2}<x<\pi \;\; \text{άρα } \sigma\upsilon\nu x<0.$$

$5\sigma\upsilon\nu 2x-18\sigma\upsilon\nu x+1=0 \Leftrightarrow 5(2\sigma\upsilon\nu^2 x-1)-18\sigma\upsilon\nu x+1=0 \Leftrightarrow 10\sigma\upsilon\nu^2 x-18\sigma\upsilon\nu x-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\sigma\upsilon\nu^2 x-9\sigma\upsilon\nu x-2=0$

Δ=81+40=121 $\quad συνx=\dfrac{9\pm 11}{10}\Leftrightarrow\begin{cases}2 \text{ Απορ.}\\ -\dfrac{1}{5}\end{cases}$ Άρα $συνx=-\dfrac{1}{5}$

β. $ημ^2x+συν^2x=1\Leftrightarrow ημ^2x=1-\dfrac{1}{25}\Leftrightarrow ημ^2x=\dfrac{24}{25}\overset{ημx>0}{\Leftrightarrow} ημx=\sqrt{\dfrac{24}{25}}$

Άρα $ημ2x=2ημxσυνx=2\cdot\dfrac{\sqrt{24}}{5}\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{-2\sqrt{24}}{25}=\dfrac{-4\sqrt{6}}{25}$

$συν2x=2συν^2x-1=2\left(-\dfrac{1}{5}\right)^2-1=\dfrac{2}{25}-1=-\dfrac{23}{25}$

$εφ2x=\dfrac{ημ2x}{συν2x}=\dfrac{-2\sqrt{24}}{-23}=\dfrac{2\sqrt{24}}{23}=\dfrac{4\sqrt{6}}{23}$

381. **α.** Έχουμε

$$A=\frac{συν2x}{2ημxσυνx+2συν^2x-1+1}\cdot\frac{1}{\dfrac{ημx}{συνx}-1}=\frac{συν^2x-ημ^2x}{2συνx(ημx+συνx)}\cdot\frac{συνx}{ημx-συνx}=$$

$$=\frac{(ημx-συνx)(ημx+συνx)συνx}{2συνx(ημx+συνx)(ημx-συνx)}=-\frac{1}{2}$$

β. $ημ^2x-συν^2x=-\sqrt{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\Leftrightarrow -συν2x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow συν2x=συν\dfrac{3π}{4}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x=2κπ\pm\frac{3π}{4}\Leftrightarrow x=κπ\pm\frac{3π}{8} \quad \text{δεκτές}$$

382. **α.** Έχουμε

$$15ημ^2A+2ημA-1=0 \quad \Delta=4+60=64 \qquad ημA=\frac{-2\pm 8}{30}=\begin{cases}\dfrac{6}{30}=\dfrac{1}{5}\\ -\dfrac{10}{30}=-\dfrac{1}{3} \text{ Απορ.}\end{cases}$$

διότι 0<A<180 άρα $ημA=\dfrac{1}{5}$

β. $ημ^2α+συν^2A=1\Leftrightarrow\dfrac{1}{25}+συν^2A=1\Leftrightarrow συν^2A=\dfrac{24}{25}\Leftrightarrow συνA=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ διότι συνA>0.

γ. $ημ2A=2ημAσυνA=2\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{5}=\dfrac{4\sqrt{6}}{25}$

$συν2A=2συν^2A-1=2\dfrac{24}{25}-1=\dfrac{48-25}{25}=\dfrac{23}{25}$

δ. $\varepsilon\varphi^2\frac{A}{2}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu A}{1+\sigma\upsilon\nu A}=\frac{1-\frac{2\sqrt{6}}{5}}{1+\frac{2\sqrt{6}}{5}}=\frac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}$

383. **α.** Έχουμε

$$3\eta\mu^2x-5\eta\mu x-2=0\Leftrightarrow \eta\mu x=2\ \text{απορ. ή}\ \eta\mu x=-\frac{1}{3}$$

Όμως $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1\overset{\sigma\upsilon\nu x>0}{\Leftrightarrow}\frac{1}{9}+\sigma\upsilon\nu^2x=1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2x=\frac{8}{9}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

β. $\eta\mu2x=2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

$\sigma\upsilon\nu2x=2\sigma\upsilon\nu^2x-1=2\frac{8}{9}-1=\frac{16-9}{9}=\frac{7}{9}$

γ. $\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{1+\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$

384. **α.** Έχουμε

$$A=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}=\frac{2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}{2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}=\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta$$

β. Αν $\beta=\frac{\pi}{3}$, $\varepsilon\varphi\beta=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

Άρα $A=\sqrt{3}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\alpha\sqrt{3}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\alpha=1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\alpha=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\alpha=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$ δεκτή.

385. **α.** Έχουμε

$$f(x)=\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}-\eta\mu x\eta\mu\frac{\pi}{6}-\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}-\eta\mu x\eta\mu\frac{\pi}{6}=-2\eta\mu x\left(\frac{1}{2}\right)=-\eta\mu x$$

β. $g(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu2x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}=\frac{(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$

γ. $g(x)-1=f(x)+\sigma\upsilon\nu2x\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x-1=-\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu^2x-1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow2\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x(2\sigma\upsilon\nu x-1)=0$$

$\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}$ δεκτές ή $\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3}$ δεκτές.

386. **Α.** Έχουμε

$$\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\eta\mu 2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\eta\mu 2\alpha}=\frac{1+2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-1+2\eta\mu^2\alpha+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{2\sigma\upsilon\nu\alpha(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)}{2\eta\mu\alpha(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)}=\sigma\varphi\alpha$$

B. i. Άρα $P(x)=x^3-2x^2+x\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha-\sqrt{3}$ και επειδή $x-2$ παράγοντας θα έχουμε:

$$P(2)=0\Leftrightarrow 8-8+2\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow 3\sigma\varphi\alpha=\sqrt{3}\Leftrightarrow \sigma\varphi\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\varphi\alpha=\sigma\varphi\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \alpha=\kappa\pi+\frac{\pi}{3},\ \kappa\in Z \text{ δεκτή}$$

ii. Αν $\alpha\in(0,3\pi)$ $\quad 0<\kappa\pi+\frac{\pi}{3}<3\pi\Leftrightarrow 0<\kappa+\frac{1}{3}<3\Leftrightarrow -\frac{1}{3}<\kappa<3-\frac{1}{3}$

άρα κ=0, κ=1, κ=2 δηλαδή $\alpha=\frac{\pi}{3},\ \alpha=\frac{4\pi}{3},\ \alpha=\frac{7\pi}{3}$.

387. **α.** Έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu 2x+\eta\mu^2\frac{x}{2}=1\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2x-1+2\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2x-1+1-\sigma\upsilon\nu x-1=0\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu x-1=0$$

$$\Delta=1+8=9 \qquad \sigma\upsilon\nu x=\frac{1\pm 3}{4}=\begin{cases}\frac{4}{4}=1\\ -\frac{1}{2}\end{cases}$$

Άρα $\sigma\upsilon\nu x=1\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu 0\Leftrightarrow x=2\kappa\pi,\ \kappa\in Z$

ή $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3},\ \kappa\in Z$

β. Αν $\frac{\pi}{2}<x<\pi\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}<2\kappa\pi<\pi\Leftrightarrow \frac{1}{2}<2\kappa<1\Leftrightarrow \frac{1}{4}<\kappa<\frac{1}{2}$ δεν ισχύει για καμία τιμή $\kappa\in Z$.

Αν $\frac{\pi}{2}<x<\pi\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}<2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}<\pi\Leftrightarrow \frac{1}{2}<2\kappa+\frac{2}{3}<1\Leftrightarrow 3<12\kappa+4<6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1<12\kappa<2\Leftrightarrow -\frac{1}{12}<\kappa<\frac{2}{12}$ $\quad$ άρα κ=0 δηλαδή $x=\frac{2\pi}{3}$

Ομοίως αν $x=2\kappa\pi-\frac{2\pi}{3}$, $x\notin\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. Άρα η μοναδική λύση είναι $x=\frac{2\pi}{3}$

οπότε $A=\eta\mu\frac{2\pi}{3}+\sigma\varphi\frac{2\pi}{3}=\eta\mu\frac{\pi}{3}-\sigma\varphi\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

388. Έχουμε

α. $$ημ\left(\frac{π}{4}+x\right)+ημ\left(\frac{π}{4}-x\right)=-1 \Leftrightarrow ημ\frac{π}{4}συνx+συν\frac{π}{4}ημx+ημ\frac{π}{4}συνx-ημxσυν\frac{π}{4}=-1$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{\sqrt{2}}{2}συνx=-1 \Leftrightarrow συνx=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow συνx=συν\frac{3π}{4} \Leftrightarrow x=2κπ\pm\frac{3π}{4},\ κ\in Z$$

β. $$ημ\left(\frac{π}{6}-x\right)+ημ\left(\frac{π}{6}+x\right)=ημ\frac{π}{6}συνx-ημxσυν\frac{π}{6}+ημ\frac{π}{6}συνx+ημxσυν\frac{π}{6}=$$

$$=2\frac{1}{2}συνx=συνx$$

γ. $$συνx=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow συνx=συν(π-\frac{π}{6}) \Leftrightarrow συνx=συν(\frac{5π}{6}) \Leftrightarrow x=2κπ\pm\frac{5π}{6} \quad κ\in Z$$

389. **α.** Έχουμε συνx<0

$$5συν2x+συνx+2=0 \Leftrightarrow 5(2συν^2x-1)+συνx+2=0 \Leftrightarrow 10συν^2x+συνx-3=0$$

Δ=1+120=121 $$συνx=\frac{-1\pm11}{20}=\begin{cases}\frac{10}{20}=\frac{1}{2} & \text{Απορ.}\\ -\frac{12}{20}=-\frac{3}{5}\end{cases}$$

Άρα $συνx=-\frac{3}{5}$

β. Έχουμε $1+εφ^2x=\frac{1}{συν^2x} \Leftrightarrow 1+εφ^2x=\frac{25}{9} \Leftrightarrow εφ^2x=\frac{10}{9} \overset{εφx>0}{\Leftrightarrow} εφx=\frac{4}{3}$

γ. $$ημ^2\frac{x}{2}=\frac{1-συνx}{2} \Leftrightarrow ημ^2\frac{x}{2}=\frac{1+\frac{3}{5}}{2} \Leftrightarrow ημ^2\frac{x}{2}=\frac{8}{10} \Leftrightarrow ημ^2\frac{x}{2}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow ημ\frac{x}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

διότι $π<x<\frac{3π}{2}$ και $\frac{π}{2}<x<\frac{3π}{4}$ άρα $ημ\frac{x}{2}>0$.

390. **α.** i Έχουμε

$$ημ(α+β)-ημ(α-β)=ημασυνβ+ημβσυνα-ημασυνβ+ημβσυνα=2ημβσυνα$$

β. Στη σχέση (i) θέτουμε $α=\frac{π}{4}$ και β=2x οπότε

$$ημ\left(\frac{π}{4}+2x\right)-ημ\left(\frac{π}{4}-2x\right)=2ημ2xσυν\frac{π}{4}=\sqrt{2}ημ2x$$

Άρα η εξίσωση γίνεται

$$\sqrt{2}ημ2x=2ημx \Leftrightarrow 2\sqrt{2}ημxσυνx-2ημx=0 \Leftrightarrow 2ημx(\sqrt{2}συνx-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ημx=0 \Leftrightarrow x=2κπ+π \quad ή \quad συνx=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=2κπ\pm\frac{π}{4}$$

γ. $\dfrac{1+\eta\mu 2x-\sigma\upsilon\nu 2x}{1+\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu 2x}=\dfrac{1+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-1+2\eta\mu^2 x}{1+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+2\sigma\upsilon\nu^2 x-1}=\dfrac{2\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)}{2\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}=\varepsilon\varphi x$

δ. $3\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2x+\eta\mu 2x}{1+\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu 2x}=\sqrt{3}\overset{(i)}{\Leftrightarrow}3\varepsilon\varphi x=\sqrt{3}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{6},\ \kappa\in Z$

391. Έχουμε

$$f(x)=\frac{\eta\mu 2x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x-2\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{2}}=\frac{\eta\mu 2x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x-1+\sigma\upsilon\nu x}=\frac{\eta\mu 2x-\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x-1}$$

α. Η f ορίζεται όταν $2\sigma\upsilon\nu x-1\neq 0$, $\sigma\upsilon\nu x\neq\dfrac{1}{2}$, $x\neq 2\kappa\pi\pm\dfrac{\pi}{3},\ \kappa\in Z$.

β. $f(x)=\dfrac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x-1}=\dfrac{\eta\mu x(2\sigma\upsilon\nu x-1)}{2\sigma\upsilon\nu x-1}=\eta\mu x$

γ. $\left[f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\right]^2=\eta\mu^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4}}{2}=\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

392. **α.** Έχουμε

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+A\right)+\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-A\right)=\eta\mu\frac{\pi}{4}\sigma\upsilon\nu A+\eta\mu A\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+\eta\mu\frac{\pi}{4}\sigma\upsilon\nu A-\eta\mu A\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=$$

$$=2\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu A=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu A$$

β. $\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4}+2x\right)+\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu^2 x\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu 2x=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu^2 x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2 x=2\sigma\upsilon\nu^2 x-1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2 x=1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=1\Leftrightarrow x=2\kappa\pi,\ \kappa\in Z$

ή $\sigma\upsilon\nu x=-1\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\pi,\ \kappa\in Z$.