ΛΥΣΕΙΣ ΚΕΦ 2ο ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 95-143

§2.1 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

95. **α.** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(5,2)$ και $B(4,9)$, άρα $f(5)=2$ και $f(4)=9$.

Επομένως είναι $4<5$ και $f(4)>f(5)$

Και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, είναι γνησίως φθίνουσα.

β. $f(5-3x)<2 \Leftrightarrow f(5-3x)<f(5) \overset{f \text{ γνησίως φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} 5-3x>5 \Leftrightarrow x<0$.

96. **α.** Είναι $x^2+1>0$, οπότε η $f(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $A=R$. Της είναι

$$f(x)\le 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1}\le 1 \Leftrightarrow 2x\le x^2+1 \Leftrightarrow 0\le x^2-2x+1 \Leftrightarrow (x-1)^2\ge 0,$$

που ισχύει για κάθε $x\in R$.

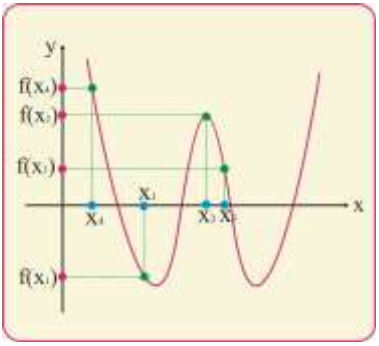
β. Είναι $f(x)\le 1$ και επειδή $f(1)=1$ η ισότητα $f(x)=1$ ισχύει όταν $x=1$

άρα $f(x)\le 1 \Leftrightarrow f(x)\le f(1)$, οπότε η $f(x)$ έχει μέγιστο το 1, όταν $x=1$.

γ. Η συνάρτηση $f(x)$ πεδίο ορισμού το $A=R$, οπότε για κάθε $x\in R$ θα είναι και

$-x\in R$ και $f(-x)=\dfrac{2(-x)}{(-x)^2+1}=-\dfrac{2x}{x^2+1}=-f(x)$, άρα η $f(x)$ είναι περιττή.

97. **α.** Προβάλλουμε στον άξονα $y'y$ τα σημεία με τετμημένες x_1, x_2, x_3 και παρατηρούμε ότι: $f(x_1)<f(x_3)<f(x_2)$.



β. Η συνάρτηση f δεν είναι ούτε γνησίως αύξουσα ούτε γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της, άρα δεν είναι γνησίως μονότονη.

Αν ήταν γνησίως αύξουσα, τότε: για $x_1<x_2<x_3$ θα ίσχυε $f(x_1)<f(x_2)<f(x_3)$,

ενώ αν ήταν γνησίως φθίνουσα, τότε: για $x_1<x_2<x_3$ θα ίσχυε $f(x_1)>f(x_2)>f(x_3)$.

Αλλά από το ερώτημα α) έχουμε $f(x_1)<f(x_3)<f(x_2)$,

άρα η συνάρτηση δεν είναι γνησίως μονότονη.

γ. Αν φέρουμε την οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το σημείο $\left(x_2, f\left(x_2\right)\right)$ παρατηρούμε ότι η συνάρτηση παίρνει και τιμές μεγαλύτερες του $f\left(x_2\right)$, για παράδειγμα $f\left(x_4\right) > f\left(x_2\right)$. Άρα το x_2 δεν είναι θέση μεγίστου.

98. **α.** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $B(4,5)$, άρα $f(2)=3$ και $f(4)=5$. Παρατηρούμε ότι για $2<4$ ισχύει $f(2)<f(4)$ και επειδή η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, είναι γνησίως αύξουσα.

β. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -2, άρα $f(-2)=0$. Αλλά $-2<0$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα,

άρα $f(-2)<f(0)$, δηλαδή $0<f(0)$.

99. **α.** Αν $x \in (-2, 2)$, τότε:

- $-x \in (-2, 2)$ και
- $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x)$.

Άρα η f είναι περιττή.

β. Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι $f_{min} = -2$ και $f_{max} = 2$.

γ. • $f(x) = -2 \Leftrightarrow x^3 - 3x = -2 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 - x - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) - 2(x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1) - 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } (x = 1 \text{ ή } x = -2)$$

Αλλά $x \in (-2, 2)$ οπότε η $x=-2$ απορρίπτεται.
Επομένως η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$.

• $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 - x - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) - 2(x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1) - 2(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } (x = -1 \text{ ή } x = 2)$$

Αλλά $x \in (-2, 2)$ οπότε η ή $x = 2$ (αποριπτεται).
Επομένως η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο για $x = -1$.
Η θέση του μεγίστου θα μπορούσε να βρεθεί και ως εξής:

$$f(x) = -2 \Leftrightarrow -f(x) = 2 \overset{f \text{ περιττή}}{\Leftrightarrow} f(-x) = 2 \Leftrightarrow -x = 1 \Leftrightarrow x = -1.$$

100. **α.** Έστω x και y οι διαστάσεις σε m του ορθογώνιου κήπου. Τότε η περίμετρος του κήπου είναι $\Pi = 2x + 2y$ και αφού ολόκληρος ο κήπος θα περιφραχθεί με το συρματόπλεγμα μήκους 40 m, θα ισχύει:

$$2x + 2y = 40 \Leftrightarrow x + y = 20 \Leftrightarrow y = 20 - x$$

Τρία παραδείγματα τέτοιων κήπως είναι τα παρακάτω:

- Αν $x = 5$ τότε $y = 20 – 5 = 15$ και έχουμε ένα κήπο διαστάσεων 5 m επί 15 m και εμβαδού $E = 5\text{ m}\cdot 15\text{ m} = 75\text{ m}^2$.
- Αν $x = 8$ τότε $y = 20 – 8 = 12$ και έχουμε ένα κήπο διαστάσεων 8 m επί 12 m και εμβαδού $E = 8\text{ m}\cdot 12\text{ m} = 96\text{ m}^2$.
- Αν $x = 10$ τότε $y = 20 – 10 = 10$ και έχουμε ένα κήπο διαστάσεων 10 m επί 10 m και εμβαδού $E = 10\text{ m}\cdot 10\text{ m} = 100\text{ m}^2$.

Παρατηρούμε ότι οι τρεις κήποι έχουν διαφορετικό εμβαδόν.

β. Αν x είναι το πλάτος και y το μήκος του κήπου, τότε για το εμβαδό του E ισχύει:

$$E = x\cdot y \text{ ή } E(x) = x(20 – x), \text{ όπου } x > 0 \text{ και } y > 0 \Leftrightarrow 20 – x > 0 \Leftrightarrow x < 20$$

άρα η συνάρτηση E έχει τύπο:

$$E(x) = x(20 – x) = x^2 +20x, \text{ με } 0 < x < 20$$

γ. Ισχύει ότι:

$$– (x – 10)^2 + 100 = –(x^2 – 20x + 100) + 100 = –x^2 + 20x – 100 + 100 =$$
$$= –x^2 + 20x = E(x)$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x) = –(x – 10)^4 + 100$ προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = –x^2$ αρχικά κατά 10 μονάδες προς τα αριστερά και στη συνέχεια κατά 100 μονάδες προς τα πάνω. Επιπλέον από την πλήρη καμπύλη θα κρατήσουμε μόνο το κομμάτι της που αποτελείται από τα σημεία της με τετμημένες $0 < x < 20$.

Η κορυφή της παραβολής που αποτελεί τη γραφική παράσταση της f είναι το σημείο $(0, 0)$, άρα, μετά την παραπάνω μετατόπιση, η κορυφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης είναι το σημείο $(10, 100)$.

Συνεπώς το μέγιστο εμβαδό του κήπου προκύπτει για $x = 10$ και $y = 20 – 10 = 10$ δηλαδή για διαστάσεις λαχανόκηπου 10 m επί 10 m.

101. **i.** Η συνάρτηση $f(x) = 2x + 5$ έχει πεδίο ορισμού $A = R$, οπότε για κάθε $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$ είναι $2x_1 < 2x_2 \Leftrightarrow 2x_1 + 5 < 2x_2 + 5 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

ii. Η συνάρτηση $g(x) = –3x +9$ έχει πεδίο ορισμού $A = R$, οπότε για κάθε $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$ είναι $–3x_1 < –3x_2 \Leftrightarrow –3x_1 + 9 > –3x_2 +9 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$.

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.

iii. Η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{2}{x-1}$ έχει πεδίο ορισμού

$$A = R–\{1\} \text{ ή } A = (–\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

Θα εξετάσουμε τη μονοτονία της h σε καθένα από τα διαστήμα $A_1 = (–\infty, 1)$ και $A_2 = (1, +\infty)$.

• Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A_1$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1 - 1} > \frac{1}{x_2 - 1} \Rightarrow \frac{2}{x_1 - 1} > \frac{2}{x_2 - 1} \Rightarrow h(x_1) > h(x_2).$$

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1.

• Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A_2$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1 - 1} > \frac{1}{x_2 - 1} \Rightarrow \frac{2}{x_1 - 1} > \frac{2}{x_2 - 1} \Rightarrow h(x_1) > h(x_2).$$

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο A_2.

102. **i.** Για το πεδίο ορισμού της

$$f(x) = -\sqrt{8 - 2x} \quad \text{έχουμε:}$$

$$8 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -8 \Leftrightarrow x \leq 4$$

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού $A = (-\infty, 4]$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ είναι $-2x_1 > -2x_2 \Leftrightarrow 8 - 2x_1 > 8 - 2x_2 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{8 - 2x_1} > \sqrt{8 - 2x_2} \Leftrightarrow -\sqrt{8 - 2x_1} < -\sqrt{8 - 2x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο A.

ii. Η $f(x) = 2 - \sqrt{3x - 9}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = [3, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ είναι $3x_1 < 3x_2 \Leftrightarrow 3x_1 - 9 < 3x_2 - 9 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{3x_1 - 9} < \sqrt{3x_2 - 9} \Leftrightarrow -\sqrt{3x_1 - 9} > -\sqrt{3x_2 - 9} \Leftrightarrow 2 - \sqrt{3x_1 - 9} > 2 - \sqrt{3x_2 - 9} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A.

103. • Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1 - 1} > \frac{1}{x_2 - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{(x_1 - 1)^2} < \frac{1}{(x_2 - 1)^2} \Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{1}{(x_1 - 1)^2} < 1 + \frac{1}{(x_2 - 1)^2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσαστο $(-\infty, 1)$.

Ομοίως για κάθε $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1 - 1} > \frac{1}{x_2 - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{(x_1 - 1)^2} > \frac{1}{(x_2 - 1)^2} \Leftrightarrow$$

$1 + \dfrac{1}{(x_1 - 1)^2} > 1 + \dfrac{1}{(x_2 - 1)^2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

• Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1 - 1} > \frac{1}{x_2 - 1} \text{ και } -x_1 > -x_2 \text{ οπότε}$$

$$\frac{1}{x_1 - 1} - x_1 > \frac{1}{x_2 - 1} - x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1 - 1} - x_1 + 1 > \frac{1}{x_2 - 1} - x_2 + 1 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1)$.

Ομοίως για κάθε $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1 - 1} > \frac{1}{x_2 - 1} \text{ και } -x_1 > -x_2 \text{ οπότε } g(x_1) > g(x_2)$$

άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

104. Έχουμε

I. γνησίως αύξουσα $[-3, 1]$, γνησίως φθίνουσα $[1,4]$

II. γνησίως αύξουσα $[-6, 0]$, γνησίως φθίνουσα $[0,4]$ και γνησίως αύξουσα $[4,6]$

III. γνησίως αύξουσα $[-2, -1]$, σταθερή $[-1, 4]$ και γνησίως φθίνουσα $[4, 7]$

IV. γνησίως φθίνουσα $[-3, -1]$, σταθερή $[-1, 3]$, γνησίως αύξουσα $[-3, 5]$, και σταθερή $[5, 7]$

105. Έχουμε

Στο σχήμα **α**, η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή το 2, για x=1 (f(1)=2) και ελάχιστη τιμή το -2 για x=-1 (f(-1)=-2)

Στο σχήμα **β,** η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστη τιμή το -2, για x=1 και x=-1 και δεν παρουσιάζει μέγιστη τιμή.

Στο σχήμα **γ**, η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή το 2, για κάθε $x \le 0$ και ελάχιστη τιμή το -2 για κάθε x>0.

Στο σχήμα **δ,** η συνάρτηση δεν παρουσιάζει ακρότατα.

106. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-1, 0)$

άρα $f(-1) = 0$. Αλλά η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

οπότε επειδή $0 > -1$ είναι

$$f(0) > f(-1), \text{ άρα } f(0) > 0.$$

Επομένως η γραφική της παράσταση τέμνει τον θετικό ημιάξονα $0y$.

107. **i.** Η f έχει πεδίο ορισμού A= R. Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$(x + 1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 2(x + 1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 2(x + 1)^2 - 1 \ge -1 \text{ οπότε } f(x) \ge -1 = f(-1)$$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο -1 το $f(-1) = -1$.

ii. Η g έχει πεδίο ορισμού το A= R. Για κάθε $x \in R$, έχουμε:

$$|x-1| \geq 0 \Leftrightarrow 3|x-1| \geq 0 \text{ (το ίσον ισχύει για } x = 1)$$

$$\Leftrightarrow 3|x-1| - 2 \geq -2, \text{ οπότε } g(x) \geq -2 = g(1).$$

Άρα η g παρουσιάζει στο 1 το $g(1) = -2$.

iii. Η h έχει πεδίο ορισμού το $A = R$. Για κάθε $x \in R$, έχουμε:

$$(x-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3(x-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow -3(x-2)^2 - 3 \leq -3, \text{ οπότε } h(x) \leq -3 = h(2)$$

Άρα η h παρουσιάζει μέγιστο στο 2, το $h(2) = -3$.

108. **α.** Είναι

$$f(x) = \frac{x}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}, \quad x \geq 0$$

Οπότε για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$1 + x_1 < 1 + x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x_1} > \frac{1}{1+x_2} \Leftrightarrow -\frac{1}{1+x_1} < -\frac{1}{1+x_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{1+x_1} < 1 - \frac{1}{1+x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

β. Είναι $f(1999) = \dfrac{1999}{1+1999} = \dfrac{1999}{2000}$ και

$f(2000) = \dfrac{2000}{2000+1} = \dfrac{2000}{2001}$, οπότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και $1999 < 2000$ είναι $f(1999) < f(2000)$.

$$\text{Άρα } \frac{1999}{2000} < \frac{2000}{2001}.$$

109. **i.** Πρέπει $x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $A = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.
Για κάθε $x \in A$, έχουμε:

- $-x \in A$
- $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 9} = \sqrt{x^2 - 9} = f(x)$

Άρα η f είναι άρτια.

ii. Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού $A = R$.
Για κάθε $x \in A$, έχουμε:

- $-x \in A$
- $g(-x) = 3(-x)^2 + |-x| + 1 = 3x^2 + |x| + 1 = g(x)$

Άρα η g είναι άρτια.

110. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A = R$.

Για κάθε $x \in A$, έχουμε:

- $x \in A$
- $f(-x) = |3(-x)+2| - |3(-x)-2| = |-3x+2| - |-3x-2| =$

$$= |3x-2| - |3x+2| = -f(x)$$

Άρα η f είναι περιττή.

111. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A = R$.

Για κάθε $x \in A$, έχουμε:

- $-x \in A$
- $f(-x) = |-x+4| + |-x-4| = |x-4| + |x+4| = f(x)$

Άρα η f είναι άρτια.

112. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Για κάθε $x \in A$, είναι:

- $-x \in A$
- $f(-x) = \dfrac{2(-x)}{(-x)^2+1} - \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{1}{x} = -f(x)$

Άρα η f είναι περιττή.

113. Πρέπει

$$1 - x^2 \geq 0 \ \text{ και } \ 1 - \sqrt{1-x^2} \neq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1] \ \text{ και } \ x \neq 0.$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A = [-1, 0) \cup (0, 1]$.
Για κάθε $x \in A$, είναι:

- $-x \in A$
- $f(-x) = \dfrac{(-x)^3|-x| - (-x)^7}{1 - \sqrt{1-(-x)^2}} = \dfrac{-x^3|x| + x^7}{1-\sqrt{1-x^2}} = -f(x)$

Άρα η f είναι περιττή.

114. **i)** Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = R\text{-}\{1\}$.

Επειδή $-1 \in A$ και $1 \notin A$, η f δεν είναι άρτια ούτε περιττή.

ii) Η g έχει πεδίο ορισμού το $A = R$.

Είναι $g(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$

$g(1) = 1^2 + 1 = 2$

Επειδή $g(-1) \neq g(1)$ η g δεν είναι άρτια

& επειδή $g(-1) \neq -g(1)$ η g δείν είναι περιττή.

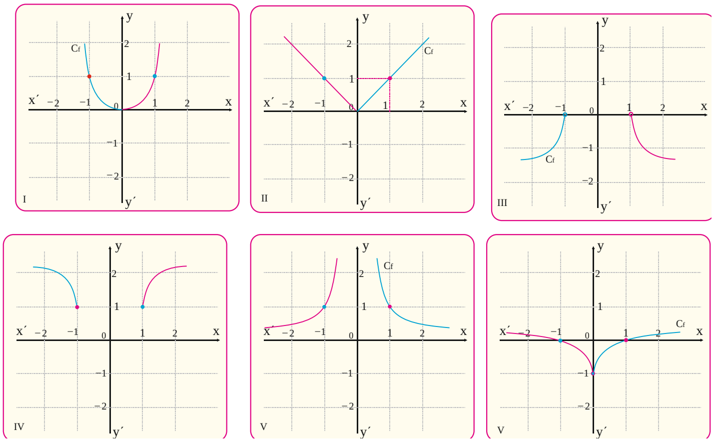
Άρα η g δεν είναι άρτια ούτε περιττή.

115.

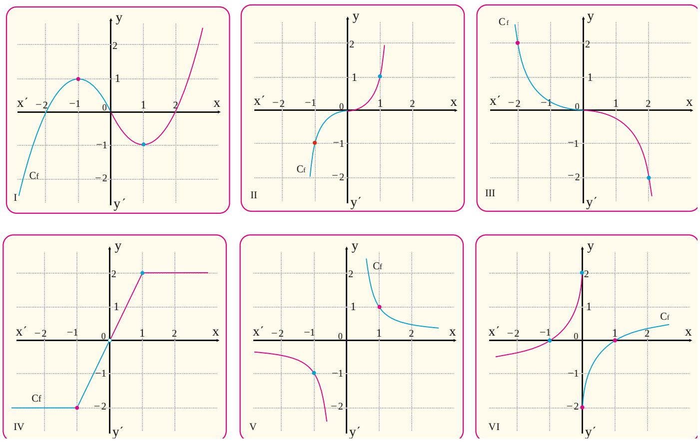
Αρτιες: III διότι η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα yy’

Περιττές: IV, V διότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν κέντρο συμμετρίας την αρχή O(0, 0) των αξόνων.

116.



117.



118. **α.** Αν A το πεδίο ορισμού της f τότε επειδή η f είναι περιττή, για κάθε $x \in A$ είναι $f(-x) = -f(x)$. Οπότε για $x = 0$ είναι:

$$f(0) = -f(0) \Leftrightarrow f(0) + f(0) = 0 \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

β. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο A(–2, 3) και επειδή η f είναι περιττή έχουμε:

- $f(0) = 0$
- $f(-2) = 3$ οπότε $f(2) = -f(-2) = -3$

Άρα $f(0) - f(2) - 3 = 0 - (-3) - 3 = 3 - 3 = 0.$

119. • Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x \in A$, έχουμε:

• $-x \in A$

• $f(-x) = |-x| + |-x-2| + |2-x| = |x| + |x+2| + |x-2| = f(x)$

Άρα η f είναι άρτια, οπότε η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

• Η g έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}^*$ ή $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Οπότε για κάθε $x \in A$, είναι:

• $-x \in A$

• $g(-x) = \dfrac{1-|-x|}{(-x)^6} = \dfrac{1-|-x|}{x^6} = g(x)$

Άρα η g είναι άρτια, οπότε η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

120. • Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$. Για κάθε $x \in A$, είναι:

• $-x \in A$

• $f(-x) = (-x)^3\sqrt{(-x)^2 - 9} = -x^3\sqrt{x^2 - 9} = -f(x)$

Άρα η f είναι περιττή, οπότε η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

• Η g έχει πεδίο ορισμού το $A = (-4, 4)$. Για κάθε $x \in A$, είναι:

• $-x \in A$

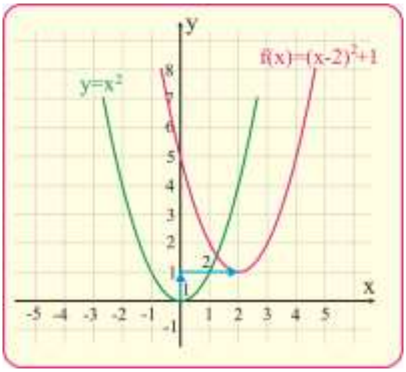
• $g(-x) = \dfrac{16(-x)}{\sqrt{16-(-x)^2}} = -\dfrac{16x}{\sqrt{16-x^2}} = -g(x)$

Άρα η g είναι περιττή, οπότε η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

2.2 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ-ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

121. **α.** Ειναι $f(x)=x^2-4x+5=x^2-4x+4+1=(x-2)^2+1$.

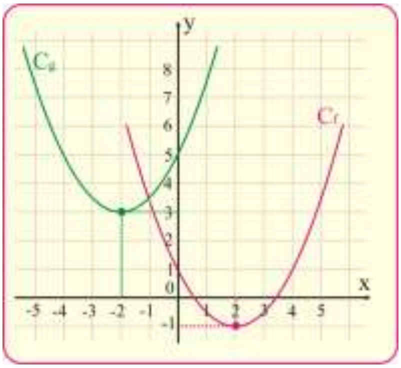
β. Η γραφική παράσταση της $f(x)=(x-2)^2+1$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=x^2$ κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και ταυτόχρονα κατακόρυφη μετατόπιση κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



122. **α.** Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,-2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2,+\infty)$.

Παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για $x=-2$ την $f(-2)=3$.

β. Παρατηρούμε ότι η C_g προκύπτει από την C_f, αν η C_f μετατοπιστεί κατά 4 μονάδες δεξιά και 4 μονάδες κάτω.

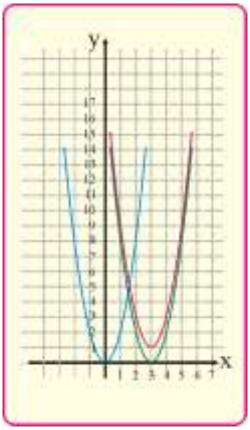


Άρα είναι : $g(x)=f(x-4)-4$ για κάθε $x\in R$.

123. **α.** Έχουμε:

$$f(x)=2x^2-12x+19=2x^2-12x+18+1=2\left(x^2-6x+9\right)+1=2(x-3)^2+1$$

β. Η γραφική παράσταση της f θα προκύψει από τη γραφική παράσταση της g με δύο μετατοπίσεις : μία οριζόντια της τα δεξιά κατά 3 μονάδες και μία κατακόρυφη της τα πάνω κατά μία μονάδα.



124. **α.** Είναι $x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 - 5 \ge -5 \Leftrightarrow f(x) \ge -5$,άρα η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f είναι $f_{min} = -5$. Αλλά $f(0) = 0^2 - 5 = -5$, άρα $f_{min} = f(0)$, άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$.

β. Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5$ έχει πεδίο ορισμού το R, άρα:

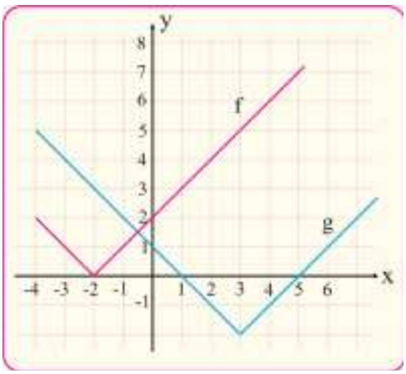
Για κάθε $x \in R$ και $-x \in R$. $f(-x) = (-x)^2 - 5 = x^2 - 5 = f(x)$, άρα $f(-x) = f(x)$

Επομένως η συνάρτηση f είναι άρτια.

γ. Η γραφική παράσταση C_f προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της C_g κατά 5 μονάδες προς τα κάτω.

125. **α.** Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-2, +\infty)$.Επίσης παρουσιάζει τοπικό (ολικό) ελάχιστο στη θέση -2, το $f(-2) = 0$.

β. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g προκύπτει από:



- Μια κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά 2 μονάδες προς τα κάτω και
- μια οριζόντια μετατόπιση της C_f κατά 5 μονάδες προς τα δεξιά.

Επομένως ο τύπος της συνάρτησης g είναι $g(x)=f(x-5)-2,\ x\in\mathbb{R}$.

Αλλά $f(x)=|x+2|,\ x\in\mathbb{R}$, άρα $g(x)=|(x-5)+2|-2=|x-3|-2,\ x\in\mathbb{R}$.

126. **α.** Η συνάρτηση f ορίζεται αν και μόνο αν:

$$\begin{cases}8-x\geq 0\\ 8+x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 8\\ x\geq -8\end{cases}\Leftrightarrow -8\leq x\leq 8$$

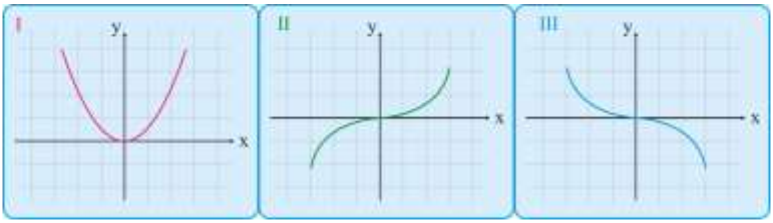
Επομένως το πεδίο ορισμού είναι το κλειστό διάστημα $A=[-8,8]$.

β. Επειδή το πεδίο ορισμού είναι το κλειστό διάστημα $A=[-8,8]$, ικανοποιείται η συνθήκη : για κάθε $x\in A$ και $-x\in A$. Επιπλέον για κάθε $x\in[-8,8]$, είναι :

$$f(-x)=\sqrt{8-(-x)}-\sqrt{8+(-x)}=\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x}=-(\sqrt{8-x}-\sqrt{8+x})=-f(x)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι περιττή .

γ. Επειδή η f είναι περιττή , η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς κέντρο την αρχή των αξόνων. Επιπλέον η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε η γραφική της παράσταση είναι η ΙΙΙ.



Είναι : $-8\leq x\leq 8\Rightarrow f(-8)\geq f(x)\geq f(8)\Rightarrow -4\leq f(x)\leq 4$, επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα .

Άρα η f έχει για $x=-8$, μέγιστο το $f(-8)=4$ και για $x=8$, ελάχιστο το $f(8)=-4$.

δ. Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού επίσης το $A=[-8,8]$ και η γραφική της παράσταση προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με μεταφορά κατά 3 μονάδες προς τα κάτω .

Επομένως θα έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο $B(-3,0)$.

Έτσι δεν είναι συμμετρική ως προς το Ο(0, 0), ούτε ως προς τον y΄y άξονα
Επομένως δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή .
Επίσης η συνάρτηση h έχει τύπο:

$$h(x)=f(x+3)=\sqrt{8-(x+3)}-\sqrt{8+(x+3)}=\sqrt{5-x}-\sqrt{11+x}$$

και ορίζεται αν και μόνο αν :

$$\begin{cases}5-x\geq 0\\ 11+x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 5\\ x\geq -11\end{cases}\Leftrightarrow -11\leq x\leq 5$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της είναι $A_h = [-11, 5]$,

άρα δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή , επειδή δεν ικανοποιείται η συνθήκη

για κάθε $x \in A_h$ και $-x \in A_h$. αφού π.χ. είναι $-11 \in A_h$ και $11 \notin A_h$.

127. α. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-c)^2 - d, \quad x \in R$$

διέρχεται από τα σημεία $A(0, 16)$ και $B(4, 0)$, επομένως οι συντεταγμένες

των σημείων θα επαληθεύουν την εξίσωσή της , άρα $f(0)=16$ και $f(4)=0$

Οπότε

$$f(0)=16 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(0-c)^2 - d = 16 \Leftrightarrow \frac{1}{2}c^2 - d = 16 \Leftrightarrow c^2 - 2d = 32 \ (1)$$

$$f(4)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(4-c)^2 - d = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(16-8c+c^2) - d = 0 \Leftrightarrow \ \Leftrightarrow 16-8c+c^2-2d = 0 \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει :

$$16-8c+32=0 \Leftrightarrow 8c=48 \Leftrightarrow c=6 \text{ και } 36-2d=32 \Leftrightarrow 4=2d \Leftrightarrow d=2.$$

β. Επειδή $c=6$ και $d=2$ είναι

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-6)^2 - 2, \quad x \in R.$$

i. Για να βρούμε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-6)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-6)^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-6=2 \Leftrightarrow x=8 \quad ή \quad x-6=-2 \Leftrightarrow x=4$$

Επομένως τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$ είναι $B(4, 0)$ και $\Gamma(8, 0)$.

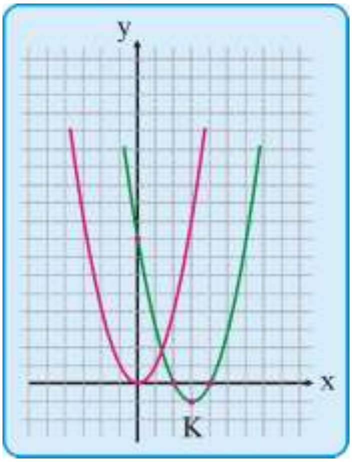
Αντίστοιχα για το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$ βρίσκουμε το $f(0)=16$, δηλαδή το σημείο $A(0, 16)$.

ii.. Η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ είναι της μορφής $y = \alpha x^2$ και η γραφική της παράσταση αποτελεί καμπύλη που ονομάζεται παραβολή με

κορυφή το O(0,0),

το οποίο αποτελεί και το ελάχιστό της.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{2}(x-6)^2 - 2$ προκύπτει από μετατόπιση της C_g, όπως φαίνεται και στο σχήμα , κατά 2 μονάδες προς τα κάτω και κατά 6 μονάδες δεξιά.



iii. Η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=6$, το $f(6)=-2$.

Στο διάστημα $(-\infty,6]$ είναι γνησίως φθίνουσα και

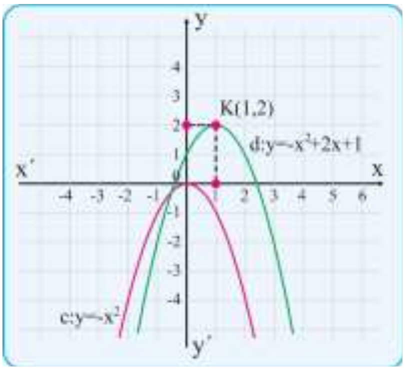
στο διάστημα $[6,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα.

128. **α.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι :

$$f(x)=-x^2+2x+1=-x^2+2x-1+2=-(x^2+2x-1)+2=-(x-1)^2+2.$$

Επομένως είναι $f(x)=\varphi(x-1)+2$,

άρα η γραφική παράσταση της f προκύπτει από τη γραφική παράσταση της φ με οριζόντια μετατόπιση κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και με κατακόρυφη μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα .



β. **i.** Όπως προκύπτει από τη γραφική παράσταση , η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

ii. Η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο (ολικό) στο $x=1$, το $f(1)=2$.

iii. Η εξίσωση $f(x)=\kappa,\ \kappa<2$ έχει δυο ρίζες, επειδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει με την ευθεία $y=\kappa,\ \kappa<2$ πάντα δυο κοινά σημεία Άλλωστε επιλύοντας την εξίσωση $f(x)=\kappa,\ \kappa<2$ έχουμε:

$$f(x)=\kappa \Leftrightarrow -x^2+2x+1-\kappa \Leftrightarrow x^2-2x+(\kappa-1)=0,\ x\in\mathbb{R},\ \kappa<2$$

και επειδή $\Delta=4-4(\kappa-1)=8-4\kappa=4(2-\kappa)>0$ (διότι $\kappa<2$),

άρα η εξίσωση $f(x)=\kappa,\ \kappa<2$ έχει δύο ρίζες.

129. **α.** Η παραβολή διέρχεται από τα σημεία $A(3,0), B(-2,0), \Gamma(0,-2)$, άρα οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσής της.
Οπότε είναι:

- $0=\alpha\cdot 3^2+\beta\cdot 3+\gamma \Leftrightarrow 9\alpha+3\beta+\gamma=0\ (1)$
- $0=\alpha(-2)^2+\beta(-2)+\gamma \Leftrightarrow 4\alpha-2\beta+\gamma=0\ (2)$
- $-2=\alpha\cdot 0^2+\beta\cdot 0+\gamma \Leftrightarrow \gamma=-2\ (3)$.

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) και (3) έχουμε :

$$\begin{cases} 9\alpha+3\beta+\gamma=0 \\ 4\alpha-2\beta+\gamma=0 \\ \gamma=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\alpha+3\beta-2=0 \\ 4\alpha-2\beta-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\alpha+3\beta=2 \\ 4\alpha-2\beta=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$D=\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-18-12=-30\ ,\quad D_\alpha=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-4-6=-10\ \text{και}$$

$$D_\beta=\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=18-8=10$$

Άρα: $(\alpha,\beta)=\left(\frac{D_\alpha}{D},\frac{D_\beta}{D}\right)=\left(\frac{-10}{-30},\frac{10}{-30}\right)=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$

Οπότε $\alpha=\frac{1}{3},\ \beta=-\frac{1}{3},\ \gamma=-2$, άρα η εξίσωση της παραβολής είναι : $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x-2$.

β. Αν $\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=0$ και $\gamma=-2$, η εξίσωση της παραβολής παίρνει την μορφή:

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$.

Άρα τα κοινά σημεία παραβολής και ευθείας προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος:

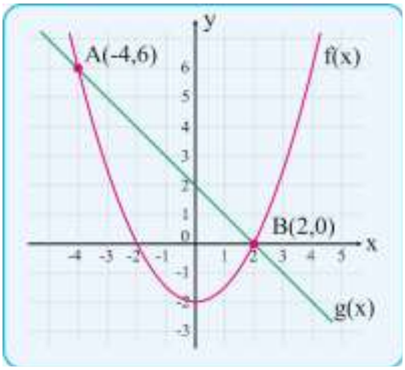
$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-2 \\ y=-x+2 \end{cases} \overset{(=)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}x^2-2=-x+2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+x-4=0 \Leftrightarrow x^2+2x-8=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm 6}{2}=\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-4 \end{cases}$$

Άρα για $x_1=2$ έχουμε $y_1=0$ και για $x_2=-4$ έχουμε $y_2=6$.

Επομένως τα σημεία τομής της $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$ και της $g(x)=-x+2$

είναι τα : $A(2,0)$ και $\Delta(-4,6)$.



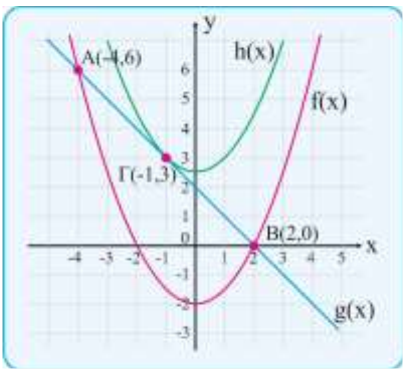
γ. Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω προκύπτει η εξίσωση: $h(x)=f(x)+4,5=f(x)+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}x^2-2+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$.

Επιλύοντας το νέο σύστημα της $h(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$ και της $g(x)=-x+2$

έχουμε: $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2} \\ y=-x+2 \end{cases} \overset{(=)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}=-x+2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ και $y=3$.

Επομένως το σημείο τομής των $h(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$ και $g(x)=-x+2$ είναι ένα, το: $(x,y)=(-1,3)$.



130. **α.** Αφού η συνάρτηση $f(x) = αx + β$, $α, β \in R$ διέρχεται από τα σημεία

$A(1, 2)$ και $B(5, 8)$, ισχύει: $f(1) = 2$ και $f(5) = 8 \Leftrightarrow α + β = 2$ και $5α + β = 8$

Αφαιρώντας τις σχέσεις κατά μέλη προκύπτει $4α = 6 \Leftrightarrow 2α = 3 \Leftrightarrow α = \frac{3}{2}$.

Αντικαθιστώντας $α = \frac{3}{2}$ στη σχέση $α + β = 2$, προκύπτει:

$$\frac{3}{2} + β = 2 \Leftrightarrow β = 2 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow β = \frac{1}{2}$$

Τότε: $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

β. Αφού $g(x)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και κατακόρυφα κατά 3 μονάδες προς τα κάτω, ισχύει:

$$g(x) = f(x + 1) - 3 \Leftrightarrow g(x) = \frac{3}{2}(x + 1) + \frac{1}{2} - 3 \Leftrightarrow g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 3 \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{4}{2} - 3 \Leftrightarrow g(x) = \frac{3}{2}x - 1$$

γ. Αφού $h(x) = \frac{3}{2}(x - 1)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά $κ$ μονάδες προς τα δεξιά και κατακόρυφα κατά $\frac{κ}{2}$ μονάδες κάτω, ισχύει

$$h(x) = f(x - κ) - \frac{κ}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}(x - 1) = \frac{3}{2}(x - κ) + \frac{1}{2} - \frac{κ}{2} \Leftrightarrow$$

$$3(x - 1) = 3(x - κ) + 1 - κ \Leftrightarrow 3x - 3 = 3x - 3κ + 1 - κ \Leftrightarrow 4κ = 4 \Leftrightarrow κ = 1$$

131. **B1.** Έχουμε:

$$2(x-3)^2 + 1 = 2(x^2 - 6x + 9) + 1 = 2x^2 - 12x + 18 + 1 = 2x^2 - 12x + 19 = f(x)$$

B2. Η C_f προκύπτει από μετατόπιση της C_g κατά 3 μονάδες οριζόντια προς τα δεξιά και κατά 1 μονάδα κατακόρυφα προς τα πάνω.

B3. Είναι η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$. Παρουσιάζει ελάχιστο αν x=3 το $f(3) = 2(3-3)^2 + 1 = 1$.

132. Η γραφική παράσταση της $φ(x) = |x|$ αποτελείται από τις διχοτόμους των γωνιών

$x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y$. Η γραφική παράσταση της $f(x) = |x| + 1$ προκύπτει από μια

κατακόρυφη μετατόπιση της $y = |x|$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, ενώ η γραφική παράσταση της $g = |x| - 1$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $y = |x|$ κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.

133. Η γραφική παράσταση της $f(x) = |x + 3|$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = |x|$ κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x) = |x - 3|$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = |x|$ κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά.

134. Αρχικά χαράσουμε την $y = |x + 3|$, που όντως είδαμε στην προηγούμενη άσκηση προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = |x|$ κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά. Στη συνέχεια χαράσσουμε την $f(x) = |x + 3| + 1$ που προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $y = |x + 3|$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

Ομοίως η γραφική παράσταση της $g(x) = |x - 3| - 1$ προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της $y = |x|$, μιας οριζόντιας κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.

135. Έχουμε:

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 8 = 3(x^2 - 4x) + 8 = 3(x^2 - 4x + 4) + 8 - 12 = 3(x - 2)^2 - 4$$

Άρα η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δυο διαδοχικές μετατοπίσεεις της γραφικής παράστασης της $g(x) = 3x^2$ κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 4 μονάδες προς τα κάτω.

136. **i)** $f(x) = (x - 1)^2 - 4(x - 1) + 5 + 2 = x^2 - 6x + 12$

ii) $f(x) = (x - 2)^2 - 4(x - 2) + 5 - 3 = x^2 - 8x + 14$

iii) $f(x) = (x + 1)^2 - 4(x + 1) + 5 + 2 = x^2 - 2x + 4$

iv) $f(x) = (x + 2)^2 - 4(x + 2) + 5 - 3 = x^2 - 2$

137. **i)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \varphi(x + 2) + 3$ προκύπτει από δυο μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ, μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

ii) Η γραφική παράσταση της $f(x) = φ(x + 3) – 1$ προκύπτει από δυο μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $φ$, μιας οριζόντιας κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.

iii) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = φ(x – 4) + 2$ προκύπτει από δυο μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $φ$, μιας οριζόντιας κατά 4 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

iv) Η γραφική παράσταση της $f(x) = φ(x – 5) – 6$ προκύπτει από δυο μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $φ$, μιας οριζόντιας κατά 5 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 6 μονάδες προς τα κάτω.

138. **i)** Έχουμε:

$$f(x) = (x + 2)^2 + 6(x + 2) + 15 – 3 = x^2 + 10x + 28$$

ii) Για $x = 0$ είναι $f(0) = 0^2 + 10\cdot 0 + 28 = 28$, άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $A(0, 28)$.
Για $y = 0$ είναι $x^2 + 10x + 28 = 0$ οπότε επειδή $\Delta < 0$ η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

iii) Είναι $f(x) < 0$ άρα $x^2 + 10x + 28 < 0$ και επειδή $\Delta < 0$ η ανίσωση $x^2 + 10x + 28 < 0$ είναι αδύνατη.
Άρα η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

139. Η γραφική παράσταση της $g(x) = -f(x)$ είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $x'x$.

140. Η γραφική παράσταση της $φ(x) = f(x + 1)$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά.

141. Η γραφική παράσταση της $φ(x) = f(x) + 2$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

142. Η γραφική παράσταση της $φ(x) = f(x – 2)$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.

143. Η γραφική παράσταση της $φ(x) = f(x) – 1$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.