ΛΥΣΕΙΣ 42 ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

1ο

Θέμα Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι της μορφής ρημ(αx) άρα το μέγιστό της max είναι $|\rho| = 2$ και το ελάχιστο min είναι -2. Επίσης η περίοδος είναι $T = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.

Β2. $f(x) = -1 \Leftrightarrow -2\eta\mu\left(\frac{x}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{x}{3}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 6\kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in Z \\ \frac{x}{3} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{x}{3} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = 6\kappa\pi + \frac{5\pi}{2},\ \kappa \in Z \end{cases}$$

- $0 \le 6\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \le 6\kappa\pi \le \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \le \kappa \le \frac{3}{12} \Leftrightarrow \kappa = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$
- $0 \le 6\kappa\pi + \frac{5\pi}{2} \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{2} \le 6\kappa\pi \le -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \le \kappa \le -\frac{1}{12}$ Αδύν.

Θέμα Γ

Γ1. Έχουμε P(1)=0, και αφού η διαίρεση του P(x) με το x+1 αφήνει υπόλοιπο 2, έχουμε: $P(-1) = 2$. Οπότε:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + (\beta - 1) - 3 - 2\beta + 6 = 0 \\ -\alpha + (\beta - 1) + 3 - 2\beta + 6 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = -2 \\ -\alpha - \beta = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 4 \end{cases}$$

Γ2. Για τις τιμές α=2 και β=4 το πολυώνυμο P(x) γράφεται: $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$.

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x^3 - 1) + 3x(x - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2(x-1)(x^2 + x + 1) + 3x(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 2x + 2 + 3x) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 5x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \ \text{ή} \ \left(x = -2 \ \text{ή} \ x = \frac{1}{2}\right)$$

Θέμα Δ

Δ1. Πρέπει: $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$ και $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

Άρα $A = (-2, 0)$

Δ2. Πρέπει: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(1 - e^x) - \ln(x + 2) = 1 - \ln(x + 2) \Leftrightarrow \ln(1 - e^x) = 1$

$$\Leftrightarrow \ln(1 - e^x) = \ln e \Leftrightarrow 1 - e^x = e \Leftrightarrow e^x = 1 - e \Leftrightarrow \ln e^x = \ln(1 - e) \Leftrightarrow x = \ln(1 - e)$$

Όμως $1 - e < 0$ επομένως ο λογάριθμος $\ln(1 - e)$ δεν ορίζεται.

Επομένως η αρχική εξίσωση δεν έχει λύση, άρα η f και η g δεν έχουν κοινά σημεία.

Δ3. $$f(x) > x + \ln\frac{1}{x+2} \Leftrightarrow \ln(1-e^x) - \ln(x+2) > x + \ln\frac{1}{x+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-e^x) - \ln(x+2) > x + \ln 1 - \ln(x+2) \Leftrightarrow \ln(1-e^x) > x \Leftrightarrow \ln(1-e^x) > \ln e^x$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^x > e^x \Leftrightarrow 2e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x < \frac{1}{2}\ln e \Leftrightarrow e^x < \ln e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x < \sqrt{e}$$

2ο

Θέμα Β

Β1. Ισχύει:

- $P(-1) = 0 \Leftrightarrow (-1)^3 + \alpha(-1)^2 - \beta(-1) - 6 = 0 \Leftrightarrow -1 + \alpha + \beta - 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 7 \quad (1)$
- $P(1) = -8 \Leftrightarrow 1^3 + \alpha \cdot 1^2 - \beta \cdot 1 - 6 = -8 \Leftrightarrow 1 + \alpha - \beta - 6 = -8 \Leftrightarrow \alpha - \beta = -3 \quad (2)$

Με πρόσθεση των (1) και (2) έχουμε: $2\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2$. $(1) \Rightarrow 2 + \beta = 7 \Leftrightarrow \beta = 5$

Β2. $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

Εκτελούμε το σχήμα Horner με το -1:

1	**2**	**−5**	**−6**	**−1**
	−1	−1	6	
1	**1**	−6	**0**	

Άρα η εξίσωση γίνεται: $(x+1)(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow$

- $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή
- $x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+5}{2} \Leftrightarrow x_1 = 2 \\ x_2 = \dfrac{1--5}{2} \Leftrightarrow x_2 = -3 \end{cases}$

Β3. Για x≠2 έχουμε:

$$\frac{P(x)}{x-2} \le 4x + 7 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x^2+x-6)}{x-2} \le 4x + 7 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)(x+3)}{(x-2)} \le 4x + 7$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 \le 4x + 7 \Leftrightarrow x^2 \le 4 \Leftrightarrow |x|^2 \le 4 \Leftrightarrow |x| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x \le 2$$

Επειδή x≠2 τελικά: $x \in (-2, 2]$

Θέμα Γ

Γ1. Έχουμε:

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 4\\ 5 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-20 \qquad D_x=\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 1 & \lambda+1\end{vmatrix}=-\lambda-1-4=-\lambda-5$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=\lambda+5$$

Αν $D=0\Leftrightarrow\lambda^2+\lambda-20=0\Leftrightarrow\lambda_{1,2}=\dfrac{-1\pm9}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{-1+9}{2}=4\\ \lambda_2=\dfrac{-1-9}{2}=-5\end{cases}$

- Αν λ=4 τότε το σύστημα γίνεται: $\left.\begin{matrix}4x+4y=-1\\ 5x+5y=1\end{matrix}\right\} x+y=-\dfrac{1}{4},\quad x+y=\dfrac{1}{5}$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

- Αν $\lambda=-5$ τότε το σύστημα γίνεται: $\left.\begin{matrix}-5x+4y=-1\\ 5x-4y=1\end{matrix}\right\} 5x-4y=1,\ \ 5x-4y=1$

Άρα το σύστημα είναι ταυτότητα.
Αν D≠0 τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-\lambda-5}{\lambda^2+\lambda-20}=-\frac{\lambda+5}{(\lambda+5)(\lambda-4)}=-\frac{1}{\lambda-4} \qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{\lambda+5}{\lambda^2+\lambda-20}=\frac{1}{\lambda-4}$$

Γ2. Για λ=2 έχουμε:

$$\left.\begin{matrix}x=-\dfrac{1}{-2}=\dfrac{1}{2}\\ y=\dfrac{1}{2-4}=-\dfrac{1}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow(\alpha,\beta)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

Γ3. Έχουμε:

$$\left.\begin{matrix}\eta\mu\varphi=\dfrac{1}{2}\\ \sigma\upsilon\nu\varphi=-\dfrac{1}{2}\end{matrix}\right\}(+)\Rightarrow\eta\mu^2\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Όμως $\eta\mu^2\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi=1$ άρα οδηγούμαστε σε άτοπο.

Άρα δεν υπάρχει τέτοια γωνία φ που να ικανοποιεί τη σχέση μας.

Γ4. $\alpha e^{2x}-\beta e^x-3\ge0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}e^{2x}+\dfrac{1}{2}e^x-3\ge0\Leftrightarrow e^{2x}+e^x=6\ge0$

Θέτουμε $e^x=\omega$: $\omega^2+\omega-6\ge0\Leftrightarrow\omega\le-3$ ή $\omega\ge2$ καθόσον

$$\omega^2+\omega-6=0\Leftrightarrow\omega=2 \text{ ή } \omega_2=-3.$$

Άρα $\omega\le-3\Leftrightarrow e^x\le-3$ αδύν. ή $\omega\ge2\Leftrightarrow e^x\ge2\Leftrightarrow x\ge\ln2$

Γ5. $$\alpha\sigma\upsilon\nu t=\beta+\eta\mu^2 t \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu t=-\frac{1}{2}+1-\sigma\upsilon\nu^2 t \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu t=\frac{1}{2}-\sigma\upsilon\nu^2 t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu t=1-2\sigma\upsilon\nu^2 t \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 t+\sigma\upsilon\nu t-1=0$$

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu t=\omega$: οπότε έχουμε $2\omega^2+\omega-1=0 \Leftrightarrow \omega=\frac{1}{2}$ ή $\omega=-1$

- $\omega_1=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu t=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow t=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3},\ \kappa\in Z$

i. $0<t<\pi \Leftrightarrow 0<2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}<\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}<2\kappa\pi<\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{6}<\kappa<\frac{2}{6} \Leftrightarrow \kappa=0 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{3}$

ii. $0<t<\pi \Leftrightarrow 0<2\kappa\pi-\frac{\pi}{3}<\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}<2\kappa\pi<\frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{6}<\kappa<\frac{4}{6}$ αδύν.

- $\omega_2=-1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu t=-1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu t=\sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow t=2\kappa\pi\pm\pi,\ \kappa\in Z$

i. $0<t<\pi \Leftrightarrow 0<2\kappa\pi+\pi<\pi \Leftrightarrow -\pi<2\kappa\pi<0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<\kappa<0$ αδύν.

ii. $0<t<\pi \Leftrightarrow 0<2\kappa\pi-\pi<\pi \Leftrightarrow \pi<2\kappa\pi<2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{2}<\kappa<1$ αδύν.

Θέμα Δ

Δ1. Έχουμε

$2x^3-5x^2+12x-5$	$2x-1$
$-2x^3+x^2$	x^2-2x+5
$-4x^2+12x$ $4x^2-2x$	
$10x-5$ $-10x+5$	
0	

Άρα: $2x^3-5x^2+12x-5=(2x-1)(x^2-2x+5)$

Δ2. Πρέπει:

- $\frac{x-1}{x+1}>0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)>0 \Leftrightarrow x^2-1>0 \Leftrightarrow x^2>1 \Leftrightarrow |x|>1 \Leftrightarrow x>1$ ή $x>-1$
- $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$

Άρα $A=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

Δ3. $f(x^2)+f(x)=\ln(2ex)-\ln 5-1 \Leftrightarrow \ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}+\ln\dfrac{x-1}{x+1}=\ln(2ex)-\ln 5-\ln e \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{(x-1)(x+1)(x-1)}{(x^2+1)(x+1)}=\ln\left(\frac{2ex}{5e}\right) \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x^2+1}=\frac{2x}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-10x+5=2x^3+2x \Leftrightarrow 2x^3-5x^2+12x-5=0 \Leftrightarrow (2x-1)(x^2-2x+5)=0$$

οπότε $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ ή $x^2-2x+5=0$ αδύν.

Δ4. Πρέπει:

$$f(x)\geq 1 \Leftrightarrow \ln\frac{x-1}{x+1}\geq \ln 3 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}\geq 3 \Leftrightarrow x-1\geq 3x+3 \Leftrightarrow 2x\leq -4 \Leftrightarrow x\leq -2$$

3ο

Θέμα Β

Β1. Ισχύει:

- $P(-1)=(-1)^4+\alpha(-1)^3+\beta(-1)^2-16(-1)-12=0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 1-\alpha+\beta+16-12=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=-5 \Leftrightarrow \alpha-\beta=5$ (1)

- $P(1)=-24 \Leftrightarrow 1+\alpha+\beta-16-12=-24 \Leftrightarrow \alpha+\beta=3$ (2)

Με πρόσθεση των (1) και (2) έχουμε: $2\alpha=8 \Leftrightarrow \alpha=4$ $\quad$ $(1) \Rightarrow 4-\beta=5 \Leftrightarrow \beta=-1$

Β2. i.

$\mathbf{x^4+4x^3-x^2-16x-12}$	$\mathbf{x^2-x-2}$
$-x^4+x^3+2x^2$	$\mathbf{x^2+5x+6}$
$5x^3+x^2-16x$ $-5x^3+5x^2+10x$	
$6x^2-6x-12$ $-6x^2+6x+12$	
0	

ii. $P(x)\leq 0 \Leftrightarrow x^4+4x^3-x^2-16x-12\leq 0 \Leftrightarrow (x^2+5x+6)(x^2-x-2)\leq 0$

- $x^2+5x+6=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\dfrac{-5\pm 1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{-5+1}{2}=-2 \\ x_2=\dfrac{-5-1}{2}=-3 \end{cases}$

- $$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1+3}{2}=2 \\ x_2=\frac{1-3}{2}=-1 \end{cases}$$

Άρα $x\in[-3,-2]\cup[-1,2]$

Θέμα Γ

Γ1. Προφανώς το πεδίο ορισμού είναι το R.
Επίσης ισχύει ότι το μέγιστο max είναι 5+3=8 και το min $5-3=2$.

Γ2. Έχουμε: $10\eta\mu\frac{\pi}{6}=10\cdot\frac{1}{2}=5$

$$2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-\sigma\upsilon\nu(\pi-2x)=2\sigma\upsilon\nu(2x)+\sigma\upsilon\nu(2x)=3\sigma\upsilon\nu(2x)$$

Άρα $f(x)=10\eta\mu\frac{\pi}{6}+2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-\sigma\upsilon\nu(\pi-2x)=5+3\sigma\upsilon\nu(2x)$ που ισχύει.

Γ3. $f(x)=5\Leftrightarrow 5+3\sigma\upsilon\nu(2x)=5\Leftrightarrow 3\sigma\upsilon\nu(2x)=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(2x)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(2x)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 2x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\quad \kappa\in Z$$

Θέμα Δ

Δ1. Για την f έχουμε: $e^{2x}+5e^x-14>0$. Θέτουμε $e^x=\omega$ άρα $\omega^2+5\omega-14>0$

$$\omega^2+5\omega-14=0\Leftrightarrow \omega_{1,2}=\frac{-5\pm 9}{2}\Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1=\frac{-5+9}{2}=2 \\ \omega_2=\frac{-5-9}{2}=-7 \end{cases}$$

Άρα $\omega<-7\Leftrightarrow e^x<-7$ αδύν. ή $\omega>2\Leftrightarrow e^x>2\Leftrightarrow x>\ln 2$. Άρα $A_f=(\ln 2,+\infty)$

Για την g έχουμε:

$$1-2e^{-x}>0\Leftrightarrow 2e^{-x}<1\Leftrightarrow e^{-x}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow -x<\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow -x<\ln 1-\ln 2\Leftrightarrow x>\ln 2$$

Άρα $A_g=(\ln 2,+\infty)$

Δ2. Έχουμε

$$g(x)=\ln(1-2e^{-x})+x=\ln(1-2e^{-x})+\ln e^x=\ln[e^x(1-2e^{-x})]=\ln(e^x-2e^x\cdot e^{-x})=\ln(e^x-2)$$

$$f(x)-g(x)=\ln(e^{2x}+5e^x-14)-\ln(e^x-2)=\ln\left(\frac{e^{2x}+5e^x-14}{e^x-2}\right)\overset{(\Delta 1)}{=}\ln\left(\frac{(e^x+7)(e^x-2)}{e^x-2}\right)$$

$$=\ln(e^x+7)$$

Δ3. $f(x)=g(x)+2\ln 3 \Leftrightarrow f(x)-g(x)=\ln 3^2 \Leftrightarrow \ln(e^x+7)=\ln 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^x+7=9 \Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2 \text{ αδύν.}$$

Δ4. $f(x)>g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)>0 \Leftrightarrow \ln(e^x+7)>\ln 1 \Leftrightarrow e^x+7>1 \Leftrightarrow e^x>-6$ που ισχύει για κάθε $x \in A_f, A_g$. Επομένως η γραφική παράσταση της f είναι πάντοτε πάνω απ' αυτήν της g.

4ο

Θέμα Β

Β1. Αφού είναι ίσα τα πολυώνυμα έχουν ίσους τους ομοιοβάθμιους συντελεστές τους. Άρα:

$$2\alpha-1=1 \Leftrightarrow 2\alpha=2 \Leftrightarrow \alpha=1 \quad \text{και}$$

$$-(5+\beta)=2\beta+4 \Leftrightarrow -5-\beta=2\beta+4 \Leftrightarrow 3\beta=-9 \Leftrightarrow \beta=-3$$

Άρα $P(x)=x^3-2x^2+4x-3$

Β2. Κάνουμε Horner με το 1:

1	−2	4	−3	1
	1	−1	3	
1	−1	3	0	

Άρα $P(x)=(x-1)(x^2-x+3)$.

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα του x^2-x+3: $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot3=1-12=-11<0$

Επομένως το P(x) δεν έχει άλλη ρίζα.

Β3. $\dfrac{P(x)}{x^2-1}\geq 0 \overset{(B2)}{\Leftrightarrow} \dfrac{(x-1)(x^2-x+3)}{(x-1)(x+1)}\geq 0 \Leftrightarrow (x^2-x+3)(x+1)\geq 0$ με $x\neq -1$.

$x^2-x+3>0$ για κάθε $x\in R$ αφού Δ<0 οπότε $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$ $(x\neq -1)$

Άρα $x\in(-1,+\infty)$

Θέμα Γ

Γ1. Για την περίοδο έχουμε: $T=\dfrac{2\pi}{\alpha}=\dfrac{2\pi}{3}$

$\max=2-1=1$ το μέγιστο της f. $\min=-2-1=-3$ το ελάχιστο της f.

Γ2. Έχουμε

- $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=2\sigma\upsilon\nu\dfrac{3\pi}{12}-1=2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4}-1=2\dfrac{\sqrt2}{2}-1=\sqrt2-1$

- $f\left(\dfrac{\pi}{9}\right)=2\sigma\upsilon\nu\dfrac{3\pi}{9}-1=2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3}-1=2\cdot\dfrac{1}{2}-1=0$

- $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{6}-1=2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-1=-1$

$$\text{Άρα}\quad f\left(\frac{\pi}{12}\right)+f\left(\frac{\pi}{9}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}-1+0+1=\sqrt{2}$$

Γ1. Έχουμε:

$$4^x+16=2^{x+3}\Leftrightarrow (2^2)^x+2^4=2^{x+3}\Leftrightarrow 2^{2x+4}=2^{x+3}\Leftrightarrow 2x+4=x+3\Leftrightarrow x=-1$$

Άρα $\rho=-1$. Έτσι:

$f(x)+\rho=0\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 3x-1-1=0\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 3x=2\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 3x=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 3x=\sigma\upsilon\nu 0\Leftrightarrow 3x=2\kappa\pi\Leftrightarrow x=\frac{2\kappa\pi}{3}\Leftrightarrow 0\le\frac{2\kappa\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow 0\le\kappa<1\Leftrightarrow \kappa=0\Leftrightarrow x=0$

Θέμα Δ

Δ1. Πρέπει:

- $\frac{\ln^2 x-1}{3}>0\Leftrightarrow \ln^2 x-1>0\overset{\ln x=\omega}{\Leftrightarrow}\omega^2-1>0\Leftrightarrow \omega^2>1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |\omega|^2>1\Leftrightarrow |\omega|>1\Leftrightarrow \begin{cases}\omega>1\Leftrightarrow \ln x>1\Leftrightarrow \ln x>\ln e\Leftrightarrow x>e\\ \omega<-1\Leftrightarrow \ln x<-1\Leftrightarrow \ln x<\ln e^{-1}\Leftrightarrow x<\frac{1}{e}\end{cases}$$

- x>0. Άρα $A_f=\left(0,\frac{1}{e}\right)\cup(e,+\infty)$

Δ2. $f\left(\frac{1}{e^3}\right)=\ln\left(\frac{\ln^2\frac{1}{e^3}-1}{3}\right)=\ln\left(\frac{(\ln 1-\ln e^3)^2-1}{3}\right)=$

$=\ln\left(\frac{(0-3)^2-1}{3}\right)=\ln\frac{8}{3}=\ln 8-\ln 3=\ln 2^3-\ln 3=3\ln 2-\ln 3$

Δ3. $f(x)\le f\left(\frac{1}{e^3}\right)\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\ln^2 x-1}{3}\right)=\ln\frac{8}{3}\Leftrightarrow \frac{\ln^2 x-1}{3}=\frac{8}{3}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ln^2 x-1=8\Leftrightarrow \ln^2 x=9\Leftrightarrow \begin{cases}\ln x=3\Leftrightarrow \ln x=3\ln e\Leftrightarrow \ln x=\ln e^3\Leftrightarrow x=e^3\\ \ln x=-3\Leftrightarrow \ln x=-3\ln e\Leftrightarrow x=e^{-3}\end{cases}$$

5ο

Θέμα Β

Β1. Ισχύει: $P(-1)=0\Leftrightarrow (-1)^3+(-1)^2+\alpha(-1)-3=0\Leftrightarrow -1+1-\alpha-3=0\Leftrightarrow \alpha=-3$

Β2. $P(x)=x^3+x^2-3x-3$

i. $P(x)=0 \Leftrightarrow x^3+x^2-3x-3 \Leftrightarrow x^2(x+1)-3(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-3)=0 \Leftrightarrow$

$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

ii. $P(x)\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-3)\geq 0$ πινακακι να γινει

Άρα $x\in[-\sqrt{3},-1]\cup[\sqrt{3},+\infty)$

Θέμα Γ

Γ1. Θέτουμε συνx=ω:

$$5\omega^2-7\omega-6=0 \Leftrightarrow \omega_{1,2}=\frac{7\pm 13}{10} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1=\dfrac{7+13}{10}=2 \Leftrightarrow \text{συν}x=2 \text{ ατοπο.} \\ \omega_2=\dfrac{7-13}{10}=-\dfrac{6}{10}=-\dfrac{3}{5} \Leftrightarrow \text{συν}x=-\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Γ2. Ισχύει:

- $$\text{ημ}^2x+\text{συν}^2x=1 \Leftrightarrow \text{ημ}^2x+\left(-\frac{3}{5}\right)^2=1 \Leftrightarrow \text{ημ}^2x+\frac{9}{25}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{ημ}^2x=1-\frac{9}{25} \Leftrightarrow \text{ημ}^2x=\frac{16}{25} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ημ}x=\sqrt{\dfrac{16}{25}}=\dfrac{4}{5} \\ \text{ημ}x=\sqrt{\dfrac{16}{25}}=-\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Επειδή $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ θα πρέπει ημx>0. Άρα $\text{ημ}x=\frac{4}{5}$

- $$\text{εφ}x=\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$$

Γ3. $$A=\frac{\text{συν}(\pi-x)-\text{ημ}(7\pi-x)}{\text{εφ}(\pi+x)}=\frac{-\text{συν}x-\text{ημ}(\pi-x)}{\text{εφ}x}=\frac{-\text{συν}x-\text{ημ}x}{\text{εφ}x}=$$

$$=-\frac{\text{συν}x+\text{ημ}x}{\text{εφ}x}=-\frac{\frac{4}{5}-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{3}}=-\frac{\frac{1}{5}}{-\frac{4}{3}}=\frac{3}{20}$$

Θέμα Δ

Δ1. i. Για κάθε x>0 έχουμε:

$$f(x)=g(x)=5^{\log x}=x^{\log 5} \Leftrightarrow \log 5^{\log x}=\log x^{\log 5} \Leftrightarrow \log x\log 5=\log 5\log x$$

ii. Για κάθε x, y>0 έχουμε: $f(x\cdot y)=5^{\log(xy)}=5^{\log x+\log y}=5^{\log x}\cdot 5^{\log y}=f(x)\cdot f(y)$.

iii. Για κάθε x, y>0 έχουμε: $f\left(\frac{x}{y}\right)=5^{\log\frac{x}{y}}=5^{\log x-\log y}=\frac{5^{\log x}}{5^{\log y}}=\frac{f(x)}{f(y)}$.

iv. Για κάθε $\nu\in N$ έχουμε: $f(x^{\nu})=5^{\log x^{\nu}}=5^{\nu\cdot\log x}=(5^{\log x})^{\nu}=[f(x)]^{\nu}$.

Δ2. $f^2(x)=5+4g(x)\Leftrightarrow(5^{\log x})^2=5+4x^{\log 5}$.

Από το Α.1. η προηγούμενη σχέση γράφεται: $(5^{\log x})^2=5+4\cdot 5^{\log x}$. Θέτουμε: $5^{\log x}=\omega>0$.

Άρα: $\omega^2-4\omega-5=0\Leftrightarrow\omega=5$ ή $\omega=-1$ απορ.

Έχουμε: $5^{\log x}=5$. Η εκθετική συνάρτηση είναι $1-1$, άρα: $\log x=1\Leftrightarrow\log x=\log 10$.

Η λογαριθμική συνάρτηση είναι $1-1$, άρα τελικά: x=10.

Δ3. Πρέπει: x>0 και $x^2-4>0$. Άρα x>0 και $x<-2$ ή x>2.

Επομένως: x>2. $f(3x)>f(x^2-4)\Leftrightarrow 5^{\log 3x}>5^{\log(x^2-4)}$.

Η εκθετική συνάρτηση με βάση 5 είναι γνησίως αύξουσα, άρα: $\log 3x>\log(x^2-4)$.

Η λογαριθμική συνάρτηση με βάση 10 είναι γνησίως αύξουσα, άρα:

$$3x>x^2-4\Leftrightarrow x^2-3x-4<0\Leftrightarrow -1<x<4.$$

Επειδή, x>2, τελικά έχουμε: 2<x<4.

6ο

Θέμα Β

Β1. $K=\frac{\sigma\upsilon\nu^4x-\eta\mu^4x+\eta\mu^2x}{1-\eta\mu x}=\frac{\sigma\upsilon\nu^4x+\eta\mu^2x(1-\eta\mu^2x)}{1-\eta\mu x}=$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu^4x+\eta\mu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2x}{1-\eta\mu x}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2x(\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2x)}{1-\eta\mu x}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2x\cdot 1}{1-\eta\mu x}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{1-\eta\mu x}=$$

$$=\frac{1-\eta\mu^2x}{1-\eta\mu x}=\frac{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}{1-\eta\mu x}=1+\eta\mu x$$

Β2. $\sigma\upsilon\nu x=\frac{4}{5}$ $\quad\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$

$$\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1\Leftrightarrow\eta\mu^2x+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1\Leftrightarrow\eta\mu^2x=1-\frac{16}{25}\Leftrightarrow\eta\mu^2x=\frac{9}{25}\Leftrightarrow\eta\mu x=\pm\frac{3}{5}$$

Όμως, επειδή $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ είναι $\eta\mu x=-\frac{3}{5}$. Άρα $K=1+\eta\mu x=1-\frac{3}{5}\Leftrightarrow K=\frac{2}{5}$

Β3. $K+\eta\mu 3x=1\Leftrightarrow 1+\eta\mu x+\eta\mu 3x=1\Leftrightarrow\eta\mu 3x+\eta\mu x=0\quad(1)$

Έχουμε:

$$\eta\mu 3x = \eta\mu(2x + x) = \eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 2x \cdot \eta\mu x$$
$$= 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x + (1 - 2\eta\mu^2 x)\eta\mu x = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu x - 2\eta\mu^3 x$$
$$= 2\eta\mu x(1 - \eta\mu^2 x) + \eta\mu x - 2\eta\mu^3 x = 2\eta\mu x - 2\eta\mu^3 x + \eta\mu x - 2\eta\mu^3 x = 3\eta\mu x - 4\eta\mu^3 x$$

Οπότε:

(1) $3\eta\mu x - 4\eta\mu^3 x + \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow 4\eta\mu x - 4\eta\mu^3 x = 0 \Leftrightarrow 4\eta\mu x(1 - \eta\mu^2 x) = 0 \Leftrightarrow 4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2 x = 0$
$\Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu 0 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + 0 = 2\kappa\pi$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - 0 = 2\kappa\pi + \pi,\ \kappa \in Z$

ή $\sigma\upsilon\nu^2 x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \dfrac{\pi}{2},\ \kappa \in Z$

Τελικά $\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi,\ \kappa \in Z$ ή $\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2},\ \kappa \in Z$

Θέμα Γ

Γ1. Αφού το P(x) είναι 3ου βαθμού, τότε:

$$\alpha^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ή } -1 \quad \text{και} \quad \alpha + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -1$$

Τελικά α=1. Αφού το 1 είναι ρίζα του P(x), τότε:

$$P(1) = 0 \overset{\alpha=1}{\Leftrightarrow} (1^2 - 1)\cdot 1^4 + \frac{1}{2}(1+1)\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 - 5\cdot 1 + 2\cdot 1 + \beta = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot 2 - 2 - 5 + 2 + \beta = 0 \Leftrightarrow 1 - 5 + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 4$$

Άρα α=1 και β=4.

Γ2. i. Για α=1 και β=4 το P(x) γίνεται: $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 2 + 4 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Κάνουμε τη διαίρεση: P(x):(x+1)

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$	$x+1$
$-x^3 - x^2$	$x^2 - 3x - 2$
$-3x^2 - 5x + 6$ $+3x^2 + 3x$	
$-2x + 6$ $+2x + 2$	
8	

Άρα, η ταυτότητα της διαίρεσης είναι: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x+1)(x^2 - 3x - 2) + 8$

ii. $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

Εφαρμόζουμε Horner για x=1.

1	-2	-5	6	1
	1	-1	-6	
1	-1	-6	**0**	

Άρα $x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)(x-3)(x+2)$

$(x-1)(x-3)(x+2)=0$

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \;\; ή \;\; x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \;\; ή \;\; x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

iii. $\dfrac{P(x)}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)(x+2)(x-1) \le 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x-3)(x+2) \le 0 \;\; με \;\; x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου. Τελικά, $\dfrac{P(x)}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow x \in [-2,1) \cup (1,3]$

Θέμα Δ

Δ1. Πρέπει $e^{2x}-2e^x+3>0$. Θέτουμε $e^x=y>0$ οπότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$y^2-2y+3>0$ και επειδή $\Delta=-8<0$ ισχύει για κάθε $y \in R$ Πεδίο Ορισμού f=R

Πρέπει $e^x-1>0$ ή $e^x>1$ ή $e^x>e^0$ ή x>0. Πεδίο Ορισμού g=(0,+∞)

Δ2. Η εξίσωση f(x)=g(x), $x \in (0,+\infty)$ γράφεται:

$\ln(e^{2x}-2e^x+3)=\text{lm}3+\ln(e^x-1)$ ή $\ln(e^{2x}-2e^x+3)=\ln(3e^x-3)$ ή

$e^{2x}-2e^x+3=3e^x-3$ ή $e^{2x}-5e^x+6=0$. Θέτουμε $e^x=y>0$ οπότε:

$y^2-5y+6=0 \Leftrightarrow y=2$ ή $y=3$ άρα $e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$ ή $e^x=3 \Leftrightarrow x=\ln 3$

Δ3. Η ανίσωση f(x)>2g(x), $x \in (0,+\infty)$ γράφεται:

$$\ln(e^{2x}-2e^x+3)>2\ln(3e^x-3) \;\; ή \;\; e^{2x}-2e^x+3>9e^{2x}-18e^x+9 \;\; ή$$

$$8e^{2x}-16e^x+6<0 \;\; ή \;\; 4e^{2x}-8e^x+3<0$$

Θέτουμε $e^x=y>0$ οπότε έχουμε: $4y^2-8y+3<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<y<\dfrac{3}{2}$

Άρα $\dfrac{1}{2}<e^x<\dfrac{3}{2}$ ή $\ln\dfrac{1}{2}<x<\ln\dfrac{3}{2}$ ή $-\ln 2<x<\ln\dfrac{3}{2}$ και επειδή $x \in (0,+\infty)$ $0<x<\ln\dfrac{3}{2}$

7ο

Θέμα Β

B1. Αφού το P(x) έχει παράγοντα τον x, δηλαδή το $x-0$, τότε:

$$P(0)=0 \Leftrightarrow 0^3-2\alpha\cdot 0+\beta^2-1=0 \Leftrightarrow \beta^2-1=0 \Leftrightarrow \beta^2=1 \Leftrightarrow \beta=\pm 1$$

Αφού το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1 είναι 3, τότε :

$$P(-1)=3 \Leftrightarrow (-1)^3-2\cdot\alpha(-1)+\beta^2-1=3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1+2\alpha+(\pm 1)^2-1=3 \Leftrightarrow -1+2\alpha+1-1=3 \Leftrightarrow 2\alpha=4 \Leftrightarrow \alpha=2$$

B2. Για α=2 και $\beta=\pm 1$, το P(x) γίνεται: $P(x)=x^3-4x$

Κάνουμε τη διαίρεση P(x):(x+1)

x^3+0x^2-4x	$x+1$
$-x^3-x^2$	x^2-x-3
$-x^2-4x$ $+x^2+x$	
$-3x$ $+3x+3$	
3	

Άρα $\pi(x)=x^2-x-3$

Και η ταυτότητα της διαίρεσης είναι: $x^3-4x=(x+1)(x^2-x-3)+3$

B3. $P(x)=0 \Leftrightarrow x^3-4x=0 \Leftrightarrow x(x^2-4)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$

Θέμα Γ

Γ1. Έχουμε $\left.\begin{array}{l}-x+y=\lambda\\ x-2y=\lambda^2+\lambda\end{array}\right\}$ $D=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$

Άρα, αφού D≠0, το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda\in R$.

Γ2. Βρίσκουμε D_x και D_y :

$$D_x=\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ \lambda^2+\lambda & -2\end{vmatrix}=-2\lambda-\lambda^2-\lambda=-3\lambda-\lambda^2 \qquad D_y=\begin{vmatrix}-1 & \lambda\\ 1 & \lambda^2+\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2-\lambda-\lambda=-\lambda^2-2\lambda$$

Επομένως $x_0=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-3\lambda-\lambda^2}{1}=-3\lambda-\lambda^2$ $\quad y_0=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{-\lambda^2-2\lambda}{1}=-\lambda^2-2\lambda$

Τελικά $(x_0,y_0)=(-3\lambda-\lambda^2,-\lambda^2-2\lambda)$

Γ3. $x_0\cdot y_0\geq 0 \Leftrightarrow (-3\lambda-\lambda^2)(-\lambda^2-2\lambda)\geq 0 \Leftrightarrow 3\lambda^3+6\lambda^2+\lambda^4+2\lambda^3\geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lambda^4+5\lambda^3+6\lambda^2\geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda^2+5\lambda+6)\geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda+2)(\lambda+3)\geq 0 \Leftrightarrow P(\lambda)\geq 0$$

$$\lambda=0 \text{ ή } \lambda=-2 \text{ ή } \lambda=-3$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου.

Τελικά $P(\lambda)\geq 0 \Leftrightarrow \lambda\in(-\infty,-3]\cup[-2,+\infty)$

Θέμα Δ

Δ1. $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+1}\right)$. Πρέπει $\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+1}>0 \overset{e^x+1\neq 0}{\Leftrightarrow} \Leftrightarrow (e^{2x}-1)(e^x+1)>0 \overset{e^x+1>0}{\Leftrightarrow} e^{2x}-1>0$

$\Leftrightarrow e^{2x}>1 \Leftrightarrow e^{2x}>e^0 \Leftrightarrow 2x>0 \Leftrightarrow x>0$. Άρα $D_f=(0,+\infty)$.

Δ2. $f(x)=2\ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+1}\right)=\ln 2^2 \Leftrightarrow \dfrac{e^{2x}-1}{e^x+1}=4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{2x}-1=4e^x+4 \Leftrightarrow e^{2x}-4e^x-5=0$$

Θέτουμε $e^x=\omega \Rightarrow \omega^2-4\omega-5=0 \Leftrightarrow (\omega-5)(\omega+1)=0 \Leftrightarrow \omega=5$ ή $\omega=-1$

Άρα $e^x=5 \Leftrightarrow x=\ln 5$ ή $e^x=-1$ αδύνατη.

Δ3. $f(x)>0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+1}\right)>\ln 1 \Leftrightarrow \dfrac{e^{2x}-1}{e^x+1}>1 \Leftrightarrow e^{2x}-1>e^x+1 \Leftrightarrow e^{2x}-e^x-2>0$

Θέτουμε $e^x=\omega \Rightarrow \omega^2-\omega-2=0 \Leftrightarrow (\omega-2)(\omega+1)=0 \Leftrightarrow \omega=2$ ή $\omega=-1$

Άρα $e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$ ή $e^x=-1$ αδύνατη. Τελικά $e^{2x}-e^x-2>0 \Leftrightarrow x>\ln 2$.

8ο

Θέμα Β

Β1. Αφού το P(x) έχει παράγοντες το x+1 και το $x-2$ άρα:

$$\begin{array}{l} P(-1)=0 \;\; (1) \\ P(2)=0 \;\; (2) \end{array} \text{ δηλαδή } \left.\begin{array}{l} \alpha-\beta=-3 \\ 2\alpha+\beta=-6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha=-3 \\ \beta=0 \end{array}$$

Β2. Η εξίσωση P(x)=0 δηλαδή $x^3-3x^2+4=0$ έχει παράγοντες το x+1 (άρα ρίζα το -1) και $x-2$ (άρα ρίζα το 2) οπότε με σχήμα Horner έχουμε:

1	−3	0	4	−1
	−1	4	−4	
1	−4	4	0	

$$x^3-3x^2+4=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-4x+4)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=2$$

Β3. i. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)=x^3-3x^2+4$ τέμνει τον άξονα y΄y όταν x=0 δηλαδή P(0)=4 δηλαδή στο σημείο (0,4).

ii. Οι τιμές του x για τις οποίες η C είναι κάτω από τον άξονα x΄x είναι οι λύσεις της ανίσωσης P(x)<0 δηλαδή: $x^3-3x^2+4<0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2<0 \Leftrightarrow x<-1$

Θέμα Γ

Γ1. Πρέπει $2x>0 \Leftrightarrow x>0$ και $x^2>0$ ισχύει. Άρα $D_f=(0,+\infty)$

Γ2. $f(x)=\ln 2x+\frac{1}{2}\ln|x|^2-\ln 2=\ln 2x+\frac{1}{2}\cdot 2\ln|x|-\ln 2=\ln 2x+\ln|x|-\ln 2$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \ln 2x+\ln|x|-\ln 2=0 \Leftrightarrow \ln(2x\cdot|x|)-\ln 2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x\cdot|x|}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \ln(x\cdot|x|)=\ln 1 \Leftrightarrow x\cdot|x|=1$$

Αν $x>0 \Rightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$ απορρίπτεται

Αν $x<0 \Leftrightarrow -x^2=1 \Leftrightarrow x^2=-1$ αδύνατη. Άρα x=1.

Γ3. $f(x)=2f(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \ln 2x+\ln|x|-\ln 2=2(\ln 2\sqrt{x}+\ln\left|\sqrt{x}\right|-\ln 2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ln 2x+\ln|x|-\ln 2=2\ln 2\sqrt{x}+2\ln\left|\sqrt{x}\right|-2\ln 2$$

$$\Leftrightarrow \ln 2x+\ln|x|=\ln(2\sqrt{x})^2+2\ln\left|\sqrt{x}\right|-\ln 2$$

$$\Leftrightarrow \ln 2x+\ln|x|=\ln(4x)+2\ln|x|^{\frac{1}{2}}-\ln 2 \Leftrightarrow \ln 2x+\ln|x|=\ln 4x+2\cdot\frac{1}{2}\ln|x|-\ln 2$$

$$\Leftrightarrow \ln 2x+\ln|x|=\ln 4x+\ln|x|-\ln 2 \Leftrightarrow \ln 2x=\ln\left(\frac{4x}{2}\right) \Leftrightarrow \ln 2x=\ln 2x \text{ ισχύει}$$

Θέμα Δ

Δ1. Πρέπει $1+x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$ και $1-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι: $D_f=R-\{-1,1\}$.

Δ2. Για να είναι άρτια ή περιττή πρέπει για κάθε $x\in D_f$ και το $-x\in D_f$, το οποίο ισχύει και θα βρούμε το $f(-x)=\frac{1-ημ(-x)}{1-x}+\frac{1+ημ(-x)}{1+x}=\frac{1+ημx}{1-x}+\frac{1-ημx}{1+x} \Leftrightarrow f(-x)=f(x)$

Επομένως f άρτια.

Δ3. Για να διέρχεται από το σημείο Α(0,2) πρέπει: f(0)=2.

$$f(0)=2 \Leftrightarrow \frac{1-ημ0}{1+0}+\frac{1+ημ0}{1-0}=2 \Leftrightarrow \frac{1-0}{1}+\frac{1+0}{1}=2 \Leftrightarrow 1+1=2 \Leftrightarrow 2=2 \text{ ισχύει.}$$

Δ4. Πρέπει $1+x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$ και $1-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$

$$f(x)=\frac{2}{1-x} \Leftrightarrow \frac{1-ημx}{1+x}+\frac{1+ημx}{1-x}=\frac{2}{1-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+x)(1-x)\frac{(1-\eta\mu x)}{1+x}+(1+x)(1-x)\frac{(1+\eta\mu x)}{1-x}=(1+x)(1-x)\frac{2}{1-x}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1-\eta\mu x-x+x\eta\mu x+1+\eta\mu x+x+x\eta\mu x-2-2x=0\Leftrightarrow 2x\eta\mu x-2x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x(\eta\mu x-1)=0\Leftrightarrow x=0 \quad ή \quad \eta\mu x=1$$

$$\eta\mu x=1\Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2} \;\; ή \;\; x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in Z$$

9ο

Θέμα Β

B1. Για να είναι το 1 ρίζα του P(x) πρέπει:

$$P(1)=0\Leftrightarrow 1^3-1^2-4\cdot 1+\kappa^2=0\Leftrightarrow 1-1-4+\kappa^2=0\Leftrightarrow \kappa^2=4\Leftrightarrow \kappa=2 \;\; ή \;\; \kappa=-2$$

B2. i. Για κ=2 το P(x) γίνεται: $P(x)=x^3-x^2-4x+4$

Εφαρμόζουμε Horner για $x=-1$:

1	−1	−4	4	−1
	−1	2	2	
1	−2	−2	6	

Άρα υ=6 και $\pi(x)=x^2-2x-2$

ii. $P(\sigma\upsilon\nu\theta)=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^3\theta-\sigma\upsilon\nu^2\theta-4\sigma\upsilon\nu\theta+4=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta(\sigma\upsilon\nu\theta-1)-4(\sigma\upsilon\nu\theta-1)=0\Leftrightarrow(\sigma\upsilon\nu\theta-1)(\sigma\upsilon\nu^2\theta-4)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta-1=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=1 \;\; ή \;\; \sigma\upsilon\nu^2\theta-4=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\theta=4$$

Άρα $\sigma\upsilon\nu\theta=\sigma\upsilon\nu 0\Leftrightarrow \theta=2\kappa\pi\pm 0\Leftrightarrow \theta=2\kappa\pi,\ \kappa\in Z$

ή $\sigma\upsilon\nu\theta=2$ αδύνατη ή $\sigma\upsilon\nu\theta=-2$ αδύνατη διότι $|\sigma\upsilon\nu\theta|\le 1$.

Θέμα Γ

Γ1. Για να είναι η f γνησίως φθίνουσα πρέπει για $x_1<x_2$ το $f(x_1)>f(x_2)$

Έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow 3^{x_1}<3^{x_2}\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1}>\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1}-\frac{3}{4}>\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}-\frac{3}{4}\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Άρα $f\downarrow$

Γ2. $4f(x)=g(x)\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{3}\right)^x-4\cdot\frac{3}{4}=3^{-2x}\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{3}\right)^x-3=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}-4\left(\frac{1}{3}\right)^x+3=0$

Θέτουμε $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \omega$ κι έχουμε: $\omega^2 - 4\omega + 3 = 0 \Leftrightarrow (\omega-3)(\omega-1) = 0 \Leftrightarrow \omega = 3$ ή $\omega = 1$

Άρα $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = -1$ και $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0$

Γ3. $f(x) > -\frac{5}{12} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x - \frac{3}{4} > -\frac{5}{12} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{3}{4} - \frac{5}{12} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{4}{12} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} x < 1$$

Θέμα Δ

Δ1. Πρέπει $\frac{3-x}{3+x} > 0 \Leftrightarrow 3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$ και $3 + x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$ Άρα $D_f = (-3, 3)$

Δ2. $f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{3-\frac{1}{3}}{3+\frac{1}{3}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}}\right) = \ln\left(\frac{8}{10}\right) = \ln\left(\frac{4}{5}\right) = \ln 4 - \ln 5 < 0$ (αφού ln4<ln5)

Δ3. $f(0) = \ln\left(\frac{3-0}{3+0}\right) = \ln 1 = 0$

$$f(2) = \ln\left(\frac{3-2}{3+2}\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) = \ln 1 - \ln 5 = -\ln 5 \qquad f(-2) = \ln\left(\frac{3+2}{3-2}\right) = \ln 5$$

Δ4. $f(3^x) + f(0) > f(2) + f(-2) + f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow f(3^x) + 0 > -\ln 5 + \ln 5 + \ln\left(\frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(3^x) > \ln\left(\frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{3-3^x}{3+3^x}\right) > \ln\left(\frac{4}{5}\right) \overset{\uparrow}{\Leftrightarrow} \frac{3-3^x}{3+3^x} > \frac{4}{5} \Leftrightarrow 5(3-3^x) > 4(3+3^x)$$

$$\Leftrightarrow 15 - 5\cdot 3^x > 12 + 4\cdot 3^x \Leftrightarrow 3 > 9\cdot 3^x \Leftrightarrow \frac{1}{3} > 3^x \Leftrightarrow 3^{-1} > 3^x \Leftrightarrow x < -1$$

Κι επειδή $D_f = (-3, 3)$, τελικά $x \in (-3, -1)$

10ο

Θέμα Β

Β1. Για να έχει παράγοντα το $x - 1$, πρέπει:

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow 2\cdot 1^3 + (\kappa+1)\cdot 1^2 - 4\kappa\cdot 1 + 3 = 0 \Leftrightarrow 2 + \kappa + 1 - 4\kappa + 3 = 0 \Leftrightarrow 3\kappa = 6 \Leftrightarrow \kappa = 2$$

Β2. i. Για κ=2, το P(x) γίνεται: $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$$

Εφαρμόζουμε Horner για x=1:

2	3	−8	3	1

	2	5	–3	
2	5	–3	0	

Άρα : $2x^3+3x^2-8x+3=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+5x-3)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

ή $2x^2+5x-3=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\dfrac{-5\pm 7}{4}\begin{cases} x_1=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2} \\ x_2=-\dfrac{12}{4}=-3 \end{cases}$ Άρα x=1, ή $\dfrac{1}{2}$, ή -3

ii. Πρέπει: $P(x)>0 \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-8x+3>0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+5x-3)>0$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου.

Τελικά, $P(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(-3,\dfrac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$

Θέμα Γ

Γ1. Πρέπει $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ και $x-3>0 \Leftrightarrow x>3$. Τελικά, $D_f=(3,+\infty)$.

Γ2. Πρέπει:

$$f(5)=-\log 5 \Leftrightarrow \log(5-1)-\log(5-3)-1=-\log 5 \Leftrightarrow \log 4-\log 2-1=-\log 5$$

$$\Leftrightarrow \log\left(\frac{4}{2}\right)-\log 10=-\log 5 \Leftrightarrow \log 2-\log 10=-\log 5 \Leftrightarrow \log\left(\frac{2}{10}\right)=-\log 5$$

$$\Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{5}\right)=-\log 5 \Leftrightarrow \log 5^{-1}=-\log 5 \Leftrightarrow -\log 5=-\log 5 \text{ ισχύει.}$$

Γ3. $f(x)=0 \Leftrightarrow \log(x-1)-\log(x-3)-1=0 \Leftrightarrow \log\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right)=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log\left(\frac{x-1}{x-3}\right)=\log 10 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-3}=10 \Leftrightarrow x-1=10x-30 \Leftrightarrow 9x=29 \Leftrightarrow x=\frac{29}{9}$$

Γ4. $f(x)<-\log 5 \Leftrightarrow \log(x-1)-\log(x-3)-1<-\log 5 \Leftrightarrow$

$$\log\left(\frac{x-1}{x-3}\right)<\log 10-\log 5 \Leftrightarrow \log\left(\frac{x-1}{x-3}\right)<\log\left(\frac{10}{5}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log\left(\frac{x-1}{x-3}\right)<\log 2 \overset{\uparrow}{\Leftrightarrow} \frac{x-1}{x-3}<2 \overset{x>3}{\Leftrightarrow} x-1<2x-6 \Leftrightarrow x>5$$

Θέμα Δ

Δ1. i. Για να έχει μοναδική λύση, πρέπει D≠0.

$$D=\begin{vmatrix}\eta\mu\theta+1 & 2\\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\eta\mu\theta+1 & 2\\ \eta\mu\theta & 3\end{vmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D=3(\eta\mu\theta+1)-2\eta\mu\theta=3\eta\mu\theta+3-2\eta\mu\theta\Leftrightarrow D=\eta\mu\theta+3\neq 0\ \left(-1\leq\eta\mu\theta\leq 1\right)$$

ii. $D_x=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=6-2=4\quad D_y=\begin{vmatrix}\eta\mu\theta+1 & 2\\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) & 1\end{vmatrix}=\eta\mu\theta+1-2\eta\mu\theta=-\eta\mu\theta+1$

$$\text{Άρα}\quad x_0=\frac{D_x}{D}=\frac{4}{\eta\mu\theta+3}\quad\text{και}\quad y_0=\frac{D_y}{D}=\frac{1-\eta\mu\theta}{\eta\mu\theta+3}$$

Δ2. $x_0-y_0=1\Leftrightarrow\frac{4}{\eta\mu\theta+3}-\frac{1-\eta\mu\theta}{\eta\mu\theta+3}=1\Leftrightarrow\frac{4-1\eta\mu\theta}{\eta\mu\theta+3}=1\Leftrightarrow\frac{3+\eta\mu\theta}{\eta\mu\theta+3}=1\Leftrightarrow 1=1$ ισχύει.

Δ3. $2^{x_0}+2^{y_0}=3\cdot 2^{\frac{1}{7}}\overset{x_0=1+y_0}{\Leftrightarrow}2^{1+y_0}+2^{y_0}=3\cdot 2^{\frac{1}{7}}\Leftrightarrow 2^{y_0}\cdot 2+2^{y_0}=3\cdot 2^{\frac{1}{7}}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^{y_0}(2+1)=3\cdot 2^{\frac{1}{7}}\Leftrightarrow 3\cdot 2^{y_0}=3\cdot 2^{\frac{1}{7}}\Leftrightarrow 2^{y_0}=2^{\frac{1}{7}}\Leftrightarrow y_0=\frac{1}{7}\quad\text{και}\quad x_0=1+\frac{1}{7}\Leftrightarrow x_0=\frac{8}{7}$$

Επομένως: $x_0=\frac{4}{\eta\mu\theta+3}\Leftrightarrow\frac{8}{7}=\frac{4}{\eta\mu\theta+3}\Leftrightarrow 8\eta\mu\theta+24=28\Leftrightarrow 8\eta\mu\theta=4\Leftrightarrow\eta\mu\theta=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\eta\mu\theta=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\theta=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\ \text{ ή }\ \theta=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6},\ \kappa\in Z$$

Όμως

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0<2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{6}<2\kappa\pi<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{6}<2\kappa\pi<\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{12}<\kappa<\frac{1}{6}\Leftrightarrow\kappa=0.\ \text{Άρα}\ \theta=\frac{\pi}{6}$$

και $0<2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow-\frac{5\pi}{6}<2\kappa\pi<-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow-\frac{5}{12}<\kappa<-\frac{1}{6}$ αδύνατο διότι $\kappa\in Z$.

Τελικά $\theta=\frac{\pi}{6}$.

11ο

Θέμα Β

Β1. Για να έχει ρίζα το 1 πρέπει: $P(1)=0\Leftrightarrow 1^5+1^4+\kappa\cdot 1+\lambda=0\Leftrightarrow\kappa+\lambda=-2$

Και για να έχει ρίζα το -1 πρέπει:

$$P(-1)=0\Leftrightarrow(-1)^5+(-1)^4+\kappa\cdot(-1)+\lambda=0\Leftrightarrow-1+1-\kappa+\lambda=0\Leftrightarrow\kappa=\lambda$$

Λύνουμε το σύστημα: $\left.\begin{matrix}\kappa+\lambda=-2\\ \kappa=\lambda\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}2\kappa=-2\\ \kappa=\lambda\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \kappa=-1,\ \lambda=-1$

B2. Για $\kappa=-1$ και $\lambda=-1$ το $P(x)$ γίνεται: $P(x)=x^5+x^4-x-1$

$$P(x)=x^4(x+1)-(x+1)=(x+1)(x^4-1)=(x+1)(x^2-1)(x^2+1)=$$
$$=(x+1)(x+1)(x-1)(x^2+1)=(x+1)^2(x-1)(x^2+1)$$

B3. Έχουμε $\dfrac{P(x)\cdot(3-2x)}{x^2-1}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2(x-1)(x^2+1)(3-2x)}{(x-1)(x+1)}\geq 0$

$$\Leftrightarrow Q(x)=(x+1)^2(x-1)(x^2+1)(3-2x)(x-1)(x+1)\geq 0 \text{ με } x\neq 1 \text{ και } x\neq -1$$

Έχουμε $x=-1$, x=1, $x=\dfrac{3}{2}$, x=1, $x=-1$ $Q(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-1,1)\cup\left(1,\dfrac{3}{2}\right]$

Θέμα Γ

Γ1. $2014^{3x-6}=1 \Leftrightarrow 2014^{3x-6}=2014^0 \Leftrightarrow 3x-6=0 \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2$

Γ2. i. $f(x)=4\sigma\upsilon\nu\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)+2$

Ισχύει:

$$-1\leq \sigma\upsilon\nu\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\leq 1 \overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow} -4\leq 4\sigma\upsilon\nu\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\leq 4 \overset{+2}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow -2\leq 4\sigma\upsilon\nu\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+2\leq 6 \Leftrightarrow -2\leq f(x)\leq 6$$

Δηλαδή, ελάχιστη τιμή το -2 και μέγιστη το 6.

ii. $f(x)=0 \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)+2=0 \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 3x=2\kappa\pi+\frac{11\pi}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{11\pi}{36},\ \kappa\in Z$$

$$\text{ή } 3x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi-\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 3x=2\kappa\pi-\frac{5\pi}{12} \Leftrightarrow x=\frac{2\kappa\pi}{3}-\frac{5\pi}{36},\ \kappa\in Z$$

Γ3. Έχουμε

i. $2^{\sqrt{x^2+3}}\geq 4^{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x^2+3}}\geq 2^{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3}\geq 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2+3\geq 4x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-4x+3\geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=1$ $\quad x\in(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$

i. Το ρ=2. Όμως $\rho\notin(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$.

Άρα το 2 δεν είναι λύση ανίσωσης.

ii. Η ανίσωση $2^{\sqrt{x^2+3}} \geq 4^{\sqrt{x}}$, για x=2014 γίνεται: $2^{\sqrt{2014^2+3}} \geq 4^{\sqrt{2014}}$.

Άρα το $2^{\sqrt{2014^2+3}}$ είναι μεγαλύτερο του $4^{\sqrt{2014}}$ $(2014 \in [3,+\infty))$

Θέμα Δ

Δ1. Πρέπει $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$. Άρα $D_f=(2,+\infty)$

Δ2. Έχουμε

$$f(x)=3\log 2-2\log 3 \Leftrightarrow \log(x-2)=\log 2^3-\log 3^2 \Leftrightarrow \log(x-2)=\log 8-\log 9$$

$$\Leftrightarrow \log(x-2)=\log\left(\frac{8}{9}\right) \Leftrightarrow x-2=\frac{8}{9} \Leftrightarrow x=\frac{8}{9}+2 \Leftrightarrow x=\frac{26}{9}$$

Δ3. $f^2(x)+f(x)\geq 2 \Leftrightarrow f^2(x)+f(x)-2\geq 0$. Θέτουμε f(x)=ω κι έχουμε $\omega^2+\omega-2\geq 0$

Άρα $\omega^2+\omega-2=0 \Leftrightarrow (\omega+2)(\omega-1)=0 \Leftrightarrow \omega=-2$ ή ω=1

Επομένως: $f(x)=-2 \Leftrightarrow \log(x-2)=-2 \Leftrightarrow \log(x-2)=-2\log 10$

$$\Leftrightarrow \log(x-2)=\log 10^{-2} \Leftrightarrow x-2=\frac{1}{100} \Leftrightarrow x=\frac{1}{100}+2 \Leftrightarrow x=\frac{201}{100} \Leftrightarrow x=2,01$$

και $\log(x-2)=1 \Leftrightarrow \log(x-2)=\log 10 \Leftrightarrow x-2=10 \Leftrightarrow x=12$

Τελικά $f^2(x)+f(x)-2\geq 0 \Leftrightarrow x\in(2,\ 2{,}01]\cup[12,+\infty)$

Δ4. $\log(f(x))\leq 0 \Leftrightarrow \log(\log(x-2))\leq 0 \Leftrightarrow \log(\log(x-2))\leq \log 1 \overset{\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \log(x-2)\leq 1 \Leftrightarrow \log(x-2)\leq \log 10 \overset{\uparrow}{\Leftrightarrow} x-2\leq 10 \Leftrightarrow x\leq 12$. Τελικά $x\in(2,12]$

12ο

Θέμα Β

Β1. Κάνουμε τη διαίρεση:

$x^3-3x^2+\alpha x+2$	$x-2$
$-x^3+2x^2$	$x^2-x+\alpha-2$
$-x^2+\alpha x+2$ $+x^2-2x$	
$x(\alpha-2)+2$ $-x(\alpha-2)+2\alpha-4$	
$2\alpha-2$	

Άρα $\pi(x)=x^2-x+\alpha-2$ και $\upsilon=2\alpha-2$. Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$$x^3-3x^2+\alpha x+2=(x-2)(x^2-x+\alpha-2)+2\alpha-2$$

Β2. **i.** Για να είναι το 2 ρίζα του P(x) πρέπει:

$$P(2)=0\Leftrightarrow 2^3-3\cdot 2^2+\alpha\cdot 2+2=0\Leftrightarrow 8-12+2\alpha+2=0\Leftrightarrow 2\alpha=2\Leftrightarrow \alpha=1$$

ii. Για α=1 το P(x) γίνεται: $P(x)=x^3-3x^2+x+2$ οπότε

$$P(x)>x^2-4\Leftrightarrow x^3-3x^2+x+2>x^2-4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2+x+2-x^2+4>0\Leftrightarrow x^3-4x^2+x+6>0$$

Εφαρμόζουμε Horner για $x=-1$:

1	−4	1	6	−1
	−1	5	−6	
1	−5	6	0	

Άρα:

$$x^3-4x^2+x+6=0\Leftrightarrow (x+1)(x^2-5x+6)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x-3)=0\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=3$$

Τελικά $x\in(-1,2)\cup(3,+\infty)$

Θέμα Γ

Γ1. Εφόσον το υπόλοιπο της διαίρεσης του

$P(x)=x^3-5\eta\mu\theta\cdot x^2-2x+2\sigma\upsilon\nu^2\theta$, με το $(x-1)$ είναι -2, ισχύει:

$$P(1)=-2\Leftrightarrow 1^3-5\eta\mu\theta\cdot 1^2-2\cdot 1+2\sigma\upsilon\nu^2\theta=-2\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta-5\eta\mu\theta+1=0$$
$$\Leftrightarrow 2(1-\eta\mu^2\theta)-5\eta\mu\theta+1=0\Leftrightarrow 2-2\eta\mu^2\theta-5\eta\mu\theta+1=0\Leftrightarrow 2\eta\mu^2\theta+5\eta\mu\theta-3=0 \quad (1)$$

Γ2. Θέτουμε ημθ=ω και η (1) γίνεται: $2\omega^2+5\omega-3=0$, $\omega_{1,2}=\dfrac{-5\pm 7}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}\omega_1=\dfrac{1}{2}\\ \omega_2=-3\end{cases}$

Άρα $\eta\mu\theta=\dfrac{1}{2}$ ή $\eta\mu\theta=-3$ αδύνατο $(-1\le\eta\mu\theta\le 1)$

$$\eta\mu\theta=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu\theta=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \theta=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \text{ ή } \theta=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6},\ \kappa\in Z$$

Γ3. Από τη σχέση:

$$\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta=1-\frac{1}{4}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta=\frac{3}{4}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Όμως, επειδή $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ τότε $\sigma\upsilon\nu\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\varepsilon\varphi\theta=\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{-2}{2\sqrt{3}}=\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\theta=\frac{1}{\varepsilon\varphi\theta}=-\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{-3\sqrt{3}}{3}=-\sqrt{3}$$

Θέμα Δ

Δ1. $f(1)=\ln(e^2+\alpha e-2)$

Άρα $\ln(e^2+e-2)=\ln(e^2+\alpha e-2)\Leftrightarrow e^2+e-2=e^2+\alpha e-2\Leftrightarrow e=\alpha e\Leftrightarrow \alpha=1$

Δ2. Για α=1 η f(x) γίνεται: $f(x)=\ln(e^{2x}+e^x-2)$.

Πρέπει: $e^{2x}+e^x-2>0$. Θέτω $e^x=\omega$ κι έχουμε $\omega^2+\omega-2>0$

Άρα $\omega^2+\omega-2=0\Leftrightarrow(\omega+2)(\omega-1)=0\Leftrightarrow\omega=-2$ ή $\omega=1$

Δηλαδή $e^x=-2$ αδύνατο ή $e^x=1\Leftrightarrow e^x=e^0\Leftrightarrow x=0$. Τελικά $D_f=(0,+\infty)$

Δ3. $f(\ln 2)=\ln(e^{2\ln 2}+e^{\ln 2}-2)=\ln(e^{\ln 4}+2-2)=\ln(4+0)=\ln 4$

$$f(\ln 3)=\ln(e^{2\ln 3}+e^{\ln 3}-2)=\ln(e^{\ln 3^2}+3-2)=\ln(9+1)=\ln 10$$

Δ4. Έχουμε

$$f(x)-f(\ln 2)=f(\ln 3)\Leftrightarrow\ln\left(e^{2x}+e^x-2\right)-\ln 4=\ln 10\Leftrightarrow\ln\left(e^{2x}+e^x-2\right)=\ln 4+\ln 10$$
$$\Leftrightarrow\ln\left(e^{2x}+e^x-2\right)=\ln 40\Leftrightarrow e^{2x}+e^x-2=40\Leftrightarrow e^{2x}+e^x-42=0$$

Θέτουμε $e^x=\omega$ κι έχουμε: $\omega^2+\omega-42=0\Leftrightarrow(\omega+7)(\omega-6)=0\Leftrightarrow\omega=-7$ ή ω=6.

Άρα $e^x=-7$ αδύνατη ή $e^x=6\Leftrightarrow\ln e^x=\ln 6\Leftrightarrow x=\ln 6$

13ο

Θέμα Β

Β1. Έχουμε: $-9=6(-1)^3-\lambda(-1)^2-4(-1)+4\Leftrightarrow 9=-6-\lambda+4+4\Leftrightarrow\lambda=11$

Β2. $P(x)=6x^3-11x^2-4x+4$. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του P(x) είναι $\pm1,\ \pm2,\ \pm4$.

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner:

6	−11	−4	4	2
	12	2	−4	
6	1	−2	0	

Άρα $P(x)=0\Leftrightarrow(6x^2+x-2)(x-2)=0$

$$6x^2+x-2=0\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm7}{12}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}\\ x_2=-\dfrac{8}{12}=-\dfrac{2}{3}\end{cases} \qquad x-2=0\Leftrightarrow x=2$$

Για τον y΄y έχουμε P(0)=4. Άρα η συνάρτηση τέμνει τον y΄y στο σημείο K(0,4).

Β3. Με τη βοήθεια του πίνακα γινομένου βρίσκουμε ότι η C_f του πολυωνύμου βρίσκεται πάνω από τον x΄x για $x \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$

Θέμα Γ

Γ1. Πρέπει $x^2 - 2x + 3 > 0$ $\quad \Delta = 4 - 12 = -8 < 0$. Άρα $x^2 - 2x + 3 > 0,\ x \in R$

Επομένως το π.ο. της f είναι A=R.

Γ2. $f(e^x) > \ln(e^x + 1) \Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) > \ln(e^x + 1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x + 3 > e^x + 1 \Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$$

Θέτουμε $e^x = \omega$ και η ανίσωση γίνεται $\omega^2 - 3\omega + 2 > 0$

$$\Delta = 9 - 8 = 1 \quad \text{με} \quad \omega_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 = 2 \\ \omega_2 = 1 \end{cases}$$

Άρα $\omega^2 - 3\omega + 2 > 0 \Leftrightarrow \omega < 1$ ή $\omega > 2 \Leftrightarrow e^x < 1$ ή $e^x > 2 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x > \ln 2$

Γ3. $f(\eta\mu x) = \ln\left(\sigma\upsilon\nu^2 x + \frac{7}{2}\right) \Leftrightarrow \ln(\eta\mu^2 x - 2\eta\mu x + 3) = \ln\left(\sigma\upsilon\nu^2 x + \frac{7}{2}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2 x - 2\eta\mu x + 3 = 1 - \eta\mu^2 x + \frac{7}{2} \Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x - 2\eta\mu x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow 4\eta\mu^2 x - 4\eta\mu x - 3 = 0$$

Θέτουμε ημx=ω $\quad$ Δ=16+48=64 $\quad \omega = \frac{4 \pm 8}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12}{8} & \text{απορ.} \\ -\frac{1}{2} & \end{cases}$

Επομένως $\eta\mu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ οπότε $\begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases}$ $\kappa \in Z$

Θέμα Δ

Δ1. Για την f ισχύει $x \in A$, $-x \in A$ διότι το π.ο. της f είναι A=R.

Επίσης $f(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x)$ άρα f άρτια.

Δ2. Το π.ο. της g είναι το R. Για κάθε $x_1, x_2 \in R$ έχουμε: $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ (1)

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2} \Rightarrow -e^{-x_1} < -e^{-x_2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε $e^{x_1} - e^{-x_1} < e^{x_2} - e^{-x_2}$ άρα

$$\frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} < \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2} \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$. Άρα η g γνησίως αύξουσα.

Δ3. $g(\ln 2)=\dfrac{e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}}{2}=\dfrac{2-e^{\ln 2^{-1}}}{2}=\dfrac{2-\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{\frac{3}{2}}{2}=\dfrac{3}{4}$

Επομένως η ανίσωση γίνεται $g(x)\geq\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow g(x)\geq g(\ln 2)\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} x\geq\ln 2$.

Δ4. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow e^x+e^{-x}=2\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow e^x+\dfrac{1}{e^x}=2\sigma\upsilon\nu x$

Όμως $e^x+\dfrac{1}{e^x}\geq 2$ και $2\sigma\upsilon\nu x\leq 2$. Επομένως η ισότητα ισχύει μόνο αν για την ίδια τιμή του x $e^x+\dfrac{1}{e^x}=2$ (1) και 2συνx=2 (2). Όμως $e^x+\dfrac{1}{e^x}=2$ αν και μόνο αν $e^x=1\Leftrightarrow x=0$, για την οποία ισχύει και η (2). Επομένως η ρίζα της εξίσωσης είναι x=0.

14ο

Θέμα Β

B1. Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το $x+1$ είναι ίσο με 12, άρα:

- $P(1)=0\Leftrightarrow 1+2+\alpha+2\beta=0\Leftrightarrow\alpha+2\beta=-3\quad(1)$ και
- $P(-1)=12\Leftrightarrow -1+2-\alpha+2\beta=12\Leftrightarrow -\alpha+2\beta=11\quad(2)$.

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις (1) και (2), οπότε προκύπτει $\alpha=-7$ και $\beta=2$.

B2. i. Για $\alpha=-7$ και $\beta=2$ είναι: $P(x)>0\Leftrightarrow x^3+2x^2-7x+4>0$.

Με σχήμα Horner έχουμε:

1	2	–7	4	1
	1	3	–4	
1	3	–4	0	

Άρα είναι $x^3+2x^2-7x+4>0\Leftrightarrow(x-1)(x^2+3x-4)>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-1)^2(x+4)>0\Leftrightarrow x\in(-4,1)\cup(1,+\infty)$.

ii. Πρέπει:

- $P(x)\geq 0\overset{i.}{\Leftrightarrow}x\in[-4,+\infty)$ και
- $(2-x)|x-1|\geq 0\Leftrightarrow x\leq 2$

Είναι $\sqrt{P(x)}=(2-x)|x-1|\Leftrightarrow P(x)=(2-x)^2|x-1|^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-1)^2(x+4)=(4-4x+x^2)(x-1)^2\Leftrightarrow(x-1)^2(-x^2+5x)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1$ ή $x=0$ ή $x=5$.

Αλλά επειδή $x \in [-4,2]$ οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x=1$ ή $x=0$.

Θέμα Γ

Γ1. $5\sigma\upsilon\nu 2\alpha - 14\sigma\upsilon\nu\alpha - 7 = 0 \Leftrightarrow 5\left(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1\right) - 14\sigma\upsilon\nu\alpha - 7 = 0$

$$\Leftrightarrow 10\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 14\sigma\upsilon\nu\alpha - 12 = 0 \Leftrightarrow 5\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 7\sigma\upsilon\nu\alpha - 6 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4\cdot 5(-6) = 49 + 120 = 169 \qquad \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{7\pm 13}{10}\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\alpha = 2 \text{ απορ.}\\ \sigma\upsilon\nu\alpha = -\dfrac{6}{10} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = -\dfrac{3}{5}\end{cases}$$

Γ2. Από την ταυτότητα $\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha = \frac{16}{25} \overset{\eta\mu\alpha<0}{\Leftrightarrow} \eta\mu\alpha = -\frac{4}{5}$

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = 2\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{9}{25} - 1 = \frac{18}{25} - 1 = -\frac{7}{25} \qquad \varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = -\frac{24}{7}$$

Θέμα Δ

Δ1. Έχουμε $f(2) = \log\frac{6}{5} \Leftrightarrow \log(16+\alpha) - 1 \Leftrightarrow \log\frac{6}{5} \Leftrightarrow \frac{16+\alpha}{10} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow 16+\alpha = 12 \Leftrightarrow \alpha = -4$

Δ2. Για την f: πρέπει $2^{x-1} + 1 > 0$ ισχύει $x \in R$ άρα $A_f = R$.

Για την g: πρέπει $4^x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Δ3. $f(0) - f(-1) = \log(2^{-1}+1) - \log(2^{-2}+1) = \log\left(\frac{1}{2}+1\right) - \log\left(\frac{1}{4}+1\right)$

$$= \log\frac{3}{2} - \log\frac{5}{4} = \log\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}} = \log\frac{6}{5} = g(2)$$

Δ4. Για x>1 έχουμε: $\log(4^x - 4) - 1 = \log(2^{x-1}+1)$

$$\log(4^x - 4) - 1 = \log(2^{x-1}+1) \Leftrightarrow (2^x)^2 - 4 = 10\cdot\frac{2^x}{2} + 10 \overset{2^x=\omega>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 - 4 = 5\omega + 10 \Leftrightarrow \omega^2 - 5\omega - 14 = 0 \Leftrightarrow \omega = 7 \text{ ή } \omega = -2 \text{ απορ.}$$

Άρα $2^x = 7 \Leftrightarrow \ln 2^x = \ln 7 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 7}{\ln 2}$

15ο

Θέμα Β

Β1. Έχουμε

$x^4-5x^2+\alpha x+\beta$	x^2-1
$-x^4+x^2$	x^2-4
$-4x^2+\alpha x+\beta$ $4x^2 \quad\quad -4$	
$\alpha x+\beta-4$	

Άρα $\pi(x)=x^2-4$ και $\upsilon(x)=\alpha x+\beta-4$

Β2. Αν $\upsilon(x)=2x-5$ τότε $\left.\begin{array}{l}\alpha=2\\ \beta-4=-5\end{array}\right\}\alpha=2,\ \beta=-1$

Β3. $P(x)=-2x^2-1 \Leftrightarrow x^4-5x^2+2x-1=-2x^2-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4-3x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(x^3-3x+2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x^3-3x+2=0$

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner:

1	0	–3	2	1
	1	1	–2	
1	1	–2	0	

$(x-1)(x^2+x-2)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ ή $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm 3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases}1\\-2\end{cases}$

Επομένως οι ρίζες της εξίσωσης είναι x=0, x=1 (διπλή), $x=-2$

Θέμα Γ

Γ1. $\max f=|\alpha+1|=\alpha+1$. Άρα $\alpha+1=3 \Leftrightarrow \alpha=2$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\pi\beta}=\frac{2}{\beta} \qquad \frac{2}{\beta}=4 \Leftrightarrow \beta=\frac{1}{2}$$

Γ2. $f(x)=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 3\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi x}{2}=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi x}{2}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi x}{2}=\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi x}{2}=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=4\kappa\pm\frac{2}{3},\ \kappa\in Z$$

Θέμα Δ

Δ1. Πρέπει

$e^{2x}-\dfrac{1}{2}e^x>0 \Leftrightarrow 2e^{2x}>e^x \Leftrightarrow \ln 2+\ln e^{2x}>\ln e^x \Leftrightarrow \ln 2+2x>x \Leftrightarrow x>-\ln 2 \Leftrightarrow x>\ln\dfrac{1}{2}$

Δ2. $x+\ln\left(e^x-\frac{1}{2}\right)=\ln e^x+\ln\left(e^x-\frac{1}{2}\right)=\ln\left[e^x\left(e^x-\frac{1}{2}\right)\right]=\ln\left(e^{2x}-\frac{1}{2}e^x\right)=f(x)$

Δ3. $f(1)=\ln\left(e^2-\frac{1}{2}e\right)=\ln\left[e\left(e-\frac{1}{2}\right)\right]=\ln e+\ln\left(e-\frac{1}{2}\right)=1+\ln\left(e-\frac{1}{2}\right)$

$f(2)=2+\ln\left(e^2-\frac{1}{2}\right)$

$$f(1)<f(2)\Leftrightarrow 1+\ln\left(e-\frac{1}{2}\right)<2+\ln\left(e^2-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow \ln\frac{2e-1}{2}-\ln\frac{2e^2-1}{2}<1$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{2e-1}{2e^2-1}<1\Leftrightarrow \frac{2e-1}{2e^2-1}<e\Leftrightarrow 2e-1<2e^3-e\Leftrightarrow 2e^3-3e+1>0$$

Με τη βοήθεια του σχ. Horner:

2	0	–3	1	1
	2	2	–1	
2	2	–1	0	

$(e-1)(2e^2+2e-1)>0$. Όμως e>1 και 2e(e+1)>1, επομένως ισχύει.

Δ4. $f(x)<x^3-2x^2+\ln\left(e^x-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow x+\ln\left(e^x-\frac{1}{2}\right)<x^3-2x^2+\ln\left(e^x-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2-x>0\Leftrightarrow x(x^3-2x-1)>0\quad x_{1,2}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$

Για να δεχτούμε τις ρίζες πρέπει: $0>\ln\frac{1}{2},\ 1+\sqrt{2}>\ln\frac{1}{2}$

$1-\sqrt{2}>\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1-\sqrt{2}>-\ln 2\Leftrightarrow 1+\ln 2>\sqrt{2}$ ισχύει, άρα είναι όλες δεκτές.

Άρα $x\in(1-\sqrt{2},0)\cup(1+\sqrt{2},+\infty)$

16ο

Θέμα Β

Β1. $f(0)=1\Leftrightarrow 1=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+\eta\mu\pi+\kappa\Leftrightarrow 1=0+0+\kappa\Leftrightarrow \kappa=1$

Άρα $f(x)=\eta\mu x+\eta\mu x+1=2\eta\mu x+1$

Β2. $-1\le\eta\mu x\le1\Leftrightarrow -2\le2\eta\mu x\le2\Leftrightarrow -1\le2\eta\mu x+1\le3\Leftrightarrow -1\le f(x)\le3$

Β3. $f(x)+f(-x)=2\eta\mu x+1+2\eta\mu(-x)+1=2\eta\mu x+1-2\eta\mu x+1=2$

B4. $2\eta\mu x+1=1+2\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-\pi$ ή $x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{2}+x$ (αδύν.) Άρα $2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$

Θέμα Γ

Γ1. $P(-2)=0\Leftrightarrow(\alpha-1)(-2)^4+\alpha(-2)^3+2+\alpha-4=0\Leftrightarrow 16\alpha-16-8\alpha+2+\alpha-4=0$

$\Leftrightarrow 9\alpha=18\Leftrightarrow\alpha=2$

Γ2. Για α=2: $P(x)=x^4+2x^3-x-2$. Με τη βοήθεια του σχ. Horner:

1	2	0	-1	-2	-2
	-2	0	0	2	
1	0	0	-1	0	

Από τον πίνακα γινομένου η f(x) είναι πάνω από τον x΄x για $x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

Γ3. $-99\in(-\infty,-2)$ άρα $P(-99)>0$ $\quad$ $-1{,}15\in(-2,1)$ άρα $P(-1{,}15)<0$

$2013\in(1,+\infty)$ άρα $P(2013)>0$ $\quad$ Άρα $P(-99)\cdot P(-1{,}15)\cdot P(2013)<0$

Γ4. Έχουμε

$x^4+2x^3+0x^2-x-2$	x^2+2x-1
$-x^4-2x^3+x^2$	x^2+1
x^2-x-2	
$-x^2-2x+1$	
$-3x-1$	

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης είναι $\pi(x)=x^2+1$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)=-3x-1$.

Θέμα Δ

Δ1. i. Για να είναι το P(x) τρίτου βαθμού πρέπει:

$4^{\lambda+\frac{3}{2}}-12\cdot 2^{\lambda-1}+1=0$ και $\lambda+1\neq 0$

$4^{\lambda+\frac{3}{2}}-12\cdot 2^{\lambda-1}+1=0\Leftrightarrow 4^{\lambda}\cdot 8-12\cdot 2^{\lambda}\cdot\frac{1}{2}+1=0$ Θέτουμε $2^{\lambda}=\omega>0$.

$$8\omega^2-6\omega+1=0\Leftrightarrow\omega=\frac{1}{2}\ \text{ή}\ \omega=\frac{1}{4}$$

Άρα $2^{\lambda}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2^{\lambda}=2^{-1}\Leftrightarrow\lambda=-1$ Απορ. $\quad$ $2^{\lambda}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 2^{\lambda}=2^{-2}\Leftrightarrow\lambda=-2$ Δεκτή.

ii. Για $\lambda=-2$: $P(x)=x^3+(1+\log\alpha)x^2-(2+\log\alpha)x-6$

$$P(\lambda)=0 \Leftrightarrow P(-2)=0 \Leftrightarrow -8+4+4\log\alpha+4+2\log\alpha-6=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6\log\alpha=6 \Leftrightarrow \log\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=10$$

Δ2. $\ln x^2+\ln|x|<P(2)$ για x≠0. Όμως $P(x)=x^3+2x^2-3x-6$

Άρα: $2\ln|x|+\ln|x|<4 \Leftrightarrow 3\ln|x|<4 \Leftrightarrow \ln|x|<\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow \ln|x|<\ln e^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow |x|<e^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow -e^{\frac{4}{3}}<x<e^{\frac{4}{3}}$ και $x\neq 0$

17ο

Θέμα Β

Β1. Έστω $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $P(0)=0 \Leftrightarrow \delta=0$.

$\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x=(x^2+1)(\kappa x+\lambda)=...=\kappa x^3+\lambda x^2+\kappa x+\lambda$ οπότε κ=α, λ=β, κ=γ, λ=0.

Όμως α+β+γ=0 οπότε τελικά α=γ=1, β=0. Επομένως $P(x)=x(x^2+1)=x^3+x$.

Β2. $(x^3+x-2)^3+(x^3+x-2)^2+x^3+x-2>0$,

Θέτουμε $x^3+x-2=\omega$, οπότε έχουμε

$$\omega^3+\omega^2+\omega>0 \Leftrightarrow \omega(\omega^2+\omega+1)>0 \Leftrightarrow \omega>0 \text{ διότι } \omega^2+\omega+1>0.$$

Δηλαδή $x^3+x-2>0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2)>0 \Leftrightarrow x>1$ διότι $x^2+x+2>0$ για κάθε x.

Θέμα Γ

Γ1. $\max f=|2| \qquad \min f=-|2|$

Γ2. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f(\pi)=-\sqrt{3}+\sqrt{3}=0$

Γ3. $2\sigma\upsilon\nu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$

$$2x+\frac{\pi}{6}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{12},\ \kappa\in Z \quad \text{ή}$$

$$2x+\frac{\pi}{6}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\ \kappa\in Z$$

Θέμα Δ

Δ1. Πρέπει $4-\alpha>0 \Leftrightarrow \alpha<4$ και $4-\alpha\neq 1 \Leftrightarrow \alpha\neq 3$

Για α=3 η συνάρτηση είναι σταθερή f(x)=1.

Δ2. i. Για $4-\alpha<1 \Leftrightarrow 4-1<\alpha \Leftrightarrow 3<\alpha$ η f είναι φθίνουσα.

ii. Για $4-\alpha>1 \Leftrightarrow 4-1>\alpha \Leftrightarrow 3>\alpha$ η f είναι αύξουσα.

Δ3. $f(x)=(4-\alpha)^x \Leftrightarrow 2=(4-\alpha)^1 \Leftrightarrow 2=4-\alpha \Leftrightarrow \alpha=2$

Δ4. i. $f(\log_2 3)+f(\log_2 5)=2^{\log_2 3}+2^{\log_2 5}=3+5=8 \quad \left(f(x)=2^x\right)$

ii. $f(x)=2^x \Leftrightarrow f(2x)=2^{2x}$

$$2^{2x}-3\cdot 2^x+2=0 \Leftrightarrow (2^x)^2-3\cdot 2^x+2=0 \Leftrightarrow \qquad \text{Θέτουμε } \omega=2^x$$

$$\Leftrightarrow \omega^2-3\omega+2=0 \Leftrightarrow \omega_1=2 \text{ ή } \omega_2=1$$

$$2^x=2 \Leftrightarrow 2^x=2^1 \Leftrightarrow x=1 \quad \text{ή} \quad 2^x=1 \Leftrightarrow 2^x=2^0 \Leftrightarrow x=0$$

18ο

Θέμα Β

Β1. Ισχύει: $P(2)=0 \Leftrightarrow 2^3+2\alpha-2=0 \Leftrightarrow 8+2\alpha-2=0 \Leftrightarrow 2\alpha=-6 \Leftrightarrow \alpha=-3$

Β2. Έχουμε

x^3+0x^2-3x-2	x^2+2x+1
$-x^3-2x^2-x$	$x-2$
$-2x^2-4x-2$ $2x^2+4x+2$	
0	

Άρα $x^3-3x-2=(x-2)(x^2+2x+1)$

Β3. $P(x)<0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+1)<0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)^2<0 \overset{(x+1)^2\geq 0}{\Leftrightarrow} x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

Άρα $x\in(-\infty,2)$

Θέμα Γ

Γ1. Θα πρέπει να ισχύει: $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2 \qquad \dfrac{x-1}{x-2}>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)>0$

Επομένως $A_f=(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

Γ2. Έχουμε

- $f(3)=\ln\left(\dfrac{3-1}{3-2}\right)=\ln 2 \qquad f(4)=\ln\left(\dfrac{4-1}{4-2}\right)=\ln\dfrac{3}{2}$

- $f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}-2}\right)=\ln\left(\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}}\right)=\ln\frac{1}{3}$

Άρα $f(3)+f(4)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{1}{3}=\ln 2+\ln 3-\ln 2+\ln 1-\ln 3=0$

Γ3. Έχουμε $f(x)+\ln(x-2)=e^{\ln 2}+\ln 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\ln(x-2)=2$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\cdot(x-2)\right)=2 \Leftrightarrow \ln(x-1)=2 \Leftrightarrow \ln(x-1)=\ln e^2 \Leftrightarrow x-1=e^2 \Leftrightarrow x=e^2+1$

Θέμα Δ

Δ1. Από το σχήμα φαίνεται ότι η μέγιστη τιμή της f είναι το 4 και αντίστοιχα η ελάχιστη είναι το -4. Την μέγιστη τιμή την παρουσιάζει για $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$ και την ελάχιστη για $x=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{4}$.

Δ2. Ισχύει: $f(x)=4\eta\mu(\omega x)$ από το προηγούμενο ερώτημα. Επίσης: $T=\frac{2\pi}{\omega}\Leftrightarrow \pi=\frac{2\pi}{\omega}\Leftrightarrow \omega=2$ Η περίοδος T είναι προφανώς ίση με π από το σχήμα.

Δ3. $f(x)=2 \Leftrightarrow 4\eta\mu(2x)=2 \Leftrightarrow \eta\mu(2x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu(2x)=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

- $2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{12}$
- $2x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{5}{12}$

$0\le x\le\pi \Leftrightarrow 0\le \kappa\pi+\frac{\pi}{12}\le\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{12}\le\kappa\pi\le\frac{11\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{1}{12}\le\kappa\le\frac{11}{12} \Leftrightarrow \kappa=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}$

$0\le x\le\pi \Leftrightarrow 0\le \kappa\pi+\frac{5\pi}{12}\le\pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{12}\le\kappa\pi\le\frac{7\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{5}{12}\le\kappa\le\frac{7}{12} \Leftrightarrow \kappa=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{12}$

Δ4. Στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ η συνάρτηση είναι αύξουσα και ισχύει:

$$\frac{\pi}{9}<\frac{\pi}{7}<\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{9}\right)<f\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

19ο

Θέμα Β

Β1. Είναι $x^2+1>0$, οπότε η $f(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $A=R$. Της είναι

$$f(x)\le 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1}\le 1 \Leftrightarrow 2x\le x^2+1 \Leftrightarrow 0\le x^2-2x+1 \Leftrightarrow (x-1)^2\ge 0,$$

που ισχύει για κάθε $x\in R$.

Β2. Είναι $f(x)\le 1$ και επειδή $f(1)=1$ η ισότητα $f(x)=1$ ισχύει όταν $x=1$

άρα $f(x)\le 1 \Leftrightarrow f(x)\le f(1)$, οπότε η $f(x)$ έχει μέγιστο το 1, όταν $x=1$.

Β3. Η συνάρτηση $f(x)$ πεδίο ορισμού το $A=R$, οπότε για κάθε $x\in R$ θα είναι και

$-x\in R$ και $f(-x)=\dfrac{2(-x)}{(-x)^2+1}=-\dfrac{2x}{x^2+1}=-f(x)$, άρα η $f(x)$ είναι περιττή.

Θέμα Γ

Γ1. Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}P(2)=0\\ P(-1)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}2^3+\alpha\cdot 2^2+\beta\cdot 2-2=0\\ (-1)^3+\alpha(-1)^2+\beta(-1)-2=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}8+4\alpha+2\beta-2=0\\ -1+\alpha-\beta-2=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}4\alpha+2\beta+6=0\\ \alpha-\beta-3=0\ \ (\cdot 2)\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}4\alpha+2\beta+6=0\\ 2\alpha-2\beta-6=0\end{array}\right\}(+)\Leftrightarrow 6\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=0.$$ Άρα $-\beta-3=0\Leftrightarrow \beta=-3$

Γ2. $x^3-3x-2=0$. Με σχήμα Horner για την τιμή 2 η εξίσωση γίνεται:

$$(x-2)(x^2+2x+1)=0\Leftrightarrow (x-2)(x+1)^2=0$$

άρα $x-2=0\Leftrightarrow x=2$ ή $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$

Γ3. $P(x)\ge 0\Leftrightarrow (x-2)(x+1)^2\ge 0$ $\quad$ $P(x)\ge 0$ για $x\in[2,+\infty)$

Θέμα Δ

Δ1. $e^{2x}-2e^x>0\Leftrightarrow e^x(e^x-2)>0\overset{e^x>0}{\Rightarrow} e^x-2>0\Leftrightarrow e^x>2\Leftrightarrow \ln e^x>\ln 2\Leftrightarrow x>\ln 2$ και

$$2e^x-3>0\Leftrightarrow 2e^x>3\Leftrightarrow e^x>\frac{3}{2}\Leftrightarrow \ln e^x>\ln\frac{3}{2}\Leftrightarrow x>\ln\frac{3}{2}$$

άρα $A_f=(\ln 2,+\infty)$ και $A_g=\left(\ln\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

Δ2. $\ln(e^{2x}-2e^x)=\ln(2e^x-3)\Leftrightarrow e^{2x}-2e^x=2e^x-3\Leftrightarrow e^{2x}-4e^x+3=0$

Θέτουμε $e^x=\omega$ $\omega^2-4\omega+3=0\Leftrightarrow \omega_1=3$ ή $\omega_2=1$

άρα $e^x=3\Leftrightarrow \ln e^x=\text{lm}3\Leftrightarrow x=\ln 3$ ή $e^x=1\Leftrightarrow x=0$

Δ3. $\ln(e^{2x}-2e^x)\le\ln(2e^x-3)\Leftrightarrow e^{2x}-2e^x\le 2e^x-3\Leftrightarrow e^{2x}-4e^x+3\le 0$

Όπως είδαμε στο Δ2 για την ισότητα x=ln3 ή x=0, άρα σύμφωνα με το πινακάκι: $x \in [0, \ln 3]$

20ο

Θέμα Β

B1. Για (x,y)=(0,0) το σύστημα γίνεται:

$$\Sigma = \begin{cases} (\lambda+1)\cdot 0 - 0 = \lambda \\ (\lambda+1)^2 \cdot 0 - 2\cdot 0 = \lambda+1 \end{cases} = \begin{cases} 0 = \lambda \\ 0 = \lambda+1 \end{cases} = \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$ το οποίο είναι αδύνατο.

Επομένως το (x,y)=(0,0) δεν είναι λύση του συστήματος.

B2. Για λ=0 έχουμε: $\Sigma = \begin{cases} x-y=0 \\ x-2y=1 \end{cases} = \begin{cases} x=y \\ x-2x=1 \end{cases} = \begin{cases} x=y \\ -x=1 \end{cases} = \begin{cases} y=-1 \\ x=-1 \end{cases}$

B3. Έχουμε: $D = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ (\lambda+1)^2 & -2 \end{vmatrix} = -2\lambda - 2 + (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 2\lambda - 2 = \lambda^2 - 1$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda+1 & -2 \end{vmatrix} = -2\lambda + \lambda + 1 = -\lambda + 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda+1 & \lambda \\ (\lambda+1)^2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 - \lambda(\lambda+1)^2 = (\lambda+1)^2(1-\lambda)$$

Αν $D = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

- Για λ=1 το σύστημα γίνεται: $\Sigma = \begin{cases} 2x-y=1 \\ 4x-2y=2 \end{cases} = \begin{cases} 2x-y=1 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

- Για $\lambda = -1$ το σύστημα γίνεται: $\Sigma = \begin{cases} 0x-y=-1 \\ 0x-2y=0 \end{cases} = \begin{cases} y=1 \\ y=0 \end{cases}$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Αν D≠0 τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1-\lambda}{\lambda^2-1} = -\frac{\lambda-1}{(\lambda-1)(\lambda+1)} = -\frac{1}{\lambda+1}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{(\lambda+1)^2(1-\lambda)}{\lambda^2-1} = -\frac{(\lambda+1)^2(\lambda-1)}{(\lambda-1)(\lambda+1)} = -(\lambda+1)$$

Θέμα Γ

Γ1. Ισχύει ότι:

$P(1) = 0 \Leftrightarrow 2\cdot 1^3 - 1^2 - \beta\cdot 1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow 2 - 1 - \beta + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = -1$ (1)

$P(2) = 9 \Leftrightarrow 2\cdot 2^3 - 2^2 - 2\beta + \alpha = 9 \Leftrightarrow 16 - 4 - 2\beta + \alpha = 9 \Leftrightarrow \alpha - 2\beta = -3$ (2)

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = -1 \\ \alpha - 2\beta = -3 \end{cases} = \begin{cases} \alpha - \beta = -1 \\ -\alpha + 2\beta = 3 \end{cases} (+) \Leftrightarrow \beta = 2 \Rightarrow \alpha - 2 = -1 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Γ2. Για α=1 και β=2 έχω: $P(x)=2x^3-x^2-2x+1$

$$P(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3-x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow 2x(x^2-1)-(x^2-1)=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(2x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1 \quad ή \quad 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Άρα $P(x)>0 \Leftrightarrow x \in \left(-1,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$

Γ3. $2συν^3x+ημ^2x-2συνx=0 \Leftrightarrow 2συν^3x+1-συν^2x-2συνx=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2συνx(συν^2x-1)-(συν^2x-1)=0 \Leftrightarrow (συν^2x-1)(2συνx-1)=0 \Leftrightarrow$$

$συν^2x-1=0 \Leftrightarrow συν^2x=\pm 1 \Leftrightarrow συνx=1 \Leftrightarrow συνx=συν0 \Leftrightarrow x=2κπ,\ κ\in Z$

$συνx=-1 \Leftrightarrow συνx=συνπ \Leftrightarrow x=2κπ\pm π,\ κ\in Z$

$2συνx-1=0 \Leftrightarrow συνx=\frac{1}{2} \Leftrightarrow συνx=συν\frac{π}{3} \Leftrightarrow x=2κπ\pm\frac{π}{3},\ κ\in Z$

Θέμα Δ

Δ1. $α>3 \Leftrightarrow \log α>\log 3 \Leftrightarrow \log α-\log 3>0 \Leftrightarrow \log\frac{α}{3}>0$

$$β>α \Leftrightarrow \log β>\log α \Leftrightarrow \log β-\log α>0 \Leftrightarrow \log\frac{β}{α}>0$$

Δ2. Έχουμε $\left.\begin{matrix} β>3 \Leftrightarrow 3β>9 \\ α>3 \Leftrightarrow α^2>9 \end{matrix}\right\}(\div) \Leftrightarrow \frac{3β}{α^2}>1$

Επομένως η $\left(\frac{3β}{α^2}\right)^x$ είναι αύξουσα αφού η βάση είναι μεγαλύτερη της μονάδας.

Δ3. $f(x)=\left(\frac{\log 30-\log 3}{\log 3000-\log 30}\right)^x=\left(\frac{\log 10}{\log 100}\right)^x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Δ4. $f(3-x)=4\sqrt{4^{1-x}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}=4\cdot(4^{1-x})^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}=4\cdot\left[(2^2)^{1-x}\right]^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^{x-3}=4\cdot\left[2^{(2-2x)}\right]^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{x-3}=4\cdot 2^{\frac{2-2x}{2}} \Leftrightarrow 2^{x-3}=2^2\cdot 2^{\frac{2-2x}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{x-3}=2^{\frac{6-2x}{2}} \Leftrightarrow x-3=\frac{6-2x}{2} \Leftrightarrow 2x-6=6-2x \Leftrightarrow 4x=12 \Leftrightarrow x=3$$

21ο

Θέμα Β

Β1. $P(2)=2^3-13\cdot 2+12=8-26+12=-6$. Άρα το $x-2$ δεν είναι παράγοντας του P(x).

Β2. Εφαρμόζουμε Horner με την τιμή 3 και προκύπτει ότι: $π(x)=x^2+3x-4$ και υ=0.

Β3. $P(x)=0 \Leftrightarrow x^3-13x+12=0 \overset{B2}{\Leftrightarrow} (x^2+3x-4)(x-3)=0 \Leftrightarrow$

$$x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \quad \text{ή} \quad x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm 5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-4 \end{cases}$$

Β4. Θα πρέπει $P(x)>0 \Leftrightarrow (x^2+3x-4)(x-3)>0$. Άρα $x\in(-4,1)\cup(3,+\infty)$

Θέμα Γ

Γ1. Έχουμε $\frac{x-2}{x}>0 \Leftrightarrow x(x-2)>0$ με x≠0. Άρα $A_f=(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

Γ2. $f(x)=\ln 3 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-2}{x}\right)=\ln 3 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x}=3 \Leftrightarrow x-2=3x \Leftrightarrow 2x=-2 \Leftrightarrow x=-1$

Γ3. $f(x)<f(-4) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-2}{x}\right)<\ln\left(\frac{6}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{x-2}{x}=\frac{6}{4} \Leftrightarrow 4x-8<6x \Leftrightarrow 2x>-8 \Leftrightarrow x>-4$

Άρα $x\in(-4,0)\cup(0,+\infty)$

Γ4. $f(6)=\ln\left(\frac{4}{6}\right)$ $\quad f(-4)=\ln\left(\frac{6}{4}\right)$ $\quad f(4)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ $\quad f(-1)=\ln 3$

$$K=f(6)+f(4)+f(-4)+f(-1)=\ln\left(\frac{4}{6}\right)+\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{6}{4}\right)+\ln 3=\ln\left(\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{4}\cdot 3\right)=\ln\left(\frac{3}{2}\right)>0$$

Επίσης $f(e)=\ln\left(\frac{e-2}{e}\right)$. Επειδή $e-2<e \Leftrightarrow \frac{e-2}{e}<1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e-2}{e}\right)<0$, άρα

$(f(e))^{2013}<0$ αφού έχουμε περιττό εκθέτη. Επομένως αφού κ>0 τότε $\kappa>(f(e))^{2013}$

Θέμα Δ

Δ1. Έχουμε $A=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu^2(\pi-\theta)-\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\cdot\eta\mu(\pi+\theta)$

$$=\eta\mu\theta\cdot(-\sigma\upsilon\nu\theta)^2-(-\eta\mu\theta)^2\cdot(-\eta\mu\theta)=\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta\cdot\eta\mu\theta=\eta\mu\theta(\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta)=\eta\mu\theta$$

$$B=1-\frac{\eta\mu^2\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}=1-\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}=1-\frac{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)(1-\sigma\upsilon\nu\theta)}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}=1-1+\sigma\upsilon\nu\theta=\sigma\upsilon\nu\theta$$

Δ2. Το σύστημα είναι: $\begin{cases} \eta\mu\theta\cdot x-\sigma\upsilon\nu\theta\cdot y=\eta\mu^3\theta-\sigma\upsilon\nu^3\theta \\ \sigma\upsilon\nu\theta\cdot x+\eta\mu\theta\cdot y=\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta \end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix} \eta\mu\theta & -\sigma\upsilon\nu\theta \\ \sigma\upsilon\nu\theta & \eta\mu\theta \end{vmatrix}=\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}ημ^3θ-συν^3θ & -συνθ\\ ημθσυν^2θ+ημ^2θσυνθ & ημθ\end{vmatrix}=$$

$$=ημθ(ημθ-συνθ)(ημ^2θ+ημθσυνθ+συν^2θ)+συνθημθσυνθ(ημθ+συνθ)=$$

$$=ημθ(ημθσυνθ)(ημθσυνθ+1)+συν^2θημθ(ημθ+συνθ)=$$

$$=(ημ^2θ-ημθσυνθ)(ημθσυνθ+1)+συν^2θημ^2θ+συν^3θημθ=$$

$$=ημ^3θσυνθ+ημ^2θ-ημ^2θσυν^2θ-ημθσυνθ+συν^2θημ^2θ+συν^3θημθ=$$

$$=ημθσυνθ(ημ^2θ+συν^2θ)+ημ^2θ-ημθσυνθ=ημθσυνθ+ημ^2θ-ημθσυνθ=ημ^2θ$$

$$D_y=\begin{vmatrix}ημθ & ημ^3θ-συν^3θ\\ συνθ & ημθσυν^2θ+ημ^2θσυνθ\end{vmatrix}=$$

$$=ημθ(ημθσυν^2θ+ημ^2θσυνθ)-συνθ(ημ^3θ-συν^3θ)=$$

$$=ημθημθσυνθ(ημθ+συνθ)-συνθ(ημθ-συνθ)(ημ^2θ+ημθσυνθ+συν^2θ)=$$

$$=ημ^2θσυνθ(ημθ+συνθ)-συνθ(ημθ-συνθ)(ημθσυνθ+1)=$$

$$=ημ^3θσυνθ+ημ^2θσυν^2θ-(ημθσυνθ-συν^2θ)(ημθσυνθ+1)=$$

$$=ημ^3θσυνθ+ημ^2θσυν^2θ-ημ^2θσυν^2θ-ημθσυνθ+συν^3θημθ+συν^2θ=$$

$$=ημθσυνθ(ημ^2θ+συν^2θ)-ημθσυνθ+συν^2θ=ημθσυνθ-ημθσυνθ+συν^2θ=συν^2θ$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση: $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{ημ^2θ}{1}=ημ^2θ$, $y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{συν^2θ}{1}=συν^2θ$

Δ3. $4^{x_0}+4^{y_0}=5\Leftrightarrow 4^{ημ^2θ}+4^{συν^2θ}=5\Leftrightarrow 4^{ημ^2θ}+4^{1-ημ^2θ}=5\Leftrightarrow 4^{ημ^2θ}+\dfrac{4}{4^{ημ^2θ}}=5$

Θέτω $4^{ημ^2θ}=ω$: $ω+\dfrac{4}{ω}=5\Leftrightarrow ω^2+4=5ω\Leftrightarrow ω^2-5ω+4=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow ω_{1,2}=\frac{5\pm3}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}ω_1=4\Leftrightarrow 4^{ημ^2θ}=4^1\Leftrightarrow ημ^2θ=1\Leftrightarrow ημθ=\pm1\\ ω_2=1\Leftrightarrow 4^{ημ^2θ}=1\Leftrightarrow 4^{ημ^2θ}=4^0\Leftrightarrow ημ^2θ=0\Leftrightarrow ημθ=0\end{cases}$$

- $ημθ=1\Leftrightarrow ημθ=ημ\dfrac{π}{2}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}θ=2κπ+\dfrac{π}{2}\\ θ=2κπ+π-\dfrac{π}{2}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow θ=2κπ+\dfrac{π}{2},\ κ\in Z\Rightarrow$

$$\Rightarrow 0\le 2κπ+\frac{π}{2}<π\Leftrightarrow -\frac{π}{2}\le 2κπ<\frac{π}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\le κ<\frac{1}{4}\Leftrightarrow κ=0\ \text{ οπότε }\ θ=\frac{π}{2}$$

- $ημθ=-1\Leftrightarrow ημθ=ημ\dfrac{3π}{2}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}θ=2κπ+\dfrac{3π}{2}\\ θ=2κπ+π-\dfrac{3π}{2}=2κπ-\dfrac{π}{2}\end{matrix}\right\}$

$$\Leftrightarrow θ=2κπ-\frac{π}{2},\ κ\in Z\Rightarrow 0\le 2κπ-\frac{π}{2}<π\Leftrightarrow \frac{π}{2}\le 2κπ<\frac{3π}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{4}\le κ<\frac{3}{4}\ \text{ άτοπο}$$

- $\eta\mu\theta = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \eta\mu 0 \Leftrightarrow \left.\begin{cases}\theta = 2\kappa\pi \\ \theta = 2\kappa\pi + \pi\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \theta = \kappa\pi + \pi,\ \kappa \in Z$

$$\Rightarrow 0 \le \kappa\pi + \pi < \pi \Leftrightarrow -\pi \le \kappa\pi < 0 \Leftrightarrow -1 \le \kappa < 0 \Leftrightarrow \kappa = -1 \text{ οπότε } \theta = 0$$

22ο

Θέμα Β

Β1. $\begin{cases}2x = \lambda y + 1 \\ \lambda x - 8y = \lambda - 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x - \lambda y = 1 \\ \lambda x - 8y = \lambda - 2\end{cases}$. $D = \begin{vmatrix}2 & -\lambda \\ \lambda & -8\end{vmatrix} = -16 + \lambda^2 = \lambda^2 - 16$

$D_x = \begin{vmatrix}1 & -\lambda \\ \lambda - 2 & -8\end{vmatrix} = -8 + \lambda^2 - 2\lambda = \lambda^2 - 2\lambda - 8$ $\quad D_y = \begin{vmatrix}2 & 1 \\ \lambda & \lambda - 2\end{vmatrix} = 2\lambda - 4 - \lambda = \lambda - 4$

Β2. Έχουμε

- $\lambda = 1 \Rightarrow D = 1^2 - 16 = -15 \neq 0$, επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση.
- $\lambda = 4 \Rightarrow D = 4^2 - 16 = 0$ και το σύστημα γίνεται:

$$\Sigma = \begin{cases}2x - 4y = 1 \\ 4x - 8y = 2\end{cases} = \begin{cases}4x - 8y = 2 \\ 4x - 8y = 2\end{cases}$$

Επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και είναι αόριστο.

- $\lambda = -4 \Rightarrow D = (-4)^2 - 16 = 0$ και το σύστημα γίνεται:

$$\Sigma = \begin{cases}2x + 4y = 1 \\ -4x - 8y = -6\end{cases} = \begin{cases}4x + 8y = 2 \\ 4x + 8y = 6\end{cases}$$

Επομένως το σύστημα δεν έχει λύση και είναι αδύνατο.

Β3. Το κοινό σημείο των (ε_1) και (ε_2) είναι η λύση του συστήματος: $\begin{cases}2x - 2y = 1 \\ 2x - 8y = 0\end{cases}$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα αυτό προκύπτει απ' το δοσμένο για λ=2 οπότε:

$$D = 2^2 - 16 = -12,\quad D_x = 2^2 - 2\cdot 2 - 8 = -8,\quad D_y = 2 - 4 = -2.$$

Άρα: $\left.\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{D} = \frac{-8}{-12} = \frac{2}{3} \\ y &= \frac{D_y}{D} = \frac{-2}{-12} = \frac{1}{6}\end{aligned}\right\}$ Επομένως το κοινό σημείο των ευθειών είναι το: $A\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$

Θέμα Γ

Γ1. $f(1) = 1^3 + \alpha\cdot 1^2 - \beta\cdot 1 + 2 = 1 - \alpha - \beta + 2 = -\alpha - \beta + 3$

$$f(2) = 2^3 - \alpha\cdot 2^2 - \beta\cdot 2 + 2 = 8 - 4\alpha - 2\beta + 2 = -4\alpha - 2\beta + 10$$

Γ2. Πρέπει:

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f(2)=0 \end{cases} = \begin{cases} -\alpha-\beta+3=0 \\ -4\alpha-2\beta+10=0 \end{cases} = \begin{cases} \alpha+\beta=3 \\ 4\alpha+2\beta=10 \end{cases} = \begin{cases} \beta=3-\alpha \\ 4\alpha+2(3-\alpha)=10 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \beta=3-\alpha \\ 4\alpha+6-2\alpha=10 \end{cases} = \begin{cases} \beta=3-\alpha \\ 2\alpha=4 \end{cases} = \begin{cases} \beta=1 \\ \alpha=2 \end{cases}$$

Γ3. Για α=2 και β=1 η f γίνεται: $f(x)=x^3-2x^2-x+2$. Επίσης πρέπει να ισχύει f(x)=0. Εκτελούμε σχήμα Horner με την τιμή 1 και προκύπτει ότι:

$$x^3-2x^2-x+2=0 \Leftrightarrow (x^2-x-2)(x-1)=0.$$

Εκτελούμε ξανά σχήμα Horner του x^2-x-2 με την τιμή 2 και έχουμε:

$$(x^2-x-2)(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-1)=0.$$

Επομένως: $x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow A(1,0)$ $\quad x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow B(2,0)$

Είναι τα σημεία τομής της f με τον xx΄.

Θέμα Δ

Δ1. Θα πρέπει για τη συνάρτηση f:

$$\frac{e^{2x}-e^x}{e^x+2}>0 \Leftrightarrow e^{2x}-e^x>0 \Leftrightarrow e^x(e^x-1)>0 \Leftrightarrow e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0$$

Άρα $A_f=(0,+\infty)$. Για τη συνάρτηση g θα πρέπει να ισχύει: $x^3-4x^2+5x-2>0$.
Εκτελούμε σχήμα Horner με την τιμή 1 και προκύπτει ότι:

$$(x^2-3x+2)(x-1)>0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x-1)>0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)^2>0 \Leftrightarrow x>2$$

$$(\, x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=1 \end{cases})$$ Επομένως $A_g=(2,+\infty)$

Δ2. Έχουμε

$$f(x)=\ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}-e^x}{e^x+2}\right)=\ln 2 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-e^x}{e^x+2}=2 \Leftrightarrow e^{2x}-e^x=2e^x+4 \Leftrightarrow e^{2x}-3e^x-4=0$$

Θέτουμε $e^x=\omega$:

$$\omega^2-3\omega-4=0 \Leftrightarrow \omega_{1,2}=\frac{3\pm5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1=4 \Leftrightarrow e^x=4 \Leftrightarrow e^x=e^{\ln 4} \Leftrightarrow x=\ln 4 \\ \omega_2=-1 \Leftrightarrow e^x=-1 \ \text{αδύν.} \end{cases}$$

Δ3. Έχουμε $g(x)=\ln(x^3-4x^2+5x-2)=\ln[(x-1)(x^2-3x+2)]$

$$=\ln[(x-1)(x-1)(x-2)]=\ln(x-1)+\ln(x-1)+\ln(x-2)=2\ln(x-1)+\ln(x-2)$$

23ο

Θέμα Β

Β1. Τα ζητούμενα σημεία είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^3-6=6x^2-11x \Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6=0 \quad (1)$$

Θεωρούμε $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$

Οι πιθανές ρίζες της (1) είναι οι 1, 2, 3, 6. Εύκολα προκύπτει ότι: P(1)=0, οπότε το 1 είναι μια ρίζα. Εφαρμόζουμε το σχήμα του Horner για x=1 και έχουμε:
Έτσι η εξίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$(x-1)(x^2-5x+6)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ ή \\ x^2-5x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \;\; ή \;\; x=2 \;\; ή \;\; x=3$$

Β2. Ζητάμε τις πραγματικές ρίζες του x για τις οποίες

$f(x)<g(x) \Leftrightarrow x^3-6<6x^2-11x \Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6<0 \; (2) \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(2,3)$

Θέμα Γ

Γ1. Είναι $\max f = 2-1=1$ για $x\in R$ ώστε

$$ημ(2x-\pi)=1 \Leftrightarrow -ημ2x=1 \Leftrightarrow ημ2x=-1 \Leftrightarrow 2x=2κ\pi-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=κ\pi-\frac{\pi}{4},\; κ\in Z$$

και $\min f = -2-1=-3$ για $x\in R$ ώστε

$$ημ(2x-\pi)=-1 \Leftrightarrow -ημ2x=-1 \Leftrightarrow ημ2x=-1 \Leftrightarrow 2λ\pi+\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=λ\pi+\frac{\pi}{4},\; λ\in Z$$

Γ2. Ζητούνται οι λύσεις της εξίσωσης f(x)=1 στο διάστημα $[-\pi,\pi]$

Είναι $f(x)=1 \Leftrightarrow x=κ\pi-\dfrac{\pi}{4}$ (1), $κ\in Z$.

Με $x\in[-\pi,\pi] \Leftrightarrow -\pi\le x\le\pi \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -\pi\le κ\pi-\frac{\pi}{4}\le\pi \\ κ\in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{4}\le κ\le\frac{5}{4} \Rightarrow κ=0,\;1 \\ κ\in Z \end{cases}$

και για κ=0 από την (1) προκύπτει ότι $x=-\dfrac{\pi}{4}$ και για κ=1 από την (1) προκύπτει ότι

$x=\dfrac{3\pi}{4}$ οπότε τα ζητούμενα σημεία τομής είναι τα $M_1\left(-\dfrac{\pi}{4},1\right)$ και $M_2\left(\dfrac{3\pi}{4},1\right)$

Γ3. Επειδή $f(x)\le 1<2013$ για κάθε $x\in R$, η εξίσωση f(x)=2013 είναι αδύνατη στο R.

Θέμα Δ

Δ1. Για το πεδίο ορισμού της f (έστω A_f) πρέπει $x>0 \Rightarrow A_f=(0,+\infty)$ και για το πεδίο ορισμού της g (έστω A_g) πρέπει

$$e^x-1\ne 0 \Leftrightarrow e^x\ne 1 \overset{e^x \text{ είναι "1-1"}}{\Leftrightarrow} x\ne 0 \Rightarrow A_g=(-\infty,0)\cup(0.+\infty)$$

Δ2. Πρέπει $\begin{cases} g(x)>0 \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-4e^x+3}{e^x-1}>0 \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(e^x-1)(e^x-3)}{e^x-1}>0 \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x-3>0 \\ x\ne 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x > 3 \\ x \neq 0 \end{cases} \overset{\ln\uparrow \text{ γνησίως αύξουσα}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \ln e^x > \ln 3 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \ln 3 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \ln 3$$

Δ3. Είναι: $f(g(x)) = 0 \Leftrightarrow \ln(g(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 1 \\ x > \ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^x - 1} = 1 \\ x > \ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x} - 4e^x + 3 = e^x - 1 \\ x > \ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x} - 5e^x + 4 = 0 \\ x > \ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (e^x - 1)(e^x - 4) = 0 \\ x > \ln 3 \end{cases} \overset{e^x - 1 \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} e^x - 4 = 0 \\ x > \ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 4 \\ x > \ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 4 > \ln 3 \\ x > \ln 3 \end{cases}$$

Άρα η ρίζα της εξίσωσης είναι x=ln4 και το ζητούμενο έχει βρεθεί.

24ο

Θέμα Β

Β1. Θα πρέπει: $2\text{συν}x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \text{συν}x \neq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \text{συν}x \neq \text{συν}\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow x \neq 2\kappa\pi \pm \dfrac{\pi}{3},\ \kappa \in Z$

Β2. $\text{ημ}x(\text{ημ}x + 1) + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \text{ημ}\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \text{ημ}x(\text{ημ}x + 1) + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \text{ημ}x(\text{ημ}x + 1) = 0$

- $\text{ημ}x = 0 \Leftrightarrow \text{ημ}x = \text{ημ}0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \pi,\ \kappa \in Z$
- $\text{ημ}x + 1 = 0 \Leftrightarrow \text{ημ}x = -1 \Leftrightarrow \text{ημ}x = \text{ημ}\dfrac{3\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2},\ \kappa \in Z$

Θέμα Γ

Γ1. $P(1) = 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 \cdot 1^3 + \dfrac{8}{3}(1 - \alpha^2) \cdot 1^2 - 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm\dfrac{1}{2}$. Τελικά $\alpha = \dfrac{1}{2}$ (α>0)

Γ2. Έχουμε $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$, και με σχήμα Horner για την τιμή 1 παίρνουμε πηλίκο $\pi(x) = x^2 + 3x + 2$ και υπόλοιπο 0.

Γ3. $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$ ή $x = -2$

Θέμα Δ

Δ1. Έχουμε: $20 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 20 \Leftrightarrow e^x < e^{\ln 20} \Leftrightarrow x < \ln 20$

$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow e^x > e^{\ln 2} \Leftrightarrow x > \ln 2$

Με συναλήθευση προκύπτει $A_f = (\ln 2, \ln 20)$

Δ2. $f(\ln 3) = \ln 17 \Leftrightarrow \kappa \ln(20 - e^{\ln 3}) - \lambda \ln(e^{\ln 3} - 2) = \ln 17 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \kappa \ln(20 - 3) - \lambda \ln(3 - 2) = \ln 17 \Leftrightarrow \kappa \ln 17 - \lambda \ln 1 = \ln 17 \Leftrightarrow \kappa \ln 17 = \ln 17 \Leftrightarrow \kappa = 1$$

$$f(\ln 19) = -\ln 17 \Leftrightarrow \ln\left(20 - e^{\ln 19}\right) - \lambda \ln(e^{\ln 19 - 2}) = -\ln 17 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln(20-19) - \lambda \ln(19-2) = -\ln 17 \Leftrightarrow \ln 1 - \lambda \ln 17 = -\ln 17 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\lambda \ln 17 = -\ln 17 \Leftrightarrow -\lambda = -1 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Δ3. Για κ=1 και λ=1 έχουμε: $f(x) = \ln(20 - e^x) - \ln(e^x - 2)$

i. Είναι $f(x) = 2x - \ln 5 \Leftrightarrow \ln(20 - e^x) - \ln(e^x - 2) = 2x - \ln 5$

$$\Leftrightarrow \ln(20-e^x) - \ln(e^x-2) + \ln 5 = 2x \Leftrightarrow \ln\frac{5(20-e^x)}{e^x-2} = \ln e^{2x} \Leftrightarrow \frac{5(20-e^x)}{e^x-2} = e^{2x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 100 - 5e^x = e^{3x} - 2e^{2x} \Leftrightarrow e^x - 2e^{2x} + 5e^x - 100 = 0$$

Θέτουμε $e^x = \omega$: $\omega^3 - 2\omega^2 + 5\omega - 100 = 0$ και εκτελούμε Horner με την τιμή 5, άρα:

$(\omega-5)(\omega^2+3\omega+20) = 0 \Leftrightarrow \omega - 5 = 0 \Leftrightarrow \omega = 5 \Leftrightarrow e^x = 5 \Leftrightarrow e^x = e^{\ln 5} \Leftrightarrow x = \ln 5$ ή

$\omega^2 + 3\omega + 20 = 0 \Leftrightarrow \Delta = 3^2 - 4\cdot 20 = -71$ Αδύν.

ii. $f(x) < 1 \Leftrightarrow \ln(20-e^x) - \ln(e^x-2) < 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{20-e^x}{e^x-2}\right) < \ln e \Leftrightarrow$

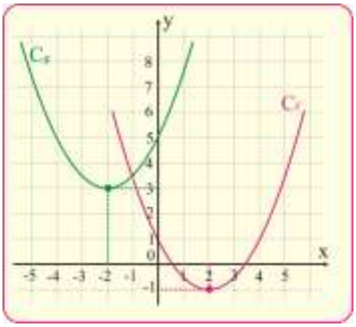
$$\Leftrightarrow \frac{20-e^x}{e^x-2} < e \Leftrightarrow 20 - e^x < e\cdot e^x - 2e \Leftrightarrow e^x\cdot e + e^x > 20 + 2e \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^x(e+1) > 20 + 2e \Leftrightarrow e^x > \frac{2(e+10)}{e+1} \Leftrightarrow \ln e^x = \ln\left(\frac{2(e+10)}{e+1}\right) \Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{2e+20)}{e+1}\right)$$

25ο

Θέμα Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,-2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2,+\infty)$. Παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για $x=-2$ την $f(-2)=3$.

Β2. Παρατηρούμε ότι η C_g προκύπτει από την C_f, αν η C_f μετατοπιστεί κατά 4 μονάδες δεξιά και 4 μονάδες κάτω.



Άρα είναι : $g(x) = f(x-4) - 4$ για κάθε $x \in R$.

Θέμα Γ

Γ1. Αφού το $x+1=x-(-1)$ είναι παράγοντα του P(x), από γνωστό θεώρημα ισχύει $P(-1)=0$. Έχουμε:

$$P(-1)=0 \Leftrightarrow 2(-1)^3+(\alpha+\beta)(-1)^2+(2\alpha+5\beta)(-1)+3=0 \Leftrightarrow 2(-1)+(\alpha+\beta)\cdot 1-2\alpha-5\beta+3=0$$
$$\Leftrightarrow -2+\alpha+\beta-2\alpha-5\beta+3=0 \Leftrightarrow -\alpha-4\beta+1=0 \Leftrightarrow \alpha+4\beta=1 \quad (1)$$

Αφού το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$ ισούται με -9, από γνωστό θεώρημα ισχύει: $P(2)=-9$. Έχουμε:

$$P(2)=-9 \Leftrightarrow 2\cdot 2^3+(\alpha+\beta)\cdot 2^2+(2\alpha+5\beta)\cdot 2+3=-9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cdot 8+4(\alpha+\beta)+2(2\alpha+5\beta)+3=-9 \Leftrightarrow 16+4\alpha+4\beta+4\alpha+10\beta+3=-9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8\alpha+14\beta=-9-16-3 \text{ (απλοποιούμε με το 2)} \Leftrightarrow 4\alpha+7\beta=-14 \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1), (2):

$$\begin{cases}\alpha+4\beta=1\\ 4\alpha+1\beta=-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1-4\beta\\ 4(1-4\beta)+7\beta=-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1-4\beta\\ 4-16\beta+7\beta=-14\end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1-4\beta\\ -9\beta=-18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1-4\cdot 2\\ \beta=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-7\\ \beta=2\end{cases}$$

Γ2. i. Για $\alpha=-7$ και β=2 το πολυώνυμο P(x) γράφεται:

$$P(x)=2x^3+(-7+2)x^2+[2(-7)+5\cdot 2]x+3 \Leftrightarrow P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$$

Είναι $P(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3-5x^2-4x+3=0$

Σύμφωνα με το θεώρημα ακέραιων ριζών οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης, είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου $\alpha_0=3$, δηλαδή οι αριθμοί $\pm 1,\ \pm 3$

Από το ερώτημα (Β1) ισχύει $P(-1)=0$, δηλαδή το -1 είναι ρίζα του P(x) οπότε εφαρμόζοντας το σχήμα Horner για $\rho=-1$ έχουμε:

2	-5	-4	3	$\rho=-1$
	-2	7	-3	
2	-7	3	0	

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$$\Delta(x)=\delta(x)\cdot\pi(x) \Leftrightarrow P(x)=(x-\rho)\cdot\pi(x) \quad \text{ή} \quad 2x^3-5x^2-4x+3=(x+1)(2x^2-7x+3)$$

Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$(x+1)(2x^2-7x+3)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \text{ ή } 2x^2-7x+3=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=\frac{1}{2} \text{ ή } x=3$$

ii.

$2x^3-5x^2-4x+3$	x^2-1
$-2x^3 \qquad +2x$	$2x-5$
$5x^2-2x+3$ $5x^2 \qquad -5$	
$-2x-2$	

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι: $2x^3-5x^2-4x+3=(x^2-1)(2x-5)+(-2x-2)$

Από το (α) ερώτημα έχουμε $P(x)=(x+1)(2x^2-7x+3)$ και από το (β) ερώτημα έχουμε ότι $\upsilon(x)=-2x-2=-2(x+1)$.

iii. Για να ορίζεται η ανίσωση $\dfrac{\upsilon(x)}{P(x)}\geq 0$ πρέπει

$$P(x)\neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2-7x+3)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \text{ και } x\neq \frac{1}{2} \text{ και } x\neq 3.$$

Τότε: $\dfrac{\upsilon(x)}{P(x)}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2(x+1)}{(x+1)(2x^2-7x+3)}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2}{2x^2-7x+3}\geq 0 \Leftrightarrow 2x^2-7x+3<0$

Το πρόσημο του $2x^2-7x+3$ φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι $\dfrac{1}{2}<x<3$

Θέμα Δ

Δ1. Πρέπει: θ>0 και

$$\ln\theta+2>0 \Leftrightarrow \ln\theta>-2 \Leftrightarrow \ln\theta>\ln e^{-2} \overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow} \theta>e^{-2}=\frac{1}{e^2} \qquad \text{Άρα } \theta>\frac{1}{e^2}$$

Δ2. $e^{\ln f(\mu+1)-\ln f(\mu)}=e^{\ln\frac{f(\mu+1)}{f(\mu)}}=\dfrac{f(\mu+1)}{f(\mu)}=\dfrac{(\ln\theta+2)^{\mu+1}}{(\ln\theta+2)^{\mu}}=\ln\theta+2 \quad (1)$

$$\theta>e \overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow} \ln\theta>\ln e \Leftrightarrow \ln\theta>1 \Leftrightarrow \ln\theta+2>3 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} e^{\ln f(\mu+1)-\ln f(\mu)}>3$$

Δ3. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το Α(2,16) άρα:

$$f(2)=16 \Leftrightarrow (\ln\theta+2)^2=16 \overset{\ln\theta+2>0}{\Leftrightarrow} \ln\theta+2=4 \Leftrightarrow \ln\theta=2 \Leftrightarrow \theta=e^2$$

Δ4. Για $\theta=e^2$, $f(x)=(\ln e^2+2)^x=4^x$

$$6f(x)-8>16^x \Leftrightarrow 6\cdot 4^x-8>16^x \Leftrightarrow (4^x)^2-6\cdot 4^x+8<0 \overset{\text{θέτω } 4^x=\omega}{\Leftrightarrow} \omega^2-6\omega+8<0$$

Οι ρίζες το τριωνύμου είναι ω=2 ή ω=4. Από τον διπλανό πίνακα συμπεραίνουμε:

$$2<\omega<4 \Leftrightarrow 2<4^x<4 \Leftrightarrow 4^{\frac{1}{2}}<4^x<4 \overset{4^x \nearrow}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}<x<1$$

26ο

Θέμα Β

B1. Γνωρίζουμε ότι: $-1 \le \sigma\upsilon\nu 2x \le 1 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} -\beta \le \beta\sigma\upsilon\nu 2x \le \beta \Leftrightarrow \alpha-\beta \le \alpha+\beta\sigma\upsilon\nu 2x \le \alpha+\beta$

άρα α+β=4 και $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-5 \Leftrightarrow \alpha+\beta\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}=-5 \Leftrightarrow \alpha-\frac{\beta}{2}=-5 \Leftrightarrow 2\alpha-\beta=-10$

Λύνουμε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=4\\ 2\alpha-\beta=-10\end{array}\right\}(+) \Rightarrow 3\alpha=-6 \Leftrightarrow \alpha=-2$ και β=6.

B2. i. Για $\alpha=-2$ και β=6: $\Delta(x)=-2+6\sigma\upsilon\nu 2x$ $\quad T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

ii. ελάχιστη τιμή $\alpha-\beta=-2-6=-8$

iii. $f(x)=-8 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=-1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi+\pi \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa \in Z$

iv. $f(x)=1 \Leftrightarrow -2+6\sigma\upsilon\nu 2x=1 \Leftrightarrow 6\sigma\upsilon\nu 2x=3 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad \kappa \in Z$$

Θέμα Γ

Γ1. Οι ορίζουσες $D,\ D_x,\ D_y$ του συστήματος είναι:

$$D=\begin{vmatrix}\alpha-1 & 3\\ 1 & \alpha+1\end{vmatrix}=(\alpha-1)(\alpha+1)-3=\alpha^2-1-3=\alpha^2-4=(\alpha-2)(\alpha+2)$$

$$D_x=\begin{vmatrix}\alpha-1 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=3(\alpha-1)-3=3\alpha-6=3(\alpha-2)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}3 & 3\\ 3 & \alpha+1\end{vmatrix}=3(\alpha+1)-9=3\alpha-6=3(\alpha-2)$$

Αν $D \ne 0 \Leftrightarrow (\alpha-2)(\alpha+2) \ne 0 \Leftrightarrow \alpha \ne 2$ και $\alpha \ne -2$, το σύστημα έχει μοναδική λύση την :

$$(x_0,y_0)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{3(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha+2)},\frac{3(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha+2)}\right)=\left(\frac{3}{(\alpha+2)},\frac{3}{(\alpha+2)}\right)$$

οπότε άμεσα προκύπτει ότι : $x_0=y_0$.

Γ2. i. Αν $\alpha=2$, το σύστημα γίνεται :

$$\begin{cases}(2-1)x+3y=3\\ x+(2+1)y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+3y=3\\ x+3y=3\end{cases} \Leftrightarrow x+3y=3 \Leftrightarrow x=3-3y$$

και επομένως έχει άπειρες λύσεις , της μορφής : $(x,y)=(3-3k,k),\ k \in R$.

ii. Αν $\alpha=-2$, το σύστημα γίνεται :

$$\begin{cases}(-2-1)x+3y=3\\ x+(-2+1)y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+3y=3\\ x-y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y=-1\\ x-y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0x+0y=2\\ x-y=3\end{cases},$$

το οποίο είναι αδύνατο.

Γ3. Για α=3 το σύστημα έχει μοναδική λύση και επομένως οι αντίστοιχες ευθείες έχουν μοναδικό κοινό σημείο , δηλαδή τέμνονται .

Για α=2 το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και επομένως οι αντίστοιχες ευθείες έχουν άπειρα κοινά σημεία , οπότε συμπίπτουν .

Για $\alpha=-2$ το σύστημα είναι αδύνατο και επομένως οι αντίστοιχες ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο ,οπότε είναι παράλληλες .

Θέμα Δ

Δ1. Έχουμε

$$P(2)=0\Leftrightarrow 8-(2^{\lambda}+3)\cdot 4+2^{\lambda}\cdot 2+24^{\lambda}=0\Leftrightarrow \overset{2^{\lambda}=\omega>0}{\Leftrightarrow} 8-4\omega-12+2\omega+2\omega^2=0$$

$$\Leftrightarrow 2\omega^2-2\omega-4=0\Leftrightarrow \omega^2-\omega-2=0\Leftrightarrow \omega=-1 \text{ απορ. ή } \omega=2$$

Άρα $2^{\lambda}=2\Leftrightarrow \lambda=1$

Δ2. Πρέπει $P(x)>0\overset{\lambda=1}{\Leftrightarrow}x^3-5x^2+2x+8>0$.

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner η ανίσωση γίνεται:

$$(x-2)(x^2-3x-4)>0. \quad x=2 \text{ ή } x_{1,2}=\frac{3\pm5}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=4\\ x_2=-1\end{cases}$$

Με τη βοήθεια του πίνακα: $P(x)>0\Leftrightarrow x\in(-1,2)\cup(4,+\infty)$

Δ3. $Q(x)=\dfrac{x^3-5x^2+2x+8}{x-4}$

Εκτελώντας τη διαίρεση (ή με σχήμα Horner) βρίσκουμε $Q(x)=x^2-x-2$

Επομένως η εξίσωση γίνεται:

$$Q(\eta\mu\theta)=\sigma\upsilon\nu^2\theta-2\Leftrightarrow \eta\mu^2\theta-\eta\mu\theta-2=\sigma\upsilon\nu^2\theta-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2\theta-\eta\mu\theta-2=1-\eta\mu^2\theta-2\Leftrightarrow 2\eta\mu^2\theta-\eta\mu\theta-1=0\Leftrightarrow \eta\mu\theta_{1,2}=\frac{1\pm3}{4}$$

Άρα $\eta\mu\theta=1\Leftrightarrow \eta\mu\theta=\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\theta=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in Z$ ή

$$\eta\mu\theta=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\eta\mu\theta=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\theta=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6} \text{ ή } \theta=2\kappa\pi+\pi+\frac{\pi}{6},\ \kappa\in Z$$

27ο

Θέμα Β

Β1. $\eta\mu2x-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow συνx(2ημx-\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow συνx=0 \text{ ή } 2ημx-\sqrt{3}=0$$

Έχουμε: $συνx=0 \Leftrightarrow συνx=συν\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=2κ\pi+\frac{\pi}{2}$ ή $2κ\pi-\frac{\pi}{2}$, $κ\in Z$

$2ημx-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow ημx=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow ημx=ημ\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=2κ\pi+\frac{\pi}{3}$ ή $x=2κ\pi+\frac{2\pi}{3}$, $κ\in Z$

B2. Έχουμε

$$\frac{1-συν2α}{2ημα+ημ2α}=\frac{1-(1-2ημ^2α)}{2ημα+2ημασυνα}=\frac{2ημ^2α}{2ημα(1+συνα)}=\frac{ημα}{1+συνα}=\frac{2ημ\frac{α}{2}συν\frac{α}{2}}{1+\left(2συν^2\frac{α}{2}-1\right)}$$

$$=\frac{ημ\frac{α}{2}}{συν\frac{2}{2}}=εφ\frac{α}{2}$$

Θέμα Γ

Γ1. Πρέπει: $x>0$ και $x^2-4x+4>0 \Leftrightarrow (x-2)^2>0 \Leftrightarrow x\neq 2$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A=(0,2)\cup(2,+\infty)$.

Γ2. Για $x\in(0,2)\cup(2,+\infty)$ είναι:

$f(x)=\ln x+4\ln 2 \Leftrightarrow \ln x+\ln(x^2-4x+4)=\ln x+\ln 2^4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln\left(x(x^2-4x+4)\right)=\ln(2^4x) \Leftrightarrow x(x^2-4x+4)=16x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3-4x^2-12x=0 \Leftrightarrow x(x^2-4x-12)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-2$ ή $x=6$.

Αλλά επειδή $x\in(0,2)\cup(2,+\infty)$ η λύση της εξίσωσης είναι $x=6$.

Γ3. Για $x\in(0,2)\cup(2,+\infty)$ είναι:

$$f(x)<1-\ln\frac{e}{16} \Leftrightarrow \ln x+\ln(x^2-4x+4)<1-\ln e+\ln 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(x(x^2-4x+4)\right)<\ln 16 \Leftrightarrow x(x^2-4x+4)<16 \Leftrightarrow x^3-4x^2+4x-16<0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-4)+4(x-4)<0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2+4)<0 \Leftrightarrow x<4.$$

Αλλά επειδή $x\in(0,2)\cup(2,+\infty)$ είναι $x\in(0,2)\cup(2,4)$.

Θέμα Δ

Δ1. $P(1)=0 \Leftrightarrow 1-(\ln α+5)+(5\ln α+6)-6\ln α=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-\ln α-5+5\ln α+6-6\ln α=0 \Leftrightarrow -2\ln α=-2 \Leftrightarrow \ln α=1 \Leftrightarrow α=e$

Δ2 $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$.

Πρέπει P(2)=0. Όμως $P(2)=8-24+22-6=30-30=0$

Δ3. Με διαίρεση (ή σχήμα Horner) βρίσκουμε: $\pi(x)=x^2-4x+3$

Δ4 $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-4x+3)=0 \Leftrightarrow x=2$ ή

$$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2} \quad \text{άρα} \quad x_1=3 \quad \text{ή} \quad x_2=1.$$

28ο

Θέμα Β

Β1. Πρέπει: $\left.\begin{matrix} P(1)=0 \\ P(0)=6 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 1-(2\alpha+1)\cdot 1+3\beta=0 \\ 0-0+3\beta=6 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \beta=2 \\ 1-2\alpha-1+6=0 \end{matrix}\right\}$ β=2, α=3

Β2. Για α=3, β=2: $P(x)=x^3-7x+6$

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner έχουμε:

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-6)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-3 \end{cases}$$

Πρέπει: $P(x)>-3x+6 \Leftrightarrow x^3-7x+6+3x-6>0 \Leftrightarrow x^3-4x>0 \Leftrightarrow x(x^2-4)>0$

οπότε με τη βοήθεια του πίνακα: $x\in(-2,0)\cup(2,+\infty)$

Θέμα Γ

Γ1. $2^x>0$ για κάθε $x\in R$ άρα $2^x+1>1 \Leftrightarrow 2^x+1>0$ $\quad 2^x-4>0 \Leftrightarrow 2^x>2^2 \Leftrightarrow x>2$

Γ2. i. Πρέπει $4^x-3\cdot 2^x-4>0 \overset{2^x=\omega}{\Leftrightarrow} \omega^2-3\omega-4>0 \Leftrightarrow \omega=-1$ ή $\omega=4$

με τη βοήθεια του πίνακα έχουμε:

$\omega^2-3\omega-4>0 \Leftrightarrow \omega<-1$ αδύνατη ή $\omega>4 \Leftrightarrow 2^x>4 \Leftrightarrow x>2$

ii. Για x>2: $\ln(4^x-3\cdot 2^x-4)-\ln 4=\ln(2^x+1)$

$$\Leftrightarrow \frac{4^x-3\cdot 2^x-4}{4}=2^x+1 \Leftrightarrow 4^x-3\cdot 2^x-4=4\cdot 2^x+4 \Leftrightarrow 4^x-3\cdot 2^x-4\cdot 2^x-8=0$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x}-7\cdot 2^x-8=0 \overset{2^x=\omega>0}{\Leftrightarrow} \omega^2-7\omega-8=0 \Leftrightarrow \omega=-1 \text{ απορ. ή } \omega=8$$

Άρα $2^x=8 \Leftrightarrow x=3$ δεκτή.

Θέμα Δ

Δ1. $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left[\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

Δ2. Έχουμε

$$\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right) \overset{(\Delta1)}{\Leftrightarrow} \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)(\sigma\upsilon\nu x-1)=0 \quad \text{οπότε}$$

- $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu 0 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\kappa\pi \Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\ \kappa\in Z$ ή
- $\sigma\upsilon\nu x-1=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi,\ \kappa\in Z$

Δ3. i. Έχουμε

$$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-x+\frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\overset{(\Delta 1)}{=}\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$$

ii. Από την προηγούμενη σχέση για $x=\frac{\pi}{4}$ και $x=\frac{\pi}{6}$:

$$f(0)=f\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{12}\right)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Άρα S=0.

29ο

Θέμα Β

Β1. $2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}=1+\sigma\upsilon\nu 2\cdot\frac{x}{2}=1+\sigma\upsilon\nu x$

Β2. $2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}(2-\sigma\upsilon\nu x)=(1+\sigma\upsilon\nu x)(2-\sigma\upsilon\nu x)=$

$=2-\sigma\upsilon\nu x+2\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^2 x=1+1+\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^2 x=1+\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x$

Β3. $1+\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu^2 x=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}(2-\sigma\upsilon\nu x)=0 \Leftrightarrow$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}=0=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=4\kappa\pi\pm\pi\ \ \kappa\in Z.$$

Θέμα Γ

Γ1. Πρέπει: $P(1)=0 \Leftrightarrow 3+1-8\sigma\upsilon\nu\alpha=0 \Leftrightarrow -8\sigma\upsilon\nu\alpha=-4 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \alpha=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3},\ \kappa\in Z$

Γ2. Πρέπει:

$$Q(-1)=-6 \Leftrightarrow -1+7-\ln(e\beta)-10=-6 \Leftrightarrow \ln(e\beta)=2 \Leftrightarrow e\beta=e^2 \Leftrightarrow \beta=\frac{e^2}{e} \Leftrightarrow \beta=e$$

Γ3. Πρέπει $Q(x)>P(x) \Leftrightarrow x^3+7x^2+2x-10>3x^2+x-4 \Leftrightarrow x^3+4x^2+x-6>0$

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner έχουμε: $(x-1)(x^2+5x+6)=0$

$$x=1 \text{ ή } x_{1,2}=\frac{-5\pm1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=-3 \end{cases}$$

Άρα $Q(x)>P(x) \Leftrightarrow x\in(-3,-2)\cup(1,+\infty)$

Θέμα Δ

Δ1. Για x>0 έχουμε: $f(e^{x-1}+7)>3f(2)\Leftrightarrow \log(e^{x-1}+7)>3\log 2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log(e^{x-1}+7)>\ln 8\Leftrightarrow e^{x-1}+7>8\Leftrightarrow e^{x-1}>1\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1$$

Δ2. $100^{\log\sqrt{2}}=10^{2\log\sqrt{2}}=10^{\log\sqrt{2}^2}=10^{\log 2}=2$

Δ3. Για x>0 θέτουμε $2^{\log x}=\omega>0$ και έχουμε:

$$2^{2\log x}-2^{\log x}-2=0\Leftrightarrow \omega^2-\omega-2=0\Leftrightarrow \omega=-1 \text{ απορ. ή } \omega=2$$

οπότε $2^{\log x}=2\Leftrightarrow \log x=1\Leftrightarrow x=10$ δεκτή

30ο

Θέμα Β

Β1. Ισχύει:

$$P(-2)=0\Leftrightarrow \alpha(-2)^3+(-2)^2+8\alpha^2-4=0\Leftrightarrow -8\alpha+4+8\alpha^2-4=0\Leftrightarrow 8\alpha(\alpha-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\alpha=0 \text{ ή } \alpha-1=0\Leftrightarrow \alpha=1$$

Επειδή το P(x) είναι 3ου βαθμού αυτό σημαίνει α≠0. Επομένως α=1.

Β2. $P(x)=x^3+x^2+4$. Εκτελούμε σχήμα Horner με το -2 και έχουμε:

$$P(x)=0\Leftrightarrow (x+2)(x^2-x+2)=0\Leftrightarrow$$

$$x+2=0\Leftrightarrow x=-2 \quad \text{ή} \quad x^2-x+2=0\Leftrightarrow \Delta=(-1)^2-4\cdot 2=-7 \text{ αδύν.}$$

Β3. Έχουμε

$$P(x)>(x+2)(x+5)\Leftrightarrow (x+2)(x^2-x+2)>(x+2)(x+5)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-x+2)-(x+2)(x+5)>0\Leftrightarrow (x+2)(x^2-x+2-x-5)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x-3)>0$$

$$x+2>0\Leftrightarrow x>-2 \qquad x^2-2x-3=0\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm 4}{2}\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-1 \end{cases}$$

Άρα $x\in(-2,-1)\cup(3,+\infty)$

Θέμα Γ

Γ1. Έχουμε

$$A=\text{συν}x(\text{εφ}x+\text{συν}x)+\text{ημ}^2x=\text{συν}x\,\text{εφ}x+\text{συν}^2x+\text{ημ}^2x=\text{συν}x\cdot\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}+1=\text{ημ}x+1$$

Γ2. $B=\text{εφ}(\pi+x)\text{σφ}(-x)-\text{συν}(\pi-x)\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$$=-\text{εφ}x\cdot\text{σφ}x+\text{συν}x\cdot\text{συν}x=-1+\text{συν}^2x=-1+1-\text{ημ}^2x=-\text{ημ}^2x$$

Γ3. $3A-5=2B\Leftrightarrow 3(\text{ημ}x+1)-5=-2\text{ημ}^2x\Leftrightarrow 2\text{ημ}^2x+3\text{ημ}x-2=0$ Θέτουμε ημx=ω:

$$2\omega^2+3\omega-2=0 \Leftrightarrow \omega_{1,2}=\frac{-3\pm 5}{4} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\omega_1=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=\frac{1}{2} \\ \omega_2=-2 \Leftrightarrow \eta\mu x=-2 \text{ αδύν.}\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}, \ \kappa\in Z \\ x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}, \ \kappa\in Z \end{cases}$$

Θέμα Δ

Δ1. Για την f έχουμε: $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0$ Άρα $A_f=(0,+\infty)$

Για την g έχουμε: $x^2>0$ που ισχύει πάντα εκτός για x=0. Άρα $A_g=R^*$

Δ2. $f(x)>\ln(e-1) \Leftrightarrow \ln(e^x-1)>\ln(e-1) \Leftrightarrow e^x-1>e-1 \Leftrightarrow e^x>e^1 \Leftrightarrow x>1$

Δ3. $A=f(\ln 3)-g(\sqrt{6})=\ln(e^{\ln 3}-1)-2\ln(\sqrt{6})^2+\ln 12=$

$$=\ln(3-1)-2\ln 6+\ln 12=\ln 2+\ln 12-2\ln 6=\ln\left(\frac{2\cdot 1^2}{6^2}\right)=\ln\left(\frac{24}{36}\right)=\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

Εφόσον $\frac{2}{3}<1$ άρα $\ln\left(\frac{2}{3}\right)<0 \Leftrightarrow A<0$

Δ4. $f(2x)=\ln(e^x+1) \Leftrightarrow \ln(e^{2x}+1)=\ln(e^x+1) \Leftrightarrow e^{2x}+1=e^x+1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{2x}-e^x=0 \Leftrightarrow e^x(e^x-1)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$$

που απορρίπτεται γιατί δεν ανήκει στο A_f.

31ο

Θέμα Β

Β1. $A=\frac{1-\eta\mu 2\theta}{(\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta)^2}=\frac{1-\eta\mu 2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta-2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{1-\eta\mu 2\theta}{1-\eta\mu 2\theta}=1$

Β2. $2\eta\mu^3 x-4\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}+\sigma\upsilon\nu^2 x=0 \Leftrightarrow 2\eta\mu^3 x-2\eta\mu x+1-\eta\mu^2 x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\eta\mu^3 x-\eta\mu^2 x-2\eta\mu x+1=0$

Θέτουμε ημx=ω και έχουμε την εξίσωση: $2\omega^3-\omega^2-2\omega+1=0$

Με σχήμα Horner (για ρ=1) έχουμε: $(\omega-1)(2\omega^2+\omega-1)=0 \Leftrightarrow \omega=1,\ \omega=-1,\ \omega=\frac{1}{2}$

Άρα ημx=1 ή $\eta\mu x=-1$ ή $\eta\mu x=\frac{1}{2}$ και επειδή $x\in[0,\pi]$, έχουμε τελικά: $x=\frac{\pi}{2}$ ή $x=\frac{\pi}{6}$

Θέμα Γ

Γ1. $P(0)=6 \Leftrightarrow \beta=-6$

$$P(-1)=-24 \Leftrightarrow (-1)^3+\alpha(-1)^2+11(-1)=-24 \Leftrightarrow -1+\alpha-11+6=-24 \Leftrightarrow \alpha=-6$$

Γ2. $P(x)=0 \Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6=0$. Εκτελούμε Horner με το 1 και προκύπτει:

$$(x-1)(x^2-5x+6)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=2 \end{cases}$$

Γ3. Φτιάχνουμε το πινακάκι της προηγούμενης εξίσωσης άρα: $x \in (1,2)\cup(3,+\infty)$

Θέμα Δ

Δ1. Πρέπει: $3^{2x+1}+10\cdot3^x-3>0 \Leftrightarrow -3^{2x}-3+10\cdot3^x-3>0$. Θέτουμε $3^x=\omega$:

$$-3\omega^2+10\omega-3>0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}<\omega<3$$

Άρα $\frac{1}{3}<\omega<3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}<3^x<3 \Leftrightarrow 3^{-1}<3^x<3 \Leftrightarrow 3^{-1}<3^x<3^1 \Leftrightarrow -1<x<1$ Άρα $A_f=(-1,1)$

Δ2. $f(x)=1+x\log3 \Leftrightarrow \log(-3^{2x+1}+10\cdot3^x-3)=\log10+\log3^x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log(-3^{2x+1}+10\cdot3^x-3)=\log(10\cdot3^x) \Leftrightarrow -3^{2x+1}+10\cdot3^x-3=10\cdot3^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x+1}+3=0 \Leftrightarrow 3^{2x}\cdot3+3=0 \Leftrightarrow 3\cdot(3^{2x}+1)=0 \Leftrightarrow 3^{2x}+1=0 \Leftrightarrow 3^{2x}=-1$$

αδύνατο. Άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

32ο

Θέμα Β

Β1. Η παραβολή διέρχεται από τα σημεία $A(3,0), B(-2,0), \Gamma(0,-2)$, άρα οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της. Οπότε είναι:

$$0=\alpha\cdot3^2+\beta\cdot3+\gamma \Leftrightarrow 9\alpha+3\beta+\gamma=0 \ (1) \quad 0=\alpha(-2)^2+\beta(-2)+\gamma \Leftrightarrow 4\alpha-2\beta+\gamma=0 \ (2)$$

$$-2=\alpha\cdot0^2+\beta\cdot0+\gamma \Leftrightarrow \gamma=-2 \ (3).$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) και (3) έχουμε :

$$\begin{cases} 9\alpha+3\beta+\gamma=0 \\ 4\alpha-2\beta+\gamma=0 \\ \gamma=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\alpha+3\beta-2=0 \\ 4\alpha-2\beta-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\alpha+3\beta=2 \\ 4\alpha-2\beta=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$D=\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-18-12=-30, \quad D_\alpha=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-4-6=-10 \text{ και}$$

$$D_\beta=\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=18-8=10. \text{ Άρα: } (\alpha,\beta)=\left(\frac{D_\alpha}{D},\frac{D_\beta}{D}\right)=\left(\frac{-10}{-30},\frac{10}{-30}\right)=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

Οπότε $\alpha=\frac{1}{3}, \beta=-\frac{1}{3}, \gamma=-2$, άρα η εξίσωση της παραβολής είναι :

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x-2.$$

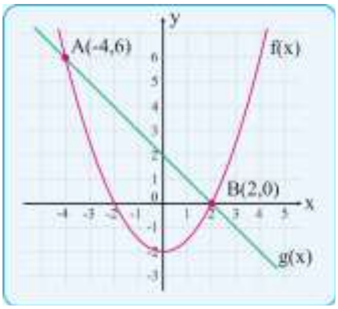
Β2. Αν $\alpha=\frac{1}{2}, \beta=0$ και $\gamma=-2$, η εξίσωση της παραβολής παίρνει την μορφή:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2.$$

Άρα τα κοινά σημεία παραβολής και ευθείας προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-2 \\ y=-x+2 \end{cases} \overset{(=)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}x^2-2=-x+2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+x-4=0 \Leftrightarrow x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow x=-4 \text{ ή } x=2$$

Άρα για $x_1=2$ έχουμε $y_1=0$ και για $x_2=-4$ έχουμε $y_2=6$. Επομένως τα σημεία τομής της $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$ και της $g(x)=-x+2$ είναι τα : $A(2,0)$ και $\Delta(-4,6)$.



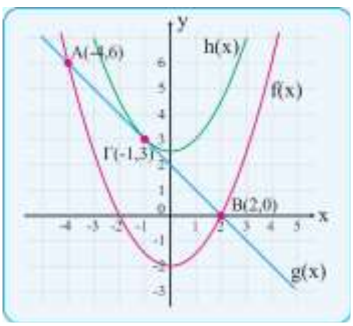
B3. Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω προκύπτει η εξίσωση: $h(x)=f(x)+4{,}5=f(x)+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}x^2-2+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$.

Επιλύοντας το νέο σύστημα της $h(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$ και της $g(x)=-x+2$ έχουμε:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2} \\ y=-x+2 \end{cases} \overset{(=)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}=-x+2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \quad \text{και} \quad y=3.$$

Επομένως το σημείο τομής των $h(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$ και $g(x)=-x+2$ είναι ένα, το: $(x,y)=(-1,3)$.



Θέμα Γ

Γ1. $x^2-4>0$ και $6x>0 \Leftrightarrow x>0$ $x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$. Άρα $A_f=(2,+\infty)$

Γ2. $f(x)<0 \Leftrightarrow \log(x^2-4)-\log 6x+\log\sqrt{4}<0 \Leftrightarrow \log\dfrac{2(x^2-4)}{6x}<\log 1 \Leftrightarrow$

$\overset{\log x\uparrow}{\Leftrightarrow} \dfrac{2(x^2-4)}{3x}<1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4-3x}{3x}<0 \Leftrightarrow (x^2-3x-4)3x<0$ άρα f(x)<0 όταν $x\in(2,4)$

Θέμα Δ

Για να είναι 2ου βαθμού πρέπει:

$4^\kappa-2^{\kappa+2}=0 \Leftrightarrow (2^\kappa)^2-2^\kappa\cdot 2^2=0 \Leftrightarrow 2^\kappa(2^\kappa-4)=0 \Leftrightarrow 2^\kappa=0$ άτοπο ή $2^\kappa=4 \Leftrightarrow \kappa=2$

και $\sigma\upsilon\nu\theta(2\sigma\upsilon\nu\theta-3)\neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta\neq 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta\neq\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \theta\neq\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}$

1 ρίζα του P(x) άρα:

$P(1)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta(2\sigma\upsilon\nu\theta-3)\cdot 1^2-1-1=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta-3\sigma\upsilon\nu\theta-2=0$

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{3\pm 5}{4}\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\theta=2 \text{ άτοπο διότι } -1\leq\sigma\upsilon\nu\theta\leq 1\\ \sigma\upsilon\nu\theta=-\dfrac{1}{2}=\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\theta=2\kappa\pi\pm\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}$$

$\theta=2\kappa\pi-\dfrac{2\pi}{3}$ ή $\theta=2\kappa\pi+\dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \theta=\dfrac{2\pi}{3}$ για κ=0 ή $\theta=\dfrac{4\pi}{3}$ για κ=1.

33ο

Θέμα Β

B1. $D=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 8 & 3\end{vmatrix}=15-16=-1\neq 0$

$$D_x=\begin{vmatrix}7-\lambda & 2\\ 2\lambda+1 & 3\end{vmatrix}=3(7-\lambda)-2(2\lambda+1)=21-3\lambda-4\lambda-2=19-7\lambda$$

$$D_y=\begin{vmatrix}5 & 7-\lambda\\ 8 & 2\lambda+1\end{vmatrix}=5(2\lambda+1)-8(7-\lambda)=10\lambda+5-56+8\lambda=18\lambda-51$$

B2. Άρα D≠0 και $\lambda\in R$ άρα το (Σ) έχει 1 μοναδική λύση:

$$(x_0,y_0)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=(7\lambda-19,\ 51-18\lambda)$$

B3. $x_0-y_0=5 \Leftrightarrow 7\lambda-19-51+18\lambda=5 \Leftrightarrow 25\lambda-75 \Leftrightarrow \lambda=3$

Θέμα Γ

Γ1. $\begin{cases} P(2)=0 \\ P(1)=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16+4\alpha-2\beta+6=0 \\ 2+\alpha-\beta+6=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha-2\beta=-22 \\ \alpha-\beta=-12 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (\div 2)\, -2\alpha+\beta=11 \\ \alpha-\beta=-12 \end{cases} (+) \Leftrightarrow -\alpha=-1 \Leftrightarrow \alpha=1$ οπότε β=13

Γ2. Έχουμε

$$P(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3+x^2-13x+6=0 \Leftrightarrow (x-2)(2x^2+5x-3)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

$$\text{ή } \ 2x^2+5x-3=0 \Leftrightarrow x=-3 \ \text{ ή } \ x=\frac{1}{2}$$

Γ3. $2\eta\mu^3 x+\eta\mu^2 x-13\eta\mu x+6=0$ Θέτουμε $\eta\mu x=\kappa$

$$2\kappa^3+\kappa^2-13\kappa+6=0 \overset{(\Gamma 2)}{\Leftrightarrow} \eta\mu x=2 \ \text{ αδύν. ή } \ \eta\mu x=-3 \ \text{ αδύν. ή } \ \eta\mu x=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{6} \\ x=2\kappa\pi+\dfrac{5\pi}{6} \end{cases} \kappa\in Z$$

Θέμα Δ

Δ1. Πρέπει $4^x+9>0$ αληθεύει γιατί $4^x, 2^x, 1, 9>0$ $\ 2^x+1>0$ αληθεύει. Άρα $D_f=R$

Δ2. Έχουμε

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \log 2+\log(4^x+9)-1-\log(2^x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log\left[2(4^x+9)\right]=\log\left[10(2^x+1)\right] \overset{\log\text{"}1-1\text{"}}{\Leftrightarrow} 2\cdot 4^x+18=10\cdot 2^x+10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(2^x)^2-10\cdot 2^x+8=0 \Leftrightarrow (2^x)^2-5\cdot 2^x+4=0 \Leftrightarrow 2^x=4 \ \text{ ή } \ 2^x=1$$

$$2^x=4 \Leftrightarrow 2^x=2^2 \Leftrightarrow x=2 \quad \text{ ή } \quad 2^x=1 \Leftrightarrow 2^x=2^0 \Leftrightarrow x=0$$

34ο

Θέμα Β

Β1. $(\eta\mu x-1)(2\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=1 \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \kappa\in Z$

ή $\sigma\upsilon\nu x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\dfrac{5\pi}{6},\ \kappa\in Z$

Β2. i. Είναι $\dfrac{(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)^2}{2}+\dfrac{(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)^2}{2}=1$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu^2 x}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x)}{2}=1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1 \ \text{ αληθεύει}$$

ii. Είναι $(1+\sigma\varphi x)^2+(1-\sigma\varphi x)^2=\left(1+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)^2+\left(1-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)^2$

$$=\frac{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2}{\eta\mu^2 x}+\frac{(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^2}{\eta\mu^2 x}=\frac{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2+(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^2}{\eta\mu^2 x}\overset{(1)}{=}\frac{2}{\eta\mu^2 x}$$

Θέμα Γ

Γ1. Ισχύει: $\begin{cases}P(0)=0\\P(-1)=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0-0+\beta^2-1=0\\-1+2\alpha+\beta^2-1=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta^2=1\Leftrightarrow\beta=\pm1\\2\alpha=4\Leftrightarrow\alpha=2\end{cases}$

Γ2. Εφαρμόζοντας σχήμα Horner για την τιμή -1 η διαίρεση $P(x):(x+1)$ δίνει:

$\pi(x)=x^2-x-3$

Γ3. $P(x)\ge0\Leftrightarrow x^3-4x\ge0\Leftrightarrow x(x^2-4)\ge0$ και με πίνακα γινομένου:

$P(x)\ge0$ όταν $x\in[-2,0]\cup[2,+\infty)$

Θέμα Δ

Δ1. Πρέπει: $x>0$ και $2\log x-1\ne0\Leftrightarrow\log x\ne\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\ne10^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x\ne\sqrt{10}$

Άρα $D_f=(0,\sqrt{10})\cup(\sqrt{10},+\infty)$

Δ2. Έχουμε $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{10}{3}\Leftrightarrow\frac{2\log x+1}{2\log x-1}+\frac{2\log\left(\frac{1}{x}\right)+1}{2\log\left(\frac{1}{x}\right)-1}=\frac{10}{3}$

$\Leftrightarrow\frac{2\log x+1}{2\log x-1}+\frac{-2\log x+1}{-2\log x-1}=\frac{10}{3}\Leftrightarrow\frac{2\log x+1}{2\log x-1}+\frac{2\log x-1}{2\log x+1}=\frac{10}{3}$. Θέτουμε $\frac{2\log x+1}{2\log x-1}=\kappa$

οπότε έχουμε $\kappa+\frac{1}{\kappa}=\frac{10}{3}\Leftrightarrow3\kappa^2+3=10\kappa\Leftrightarrow3\kappa^2-10\kappa+3=0\Leftrightarrow\kappa=\frac{1}{3}$ ή $\kappa=3$

Άρα $\frac{2\log x+1}{2\log x-1}=3\Leftrightarrow2\log x+1=6\log x-3\Leftrightarrow4\log x=4\Leftrightarrow\log x=1\Leftrightarrow x=10$

ή $\frac{2\log x+1}{2\log x-1}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow6\log x+3=2\log x-1\Leftrightarrow4\log x=-4\Leftrightarrow\log x=-1\Leftrightarrow x=10^{-1}=\frac{1}{10}$

35ο

Θέμα Β

$\begin{cases}2\eta\mu x-\varepsilon\varphi y=1-\sqrt{3}\ (1)\\4\eta\mu x+\varepsilon\varphi y=2+\sqrt{3}\end{cases}(+)\Rightarrow6\eta\mu x=3\Leftrightarrow\eta\mu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases},\ \kappa\in Z$

Αν $\eta\mu x=\frac{1}{2}$ τότε η: $(1)\Rightarrow 1-\varepsilon\varphi y=1-\sqrt{3}\Rightarrow \varepsilon\varphi y=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{3},\ \kappa\in Z$

Θέμα Γ

Γ1. Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντες τους $x+1$ και $x-2$, άρα:

- $P(-1)=0\Leftrightarrow -1+\alpha-\beta+4=0\Leftrightarrow \alpha-\beta=-3\ \ (1)$ και
- $P(2)=0\Leftrightarrow 8+4\alpha+2\beta+4=0\Leftrightarrow 2\alpha+\beta=-6\ \ (2)$.

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις (1) και (2), οπότε προκύπτει $\alpha=-3$ και $\beta=0$.

Γ2. Για $\alpha=-3$ και $\beta=0$ είναι $P(x)=0\Leftrightarrow x^3-3x^2+4=0$.

Με σχήμα Horner έχουμε:

1	–3	0	4	–1
	–1	4	–4	
1	–4	4	0	

Άρα $x^3-3x^2+4=0\Leftrightarrow (x+1)(x^2-4x+4)=0\Leftrightarrow x=-1$ ή $x=2$ (διπλή).

Γ3. i. Είναι $P(x)=x^3-3x^2+4$, οπότε $P(0)=0^3-3\cdot 0^2+4=4$, άρα η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,4)$.

ii. Από τον παρακάτω πίνακα προσήμου του $P(x)$, παρατηρούμε ότι:

x	$-\infty$ -1	2	$+\infty$
$P(x)$	$-$	$+$	$+$

Η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ για $x\in(-\infty,-1)$.

Θέμα Δ

Δ1. Πρέπει $\frac{4-x}{4+x}>0$ και $4+x\neq 0$, άρα $(4-x)(4+x)>0\Leftrightarrow 16-x^2>0\Leftrightarrow x\in(-4,4)$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=(-4,4)$.

Για να δείξουμε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αρκεί να δείξουμε ότι $f(0)=0$. Πράγματι είναι $f(0)=\ln\frac{4-0}{4+0}=\ln\frac{4}{4}=\ln 1=0$.

Δ2. Α΄ τρόπος

$A=f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$

$$A=\ln 7+\ln\frac{6}{2}+\ln\frac{5}{3}+\ln 1+\ln\frac{3}{5}+\ln\frac{2}{6}+\ln\frac{1}{7}$$

$$A=\ln 7+\ln\frac{1}{7}+\ln\frac{6}{2}+\ln\frac{2}{6}+\ln\frac{5}{3}+\ln\frac{3}{5}+\ln 1$$

$$A=\ln\left(7\cdot\frac{1}{7}\right)+\ln\left(\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{6}\right)+\ln\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}\right)+\ln 1=4\ln 1=0$$

Β΄ τρόπος

Η συνάρτηση $f(x)=\ln\frac{4-x}{4+x}$ είναι περιττή, γιατί :

Έχει πεδίο ορισμού

36ο

Θέμα Β

$$\begin{cases}2\eta\mu(\pi-x)+4\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=1+2\sqrt{2}\\ 4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\sigma\upsilon\nu(\pi+y)=\sqrt{2}-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\eta\mu x+4\sigma\upsilon\nu y=1+2\sqrt{2}\ (1)\\ -4\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu y=\sqrt{2}-2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\overset{(\cdot 2)}{\Rightarrow}\begin{cases}4\eta\mu x+8\sigma\upsilon\nu y=2+4\sqrt{2}\\ -4\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu y=\sqrt{2}-2\end{cases}(+)\Leftrightarrow 10\sigma\upsilon\nu y=5\sqrt{2}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu y=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow y=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{4},\ \kappa\in Z$$

Αν $\sigma\upsilon\nu y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ τότε η (1):

$$(1)\Rightarrow 2\eta\mu x+2\sqrt{2}=1+2\sqrt{2}\Rightarrow 2\eta\mu x=1\Rightarrow\eta\mu x=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\ x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases},\ \kappa\in Z$$

Θέμα Γ

Γ1. Έχουμε

$$\begin{cases}P(1)=0\\ P(-1)=-16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-\alpha-3+\beta+4=0\\ -1-\alpha-3-\beta-4-3=-16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\alpha+\beta=1\\ -\alpha-\beta=-5\end{cases}(+)\Leftrightarrow -2\alpha=-4\Leftrightarrow\alpha=2$$

οπότε β=3.

Γ2. i. Είναι $P(x)=0\Leftrightarrow x^3-5x^2+7x-3=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2-4x+3)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x-1=0\ \text{ή}\ x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x=1\ \text{ή}\ x=3\ \text{ή}\ x=1$$

ii. Για να είναι η C κάτω από τον x΄x πρέπει:

$$P(x)<0\Leftrightarrow(x-1)(x^2-4x+3)<0\qquad\text{Άρα}\quad x\in(-\infty,1)\cup(1,3)$$

Θέμα Δ

Δ1. Πρέπει:

$$e^{2x}-e^{x}>0 \Leftrightarrow e^{x}(e^{x}-1)>0 \overset{e^{x}>0}{\Leftrightarrow} e^{x-1}>0 \Leftrightarrow e^{x}>e^{0} \Leftrightarrow x>0 \overset{ή}{\Leftrightarrow} e^{2x}>e^{x} \overset{e^{x}\uparrow}{\Leftrightarrow} 2x>x$$

$D_f=(0,+\infty)$. Πρέπει: $e^{x+1}-e>0 \Leftrightarrow e^{x+1}>e^{1} \overset{e^{x}\uparrow}{\Leftrightarrow} x+1>1 \Leftrightarrow x>0 \qquad D_y=(0,+\infty)$

Δ2. Είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}-e^{x}\right)=\ln\left(e^{x+1}-e\right) \Leftrightarrow e^{2x}-e^{x}=e^{x}\cdot e-e$

$$\Leftrightarrow e^{2x}-e^{x}-e\cdot e^{x}-e=0 \Leftrightarrow e^{x}(e^{x}-1)-e(e^{x}-1)=0 \Leftrightarrow (e^{x}-1)(e^{x}-e)=0$$

$$\Leftrightarrow e^{x}-1=0 \Leftrightarrow e^{x}=1=e^{0} \Leftrightarrow x=0 \text{ απορ. ή } e^{x}-e=0 \Leftrightarrow e^{x}=e \Leftrightarrow x=1 \text{ δεκτή}$$

Δ3. Είναι $f(x)>\ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}-e^{x}\right)>\ln 2 \Leftrightarrow e^{2x}-e^{x}>2$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} e^{2x}-e^{x}-2>0 \\ \text{θέτω } e^{x}=\omega \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \omega^{2}-\omega-2>0 \\ \text{ρίζες: } \omega=2 \text{ ή } \omega=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \omega<-1 \Leftrightarrow e^{x}<-1 \text{ αδύν.}$$

ή $\omega>2 \Leftrightarrow e^{x}>2 \Leftrightarrow x>\ln 2$

37ο

Θέμα Β

Β1. $D=\begin{vmatrix} \lambda & -\lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^{2}+\lambda=\lambda(\lambda+1)$

$D_x=\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix}=\lambda+\lambda^{2}=\lambda(1+\lambda) \qquad D_y=\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^{2}-1=(\lambda-1)(\lambda+1)$

- Αν $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq -1$ τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση την: $(x_0,y_0)=\left(\dfrac{D_x}{D},\dfrac{D_y}{D}\right)=\left(1,\dfrac{\lambda-1}{\lambda}\right)$
- Αν $\lambda=0$ τότε το (Σ): $\begin{cases} 0x-0y=1 \\ x=0 \end{cases}$ άτοπο
- Αν $\lambda=-1$ τότε το (Σ): $\begin{cases} -x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases}$ (αόριστο) $\Rightarrow x=1-y$

Άρα $(x,y)=(-1+\kappa,\kappa)$ με $\kappa\in R$

Β2. Για $\lambda=2$:

$$\frac{-\sigma\upsilon\nu^{2}\varphi}{\frac{1}{2}}+3\eta\mu\varphi=0 \Leftrightarrow -2\sigma\upsilon\nu^{2}\varphi+3\eta\mu\varphi=0 \Leftrightarrow -2\left(1-\eta\mu^{2}\varphi\right)+3\eta\mu\varphi=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2\eta\mu^{2}\varphi+3\eta\mu\varphi-2=0 \\ \eta\mu\varphi=\dfrac{-3\pm 5}{4} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\varphi=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{6} \text{ ή } \varphi=2\kappa\pi+\dfrac{5\pi}{6},\ \kappa\in Z \\ \eta\mu\varphi=-2 \text{ απορ.} \end{cases}$$

Θέμα Γ

Γ1. $P(1)=4 \Leftrightarrow 1+\alpha+1+6=4 \Leftrightarrow \alpha=-4$

Γ2. Είναι

$P(x)=0 \Leftrightarrow x^{3}-4x^{2}+x+6=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^{2}-2x-3)=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=3 \text{ ή } x=-1$

$P(x) \le 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-2x-3) \le 0 \qquad x \in (-\infty,-1] \cup [3,+\infty)$

Θέμα Δ

Δ1. Πρέπει $2^x - 8 > 0 \Leftrightarrow 2^x > 2^3 \Leftrightarrow x > 3 \qquad A_f = (3,+\infty)$

Δ2. $f(x) = 3\ln 2 \Leftrightarrow \ln(2^x - 8) = \ln 2^3 \Leftrightarrow 2^x - 8 = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$

Δ3. Είναι

$2f(x) < 2\ln 2 + \ln 2^x \Leftrightarrow 2\ln(2^x - 8) < \ln 2^2 + \ln 2^x \Leftrightarrow (2^x - 8)^2 < \ln 4 \cdot 2^x$

$\Leftrightarrow 2^{2x} - 16 \cdot 2^x + 64 < 4 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^{2x} - 20 \cdot 2^x + 64 < 0 \overset{2^x=\omega}{\Leftrightarrow} \omega^2 - 20\omega + 64 < 0 \Leftrightarrow \omega = 4$ ή $\omega = 16$

Άρα: $4 < \omega < 16 \Leftrightarrow 4 < 2^x < 16 \Leftrightarrow 2^2 < 2^x < 2^4 \Leftrightarrow 2 < x < 4$. Λόγω D_f πρέπει: $x \in (3,4)$

38ο

Θέμα Β

Β1. $25 = \alpha(\log 10)^4 + 8[\log 10]^2 \cdot \log(100 \cdot 10)$ ή $\alpha + 8 \cdot 1^2 \cdot 3 = 25$ ή α=1

Β2. Για α=1 έχουμε: $f(x) = (\log x)^4 + 8(\log x)^2(\log 100 + \log x)$

$$(\log x)^4 + 16(\log x)^2 + 8(\log x)^3 = \ldots = [(\log x)^2 + 4\log x]^2$$

Β3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow (\log x)(\log x + 4) = 0 \Leftrightarrow \log x = 0$ ή $\log x = -4 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 10^{-4}$

Θέμα Γ

Γ1. Έχουμε

$$\begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(1) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 2\alpha - \beta + 6 = 0 \\ 1 + 2\alpha + \beta + 6 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = -5 \\ 2\alpha + \beta = -3 \end{cases} (+) \Leftrightarrow 4\alpha = -8 \Leftrightarrow \alpha = -2$$

οπότε β=1.

Γ2. $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow$ (σχήμα Horner) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = 3$$

$P(x) \le 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 5x + 6) \le 0 \qquad x \in (-\infty,-1] \cup [2,3]$

Θέμα Δ

Δ1. $2\eta\mu^2\omega + 3\eta\mu\omega - 2 = 0 \qquad \Delta = 9 + 16 = 25 \quad \eta\mu\omega = \dfrac{-3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = -2$ αδύνατη

ή $\eta\mu\omega = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \eta\mu\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \omega = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{6}$ ή $\omega = 2\kappa\pi + \dfrac{5\pi}{6}$

Δ2. Για να είναι 2ου βαθμού πρέπει:

$$\begin{cases} 2\eta\mu^2\omega + 3\eta\mu\omega - 2 = 0 \\ \omega - \dfrac{5\pi}{6} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{6} \text{ ή } \omega = 2\kappa\pi + \dfrac{5\pi}{6} \\ \omega - \dfrac{5\pi}{6} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = \dfrac{\pi}{6} \text{ ή } \omega = \dfrac{5\pi}{6} \\ \omega - \dfrac{5\pi}{6} \neq 0 \end{cases}$$

άρα $\omega=\dfrac{\pi}{6}$

Δ3. $K=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{13\pi}{2}\right)\cdot\sigma\varphi\left(6\pi-\omega\right)}{\varepsilon\varphi\left(\dfrac{11\pi}{2}-\omega\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\omega\right)}=\dfrac{\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=-1$

- $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{13\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{12\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}+\omega\right)=-\eta\mu\omega=-\dfrac{1}{2}$

- $\sigma\varphi(6\pi-\omega)=\sigma\varphi(3\cdot 2\pi-\omega)=\sigma\varphi(-\omega)=-\sigma\varphi\omega=-\sqrt{3}$

- $\varepsilon\varphi\left(\dfrac{11\pi}{2}-\omega\right)=\varepsilon\varphi\left(\dfrac{8\pi}{2}+\dfrac{3\pi}{2}-\omega\right)=\varepsilon\varphi\left(\dfrac{3\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\varphi\omega=\sqrt{3}$

- $\sigma\upsilon\nu(\pi+\omega)=-\eta\mu\omega=-\dfrac{1}{2}$

39ο

Θέμα Β

Β1. $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}=\ldots=\dfrac{1}{7}$

Β2. $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}=\ldots=1$

Β3. $\alpha+\beta=45^\circ$ οπότε $2\alpha+2\beta=90^\circ$ άρα 2α και 2β συμπληρωματικές.

Θέμα Γ

Γ1. Ισχύει: $P(1)=0\Leftrightarrow 1-5-10+\kappa=0\Leftrightarrow -14+\kappa=0\Leftrightarrow \kappa=14$

Γ2. $P(x)=x^6-5x^4-10x^2+14$. Εκτελούμε σχήμα Horner με την τιμή 1 και προκύπτει:

$(x-1)(x^5+x^4-4x^3-4x^2-14x-14)=0\Leftrightarrow x=1$

ή $x^4(x+1)-4x^2(x+1)-14(x+1)=0\Leftrightarrow (x+1)(x^4-4x^2-14)=0\Leftrightarrow x=-1$

ή $x^4-4x^2-14=0$. Θέτουμε $x^2=\omega\Rightarrow \omega^2-4\omega-14=0$

$$\omega_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{72}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\omega_1=2+\dfrac{\sqrt{72}}{2}=2+3\sqrt{2}\\[2ex] \omega_2=2-\dfrac{\sqrt{72}}{2}<0 \ \text{ απορ.}\end{cases}$$

$x^2=2+3\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2+3\sqrt{2}}$

Θέτουμε $x^2=\kappa$: $\quad P(x)=0\Rightarrow \kappa^3-5\kappa^2-10\kappa+14=0\Leftrightarrow(\kappa-1)(\kappa^2-4\kappa+10)=0$

$$\kappa=1 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1 \quad ή \quad \kappa=\frac{4\pm\sqrt{72}}{2}=2\pm 3\sqrt{2}=2+3\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2+3\sqrt{2}}$$

Θέμα Δ

Δ1. Έχει παράγοντα το $x-1$. $P(1)=0 \Leftrightarrow 1-e^{2συνθ+1}+\ln^2\kappa+\ln\kappa=0$. Όμως 3ου βαθμού άρα πρέπει:

$$1-e^{2συνθ+1}=1=e^0 \Leftrightarrow 2συνθ+1=0 \Leftrightarrow συνθ=-\frac{1}{2}=-συν\frac{\pi}{3}=συν\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow θ=2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3},\ \kappa\in Z$$

Ισχύει

$$\ln^2\kappa+\ln\kappa=0 \Leftrightarrow \ln\kappa(\ln\kappa+1)=0 \Leftrightarrow \ln\kappa=0 \Leftrightarrow \kappa=1 \quad ή \quad \ln\kappa=-1=\ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow \kappa=\frac{1}{e}$$

Δ2. Αν κ=1 $\quad P(x)=x-1$

Αν $\kappa=\frac{1}{e} \quad P(x)=x^3-x^2+x-1 \quad \ln\frac{1}{e}=\ln e^{-1}=-1$

άρα $P(x)=x^2(x-1)+x-1=(x-1)(x^2+1) \Leftrightarrow υ(x)=x-1=\pi(x)$

Δ3. $P(x)\le 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+1)\le 0$. Όμως x+1>0 άρα πρέπει $x-1\le 0 \Leftrightarrow x\le 1$

40ο

Θέμα Β

Β1. $x^3-6x^2+11x-6=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-5x+6)=0 \Leftrightarrow x=1 \ ή \ x=2 \ ή \ x=3$

Β2. i. Πρέπει:

$$f(x)=y \Leftrightarrow x^3-6x^2+10x-2=-x+4 \Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6=0 \overset{(B1)}{\Leftrightarrow} x=\pm 1,\ x=2,\ x=3$$

Άρα τέμνονται στα σημεία: $A(1,3)$, $B(9,2)$, $\Gamma(3,1)$

ii. $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$. Πρέπει να δείξουμε ότι f(x)>y όταν $x\in(1,2)\cup(3,+\infty)$

Θέτω $f(x)>y \Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6>0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-5x+6)>0$

Άρα $x\in(1,2)\cup(3,+\infty)$ ώστε f(x)>y

Θέμα Γ

Γ1. $f(x)=2ημ\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+1=-2ημ\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+1=-2συν2x+1$

$A_f=R \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

Γ2. Για $x\in R$:

$$-1\le συν2x\le 1 \Leftrightarrow 2\ge -2συν2x\ge -2 \Leftrightarrow 2+1\ge -2συν2x+1\ge -2+1 \Leftrightarrow -1\le f(x)\le 3$$

Άρα $f\min=-1$. Θέλουμε $f(x)=-1 \Leftrightarrow -2συν2x+1=-1 \Leftrightarrow -2συν2x=-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{συν}2x = 1 \Leftrightarrow \text{συν}2x = \text{συν}0 \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi \Leftrightarrow x = \kappa\pi,\ \kappa \in Z$

Γ3. Θέλουμε $f(x) \geq 3$ όμως $f(x) \leq 3$ οπότε $f(x) = 3 \Leftrightarrow -2\text{συν}2x = 2 \Leftrightarrow \text{συν}2x = -1$

$$\Leftrightarrow \text{συν}2x = \text{συν}\pi \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \pi \\ 2x = 2\kappa\pi - \pi \end{cases} \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi + \pi \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$$

όμως $x \in (0, 2\pi)$ άρα για $\kappa = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ και για $\kappa = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2}$ οι μοναδικές δεκτές λύσεις.

Θέμα Δ

Δ1. $g(e^x) = f(e^x) \Leftrightarrow 6 \cdot e^x - 5 = e^{2x} \Leftrightarrow e^{2x} - 6e^x + 5 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1$ ή $e^x = 15$

άρα $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ή $e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$

Δ2. i. $h(x) = \ln\left(g(e^x) - f(e^x)\right)$ Πρέπει:

$$g(e^x) - f(e^x) > 0 \Leftrightarrow 6e^x - 5 - e^{2x} > 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 6e^x + 5 < 0$$

Πρέπει $1 < e^x < 5 \Leftrightarrow 0 < x < \ln 5$

ii. $h(x) \geq \ln(\ln e^4) \Leftrightarrow h(x) \geq \ln 4 \Leftrightarrow \ln\left(g(e^x) - f(e^x)\right) \geq \ln 4$

$\Leftrightarrow g(e^x) - f(e^x) \geq 4 \Leftrightarrow 6e^x - 5 - e^{2x} \geq 4 \Leftrightarrow e^{2x} - 6e^x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (e^x - 3)^2 \leq 0$

Ισχύει το “=” $\Rightarrow e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$

41ο

Θέμα Β

Β1. Πρέπει $x^2 + \kappa^2 \neq 0$ αληθές για $x \in R$

$x, -x \in R$ $f(-x) = \frac{2\kappa(-x)}{(-x)^2 + \kappa^2} = -\frac{2\kappa x}{x^2 + \kappa^2} = -f(x)$. Άρα η f είναι περιττή στο R.

Β2. Πρέπει να δείξουμε ότι $f(x) \leq 1$, για $x \in R$ και ότι υπάρχει x_0 με $f(x_0) = 1$.

$$f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2\kappa x}{x^2 + \kappa^2} \leq 1 \overset{x^2+\kappa^2>0}{\Leftrightarrow} 2\kappa x \leq x^2 + \kappa^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \kappa^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow (x - \kappa)^2 \geq 0 \text{ αληθές για } x \in R$$

$$f(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{2\kappa x}{x^2 + \kappa^2} = 1 \Leftrightarrow (x_0 - \kappa)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \kappa$$

Άρα η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή το 1 στο $x_0 = \kappa$. f(κ)=1

Β3. Γραφική παράσταση.

Β4. $g(x) = \kappa(x^2 + \kappa^2) - 2013 = \kappa \cdot \frac{2\kappa x}{x^2 + \kappa^2} \cdot (x^2 + \kappa^2) - 2013 \Leftrightarrow g(x) = 2\kappa^2 x - 2013$

Έστω $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2\kappa^2 x_1 < 2\kappa^2 x_2 \Leftrightarrow 2\kappa^2 x_1 - 2013 < 2\kappa^2 x_2 - 2013 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$

άρα η $g \uparrow$ στο R.

Θέμα Γ

Γ1. Έχουμε

$x^3+\lambda x^2-2x-6$	x^2-2
$-x^3 \quad\quad +2x$	$x+\lambda$
$\lambda x^2 \quad\quad -6$ $-\lambda x^2 \quad\quad +2\lambda$	
$2\lambda-6$	

άρα $\pi(x)=x+\lambda,\ \upsilon(x)=2\lambda-6$

Γ2. Πρέπει $\upsilon=0 \Leftrightarrow 2\lambda-6=0 \Leftrightarrow \lambda=3$

Γ3. $P(x)\le 0 \Leftrightarrow x^3+3x^2-2x-6\le 0 \overset{(\Gamma 1)}{\Leftrightarrow} (x^2-2)(x+3)\le 0$

άρα $P(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-3]\cup[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

Γ4. Έστω $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha\neq 0$ Άρα $f(0)=0\Rightarrow \gamma=0$ άρα $\alpha x^2+\beta x$

$$f(x)-f(x-2)=4x \Leftrightarrow \alpha x^2+\beta x-\alpha(x-2)-\beta(x-2)=4x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha x^2+\beta x-\alpha x^2+4\alpha x-4\alpha-\beta x+2\beta=4x \Leftrightarrow 4\alpha x+2\beta-4\alpha=4x \Leftrightarrow$$

Για $x\in R \Leftrightarrow \begin{cases}4\alpha=4\\ 2\beta-4\alpha=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1\\ 2\beta=4\Leftrightarrow \beta=2\end{cases}$

(Άσχετο με το υπόλοιπο Γ1, Γ2, Γ3)

Θέμα Δ

Δ1. Πεδία ορισμού f, g. D_f : $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1=e^0 \Leftrightarrow x>0 \Rightarrow x\in(0,+\infty)$

D_g : $e^x+2>0$ ισχύει για $x\in R$

Δ2. $f(\ln 2)=\ln\left(e^{\ln 2}-1\right)=\ln(2-1)=\ln 1=0$

$g(-1)=\ln\left(e^{-1}+2\right)=\ln\left(\frac{1}{e}+2\right)>0$ αφού $\frac{1}{e}+2>1$ άρα $g(-1)>f(\ln 2)$

Δ3. Πρέπει $e^x-1>0 \Leftrightarrow x>0$

$$x+f(x)=\ln 2+g(x) \Leftrightarrow x+\ln\left(e^{x-1}\right)=\ln 2+\ln\left(e^x+2\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln e^x+\ln\left(e^{x-1}\right)=\ln 2+\ln\left(e^x+2\right) \Leftrightarrow \ln\left(e^x\left(e^x-1\right)\right)=\ln\left(2\left(e^x+2\right)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{2x}-e^x=2e^x+4 \Leftrightarrow e^{2x}-3e^x-4=0 \Leftrightarrow e^x=-1 \text{ απορ. ή } e^x=4$$

$$\text{άρα } e^x=4 \Leftrightarrow x=\ln 4$$

Δ4. Πρέπει x>0 $\quad x^{\frac{5+\log x}{3}}=100^{5+\log x} \Leftrightarrow x^{\frac{5+\log x}{3}}=10^{10+2\log x} \Leftrightarrow$ (Λογαριθμίζουμε)

$$\Leftrightarrow \frac{5+\log x}{3}\cdot \log x = 10 + 2\log x \Leftrightarrow 5\log x + \log^2 x = 30 + 6\log x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log^2 x - \log x - 30 = 0 \Leftrightarrow \log x = 6 \quad ή \quad \log x = -5$$

Δηλαδή $\log x = 6 \Leftrightarrow x = 10^6$ ή $\log x = -5 \Leftrightarrow x = 10^{-5} = \frac{1}{10^5}$

42ο

Θέμα Β

Β1. Εφόσον $P(x)$ είναι 3ου βαθμού έχουμε: $\begin{cases} \alpha^2 - 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1 \\ \alpha + 1 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1$

και $P(1) = -4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 + 0\cdot 1^2 - 3\cdot 1 + \beta = -4 \Leftrightarrow 1 - 3 + \beta = -4 \Leftrightarrow \beta = -2$

Β2. i. $P(x) = x^3 - 3x - 2$

$x^3 + 0x^2 - 3x - 2$	$x^2 + 1$
$-x^3 \qquad -x$	x
$-4x - 2$	

$\pi(x) = x$ και $\upsilon(x) = -4x - 2$

ii.

1	0	−3	−2	1
	1	1	−2	
1	1	−2	−4	

$P(x) = (x-1)(x^2 + x - 2) + (-4)$

iii. $P(x) < -4 \overset{(B2)}{\Leftrightarrow} (x-1)(x^2 + x - 2) - 4 < -4 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) < 0$

Οι ρίζες είναι $x=1$ ή $x = -2$ ή $x=1$.

Άρα $P(x) < -4$ όταν $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

Θέμα Γ

Γ1. $x + \sqrt{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > -x \quad (1)$ και $x^2 + 1 \geq 0$ αληθές για $x \in R$

Αν $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$ άρα η (1) αληθής.

Αν $x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0$ τότε η (1): $\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 > (-x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0$ αληθές.

άρα $x+\sqrt{x^2+1}>0$ για $x\in R$. Άρα $A_f=R$

2ος τρόπος: Ισχύει για $x\in R$:

$$x^2+1>x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>|x|\geq -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>-x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x>0$$

Άρα $A_f=R$

Γ2. $x_1-x\in R$ $\quad f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)=\ln\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]=$

$$=\ln\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{-1}=-f(x)$$

Άρα η f περιττή.

Γ3. $g(x)=\left(e^{f(x)}-x\right)^2-4x=\left[e^{\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}-x\right]^2-4x=\left(\sqrt{x^2+1}+x-x\right)^2=$

$$=\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-4x=x^2+1-4x=x^2-4x+4-3=(x-2)^2-3$$

άρα $g(x)=(x-2)^2-3$. Για $x\in R$ ισχύει:

$$(x-2)^2\geq 0\Leftrightarrow (x-2)^2-3\geq -3\Leftrightarrow g(x)\geq -3\Leftrightarrow g(x)\geq g(0)$$

Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο x=0 το $g(0)=-3$

Γ4. Αν θεωρήσουμε $\kappa(x)=x^2$ τότε η $g(x)=(x-2)^2\neq 3\Leftrightarrow g(x)=\kappa(x-2)-3$ άρα έχουμε 2 μονάδες προς τα δεξιά οριζόντια μετατόπιση και 3 προς τα κάτω κατακόρυφη. Για x=0: y=1 A(0,1) Για y=0: $(x-2)^2=3\Leftrightarrow x=2+\sqrt{3}$ και $x=2-\sqrt{3}$

Θέμα Δ

Δ1. Έχουμε $\left.\begin{array}{l}\left(\frac{2014}{2015}\right)^{x-3}>\left(\frac{2013}{2014}\right)^{9-2x}\\ 0<\frac{2014}{2015}<1\Leftrightarrow\left(\frac{2014}{2015}\right)^{x}\downarrow\end{array}\right\}\Rightarrow x-3<9-2x\Leftrightarrow 3x<6\Leftrightarrow x<2$

Δ2. i. Έστω $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2\overset{f^x\uparrow}{\Rightarrow}f^{x_1}<f^{x_2}$ και $x_1<x_2$:

$$\left.\begin{array}{l}f^{x_1}<f^{x_2}\\ x_1<x_2\end{array}\right\}(+)\Rightarrow f^{x_1}+x_1<f^{x_2}+x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\quad \text{άρα η } f\uparrow \text{ στο R.}$$

ii. $7^{x^2-17x}+x^2-17<7^{90-16x}+90-16x\Leftrightarrow f(x^2-17x)<f(90-16x)\Leftrightarrow$

$$\overset{\uparrow}{\Leftrightarrow}x^2-17x<90-16x\Leftrightarrow x^2-x-90<0\Leftrightarrow -9<x<10$$