Κεφάλαιο 4ο ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§ 4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ-ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 393-593

393. $3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=(\alpha+\beta+\gamma)^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha=\beta$ και $\beta=\gamma$ και $\gamma=\alpha$. Άρα P(x)=0.

394. Για κάθε $x \in R-\{2,3\}$ ισχύει:

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6}=\frac{\alpha}{x-2}+\frac{\beta}{x-3} \Leftrightarrow 2x+1=\alpha(x-3)+\beta(x-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=\alpha x-3\alpha+\beta x-2\beta \Leftrightarrow 2x+1=(\alpha+\beta)x-3\alpha-2\beta$$

Άρα πρέπει: $\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ -3\alpha-2\beta=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha+2\beta=4\\ -3\alpha-2\beta=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-5\\ \beta=7\end{cases}$

395. **i.** Είναι

$$P(x)+Q(x)=0 \Leftrightarrow (\alpha^2-3)x^3+(\beta-2)x^2+(3\alpha-2\beta)x+\alpha+2x^3+\alpha x^2+9x+\gamma=0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^2-1)x^3+(\beta+\alpha-2)x^2+(3\alpha-2\beta+9)x+\alpha+\gamma=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2-1=0,\ \beta+\alpha-2=0,\ 3\alpha-2\beta+9=0$$

και $\alpha+\gamma=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha=-1,\ \beta=3,\ \gamma=1$.

Η τιμή α=1 απορρίπτεται διότι η δεύτερη εξίσωση μας δίνει β=1 ενώ η τρίτη 10=0 άτοπο.

ii. Έχουμε: $P(x)+Q(x)=\kappa$, όπου $\kappa \in R^*$.

$$P(x)+Q(x)=\kappa \Leftrightarrow (\alpha^2-1)x^3+(\alpha+\beta-2)x^2+(3\alpha-2\beta+9)x+\alpha+\gamma=\kappa \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \alpha^2-1=0$ και $\alpha+\beta-2=0$ και $3\alpha-2\beta+9=0$

και $\alpha+\gamma=\kappa \Leftrightarrow \alpha=-1$ και β=3 και $\gamma=\kappa+1\neq 1$.

iii. $P(x)+Q(x)=(\alpha^2-1)x^3+(\alpha+\beta-2)x^2+(3\alpha-2\beta+9)x+\alpha+\gamma$

πρέπει: $\alpha^2-1\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq \pm 1$

iv. Το P(x)+Q(x) για να είναι το πολύ τρίτου βαθμού πρέπει:

$\alpha^2-1\neq 0$ ή $\alpha+\beta-2\neq 0$ ή $3\alpha-2\beta+9\neq 0$ ή $\alpha+\gamma\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha\neq\pm 1$ ή $\beta+\alpha\neq 2$ ή $3\alpha-2\beta\neq -9$ ή $\alpha+\gamma\neq 0$

Δηλαδή ένας τουλάχιστον από τους συντελεστές το πολυωνύμου P(x)+Q(x) να είναι διάφορος του 0.

396. Αν

$(\alpha-1)(\alpha^2-9)\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 1$ και $\alpha\neq\pm 3$ τότε το πολυώνυμο είναι τρίτου βαθμού.

Για να είναι 2ου βαθμού πρέπει: $\begin{cases}(\alpha-1)(\alpha^2-9)=0\\ \alpha^2-4\alpha+3\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1 \text{ ή } \alpha=\pm 3\\ \alpha\neq 1 \text{ και } \alpha\neq 3\end{cases}$ άρα $\alpha=-3$.

Για να είναι μηδενικού βαθμού πρέπει:

$$\begin{cases}(\alpha-1)(\alpha^2-9)=0\\ \alpha^2-4\alpha+3=0\\ 3\alpha-9\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1 \text{ ή } \alpha=\pm 3\\ \alpha=1 \text{ ή } \alpha=3\\ \alpha\neq 3\end{cases} \quad \text{άρα } \alpha=1.$$

397. **i.** Σε κάθε πολυώνυμο

$$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0 \quad \text{ισχύει}$$

$$P(1)=\alpha_\nu+\alpha_{\nu-1}+\ldots+\alpha_1+\alpha_0 .$$

Δηλαδή το άθροισμα των συντελεστών κάθε πολυωνύμου P(x) είναι ίσο με το P(1). Οπότε

$$P(1)=(1-3+2)^{2003}+(1+3-2)^{2004}=2^{2004}$$

ii. Έστω ότι τα πολυώνυμα f(x) και g(x) έχουν άθροισμα συντελεστών ίσο με 1. Τότε είναι f(1)=1 και g(1)=1. Αν Q(x)=f(x)g(x), τότε $Q(1)=f(1)g(1)=1\cdot 1=1$.

Δηλαδή και το γινόμενό τους έχει άθροισμα συντελεστών 1.

398. Για να είναι το κλάσμα ανεξάρτητο του x θα πρέπει:

$$\frac{(\alpha-5)x^2+(\beta+1)x+\gamma-8}{x^2-2x+5}=\kappa, \quad \kappa\in R^* .$$

Δηλαδή είναι: $(\alpha-5)x^2+(\beta+1)x+\gamma-8=\kappa(x^2-2x+5)$

$$\text{Άρα } \begin{cases}\alpha-5=\kappa\\ \beta+1=-2\kappa\\ \gamma-8=5\kappa\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\kappa+5\\ \beta=-2\kappa-1\\ \gamma=5\kappa+8\end{cases}$$

Από την α+β+γ=0 έχουμε: $\kappa=-3$ οπότε α=2, β=5, $\gamma=-7$.

399. Πρέπει P(1)=0 και P(2)=0. Δηλαδή

$$1^4+(\alpha+\beta-1)1^3+(-\alpha+\beta)1^2+(\alpha+4\beta-5)1+12=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha+6\beta=-7 \text{ και}$$

$$2^4+(\alpha+\beta-1)2^3+(-\alpha+\beta)2^2+(\alpha+4\beta-5)2+12=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 3\alpha+10\beta=-5$$

Τελικά α=5 και $\beta=-2$.

400. Πρέπει P(1)=0 δηλαδή

$$(4\alpha^2+\beta^2)1^4-4\beta(\alpha+1)1^3+2(2-\alpha)1^2+1+\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\ldots \Leftrightarrow (2\alpha-\beta)^2+(\alpha-1)^2+(\beta-2)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=1 \text{ και } \beta=2$$

401. **α.** Πρέπει

$$x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+1=(x^2-x+1)^2 \text{ ή}$$

$$x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+1=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$$

οπότε $\alpha=-2$, β=3, $\gamma=-2$

β. Είναι

$$P(x)=(x^2-x+1)^2\geq\frac{9}{16}\Leftrightarrow(x^2-x+1)^2-\frac{9}{16}\geq 0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow(4x^2-4x+1)(4x^2-4x+7)\geq 0$$

που ισχύει διότι και τα δύο τριώνυμα έχουν μη θετική διακρίνουσα και συντελεστές μεγιστοβάθμιων όρων θετικούς. Η ισότητα ισχύει όταν $x=\frac{1}{2}$.

402. Έχουμε

$$P(1)<0\Leftrightarrow 1^5+1^4+1^3+(|\lambda+1|-5)1<0\Leftrightarrow|\lambda+1|<2\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow-3<\lambda<1$$

403. Έχουμε

$$1<P(x)\leq 3\Leftrightarrow 1<\lambda^2-5\lambda+7\leq 3$$

Λύνοντας το σύστημα των ανισώσεων έχουμε $1\leq\lambda<2$ ή $3<\lambda\leq 4$.

404. Το Q(x) είναι 2ου βαθμού δηλαδή

$$Q(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma.$$

Έχουμε

$$(2x-1)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)+(2x-1)^2=2x^3-5x^2-4x+3\Leftrightarrow$$

$$\ldots\Leftrightarrow 2\alpha x^3+(2\beta-\alpha+4)x^2+(2\gamma-\beta-4)x-\gamma+1=2x^3-5x^2-4x+3$$

οπότε $2\alpha=2$, $2\beta-\alpha+4=-5$, $2\gamma-\beta-4=-4$ και $-\gamma+1=3$. Τελικά $\alpha=1$, $\beta=-4$, $\gamma=-2$.

§ 4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

405. **α.** Με το σχήμα Horner για $\rho=3$ έχουμε:

1	−6	11	−2	$\rho=3$
↓	3	−9	6	
1	−3	2	4	

Επομένως το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης είναι

$$\upsilon=4 \quad \text{και} \quad \pi(x)=x^2-3x+2.$$

β. Με το σχήμα Horner για $\rho=3$ έχουμε:

1	−6	11	λ	$\rho=3$
↓	3	−9	6	
1	−3	2	$\lambda+6$	

Είναι $\upsilon=\lambda+6\Leftrightarrow 0=\lambda+6\Leftrightarrow\lambda=-6$.

406. **α.** Είναι:

$$P(x)=-2x^3+\lambda^2(x^2-1)+\lambda(x^3-1)+\lambda+9=(\lambda-2)x^3+\lambda^2x^2-\lambda^2+9 \text{ και}$$

$$Q(x)=(\lambda+12)x^2+(\lambda-2)x^3+(\lambda^2-9)x=(\lambda-2)x^3+(\lambda+12)x^2+(\lambda^2-9)x$$

Επομένως :

- Αν $\lambda\neq 2$ είναι και τα δυο πολυώνυμα 3^{ου} βαθμού
- Αν $\lambda=2$ είναι και τα δυο πολυώνυμα 2^{ου} βαθμού

Άρα ούτε διαφωνώ, ούτε συμφωνώ με την άποψη του μαθητή , αφού άλλοτε είναι σωστή και άλλοτε λάθος .

β. Από τον ορισμό της ισότητας δυο πολυωνύμων, αρκεί :

$$\begin{cases}\lambda-2=\lambda-2\\ \lambda^2=\lambda+12\\ \lambda^2-9=0\\ -\lambda^2+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=-3 \ \text{ ή } \ \lambda=4\\ \lambda=-3 \ \text{ ή } \ \lambda=3\end{cases}\Leftrightarrow \lambda=-3$$

407. **α.** Το πολυώνυμο

$P(x)$ διαιρούμενο με $(x+1)$ αφήνει υπόλοιπο $16+P(1)$ και διαιρούμενο με $(x-1)$ αφήνει υπόλοιπο $16-P(-1)$,

άρα είναι:

$$\begin{cases}P(-1)=16+P(1)\\ P(1)=16-P(-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P(-1)-P(1)=16\\ P(-1)+P(1)=16\end{cases}\Leftrightarrow P(-1)=16 \ \text{ και } \ P(1)=0$$

β. Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $P(-1)=16$ και $P(1)=0$, άρα:

$$\begin{cases}P(1)=0\\ P(-1)=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-12+8+\alpha+\beta=0\\ 3+12+8-\alpha+\beta=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ -\alpha+\beta=-7\end{cases}\Leftrightarrow \alpha=4 \ \text{ και } \ \beta=-3$$

γ. Για $\alpha=4$ και $\beta=-3$ είναι $P(x)=3x^4-12x^3+8x^2+4x-3$.

Αλλά οι αριθμοί 4, 5, 6 και 7 δεν είναι διαιρέτες του σταθερού όρου -3, άρα οι αριθμοί 4, 5, 6 και 7 δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$, δηλαδή

$$P(4)\neq 0,\ P(5)\neq 0,\ P(6)\neq 0,\ P(7)\neq 0.$$

Επομένως είναι: $P(4)\cdot P(5)\cdot P(6)\cdot P(7)\neq 0$.

408. Με σχήμα Horner για την τιμή 8 έχουμε

$$\Delta(x):(x-8)=2x^2-3x+1.$$

Άρα $\delta(x)=2x^2-3x+1$.

409. Έχουμε

$f(x)+f(x-1)-f(x+2)=...=x^2-9x+8$. $\pi(x)=x-1$ υπόλοιπο το 0.

410. Πηλίκο της διαίρεσης το

$2x^2-3x+1$ και υπόλοιπο το $(\alpha+1)x^2+\beta-1$.

Πρέπει α+1=0 και $\beta-1=0$, δηλαδή $\alpha=-1$ και β=1.

411. Πρέπει

$$P(-1)=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \lambda=2 .$$

Για λ=2 έχουμε $P(x)=x^4-x^3-2x-4=(x^4-4)-x(x^2+2)=\ldots=(x^2+2)(x-2)(x+1)$

412. Πρέπει:

$$P(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2=0 .$$

Εφαρμόζουμε για το $\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2$ το σχήμα Horner για την τιμή 1. Έχουμε

$$\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2=(\lambda-1)(\lambda^2+3\lambda+2)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)$$

Άρα το αρχικό πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x-\lambda$, για λ=1 ή $\lambda=-1$ ή $\lambda=-2$.

413. Κάνουμε τη διαίρεση

$P(x):(x-1)$ (με σχήμα Horner) και έχουμε

$\pi_1(x)=x^3+2x^2+4x-7$ και $\upsilon_1=0$. Άρα $P(x)=(x-1)\pi_1(x)$

Κάνουμε τη διαίρεση $\pi_1(x):(x-1)$ (με σχήμα Horner) και έχουμε

$\pi_2(x)=x^2+3x+7$. Άρα $\pi_1(x)=(x-1)\pi_2(x)$ που σημαίνει ότι το $(x-1)^2$ διαιρεί το P(x) και το πηλίκο της διαίρεσης είναι το $\pi_2(x)=x^2+3x+7$

414. Έχουμε

1	3	0	0	–2	–4
	–4	4	–16	64	
1	–1	4	–16	62	

Άρα $\pi(x)=x^3-x^2+4x-16$ και υ(x)=62

415. Από την ταυτότητα της διαίρεσης

$P(x):(x^2-1)$ έχουμε $P(x)=(x^2-1)\pi(x)+x+3$ (1).

Το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x):(x+1) είναι το $\upsilon=P(-1)$. Από την (1) για $x=-1$ έχουμε:

$P(-1)=0\cdot\pi(x)-1+3=2$. Άρα υ=2.

416. Έστω π(x) το πηλίκο της διαίρεσης. Τότε

$$P(x)=(x^2-3x+2)\pi(x)+3x+1 \Leftrightarrow P(x)=(x-1)(x-2)\pi(x)+3x+1$$

Για x=1 και x=2 παίρνουμε: $\begin{cases}P(1)=4\\P(2)=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=3\\2\alpha+\beta=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-4\\\beta=7\end{cases}$

417. Το υπόλοιπο της διαίρεσης

$P(x):(x-\alpha)$ είναι P(α) και της $P(x):(x-\beta)$ είναι P(β). Άρα: $P(x)=(x-\alpha)\pi_1(x)+P(\alpha)$ (1) $P(x)=(x-\beta)\pi_2(x)+P(\beta)$ (2)

Από (1) για x=β έχουμε: $\pi_1(\beta)=\dfrac{P(\beta)-P(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Από (2) για x=α έχουμε: $\pi_2(\alpha)=\dfrac{P(\alpha)-P(\beta)}{\alpha-\beta}\Leftrightarrow \pi_2(\alpha)=\dfrac{P(\beta)-P(\beta)}{\beta-\alpha}=\pi_1(\beta)$.

418. Είναι $x^2-4x+4=(x-2)^2$. Αν ονομάσουμε π(x) το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$ πρέπει να δείξουμε ότι P(2)=0 και π(2)=0.

Για να βρούμε το π(x) εφαρμόζουμε το σχήμα του Horner για την τιμή 2. Έχουμε:

1	–4	5	–4	4	**2**
	2	–4	2	–4	
1	–2	1	–2	0	

Είναι P(2)=0 και $P(x)=(x-2)(x^3-2x^2+x-2)$

Δηλαδή $\pi(x)=x^3-2x^2+x-2$ και έχουμε: $\pi(2)=2^3-2\cdot2^2+2-2=0$.

419. Είναι:

$$x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)\ .$$

Το ζητούμενο υπόλοιπο είναι το πολύ 2ου βαθμού. Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε: $P(x)=(x^3+x^2-2x)\pi(x)+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ Οπότε: Για x=0 έχουμε: γ=2. Για x=1 έχουμε: $(\alpha+\beta)=-1$ (1) και για $x=-2$: $4\alpha-2\beta=8$ (2). Από τις (1) και (2) έχουμε α=1 και $\beta=-2$. Άρα $\upsilon(x)=x^2-2x+2$

420. Το υπόλοιπο θα είναι το πολύ 2ου βαθμού. Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε: $(2x^2-1)^{2004}+3(x^2-1)^{1821}-7x^{1453}+6x-3=x(x-1)(x+1)\pi(x)+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (1)

Για x=0 από την (1) έχουμε $\gamma=-5$.Για x=1 από την (1) έχουμε α+β=2 (2).

Για $x=-1$ από την (1) έχουμε $(\alpha-\beta)=4$ (3).

Από (2) και (3) βρίσκουμε α=3 και $\beta=-1$. Άρα $\upsilon(x)=3x^2-x-5$.

421. Είναι

$$Q(x)=x(x-1)(x-3)\text{. Οπότε:}$$

Το x είναι παράγοντας του P(x) αν και μόνον αν $P(0)=0\Leftrightarrow\gamma=0$

Το $x-1$ είναι παράγοντας του P(x) αν και μόνο αν $P(1)=0\Leftrightarrow\alpha+\beta=11$

Το $x-3$ είναι παράγοντας του P(x) αν και μόνο αν $P(3)=0\Leftrightarrow3\alpha+\beta=-5$

Άρα: $\alpha=-8$, β=19, γ=0.

422. Κάνουμε τη διαίρεση

$P(x):(x-2)$ με σχήμα Horner.

2	5	–9	–18	**2**
	4	18	18	
2	9	9	0	

Οπότε $\pi_1(x) = 2x^2 + 9x + 9$ και $P(x) = (x-2)\pi_1(x)$.

Κάνουμε τη διαίρεση $\pi_1(x) : (x+3)$

2	9	9	–3
	–6	–9	
2	3	0	

Οπότε $\pi_2(x) = 2x + 3$ και $\pi_1(x) = (x+3)\pi_2(x)$. Άρα $P(x) = (x-2)(x+3)(2x+3)$ που σημαίνει ότι το P(x) διαιρείται με το $(x-2)(x+3)$ και το πηλίκο είναι $\pi_2(x) = 2x + 3$

423. Το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x):(x+2) είναι

$$\upsilon = P(-2) \Leftrightarrow 6 = \alpha(-2)^3 - \beta(-2)^2 - 5(-2) + 4 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 2 \quad (1)$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x-1)$ είναι $\upsilon = P(1) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \alpha - \beta = 3$ (2).

Το σύστημα των (1), (2) δίνει: $\alpha = \frac{5}{3}, \beta = -\frac{4}{3}$

424. Το υπόλοιπο θα είναι το πολύ 1ου βαθμού. Έστω λοιπόν ότι υ(x)=αx+β. Είναι:

$$P(x) = (x^2 - 4x + 3)\pi(x) + (\alpha x + \beta)$$

Για x=1 παίρνουμε $P(1) = 0 \cdot \pi(1) + \alpha + \beta$ δηλ. α+β=5

Για x=3 παίρνουμε $P(3) = 0 \cdot \pi(3) + 3\alpha + \beta$ δηλ. 3α+β=5

$$\text{Άρα: } \begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ 3\alpha + \beta = 5 \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 5 \end{cases} \text{ οπότε υ=5.}$$

425. Είναι

$$P(x)=(x+1)\pi(x)+3. \text{ Για } x = -1: \ P(-1) = 3$$

Για να είναι $Q(x) : (x-2)$ τέλεια διαίρεση, αρκεί να δείξουμε ότι Q(2)=0.

Για x=2 έχουμε: $Q(2) = P(2 \cdot 2 - 5) - 2^2 + 2 - 1 \Leftrightarrow Q(2) = P(-1) - 3 \Leftrightarrow Q(2) = 0$.

426. Αν προσθέσουμε τον πραγματικό κ στο P(x) και εφαρμόσουμε το σχήμα Horner, για την τιμή $\frac{1}{2}$ έχουμε:

4	–2	6	$\kappa - 5$	$\frac{1}{2}$
	2	0	3	
4	0	6	$\kappa - 2$	

$$\text{πρέπει } \kappa - 2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 2.$$

427. **i.** Πρέπει

$$P(-3) = 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow 9\lambda + 27 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3$$

ii. $\upsilon = P(-2) = 2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \lambda = -6$

$$\text{Πρέπει να είναι: } \upsilon = 6 \Leftrightarrow 4\lambda + 26 = 2 \Leftrightarrow \lambda = -6$$

428. Έχουμε:

$$\begin{cases} P(-2)=0 \\ P(3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa+2\lambda=14 \\ 33\kappa+6\lambda=102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa=2 \\ \lambda=6 \end{cases}$$

Το πολυώνυμο είναι $P(x)=4x^4-4x^3-25x^2+x+6$

4	–4	–25	1	6	–2
	–8	24	2	–6	
4	–12	–1	3	0	

Άρα $P(x)=(x+2)(4x^3-12x^2-x+3)$

4	–12	–1	3	3
	12	0	–3	
4	0	–1	0	

Άρα: $P(x)=(x+2)(x-3)(4x^2+1)=(x+2)(x-3)(2x+1)(2x-1)$

429. Το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι

$$\upsilon_1=P(-2)=6\alpha+1,\quad \upsilon_2=Q(-2)=-2\alpha+25.$$

Όμως $\upsilon_1=\upsilon_2$ άρα $6\alpha+1=-2\alpha+25 \Leftrightarrow \alpha=3$.

430. Έχουμε

$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$. Πρέπει: $\begin{cases} P(1)=0 \\ P(-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha-\beta=-7 \\ -\alpha+\beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=3 \end{cases}$

431. υ=P(2)=…….=6.

432. Το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι το πολύ 1ου βαθμού, δηλαδή υ(x)=αx+β. Έχουμε:

$$P(x)=(x-1)(x+2)\pi(x)+\alpha x+\beta$$

Για x=1 και $x=-2$ έχουμε διαδοχικά: P(1)=α+β=3 και $P(-2)=-2\alpha+\beta=9$

Είναι: $\begin{cases} \alpha+\beta=3 \\ -2\alpha+\beta=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=5 \\ \alpha=-2 \end{cases}$ Άρα $\upsilon(x)=-2x+5$

433. Έχουμε

$$\upsilon=P\left(-\frac{1}{2}\right)=8\mu\left(-\frac{1}{2}\right)^3+(\mu-1)\left(-\frac{1}{2}\right)+3=-\mu-\frac{\mu-1}{2}+3=\frac{-3\mu+7}{2}$$

Όμως υ=5 άρα $\dfrac{-3\mu+7}{2}=5 \Leftrightarrow \mu=-1$

434. Εφαρμόζουμε σχήμα Horner στο P(x) για την τιμή 2. Έχουμε:

α	–5	β	12	2
	2α	$4\alpha-10$	$8\alpha+2\beta-20$	
α	$2\alpha-5$	$4\alpha+\beta-10$	$8\alpha+2\beta-8$	

Πρέπει να είναι $\upsilon = 0 \Leftrightarrow 4\alpha + \beta = 4$ (1).

Ακόμη το $\pi(x) = \alpha x^2 + (2\alpha - 5)x + (4\alpha + \beta - 10)$ πρέπει να διαιρείται με το $x - 2$. Δηλαδή θα είναι: $\pi(2) = 0 \Leftrightarrow 12\alpha + \beta = 20$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε: $\alpha = 2,\ \beta = -4$

435. Έχουμε

$$g(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι το P(x) έχει τις ίδιες ρίζες με το g(x), τις 1 και 2. Πράγματι:

$$P(1) = (1-2)^{2k} + (1-1)^k - 1 = 0 \qquad P(2) = (2-2)^{2k} + (2-1)^k - 1 = 0$$

436. Έχουμε

$$P(x) = \nu x^{\nu+2} - \nu x^{\nu+1} - \nu x + \nu = \nu(x-1)(x^{\nu+1} - 1).$$

Το P(x) διαιρείται με το $x-1$. Αρκεί να δείξουμε ότι το $(x^{\nu+1} - 1)$ διαιρείται με το $x-1$, δηλαδή θα πρέπει για x=1 να μηδενίζεται το πολυώνυμο. Πράγματι είναι: $1^{\nu+1} - 1 = 0$.

437. Έχουμε

$P(-\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha = \beta$. Επομένως: $P(x) = x^3 + \beta x^2 + x + \beta = (x+\beta)(x^2+1)$.

§ 4.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

438. **α.** Είναι

$$P(3) = 3^3 - 2\cdot 3^2 + 3 - 12 = 27 - 18 + 3 - 12 = 30 - 30 = 0,$$

άρα το διώνυμο $x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β. Είναι $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x - 12 = 0$.

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες $\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm6,\ \pm12$ του σταθερού όρου -12. Με το σχήμα Horner για $\rho = 3$ έχουμε:

1	−2	1	−12	ρ = 3
↓	3	3	12	
1	1	4	0	

Άρα $x^3 - 2x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

439. **α.** Το πολυώνυμο

$P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 11x + 30$ έχει ρίζα το 5, άρα είναι:

$$P(5) = 0 \Leftrightarrow 5^3 + \alpha\cdot 5^2 - 11\cdot 5 + 30 = 0 \Leftrightarrow 125 + 25\alpha - 55 + 30 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\alpha = -100 \Leftrightarrow \alpha = -4.$$

β. Για $\alpha = -4$ είναι $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0$.

Γνωρίζουμε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 5, άρα με το σχήμα Horner για $\rho = 5$ έχουμε:

1	-4	-11	30	$\rho = 5$
$\downarrow$	5	5	-30	
1	1	-6	0	

Άρα $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -3$ ή $x = 2$.

440. **α.** Είναι

$$P(1) = 16 \Leftrightarrow 1^3 + \alpha \cdot 1^2 - 11 \cdot 1 + 30 = 16 \Leftrightarrow \alpha = -4 .$$

β. Για $\alpha = -4$, είναι $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0$, οπότε επειδή το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης, με το σχήμα Horner έχουμε:

1	-4	-11	30	$\rho = 2$
$\downarrow$	2	-4	-30	
1	-2	-15	0	

Άρα $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 2x - 15) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 5$ ή $x = -3$.

441. **α.** Το πολυώνυμο

$P(x) = x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ έχει ρίζες τους αριθμούς 0, 1 και 3,

άρα είναι:

$$\begin{cases} P(0) = 0 \\ P(1) = 0 \\ P(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 0 \\ 1 + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ 27 + 9\beta + 3\gamma + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 0 \\ \beta + \gamma = -1 \\ 3\beta + \gamma = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 0 \\ \beta = -4 \\ \gamma = 3 \end{cases}$$

β. Για $\beta = -4$, $\gamma = 3$ και $\delta = 0$ είναι $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, οπότε έχουμε:

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = 3 .$$

Άρα έχουμε: $x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ ή $x \geq 3$

x	$-\infty$ 0	1	3	$+\infty$
x	$-$	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 4x + 3$	$+$	$+$	$-$	$+$
$P(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Επομένως $x \in (-\infty, 0) \cup (1, 3)$.

442. **α.** Το πολυώνυμο

$P(x) = \lambda^2 x^3 - 4\lambda x + 3$ έχει παράγοντα το $x - 1$, άρα είναι:

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 3.$$

β. Για $\lambda = 3$ είναι $P(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^3 - 12x + 3 = 0 \Leftrightarrow 3x^3 - 4x + 1 = 0$.

Γνωρίζουμε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1, άρα με το σχήμα Horner για $\rho = 1$ έχουμε:

3	0	-4	1	$\rho = 1$
$\downarrow$	3	3	-1	
3	3	-1	0	

Άρα $3x^3 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 3x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = \frac{-3 - \sqrt{21}}{6} \text{ ή } x = \frac{-3 + \sqrt{21}}{6}.$$

443. **α.** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = 2x^4 - x^3 + \alpha x^2 - 5x + 6$ διέρχεται από το σημείο $M(-2, 0)$, άρα είναι:

$$f(-2) = 0 \Leftrightarrow 32 + 8 + 4\alpha + 10 + 6 = 0 \Leftrightarrow 4\alpha = -56 \Leftrightarrow \alpha = -14.$$

β. Για $\alpha = -14$ είναι $f(x) = 2x^4 - x^3 - 14x^2 - 5x + 6$.

- Σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = 2 \cdot 0^4 - 0^3 - 14 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6$, άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 6)$.

- Σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$

Για $f(x) = 0$ είναι $2x^4 - x^3 - 14x^2 - 5x + 6 = 0$, οπότε με σχήμα Horner για $\rho = -2$ έχουμε:

2	-1	-14	-5	6	$\rho = -2$
$\downarrow$	-4	10	8	-6	
2	-5	-4	3	0	

Άρα $2x^4 - x^3 - 14x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(2x^3 - 5x^2 - 4x + 3) = 0$,

και με το σχήμα Horner για $\rho = 3$ έχουμε:

2	-5	-4	3	$\rho = 3$

$\downarrow$	6	3	-3
2	1	-1	0

Άρα

$$2x^4-x^3-14x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow (x+2)(2x^3-5x^2-4x+3)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-3)(2x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ ή } x=3 \text{ ή } 2x^2+x-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ ή } x=3 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x=\frac{1}{2}.$$

Επομένως η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $B(-2,0)$, $\Gamma(3,0)$, $\Delta(-1,0)$, $E\left(\frac{1}{2},0\right)$.

444. α Έχουμε

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-10x^2+9x-2 & 3x^2-4x+1 \\ \hline \underline{-3x^3+4x^2-x} & x-2 \\ -6x^2+8x-2 & \\ \underline{6x^2-8x+2} & \\ 0 & \end{array}$$

Άρα είναι $3x^3-10x^2+9x-2=(x-2)(3x^2-4x+1)$.

β. Είναι $P(x)=0 \Leftrightarrow 3x^3-10x^2+9x-2=0 \Leftrightarrow (x-2)(3x^2-4x+1)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ ή } 3x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=\frac{1}{3}.$$

445. **α.** Τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ έχουν ως τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3+x^2-5x+2=0.$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι ±1, ±2, οπότε με σχήμα Horner για $\rho=1$ έχουμε:

2	1	-5	2	$\rho=1$
$\downarrow$	2	3	-2	
2	3	-2	0	

Άρα είναι $2x^3+x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+3x-2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-2$ ή $x=\frac{1}{2}$,οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(1,0)$, $B(-2,0)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2},0\right)$.

β. Αρκεί να βρούμε τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει:

$$f(x)<0 \Leftrightarrow 2x^3+x^2-5x+2<0 \Leftrightarrow (x-1)\left(2x^2+3x-2\right)<0.$$

Άρα έχουμε:

- $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$
- $2x^2+x-3\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -2$ ή $x\geq \frac{1}{2}$

x	$-\infty$ -2	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$2x^2+3x-2$	$+$	$-$	$+$	$+$
$P(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Επομένως $x\in(-\infty,-2)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$.

446. **α.** Το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το 1 και το υπόλοιπο της διαιρεσής του με το $x-2$ είναι ίσο με -4, άρα:

$$\begin{cases}P(1)=0\\P(2)=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+\alpha-5+\beta=0\\8+4\alpha-10+\beta=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=4\\4\alpha+\beta=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-2\\\beta=6\end{cases}$$

β. Για $\alpha=-2$ και $\beta=6$ είναι $P(x)=x^3+\alpha x^2-5x+\beta=x^3-2x^2-5x+6$, οπότε είναι $P(x)=0 \Leftrightarrow x^3-2x^2-5x+6=0$.

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι ±1, ±2, ±3, ±6, οπότε με σχήμα Horner για $\rho=1$ έχουμε:

1	-2	-5	6	$\rho=1$
$\downarrow$	1	-1	-6	
1	-1	-6	0	

Άρα είναι $x^3-2x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-x-6\right)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$ ή $x=-2$.

447. **α.** Το πολυώνυμο

$P(x)$ έχει παράγοντα το $x+1$ και $P(2)=18$, άρα:

- $P(-1)=0 \Leftrightarrow -1+\alpha-\beta+2=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta=-1 \quad (1)$ και
- $P(2)=18 \Leftrightarrow 8+4\alpha+2\beta+2=18 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=4 \quad (2)$.

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις (1) και (2), οπότε προκύπτει $\alpha=1$ και $\beta=2$.

β. Η εξίσωση $P(x)=0$ για $\alpha=1$ και $\beta=2$ γράφεται:

$x^3+x^2+2x+2=0 \Leftrightarrow x^2(x+1)+2(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2)=0 \Leftrightarrow x=-1$ (επειδή $x^2+2\neq 0$, για κάθε $x\in R$).

γ. Είναι $P(x)\leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2) \Leftrightarrow x\leq -1$ (επειδή $x^2+2>0$, για κάθε $x\in R$).

448. **α.** Αφού το 2 είναι ρίζα του P(x) έχουμε

$$P(2)=0 \Leftrightarrow 2^3+(\kappa-6)2^2-7\cdot 2+\kappa=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \kappa=6$$

β. Για κ=6 είναι $P(x)=x^3-7x+6$

Κάνουμε σχήμα Horner με το 1

1	0	-7	6	$\rho=1$
$\downarrow$	1	1	-6	
1	1	-6	0	

Σύμφωνα με το σχήμα Horner ισχύει $x^3-7x+6=(x-1)(x^2+x+6)$

Είναι

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+6)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } x^2+x+6=0$$
$$\Leftrightarrow [x=1 \text{ ή } (x=2 \text{ ή } x=-3)]$$

449. **α.** Έχουμε

$$P(1)=10 \Leftrightarrow 1^3+\alpha\cdot 1^2+\beta\cdot 1+6=10 \Leftrightarrow \alpha+\beta=3 \quad (1)$$
$$P(2)=10 \Leftrightarrow 2^3+\alpha\cdot 2^2+\beta\cdot 2+6=10 \Leftrightarrow 4\alpha+2\beta=-4 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=-2 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) έχουμε $\alpha=-5$ και $\beta=8$

β. $P(x)>10 \Leftrightarrow x^3-5x^2+8x+6>10 \Leftrightarrow x^3-5x^2+8x-4>0$

Έστω $Q(x)=x^3-5x^2+8x-4$. Τότε η $Q(x)=0$ έχει πιθανές ακέραιες ρίζες $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner για την τιμή 1.

1	–5	8	–4	$\rho=1$
↓	1	–4	4	
1	–4	4	0	

Άρα $Q(x)=(x-1)(x^2-4x+4)=(x-1)(x-2)^2$ οπότε

$$Q(x)>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2>0 \Leftrightarrow x>1 \text{ και } x\neq 2$$

450. **α.** Οι διαστάσεις του νέου κουτιού θα είναι όπως φαίνεται και στο σχήμα

$x+4,\ x+5,\ x+3$. Άρα αφού $V=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$ έχουμε

$$V=(x+4)(x+5)(x+3)=(x^2+9x+20)(x+3)=...=x^3+12x^2+47x+60$$

Όμως $V=120$ άρα $x^3+12x^2+47x+60=120 \Leftrightarrow x^3+12x^2+47x-60=0$

β. Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner για την τιμή 1

1	12	47	-60	$\rho=1$
↓	1	13	60	
1	13	60	0	

Άρα $V(x)=x^3+12x^2+47x-60=(x-1)(x^2+13x+60)$ οπότε

$$V(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } x^2+13x+60=0 \text{ αδύνατη } (\Delta=-240<0) \Leftrightarrow x=1$$

Οι διαστάσεις του νέου κουτιού θα είναι 5,6,4.

451. **α.** Για να ισχύει

$$P(x)=Q(x) \Leftrightarrow (\alpha^3+2)x^3+x^2+1=3\alpha x^3+x^2+1$$

Πρέπει $\alpha^3+2=3\alpha \Leftrightarrow \alpha^3-3\alpha+2=0$

Έστω $h(\alpha)=\alpha^3-3\alpha=2$ οπότε η εξίσωση $h(\alpha)=0$ έχει πιθανές ακέραιες ρίζες $\pm1,\pm2$

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner για την τιμη 1

1	0	-3	2	$\rho=1$
$\downarrow$	1	1	-2	
1	1	-2	0	

Άρα $h(\alpha)=\alpha^3-3\alpha+2=(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha-2)$ οπότε

$h(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha-1=0$ ή $\alpha^2+\alpha-2=0 \Leftrightarrow [\alpha=1$ ή $(\alpha=-2$ ή $\alpha=1)]$

Άρα για α=1 ή α=-2 τα είναι ίσα

β. Για α=1 έχουμε $P(x)=3x^3+x^2+1$ άρα η εξίσωση $P(x)=0 \Leftrightarrow 3x^3+x^2+1=0$ έχει πιθανές ακέραιες ρίζες ±1

Όμως $P(1)=5\neq0$ και $P(-1)=-1\neq0$ άρα η P(x)=0 δεν έχει ακέραιες ρίζες

452. **α.** Έχουμε

$$P(-1)=6 \Leftrightarrow (-1)^3+2\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)+\lambda=6 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \lambda=1$$

$$\text{Άρα} \quad P(x)=x^3+2x^2-4x+1$$

β. Η P(x)=0 έχει πιθανές ακέραιες ρίζες τις ±1

Κάνουμε σχήμα Horner με το1

1	2	-4	1	$\rho=1$
$\downarrow$	1	3	-1	
1	3	-1	0	

Άρα $P(x)=x^3+2x^2-4x+1=(x-1)(x^2+3x-1)$ οπότε

$P(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ ή $x^2+3x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $(x=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2})$

453. **α.** Έχουμε

Αφού P(x) $3^{ου}$ βαθμού πρέπει $\lambda^2-1=0 \Leftrightarrow \lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=\pm1$

Ταυτόχρονα πρέπει $-2(\lambda-1)\neq0 \Leftrightarrow \lambda\neq1$. Άρα τελικά $\lambda=-1$

β. Αφού $\lambda=-1$ έχουμε $P(x)=4x^3-2x^2$

γ. $P(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-2x^2=0 \Leftrightarrow 2x^2(2x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ (διπλή ρίζα) ή $x=\dfrac{1}{2}$

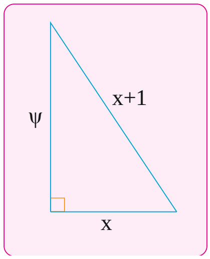
454. **α.** Έχουμε

$$P(x)=(x-2)(x^2-3x+2)+\upsilon$$

β. $P(1)=10 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \upsilon=10$

γ. Αν υ=10 τότε $P(x)=(x-2)(x^2-3x+2)+10=...=x^3-5x^2+8x+6$

455. **α.** Έστω x, y οι κάθετες πλευρές και $x+1$ η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου. Είναι $E=30 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot x\cdot y=30 \Leftrightarrow x\cdot y=60 \Leftrightarrow y=\frac{60}{x}$ (1). Επίσης από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε: $(x+1)^2=x^2+y^2$ (2).



β. Η σχέση (2) λόγω της (1) γίνεται:

$$(x+1)^2=x^2+\left(\frac{60}{x}\right)^2 \Leftrightarrow x^2+2x+1=x^2+\frac{3600}{x^2} \Leftrightarrow 2x^3+x^2-3600=0$$

γ. Με το σχήμα Horner για $\rho=12$ έχουμε:

2	1	0	–3600	$\rho=12$
$\downarrow$	24	300	3600	
2	25	300	0	

Άρα $2x^3+x^2-3600=0 \Leftrightarrow (x-12)(2x^2+25x+300)=0 \Leftrightarrow x=12$, επειδή η εξίσωση $2x^2+25x+300=0$ είναι αδύνατη. Επομένως οι πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου είναι $x=12,\ y=\frac{60}{12}=5,\ x+1=13$.

δ. Από το ερώτημα γ) προκύπτει ότι το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) έχει μοναδική λύση, την $(x,y)=(12,5)$, άρα δεν υπάρχει άλλο ορθογώνιο τρίγωνο το οποίο ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος.

456. **α.** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $A(2,0)$, άρα είναι:

- $f(0)=0 \Leftrightarrow \delta=0$
- $f(2)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\cdot 8+2\gamma+\delta=0 \overset{\delta=0}{\Leftrightarrow} \gamma=-1$

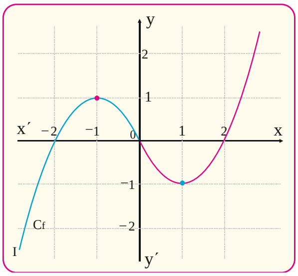
β. Για $\gamma=-1$ και $\delta=0$ είναι $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x,\ x\in\mathbb{R}$.

i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(-x)=\frac{1}{4}(-x)^3-(-x)=-\frac{1}{4}x^3+x=-f(x)$.

ii. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, οπότε:

- για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=-f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η συνάρτηση f είναι περιττή, επομένως η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς $O(0,0)$.



iii. Είναι $f(1)=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$.

- $f(x)=-\frac{3}{4}\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^3-x=-\frac{3}{4}\Leftrightarrow x^3-4x+3=0$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες $\pm1,\ \pm3$ του σταθερού όρου 3. Με το σχήμα Horner για $\rho=1$ έχουμε:

1	0	−4	3	$\rho=1$
↓	1	1	−3	
1	1	−3	0	

Άρα $x^3-4x+3=0\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-3)=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

- $f(x)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow -f(x)=-\frac{3}{4}\overset{\beta)\text{i.}}{\Leftrightarrow} f(-x)=-\frac{3}{4}\overset{\beta)\text{iii.}}{\Leftrightarrow}$

$$-x=1 \quad ή \quad -x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\Leftrightarrow x=-1 \quad ή \quad x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}.$$

457. **α.** Έστω

$$P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta,\ \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R},\ \alpha\neq0.$$

Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $x^2+2x=x(x+2)$, άρα το $P(x)$ έχει παράγοντες τους x και $x+2$. Επίσης είναι $P(1)=0$ και $P(2)=8$.΄

Άρα:

$$\begin{cases} P(0)=0 \Leftrightarrow \delta=0 \\ P(1)=0 \overset{\delta=0}{\Leftrightarrow} \alpha+\beta+\gamma=0 \quad (1) \\ P(2)=8 \overset{\delta=0}{\Leftrightarrow} 8\alpha+4\beta+2\gamma=8 \Leftrightarrow 4\alpha+2\beta+\gamma=4 \quad (2) \\ P(-2)=0 \overset{\delta=0}{\Leftrightarrow} -8\alpha+4\beta-2\gamma=0 \Leftrightarrow -4\alpha+2\beta-\gamma=0 \quad (3) \end{cases}$$

Με πρόσθεση των εξισώσεων (2) και (3) προκύπτει ότι: $4\beta=4 \Leftrightarrow \beta=1$ και για $\beta=1$ οι σχέσεις (1) και (3) γίνονται: $\begin{cases} \alpha+\gamma=-1 \\ -4\alpha-\gamma=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=1$ και $\gamma=-2$.

Επομένως $P(x)=x^3+x^2-2x$.

β. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$ του σταθερού όρου -8. Με το σχήμα Horner για $\rho=1$ και $\rho=-1$ βρίσκουμε ότι $P(1)\neq 0$ και $P(-1)\neq 0$, άρα οι 1 και -1 δεν είναι ρίζες της εξίσωσης, ενώ για $\rho=2$ έχουμε:

1	1	-2	-8	$\rho=2$
$\downarrow$	2	6	8	
1	3	4	0	

Άρα $P(x)=8 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+3x+4)=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x^2+3x+4=0$ αδύνατη.

γ. Είναι

$P(x)>2 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x-2>0 \Leftrightarrow x^2(x+1)-2(x+1)>0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-2)>0$,

οπότε έχουμε:

- $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$
- $x^2-2\geq 0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -\sqrt{2}$ ή $x\geq \sqrt{2}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		-1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x + 1	-		-	0	+		+	
x^2 - 2	+	0	-		-	0	+	
γινόμενο	-	0	+	0	-	0	+	

Άρα $(x+1)(x^2-2)>0 \Leftrightarrow x\in(-\sqrt{2},-1)\cup(\sqrt{2},+\infty)$.

458. **α.** Η ζητούμενη ευθεία, δεν είναι κατακόρυφη, άρα έχει εξίσωση της μορφής $y=\alpha x+\beta,\ \alpha,\beta\in R$ και επειδή διέρχεται από τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,-2)$ οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της. Οπότε είναι

$$\begin{cases} 1=\alpha\cdot 0+\beta \\ -2=1\cdot\alpha+\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=1 \\ \alpha=-3 \end{cases},$$

άρα η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B έχει εξίσωση $y=-3x+1$.

β. Τα κοινά σημεία της ευθείας με εξίσωση $y=-3x+1$ και της γραφικής παράστασης της f προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος:

$$\begin{cases} y=-x^3-x^2 \\ y=-3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow\ -x^3-x^2=-3x+1 \Leftrightarrow -x^3-x^2+3x-1=0 \quad (1)$$

Με την βοήθεια του σχήματος Horner έχουμε:

-1	-1	3	-1	$\rho=1$
$\downarrow$	-1	-2	1	
-1	-2	1	0	

Άρα η εξίσωση (1) γράφεται

$$(x-1)(-x^2-2x+1)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-1+\sqrt{2} \quad \text{ή} \quad x=-1-\sqrt{2}.$$

- Για $x=1$ είναι $y=-3+1=-2$,
- για $x=-1-\sqrt{2}$ είναι $y=-3\left(-1-\sqrt{2}\right)+1=4+3\sqrt{2}$,
- για $x=-1+\sqrt{2}$ είναι $y=-3\left(-1+\sqrt{2}\right)+1=4-3\sqrt{2}$

Οπότε τα ζητούμενα σημεία τομής είναι τα:

$$\Gamma\left(-1-\sqrt{2},4+3\sqrt{2}\right),\ \Delta\left(-1+\sqrt{2},4-3\sqrt{2}\right),\ B(1,-2)$$

γ. $-x^3-x^2<-3x+1 \Leftrightarrow -x^3-x^2+3x-1<0 \Leftrightarrow (x-1)(-x^2-2x+1)<0$

Το πρόσημό του $P(x)=(x-1)(-x^2-2x+1)$ δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x		-1-√2		-1+√2		1	
x - 1	−		−		−	0	+
$-x^2-2x+1$	−	0	+	0	−		−
P(x)	+	0	−	0	+	0	−

Οπότε $P(x)<0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2}$ ή $x>1$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι στα διαστήματα $\left(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}\right)$ και $\left(1,+\infty\right)$ η γραφική παράσταση της ευθείας είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της καμπύλης.

459. Το P(x) πρέπει να είναι δευτέρου βαθμού, οπότε

$P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, κι έτσι έχουμε:

$$(3x-2)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)=6x^3-7x^2-x+2$$

$$3\alpha x^3+(3\beta-2\alpha)x^2+(3\gamma-2\beta)x-2\gamma=6x^3-7x^2-x+2$$

οπότε: 3α=6, $3\beta-2\alpha=-7$, $3\gamma-2\beta=-1$ και $-2\gamma=2$.

Λύνοντας το σύστημα έχουμε: α=2, $\beta=-1$, $\gamma=-1$. Άρα $P(x)=2x^2-x-1$ οπότε

$$6x^3-7x^2-x+2=0 \Leftrightarrow (3x-2)(2x^2-x-1)=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3} \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-\frac{1}{2}$$

460. Έχουμε

$$P(-1)=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow -\lambda^3-3\lambda^2+9\lambda-5=0.$$

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner για λ=1 οπότε έχουμε:

$(\lambda-1)(-\lambda^2-4\lambda+5)=0$. Τελικά λ=1 ή $\lambda=-5$.

461. Έχουμε

$$x^3+x^2-12=0 \Leftrightarrow (x^3-2^3)+(x^2-2^2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+4+x+2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+3x+6)=0 \Leftrightarrow x=2$$

$$x^6-729=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt[6]{729}=\pm 3$$

462. Έχουμε

$$(2x-4)^3+1=0 \Leftrightarrow 2x-4=-1 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

Εφαρμόζουμε σχήμα Horner για την τιμή 1 οπότε έχουμε

$(x-1)(3x^3-x^2-x-1)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $3x^3-x^2-x-1=0$ (1).

Εφαρμόζουμε σχήμα Horner για την τιμή 1 και έχουμε

$(1) \Leftrightarrow (x-1)(3x^2+2x+1)=0 \Leftrightarrow x=1$. Τελικά διπλή ρίζα το 1.

463. Έχουμε

$$x(2x^3+x^2-5x+2)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } 2x^3+x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή}$$

$$\left(x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ ή } x=\frac{1}{2}\right)$$

(σχήμα Horner για την τιμή 1). Με αντικατάσταση και πράξεις διαπιστώνουμε ότι μόνο η τιμή $x=\frac{1}{2}$ είναι και ρίζα της δεύτερης εξίσωσης.

464. Πρέπει

$P(1)=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \alpha=-24$. Οπότε $x^9-12x^6+35x^3-24=0$. Θέτοντας $x^3=y$ έχουμε $y^3-12y^2+35y-24=0 \Leftrightarrow y=1$ ή y=8 ή y=3 (σχήμα Horner για την τιμή 1). Άρα $x^3=1$ ή $x^3=8$ ή $x^3=3$. Τελικά x=1, x=2, $x=\sqrt[3]{3}$.

465. Έχουμε

$$P(-1)=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta+16=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=-16$$

$$P(-2)=0 \Leftrightarrow -8\alpha+\beta+8=0 \Leftrightarrow -8\alpha+\beta=-8.$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι α=8, $\beta=-24$.

$$\text{Άρα } P(x)=x^4-8x^3+17x^2+2x-24.$$

Εφαρμόζουμε σχήμα Horner για τις τιμές -1, 2, 3 και 4 και διαπιστώνουμε ότι αυτές είναι ρίζες.

466. Έχουμε

$$P(-1)=0 \Leftrightarrow \alpha^3-\alpha^2-\alpha-2=0 \Leftrightarrow \alpha=2 \text{ (σχήμα Horner για την τιμή 2)}$$

Η αρχική εξίσωση γράφεται $2x^4+x^3-9x^2-4x+4=0$. Εφαρμόζουμε σχήμα Horner για την τιμή -1 και μετά για την τιμή 2. Τελικά ρίζες οι $x=-1$, x=2, $x=-2$, $x=\frac{1}{2}$.

467. Οι αναφερόμενες ρίζες θα είναι οι ρίζες της

$x^2-7x+12=0$ δηλαδή οι x=3 και x=4. Εφαρμόζουμε σχήμα Horner για τις τιμές αυτές.

Τελικά x=3 ή x=4 ή x=1 ή $x=-1$.

468. Έχουμε

$$x(x^4-4x^2+3)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x^4-4x^2+3=0 \quad (1).$$

Θέτουμε $x^2=y>0$ οπότε η (1) γράφεται: $y^2-4y+3=0 \Leftrightarrow y=1$ ή $y=3$

$$\text{Άρα } x^2=1 \text{ ή } x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm 1,\ x=\pm\sqrt{3}$$

469. Έχουμε

$$1000-(3\lambda^4+8\lambda^2)10-200=0 \Leftrightarrow 3\lambda^4+8\lambda^2+80=0.$$

Θέτουμε $\lambda^2=\omega>0$ και βρίσκουμε $\omega=-\frac{20}{3}$ απορ. ή ω=4 οπότε $\lambda=\pm 2$.

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές έχουμε: $x=10$, $x=-2$.

470. Θέτουμε $(x^2-5x+2)^2=y$ οπότε η αρχική εξίσωση γράφεται:

$y^2-8y+16=0 \Leftrightarrow y=4$. Άρα $(x^2-5x+2)^2=4$ οπότε

$x^2-5x+2=2 \Leftrightarrow x=0$ ή x=5 $\quad x^2-5x+2=-2 \Leftrightarrow x=1$ ή x=4

471. Θέτουμε

$x^2-1=y$ οπότε $y^3-2y^2-5y+6=0$ (1). Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner για την τιμή 1 οπότε η (1) γράφεται:

$$(y-1)(y^2-y-6)=0 \Leftrightarrow y=1 \text{ ή } (y=3,\ y=-2).$$

Για y=1 έχουμε: $x^2-1=1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$, για y=3 έχουμε: $x^2-1=3 \Leftrightarrow x=\pm 2$, για $y=-2$ έχουμε $x^2-1=-2 \Leftrightarrow x^2=-1$ αδύνατη

472. Θέτουμε

$$x^2+x+1=y \text{, οπότε } x^2+x-9=x^2+x+1-10=y-10$$

$$\text{Άρα}\quad y(y-10)=-21 \Leftrightarrow y=3 \;\; \text{ή} \;\; y=7.$$

Για y=7 έχουμε: $x^2+x+1=7 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-3$.

Για y=3 έχουμε: $x^2+x+1=3 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-2$.

473. Έχουμε

$$x\neq 0. \qquad \left(\frac{1}{x}+1+x\right)^2+4\left(1+1+x+\frac{1}{x}\right)=0.$$

Θέτουμε $\frac{1}{x}+1+x=y$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$y^2+4(1+y)=0 \Leftrightarrow y=-2 \quad \text{διπλή}$$

$$\text{Άρα} \quad \frac{1}{x}+1+x=-2 \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2} \quad (\text{διπλές}).$$

474. Θέτουμε

$$x+\frac{1}{x}=\omega \;\; \text{οπότε}$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=\omega^3 \Leftrightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=\omega^3-3x-\frac{3}{x} \Leftrightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=\omega^3-3\omega$$

Η αρχική εξίσωση γράφεται:

$$\omega^3-3\omega=\omega \Leftrightarrow \omega^3-4\omega=0 \Leftrightarrow \omega=0 \;\; \text{ή} \;\; \omega=-2 \;\; \text{ή} \;\; \omega=2.$$

Για ω=0 έχουμε: $x^2+1=0$ αδύνατη.

Για $\omega=-2$ έχουμε: $x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ διπλή.

Για ω=2 έχουμε: $x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$ διπλή.

475. Παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο

$x^3-6x^2+11x-6$. Πιθανές ακέραιες τιμές $\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6$.

Εφαρμόζουμε σχήμα Horner για την τιμή 1. Άρα $(x-1)(x^2-5x+6)\le 0$.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων και έχουμε: $x\le 1$ ή $2\le x\le 3$.

$$x^3-2x^2+x-2>0 \Leftrightarrow x^2(x-2)+(x-2)>0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+1)>0$$

Όμως $x^2+1>0$ για κάθε $x\in R$, άρα $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

$$x^6>64 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x^6}>\sqrt[6]{64} \Leftrightarrow |x|>2 \Leftrightarrow x<-2 \;\; \text{ή} \;\; x>2.$$

476. Η ανίσωση γράφεται:

$$x^4+x^3-x^2+x-2>0.$$

Θέτουμε $P(x)=x^4+x^3-x^2+x-2$. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του P(x) είναι: $\pm1,\ \pm2$.

Εφαρμόζουμε το σχήμα του Horner για την τιμή 1 και μετά για την τιμή -2. Έχουμε:

$P(x)=(x-1)(x^3+2x^2+x+2)=(x-1)(x+2)(x^2+1)$ οπότε η αρχική ανίσωση γράφεται:

$(x-1)(x+2)(x^2+1)>0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)>0 \Leftrightarrow x<-2$ ή $x>1$.

477. Έχουμε

$$(x+2)^3\le 8x^2+16x \Leftrightarrow (x+2)^3-8x(x+2)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)[(x+2)^2-8x]\le 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2)^2\le 0$$

Με κατασκευή του πίνακα προσήμων έχουμε: $x\le -2$ ή x=2.

478. Θέτουμε

$$x^2=y>0 \text{ οπότε}$$

$$y^2-5y+4<0 \Leftrightarrow (y-4)(y-1)<0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2-1)<0.$$

Ο πίνακας προσήμων τελικά θα μας δώσει: $x\in(-2,-1)\cup(1,2)$

479. Αρκεί να λύσουμε την

$9x^3-12x^2-11x-2=0$ (1). Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της (1) είναι: ±1, ±2.

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner για την τιμή 2. Οπότε η (1) γράφεται:

$$(x-2)(9x^2+6x+1)=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=-\frac{1}{3}.$$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι: $\left(-\frac{1}{3},0\right)$, (2,0)

480. Είναι

$$f(2)=4 \Leftrightarrow 4=2^3+(\kappa-1)2+2 \Leftrightarrow \kappa=-2\text{, οπότε}$$

$f(x)=x^3-3x+2$. Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $x^3-3x+2=0$ (1)

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της (1) είναι ±1 και ±2. Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner για την τιμή 1. Τελικά η (1) γράφεται: $(x-1)(x^2+x-2)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή ($x=-2$ ή x=1).

Άρα τα σημεία τομής είναι $(-2,0)$, (1,0).

481. Αρκεί να λύσουμε τις ανισώσεις f(x)>0 και f(x)<0. Έχουμε $f(x)=x^3-2x^2-5x+6=0$ (1).

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner για την τιμή 1.

Άρα η (1) γράφεται:

$$f(x)=(x-1)(x^2-x-6)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ ή } x=3.$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $(-2,0)$, (1,0), (3,0). Για τη λύση των ανισώσεων βρίσκουμε τον πίνακα προσήμων της f. Σύμφωνα μ' αυτόν η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον x΄x στα διαστήματα $(-2,1)$ και $(3,+\infty)$, ενώ βρίσκεται κάτω απ' αυτόν στα $(-\infty,-2)$ και (1,3).

482. Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση:

$$f(x)>0 \Leftrightarrow x^3+2x-3>0 \Leftrightarrow x^3+3x-x-3>0 \Leftrightarrow x(x^2-1)+3(x-1)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)+3(x-1)>0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+3)>0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$$

($x^2+x+3>0$ για κάθε x). Άρα το ζητούμενο διάστημα είναι: $(1,+\infty)$.

483. Έχουμε

$$x(x-3)=x^2-3x \text{ και } (x-1)(x-2)=x^2-3x+2.$$

Θέτουμε $x^2-3x=y$ οπότε η εξίσωση γράφεται: $y(y+2)=120 \Leftrightarrow y=10$ ή $y=-12$.

Άρα

$$x^2-3x=10 \Leftrightarrow x^2-3x-10=0 \Leftrightarrow x=5 \text{ ή } x=-2$$

$$x^2-3x=-12 \Leftrightarrow x^2-3x+12=0 \text{ αδύνατη.}$$

484. Θέτουμε $(2x-1)^4=y>0$ οπότε έχουμε:

$$y^2-80y-81=0 \Leftrightarrow y=81 \text{ ή } y=-1 \text{ απορ. Άρα}$$

$$(2x-1)^4=81 \Leftrightarrow 2x-1=\pm 3 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=-1.$$

485. Θέτουμε

$$|x|=y>0 \text{ οπότε έχουμε:}$$

$$y^3-2y^2-y+2=0 \Leftrightarrow y^2(y-2)-(y-2)=0 \Leftrightarrow (y-2)(y^2-1)=0 \Leftrightarrow y=2 \text{ ή } y=1 \text{ ή}$$

$y=-1$ απορ. Έχουμε λοιπόν: $|x|=2 \Leftrightarrow x=\pm 2$. $|x|=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

486. **i.** Θέτουμε:

$x^2=y>0$. Έχουμε $y^2-8y-9=0 \Leftrightarrow y=9$ ή $y=-1$ απορ. Άρα $x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$.

ii. $x^3-3x+2=0$ (1). Πιθανές ακέραιες ρίζες της (1) είναι ± 1, ± 2. Για ρ=1 σχήμα Horner:

$(1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή ($x=1$ ή $x=-2$)

487. Πρέπει να λύσουμε την $2x^3-3x^2+1=0$ (1). Εφαρμόζουμε σχήμα Horner για την τιμή 1 οπότε έχουμε: $(x-1)(2x^2-x-1)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή ($x=1$ ή $x=-\frac{1}{2}$)

Κοινά σημεία τα (1,0) και $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

488. Είναι

$$P(1)=0 \Leftrightarrow 1+(\lambda-\mu)1+2\lambda\cdot 1-5\cdot 1+4=0 \Leftrightarrow \mu=3\lambda \quad (1).$$

Επομένως $P(x)=x^4-2\lambda x^3+2\lambda x^2-5x+4$. Εφαρμόζουμε σχήμα Horner για την τιμή 1 και στη συνέχεια στο πηλίκο για την ίδια τιμή. Έχουμε:

1	-2λ	2λ	-5	4	1
	1	$1-2\lambda$	1	4	
1	$-2\lambda+1$	1	-4	0	

1	$1-2\lambda$	1	-4	1
	1	$2-2\lambda$	$3-2\lambda$	
1	$2-2\lambda$	$3-2\lambda$	$-1-2\lambda$	

Πρέπει $-1-2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{1}{2}$ $\quad (1) \Rightarrow \mu=-\frac{3}{2}$.

Εφαρμόζοντας 2 φορές το σχήμα Horner βρήκαμε ότι:

$P(x)=(x-1)^2(x^2+2x+4)$. Η ανίσωση $(x-1)^2(x^2+2x+4)\geq 0$ αληθεύει για κάθε $x\in R$ διότι $(x-1)^2\geq 0$ και $x^2+2x+4>0$ για κάθε $x\in R$.

489. Έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=0 \text{ και } f(1)=0.$$

$$\begin{cases}\frac{1}{4}-\frac{2\alpha+\beta}{4}+\frac{\alpha+\beta+1}{2}-\beta=0 \\ 2-(2\alpha+\beta)+\alpha+\beta+1-\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=2 \\ \beta=1\end{cases}$$

$f(x)=2x^3-5x^2+4x-1=(x-1)^2(2x-1)$. Άρα δεν έχει άλλα κοινά σημεία με τον x΄x. Για να είναι η γραφική παράσταση πάνω από τον x΄x θα πρέπει f(x)>0, δηλαδή $(x-1)^2(2x-1)>0$ η οποία αληθεύει για $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$.

490. Έστω

$P(x)=x^3+\kappa x^2+\kappa x+1$. Για $\rho=-1$ από το σχήμα Horner προκύπτει $P(x)=(x+1)[x^2+(\kappa-1)x+1]$. Μία ρίζα το -1. Δύο άλλες θα πρέπει να έχει το $x^2+(\kappa+1)x+1$, δηλαδή $\Delta\geq 0\Leftrightarrow \kappa^2-2\kappa-3\geq 0\Leftrightarrow \kappa\leq -1$ ή $\kappa\geq 3$

491. Η εξίσωση της ευθείας είναι $y=\alpha x+\beta$.

Έχουμε: $-1=\alpha+\beta$ και $-4=2\alpha+\beta$.

Τελικά $\alpha=-3$ και β=2. Άρα $y=-3x+2$.

Οι τετμημένες των σημείων τομής ικανοποιούν την εξίσωση

$-3x+2=x^3-2x$ ή $x^3+x-2=0$.

$x^3+x-2=0\Leftrightarrow x^3+x-1-1=0\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2)=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x^2+x+2=0$ αδύν. Άρα τέμνονται μόνο στο $A(1,-1)$.

§4.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

492. **α.** Το πολυώνυμο

$P(x)$ είναι $3^{ου}$ βαθμού, άρα:

$$\begin{cases}\kappa^2-1=0 \\ \kappa+1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\kappa=\pm 1 \\ \kappa\neq -1\end{cases} \Leftrightarrow \kappa=1$$

Επομένως είναι $P(x)=x^3-3x+\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}.$

Αλλά το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $x-1$ είναι ίσο με -4, άρα

$$P(1)=-4\Leftrightarrow 1-3+\lambda=-4\Leftrightarrow \lambda=-2.$$

β. Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$ είναι $P(x)=x^3-3x-2$, οπότε με σχήμα Horner για $\rho=1$ έχουμε:

1	0	−3	−2	$\rho=1$

↓	1	1	–2
1	1	–2	–4

i. Επομένως η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το $x-1$ είναι $P(x)=(x-1)(x^2+x-2)-4$.

ii. $P(x)+4=x^2-1 \Leftrightarrow x^3-3x-2+4=x^2-1 \Leftrightarrow x^3-x^2-3x+3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2(x-1)-3(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-3)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-\sqrt{3}$ ή $x=\sqrt{3}$.

iii. Είναι $(x-1)^2(x+2)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ και $x\neq -2$,

οπότε έχουμε: $\dfrac{P(x)}{(x-1)^2(x+2)}\geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^3-3x-2}{(x-1)^2(x+2)}\geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x-2}{(x-1)^2(x+2)}-1\geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{-4}{(x-1)^2\cdot(x+2)}\geq 0 \Leftrightarrow -4(x-1)^2\cdot(x+2)\geq 0,\ x\neq 1,\ x\neq -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)\leq 0,\ x\neq 1,\ x\neq -2 \Leftrightarrow x+2\leq 0,\ x\neq 1,\ x\neq -2 \Leftrightarrow x<-2.$$

$$\text{Άρα}\quad \frac{P(x)}{(x-1)^2(x+2)}\geq 1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2).$$

493. **α.** Το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x-2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x+1$ είναι ίσο με -6, άρα είναι:

$$\begin{cases}P(2)=0\\P(-1)=-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}16+4\alpha+2\beta+2=0\\-2+\alpha-\beta+2=-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha+\beta=-9\\\alpha-\beta=-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-5\\\beta=1\end{cases}$$

β. Για $\alpha=-5$ και $\beta=1$, το πολυώνυμο γράφεται $P(x)=2x^3-5x^2+x+2$, άρα είναι:

$$P(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3-5x^2+x+2=0 \Leftrightarrow 2x^3-4x^2-(x^2-x-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$2x^2(x-2)-(x-2)(x+1)=0 \Leftrightarrow (x-2)(2x^2-x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$x=2 \text{ ή } 2x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-\frac{1}{2}.$$

γ. $2\sigma\upsilon\nu^3\omega+5\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu\omega-3=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^3\omega+5-5\sigma\upsilon\nu^2\omega+\sigma\upsilon\nu\omega-3=0 \Leftrightarrow$

$$2\sigma\upsilon\nu^3\omega-5\sigma\upsilon\nu^2\omega+\sigma\upsilon\nu\omega+2=0 \Leftrightarrow P(\sigma\upsilon\nu\omega)=0$$

Αλλά από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι $\sigma\upsilon\nu\omega=1$ ή $\sigma\upsilon\nu\omega=-\dfrac{1}{2}$ (η λύση $\sigma\upsilon\nu\omega=2$ απορρίπτ. επειδή $|\sigma\upsilon\nu\omega|\leq 1$), οπότε έχουμε:

- $\sigma\upsilon\nu\omega=1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega=\sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow \omega=2\kappa\pi,\ \kappa\in Z$
- $\sigma\upsilon\nu\omega=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega=\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \omega=2\lambda\pi\pm\dfrac{2\pi}{3},\ \lambda\in Z$

494. **α.** Το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το $x+2$, άρα είναι:

$$\begin{cases} P(1)=0 \\ P(-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\kappa-\lambda=1 \\ 4\kappa+\lambda=-22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa=-7 \\ \lambda=6 \end{cases}$$

β. Για $\kappa=-7$ και $\lambda=6$ είναι $P(x)=0 \Leftrightarrow x^4-x^3-7x^2+x+6=0$ και επειδή το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το 1 , με το σχήμα Horner για $\rho=1$ έχουμε:

1	−1	−7	1	6	$\rho=1$
↓	1	0	−7	−6	
1	0	−7	−6	0	

Οπότε είναι $x^4-x^3-7x^2+x+6=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3-7x-6)=0$

και συνεχίζοντας με το σχήμα Horner για $\rho=-2$ έχουμε:

1	0	−7	−6	$\rho=-2$
↓	−2	4	6	
1	−2	−3	0	

Άρα έχουμε : $x^4-x^3-7x^2+x+6=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3-7x-6)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x^2-2x-3)=0 \Leftrightarrow$ $x=1$ ή $x=-2$ ή $x=-1$ ή $x=3$.

γ. Πρέπει $x-5\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 5$, οπότε είναι:

$$\frac{P(x)}{x-5}\geq 0 \Leftrightarrow (x-5)\cdot P(x)\geq 0 \Leftrightarrow (x-5)\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x^2-2x-3)\geq 0$$

x	−∞		−2		−1		1		3		5		+∞
x - 5		-		-		-		-		-	0	+	
x - 1		-		-		-	0	+		+		+	
x + 2		-	0	+		+		+		+		+	
x^2 - 2x - 3		+		+	0	-		-	0	+		+	
γινόμενο		-	0	+	0	-	0	+	0	-	‖	+	

Άρα $\dfrac{P(x)}{x-5}\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-2,-1]\cup[1,3]\cup(5,+\infty)$.

495. **α.** Το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x είναι ίσο με 6 , άρα είναι:

$$\begin{cases} P(1)=0 \\ P(0)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta-7+\alpha+5=0 \\ \alpha+5=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha=1 \end{cases}.$$

β. Για $\alpha=1$ και $\beta=0$, είναι $P(x)=x^3-7x+6$, άρα είναι:

i. $P(x)\geq 0 \Leftrightarrow x^3-7x+6\geq 0$, οπότε με σχήμα Horner για $\rho=1$ έχουμε:

1	0	-7	6	$\rho=1$
$\downarrow$	1	1	-6	
1	1	-6	0	

Άρα $x^3-7x+6\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-6)\geq 0$, οπότε:

- $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$
- $x^2+x-6\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -3$ ή $x\geq 2$

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
x−1		−		−	0	+		+	
x^2+x-6		+	0	−		−	0	+	
γινόμενο		−	0	+	0	−	0	+	

Επομένως $P(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-3,1]\cup[2,+\infty)$

ii. Πρέπει:

- $P(x)\geq 0 \overset{\beta)i.}{\Leftrightarrow} x\in[-3,1]\cup[2,+\infty)$
- $\sqrt{P(x)}\geq 0 \Leftrightarrow x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$

$$\sqrt{P(x)}=x-1 \Rightarrow P(x)=(x-1)^2 \Leftrightarrow P(x)-(x-1)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-6)-(x-1)^2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-6-x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x^2+\cancel{x}-6-\cancel{x}+1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-5)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x^2=5 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x=1$$

(δεκτή) ή $x=-\sqrt{5}$ (απορρίπτεται) ή $x=\sqrt{5}$ (δεκτή)

496. **α** .Έχουμε

$$\begin{array}{cccc|l}
x^3 & +\alpha^3x^2 & -\alpha^2x & -\alpha & x-\alpha \\ \cline{5-5}
-x^3 & +\alpha x^2 & & & x^2+(\alpha^3+\alpha)x+\alpha^4 \\ \cline{1-4}
 & (\alpha^3+\alpha)x^2 & -\alpha^2x & -\alpha & \\
 & -(\alpha^3+\alpha)x^2 & (\alpha^4+\alpha^2)x & & \\ \cline{2-4}
 & & \alpha^4x & -\alpha & \\
 & & -\alpha^4x & +\alpha^5 & \\ \cline{3-4}
 & & & \alpha^5-\alpha &
\end{array}$$

Άρα $P(x)=(x-\alpha)\left[x^2+(\alpha^3+\alpha)x+\alpha^4\right]+(\alpha^5-\alpha)$.

β. Το $x-\alpha$ διαιρεί το $P(x)$, άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι 0, οπότε είναι:

$$\alpha^5-\alpha=0\Leftrightarrow\alpha(\alpha^4-1)=0\Leftrightarrow\alpha=0 \quad ή \quad \alpha=-1 \quad ή \quad \alpha=1.$$

γ. Αν $\alpha=-1$, τότε

$P(x)=x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)=(x-1)(x^2-1)=(x+1)(x-1)^2$

i. $P(x)\ge0\Leftrightarrow(x+1)(x-1)^2\ge0\Leftrightarrow x\in[-1,+\infty)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x+1		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
γινόμενο		$-$	0	$+$	0	$+$	

ii. $(x+1)P(x)\le0\Leftrightarrow(x+1)(x+1)(x-1)^2\le0\Leftrightarrow(x+1)^2(x-1)^2\le0$.

Αλλά $(x+1)^2(x-1)^2\ge0$, άρα $(x+1)^2(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=-1 \quad ή \quad x=1$.

497. **α.** **i.** Φέρουμε από το Β σημείο μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, η οποία τέμνει την C_f στο σημείο $A(2,\ 4{,}6)$. Επομένως η εταιρεία θα μπορούσε να δαπανήσει για διαφήμιση δυο χιλιάδες ευρώ, ώστε να έχει το ίδιο κέρδος (4,6 χιλιάδες ευρώ).

ii. $P(x)=4{,}6\Leftrightarrow-0{,}5x^3+1{,}9x^2+1=4{,}6\Leftrightarrow-0{,}5x^3+1{,}9x^2-3{,}6=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow5x^3-19x^2+36=0$, οπότε με σχήμα Horner για $\rho=3$ έχουμε:

5	-19	0	36	$\rho=3$
$\downarrow$	15	-12	-36	
5	-4	-12	0	

Άρα $5x^3-19x+36=0 \Leftrightarrow (x-3)\left(5x^2-4x-12\right)=0$,

οπότε: $x=3$ ή $x=2$ ή $x=-1,2$ (απορρίπτεται).

Επομένως η εταιρεία θα μπορούσε να δαπανήσει για διαφήμιση δυο χιλιάδες ευρώ, ώστε να έχει το ίδιο κέρδος (4,6 χιλιάδες ευρώ).

β. Από την γραφική παράσταση προκύπτει ότι η γραφική παράσταση C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία ΑΒ για $2<x<3$,

άρα η εταιρεία πρέπει να δαπανήσει για διαφήμιση από 2 έως 3 χιλιάδες ευρώ,
ώστε το κέρδος της να είναι μεγαλύτερο από 4,6 χιλιάδες ευρώ.
Αλγεβρικά είναι:

$$P(x)>4,6 \Leftrightarrow -0,5x^3+1,9x^2+1>4,6 \Leftrightarrow -0,5x^3+1,9x^2-3,6>0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5x^3-19x^2+36<0 \Leftrightarrow (x-3)\left(5x^2-4x-12\right)<0$$

x	$-\infty$		-1,2		2		3		$+\infty$
x - 3		-		-		-	0	+	
$5x^2 - 4x - 12$		+	0	-	0	+		+	
γινόμενο		-	0	+	0	-	0	+	

Αλλά επειδή $0\le x<4$, είναι $2<x<3$, επομένως η εταιρεία πρέπει να δαπανήσει για διαφήμιση από 2 έως 3 χιλιάδες ευρώ, ώστε το κέρδος της να είναι μεγαλύτερο από 4,6 χιλιάδες ευρώ.

498. Έχουμε

$$\text{Ε.Κ.Π. } 9(x+1)^2(x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1 \text{ και } x\neq 1$$

Η εξίσωση γράφεται

$$9x^2(x-1)^2=10[(x+1)(x-1)]^2-9x^2(x+1)^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 4x^4+19x^2-5=0.$$

Θέτουμε $x^2=\omega>0$. Οπότε έχουμε: $4\omega^2+19\omega-5=0 \Leftrightarrow \omega=\dfrac{1}{4}$ ή $\omega=-5$ απορ. Άρα

$$x^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2} \quad (\text{Δεκτές})$$

499. Έχουμε

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1),\ 2-2x=2(1-x),$$
$$4x^2+4x+4=4(x^2+x+1).$$

$[\text{Ε.Κ.Π.}=4(x-1)(x^2+x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1]$

$$\frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}=\frac{5}{4(x^2+x+1)} \Leftrightarrow 3x\cdot 4+2(x^2+x+1)=5(x-1)$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+9x+7=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=-\frac{7}{2}$$

500. Έχουμε

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1).\ \text{Πρέπει } x\neq -1.$$

$$\frac{2}{(1+x)^2}=\frac{2}{1+x^3}\Leftrightarrow 2(x^2-x+1)-2(x+1)=0\Leftrightarrow 2x(x-2)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=2.$$

501. Έχουμε

$$\frac{(x^2-1)(x^3-2)}{x^2+1}=\frac{2(x^2+2)}{5}-\frac{6}{x^2+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(x^2-1)(x^2-2)-2(x^2+2)(x^2+1)+30=0\ldots\Leftrightarrow(x^2-4)(x^2-3)=0\Leftrightarrow x=\pm2 \text{ ή } x=\pm\sqrt{3}$$

502. Η παραπάνω ανίσωση γράφεται:

$$\frac{3x^2-1}{x-1}-\frac{2}{x(x-1)}-\frac{x^2-3x+2}{x}>0,\ (1)$$

Ε.Κ.Π.: $x(x-1)\neq0\Leftrightarrow x\neq0$ και $x\neq1$.

$$(1)\Leftrightarrow\frac{x(3x^2-1)-2-(x-1)(x^2-3x+2)}{x(x-1)}>0\Leftrightarrow\frac{x^2+2x-3}{x-1}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x^2+2x-3)(x-1)>0\Leftrightarrow(x-1)^2(x+3)>0\Leftrightarrow x+3>0\Leftrightarrow x>-3$$

Όμως $x\neq0$, $x\neq1$, άρα $-3<x<0$ ή $0<x<1$ ή $x>1$.

503. (Περιορισμοί: $x\neq0$ και $x\neq3$)

$$\ldots\Leftrightarrow\frac{x^2+x+1}{x}+\frac{3x^2-x+1}{x(x-3)}-\frac{x^2-2}{x-3}\leq0\ldots\Leftrightarrow\frac{x^2-x-2}{x(x-3)}\leq0\Leftrightarrow x(x-3)(x^2-x-2)\leq0$$

Με πίνακα προσήμων έχουμε: $-1\leq x<0$ ή $2\leq x<3$.

504. $x\neq0$ και $x\neq1$. Έχουμε:

$$x^2+\frac{3x^2}{x-1}-\frac{x+1}{x-1}-\frac{2-x^2}{x(x-1)}>0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\frac{(x+2)(x^3-1)}{x(x-1)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x+2)(x^3-1)x(x-1)>0\Leftrightarrow x(x+2)>0$$

γιατί $(x-1)^2>0$ αφού $x\neq1$ και $x^2+x+1>0$ αφού $\Delta<0$, άρα $x<-2$ ή $x>0$ και επειδή $x\neq1$. Τελικά $x<-2$ ή $0<x<1$ ή $x>1$.

505. Η εξίσωση γράφεται:

$$2\eta\mu^4x-17(1-\eta\mu^2x)+8=0\Leftrightarrow2\eta\mu^4x+17\eta\mu^2x-9=0\ (1)$$

Θέτουμε $\eta\mu^2x=\omega$ $(0\leq\omega\leq1)$. Από την (1) έχουμε:

$$2\omega^2+17\omega-9=0\Leftrightarrow\omega=\frac{1}{2} \text{ ή } \omega=-9 \text{ (απορ).}$$

για $\omega=\frac{1}{2}$ έχουμε: $\eta\mu^2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\eta\mu x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\eta\mu x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα:

$$\eta\mu x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4} \text{ ή } x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{4},\ \kappa\in Z \text{ ή}$$

$$\eta\mu x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\eta\mu x=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4} \text{ ή } x=2\kappa\pi+\pi+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{4},\ \kappa\in Z$$

506. Θέτουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^3x=y\ (y\in[-1,1]):y^2-4y+3=0\Leftrightarrow y=1 \text{ ή } y=3 \text{ (απορρίπτεται).}$$

$$\text{Άρα:}\quad συν^3x = 1 \Leftrightarrow συνx = 1 \Leftrightarrow x = 2κπ,\ κ \in Z$$

507. Έχουμε

$$2ημ^3x + 11συν^2x + 12ημx - 2 = 0 \Leftrightarrow 2ημ^3x - 11ημ^2x + 12ημx + 9 = 0$$

Θέτουμε $ημx = y$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$2y^3 - 11y^2 + 12y + 9 = 0$. Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner για την τιμή 3. Έχουμε:

$(y-3)(2y^2 - 5y - 3) = 0 \Leftrightarrow y = 3$ ή $(y{=}3$ ή $y = -\frac{1}{2})$

Αν y=3, τότε ημx=3 αδύνατη.

Αν $y = -\frac{1}{2}$, τότε $ημx = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow ημx = -ημ\frac{π}{6} \Leftrightarrow ημx = ημ\left(-\frac{π}{6}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 2κπ - \frac{π}{6} \text{ ή } x = 2κπ + \frac{7π}{6},\ κ \in Z$$

508. Η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$(3εφ^2x + 3)(1 + εφ^2x) = 16εφ^2x \Leftrightarrow 3εφ^4x - 10εφ^2x + 3 = 0 \quad (1).$$

Θέτουμε $εφ^2x = ω > 0$ οπότε: $(1) \Leftrightarrow 3ω^2 - 10ω + 3 = 0 \Leftrightarrow ω = 3$ ή $ω = \frac{1}{3}$. Άρα:

$$εφ^2x = 3 \Leftrightarrow εφx = \sqrt{3} \text{ ή } εφx = -\sqrt{3} \Leftrightarrow εφx = εφ\frac{π}{3} \text{ ή } εφx = εφ\left(-\frac{π}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = κπ + \frac{π}{3} \text{ ή } x = κπ - \frac{π}{3},\ κ \in Z$$

$$εφ^2x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left(εφx = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } εφx = -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Leftrightarrow [εφx = εφ\frac{π}{6} \text{ ή } εφx = εφ\left(-\frac{π}{6}\right)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = κπ + \frac{π}{6} \text{ ή } x = κπ - \frac{π}{6},\ κ \in Z$$

509. Πρέπει:

$$\begin{cases} 2x + 1 \ge 0 \\ x - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1.$$

Η εξίσωση γράφεται: $\sqrt{2x+1} = \sqrt{3} + \sqrt{x-1}$. Υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο οπότε έχουμε: $(\sqrt{2x+1})^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{x-1})^2 \Leftrightarrow x - 1 = 2\sqrt{3(x-1)}$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = \left(2\sqrt{3(x-1)}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - 14x + 13 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 13$$

Οι τιμές x=1, x=13 είναι δεκτές, γιατί επαληθεύουν την αρχική εξίσωση.

510 Η εξίσωση έχει νόημα όταν:

$$\begin{cases} x \ge -4 \\ x \ge -1 \\ x \ge -20 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -1.\ \text{Έχουμε:}$$

$$(\sqrt{x+4}+2\sqrt{x+1})^2=(\sqrt{x+20})^2 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+5x+4}=4(3-x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+5x+4=9-6x+x^2 \Leftrightarrow 11x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{11}$$

δεκτή διότι επαληθεύει την αρχική εξίσωση.

511. Περιορισμοί:

$$\begin{cases} x\ge 1 \\ x\ge 6 \\ x\ge -6 \\ x\ge 9 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 9$$

Η εξίσωση διαδοχικά γράφεται:

$$(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6})^2=(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-9})^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-7x+6}=2+\sqrt{x^2-3x-54}$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2-7x+6})^2=(2+\sqrt{x^2-3x-54})^2 \Leftrightarrow -x+14=\sqrt{x^2-3x-54} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (14-x)^2=(\sqrt{x^2-3x-54})^2 \Leftrightarrow 25x=250 \Leftrightarrow x=10$$

Επαλήθευση: $\sqrt{9}+\sqrt{4}=\sqrt{16}+\sqrt{1} \Leftrightarrow 5=5$ που ισχύει.

512. Η εξίσωση ορίζεται για $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$

Αν $\lambda+3<0 \Leftrightarrow \lambda<-3$, η εξίσωση είναι αδύνατη.

Αν $\lambda+3>0 \Leftrightarrow \lambda>-3$, έχουμε: $x-1=\dfrac{1}{(\lambda+3)^2} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{(\lambda+3)^2}+1>1$, δεκτή.

513 Πρέπει:

$$\begin{cases} x\le \dfrac{1}{2} \\ x\ge -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\le x\le \frac{1}{2}.$$

Η ανίσωση γράφεται: $\left(\sqrt{1-2x}\right)^2>\left(\sqrt{4x+1}\right)^2 \Leftrightarrow 1-2x>4x+1 \Leftrightarrow x<0$

Λόγω του περιορισμού, λύσεις της ανίσωσης είναι τα $x\in R$ με $-\dfrac{1}{4}\le x<0$.

514. Έχουμε

$x^2-2x+6>0$ για κάθε $x\in R$ αφού Δ<0. Αν $2x-3\le 0 \Leftrightarrow x\le \dfrac{3}{2}$ τότε η ανίσωση αληθεύει. Αν $2x-3>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{3}{2}$ τότε:

$$\left(\sqrt{x^2-2x+6}\right)^2\ge (2x-3)^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 3x^2-10x+3\le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\le x\le 3$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\le 3$.

515. Περιορισμοί

$$\begin{cases} x\ge 8 \\ x\ge 5 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 8$$

Η ανίσωση γράφεται $(\sqrt{x-8}+\sqrt{x-5})^2<3^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \sqrt{x^2-13x+40}<11-x$

Αν $11-x<0 \Leftrightarrow x>11$ τότε αδύνατη

Αν $11-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 11$ τότε

$(\sqrt{x^2-13x+40})^2<(11-x)^2 \Leftrightarrow x^2-13x+40<121+x^2-22x \Leftrightarrow x<9$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\in R$ με $8\leq x<9$

516. Έχουμε

i. $5\varphi-7\geq 0 \Leftrightarrow \varphi\geq \frac{7}{5}$ και $\varphi\geq 1$ οπότε για $\varphi\geq\frac{7}{5}$ έχουμε

$$(\sqrt{5\varphi-7})^3=(\varphi-1)^3 \Leftrightarrow 5\varphi-7=\varphi^3-3\varphi^2+3\varphi-1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (\varphi-3)(\varphi^2-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \varphi=3 \text{ ή } \varphi=\sqrt{2} \text{ ή } \varphi=-\sqrt{2} \text{ απορ.}$$

ii. Έχουμε

$$t^2-6t-2\sqrt{t^2-6t+2}=1 \Leftrightarrow t^2-6t-1=2\sqrt{t^2-6t+2}$$

$$\Leftrightarrow (t^2-6t-1)^2=(2\sqrt{t^2-6t+2})^2$$

Θέτουμε $t^2-6t-1=y,\ (y\geq 0)$ οπότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται :

$$y^2=4(y+3) \Leftrightarrow y^2-4y-12=0 \Leftrightarrow y=6 \text{ ή } y=-2 \text{ απορ.}$$

Επομένως $t^2-6t-1=6 \Leftrightarrow t^2-6t-7=0 \Leftrightarrow t=7$ ή $t=-1$

517. Έχουμε

Πρέπει : $2x^3+x^2+x+5\geq 0$ και $x+1\geq 0$

Δηλαδή για $x\geq -1$ έχουμε

$$(\sqrt[3]{2x^3+2x^2+x+5})^3=(1+x)^3 \Leftrightarrow \ldots. \Leftrightarrow x^3-2x^2-2x+4=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-2)-2(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=\sqrt{2} \text{ ή } x=-\sqrt{2} \text{ απορ.}$$

518. Έχουμε

$$x-2>0 \Leftrightarrow x>2$$

$$\sqrt{x-2}+\frac{6}{\sqrt{x-2}}=5 \Leftrightarrow x-2+\frac{36}{x-2}+12=25 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^2-17x+66=0 \Leftrightarrow x=6 \text{ ή } x=11$$

519. Έχουμε

$$(x+4)>0 \text{ και } x-4\geq 0) \Leftrightarrow x\geq 4$$

Η εξίσωση γράφεται

$$(x+4)+\sqrt{(x+4)(x-4)}=x+7 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-16}=3 \Leftrightarrow x^2=25 \Leftrightarrow x=5 \text{ ή } x=-5 \text{ απορ.}$$

520. Πρέπει

$$\begin{cases} x-4\geq 0 \\ \lambda-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 4 \\ \lambda\geq 1 \end{cases}$$

Οπότε έχουμε: $x-4=(\lambda-1)^2 \Leftrightarrow x=(\lambda-1)^2+1$

521. Έχουμε

$$x^2-4x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1 \quad ή \quad x\geq 3$$

Αν $x-2>0 \Leftrightarrow x<2$ η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\in R$ με $x\leq 1$

Αν $x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$ τότε $\sqrt{x^2-4x+3}>x-2 \Leftrightarrow x^2-4x+3>(x-2)^2 \Leftrightarrow 3>4$ ατοπο

Η ανίσωση επαληθεύεται για $x\leq 1$

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ 2000-2004

522. **Β1.** υ=P(2)=…=7.

Β2. Με σχήμα Horner για την τιμή 2 έχουμε $\pi(x)=x^2+3$ και υ=0.

Β3. $F(x)=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (x-1)(x^2+3)=0 \Leftrightarrow x=1$.

523. **Γ1.** Έχουμε

$$P(2)=0 \Leftrightarrow 8-(\kappa+1)4+(\kappa-1)2+2=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \kappa=2$$

Γ2. Είναι $P(x)=x^3-3x^2+x+2$. Με το σχήμα Horner για τιμή -3 έχουμε:

$$P(x)=(x+3)(x^2-6x+19)-55.$$

Γ3. Έχουμε

$$x^3-3x^2+x+2=x-2 \Leftrightarrow x^3-3x^2+4=0 \Leftrightarrow ...$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-4x+4)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=-1 \;\; ή \;\; x=2$$

524. **Β1.** F(1)=0 δηλ. κ=5.

Β2. Με σχήμα Horner για την τιμή 2 έχουμε $\pi(x)=3x^2+5x+13$ και υ(x)=20.

525. **Β1.** Έχουμε P(1)=0, και αφού η διαίρεση του P(x) με το x+1 αφήνει υπόλοιπο 2, έχουμε: $P(-1)=2$. Οπότε:

$$\begin{cases} P(1)=0 \\ P(-1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+(\beta-1)-3-2\beta+6=0 \\ -\alpha+(\beta-1)+3-2\beta+6=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta=-2 \\ -\alpha-\beta=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=4 \end{cases}$$

Β2. Για τις τιμές α=2 και β=4 το πολυώνυμο P(x) γράφεται:

$P(x)=2x^3+3x^2-3x-2$.

$$P(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow 2(x^3-1)+3x(x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)(x^2+x+1)+3x(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+2x+2+3x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2+5x+2)=0 \Leftrightarrow x=1 \;\; ή \;\; \left(x=-2 \;\; ή \;\; x=\frac{1}{2}\right)$$

526. **Γ1.** Έχουμε

$$P\left(-\frac{1}{2}\right)=7 \Leftrightarrow \kappa\left(-\frac{1}{2}\right)^3-(\kappa+\lambda)\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\lambda\left(-\frac{1}{2}\right)+1=7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\kappa}{8}-(\kappa+\lambda)\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2}=6 \Leftrightarrow -\kappa-2(\kappa+\lambda)-4\lambda=48 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3\kappa-6\lambda=48 \Leftrightarrow \kappa+2\lambda=-16 \quad (1)$$

$$P(-1)=23 \Leftrightarrow \kappa(-1)^3-(\kappa+\lambda)(-1)^2+\lambda(-1)+1=23 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\kappa-(\kappa+\lambda)-\lambda=22 \Leftrightarrow \kappa+\lambda=-11 \quad (2)$$

Γ2. Από (1) και (2) έχουμε: $\kappa=-6$ και $\lambda=-5$

α. $P(x)=-6x^3+11x^2-5x+1$

$-6x^3+11x^2-5x+1$	$2x+1$
$+6x^3+3x^2$	$-3x^2+7x-6$
$14x^2-5x+1$	
$-14x^2-7x$	
$-12x+1$	
$+12x+6$	
7	

Άρα $P(x)=(2x+1)(-3x^2+7x-6)+7$.

Γ3. Έχουμε

$$P(x)>7 \Leftrightarrow (2x+1)(-3x^2+7x-6)+7>7 \Leftrightarrow (2x+1)(-3x^2+7x-6)>0 \quad (3)$$

Το τριώνυμο $-3x^2+7x-6$ έχει $\Delta=-23<0$ και αφού $\alpha=-3<0$ τότε $-3x^2+7x-6<0$ για κάθε $x\in R$ οπότε η $(3) \Leftrightarrow 2x+1<0 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}$

527. **Γ1.** Έχουμε

$x^4-8x^3+5(\alpha-1)x^2+8x-3\alpha-6$	x^2-1
$x^4-8x^3+x^2+8x-3\alpha-6$	$x^2-8x+5\alpha$
$-8x^3+5\alpha x^2+8x-3\alpha-6$	
$8x^3+5\alpha x^2-8x-3\alpha-6$	
$5\alpha x^2-3\alpha-6$	
$-5\alpha x^2+5\alpha-6$	
$2\alpha-6$	

Γ2. Πρέπει $2\alpha-6=0$ ή α=3

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-8x-15)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \;\text{ ή }\; x^2-8x+15=0$$

$$\Leftrightarrow (x=-1 \;\text{ ή }\; x=1) \;\text{ ή }\; (x=3 \;\text{ ή }\; x=5)$$

Γ3. Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της P(x) είναι κάτω από τον άξονα των x΄x αρκεί να λύσουμε την ανίσωση:

$$P(x)<0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-8x-15)<0$$

Από τον πίνακα προσήμων προκύπτει τελικά ότι $x\in(-1,1)\cup(3,5)$

528. **Β1.** Έχουμε P(1)=0.

Β2. Με σχήμα Horner έχουμε: $\pi(x)=x^2-4$.

Β3. Η εξίσωση γράφεται:

$x^3-x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-4)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$ ή $x=-2$

Β4. Έχουμε

$$P(x)\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x-2)\geq 0.$$

Από τον πίνακα προσήμων καταλήγουμε ότι πρέπει: $x\in[-2,1]\cup[2,+\infty)$.

529. **Β1.** Με αντικατάσταση

$$P(-1)=-24.$$

Β2. Με σχήμα Horner έχουμε πηλίκο $\pi(x)=x^2-5x+6$ και υπόλοιπο 0.

Β3. Έχουμε

$P(x)=(x-1)(x^2-5x+6)=(x-1)(x-2)(x-3)$ και με κατάλληλο πίνακα προσήμων θα έχουμε $x\in(-\infty,1)\cup(2,3)$.

530. **Β1.** Με σχήμα Horner διαπιστώνουμε ότι το -1 είναι ρίζα, οπότε το x+1 είναι παράγοντας. Πηλίκο το $\pi(x)=x^3-2x^2+x-2$.

Β2. Με σχήμα Horner διαπιστώνουμε ότι το 2 είναι ρίζα, επομένως το $x-2$ παράγοντας του π(x) με νέο πηλίκο διαίρεσης το $\pi'(x)=x^2+1$

Β3. Πρέπει f(x)>0 ή $(x+1)(x-2)(x^2+1)>0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)>0 \Leftrightarrow x<-1$ ή $x>2$.

531. **Γ1.** Έστω

$$P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta,\ \ P(0)=0 \Leftrightarrow \delta=0.$$

$\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x=(x^2+1)(\kappa x+\lambda)=...=\kappa x^3+\lambda x^2+\kappa x+\lambda$ οπότε κ=α, λ=β, κ=γ, λ=0.

Όμως α+β+γ=0 οπότε τελικά α=γ=1, β=0. Επομένως $P(x)=x(x^2+1)=x^3+x$.

Γ2. Έχουμε

$$(x^3+x-2)^3+(x^3+x-2)^2+x^3+x-2>0,$$

Θέτουμε $x^3+x-2=\omega$, οπότε έχουμε

$$\omega^3+\omega^2+\omega>0 \Leftrightarrow \omega(\omega^2+\omega+1)>0 \Leftrightarrow \omega>0 \text{ διότι } \omega^2+\omega+1>0.$$

Δηλαδή $x^3+x-2>0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2)>0 \Leftrightarrow x>1$ διότι

$$x^2+x+2>0 \text{ για κάθε x.}$$

532. **Δ1.** Είναι:

$P(x)=x^3-2x^2-3x+1$. Με σχήμα Horner για την τιμή 3 έχουμε:

$$P(x)=(x-3)(x^2+x)+1$$

Δ2. Πιθανές ακέραιες ρίζες οι ±1. $P(1)=0 \Leftrightarrow \kappa=0$ και $P(-1)=0 \Leftrightarrow \kappa=-1$.

Δ3. Για κ=0, $P(x)=x^3-2x^2+1$ και με σχήμα Horner για την τιμή 1 έχουμε: $P(x)=(x-1)(x^2-x-1)$ οπότε x=1.

533. **Δ1.** Έχουμε

$P(1)=0 \Leftrightarrow 4\alpha^2\cdot 1^3+\frac{8}{3}(1-\alpha^2)\cdot 1^2-1-2=0 \Leftrightarrow \alpha=\pm\frac{1}{2}$.Τελικά $\alpha=\frac{1}{2}$ (α>0)

Δ2. Έχουμε $P(x)=x^3+2x^2-x-2$, και με σχήμα Horner για την τιμή 1 παίρνουμε πηλίκο $\pi(x)=x^2+3x+2$ και υπόλοιπο 0.

Δ3. Έχουμε

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+3x+2)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x=-2$$

ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε 2002-2015

534. **Β1.** Έχουμε

$P(x)=2x^3+\alpha x^2+x+2$, $Q(x)=\beta x^2+\gamma x+1$ και

$F(x)=x^3+(2\beta+\gamma)x^2-10x+4\beta$

Έχουμε το σύστημα: $\{P(-1)=0,\ Q(2)=15,\ F(1)=6\}$

$$\{\alpha=1,\ 4\beta+2\gamma=14,\ 6\beta+\gamma=15\} \quad \text{ή} \quad \{\alpha=1,\ \beta=2 \text{ και } \gamma=3\}$$

Β2. i. Έχουμε

$$P(x)=Q(x) \Leftrightarrow 2x^3+x^2+x+2=2x^2+3x+1 \Leftrightarrow 2x^3-x^2-2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow 2x(x^2-1)-(x^2-1)=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(2x-1)=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=-1,\ x=\frac{1}{2}$$

ii. Έχουμε

$$P(x)<F(x) \Leftrightarrow 2x^3+x^2+x+2<x^3+7x^2-10x+8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6<0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x<1 \text{ ή } 2<x<3$$

iii. Έχουμε

$2\eta\mu^3 x-\eta\mu^2 x-2\eta\mu x+1=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \eta\mu x=1,\ \eta\mu x=-1,\ \eta\mu x=\frac{1}{2}$

$$\text{άρα}\quad x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2},\ x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6},\ x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6},\ \kappa\in Z$$

535. **Β1.** Βρίσκουμε τις τιμές του λ, που μηδενίζουν τους συντελεστές του x και το σταθερό όρο του πολυωνύμου. Έχουμε:

$$\lambda^3-4\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2-4)=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-2)(\lambda+2)=0$$

Άρα: $\lambda=-2$ ή λ=0 ή λ=2. Όμοια: $\lambda^2-2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-2)=0$.

Άρα: λ=0 ή λ=2. Τέλος: $-\lambda+2=0$. Άρα λ=2.

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Αν $\lambda\neq -2,\ 0,\ 2$ τότε το πολυώνυμο P(x) είναι 3ου βαθμού.

Αν $\lambda=-2$, τότε το πολυώνυμο P(x) είναι 1ου βαθμού. [P(x)=8x+4].

Αν λ=0, τότε το πολυώνυμο P(x) είναι μηδενικού βαθμού. [P(x)=2].
Αν λ=2, τότε το πολυώνυμο είναι το μηδενικό πολυώνυμο [P(x)=0] και δεν ορίζεται βαθμός.

B2. Για λ=1 έχουμε: $P(x)=(1^3-4\cdot 1)x^3+(1^2-2\cdot 1)x-1+2 \Leftrightarrow P(x)=-3x^3-x+1$.

Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης P από το σημείο $(1,-3)$, θα πρέπει $P(1)=-3$. Έχουμε: $P(1)=-3\cdot 1^3-1+1 \Leftrightarrow P(1)=-3$

B3. Έχουμε

$$P(x)<-3 \Leftrightarrow -3x^3-x+1<-3 \Leftrightarrow -3x^3-x+4<0.$$

Παραγοντοποιούμε την τριτοβάθμια χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner (για την τιμή 1) οπότε η τριτοβάθμια γράφεται: $(x-1)(-3x^2-3x-4)<0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2+3x+4)>0$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική, $(\Delta=-39)$, άρα το τριώνυμο είναι για κάθε x ομόσημο του α (α=3), δηλαδή είναι για κάθε x θετικό. Τελικά προκύπτει x>1.

536. **Γ1.** Με σχήμα Horner για το P(x) και για ρ=1, προκύπτει υπόλοιπο 0 και πηλίκο

$$\pi(x)=x^3-\alpha x^2+(6-\alpha)x-\alpha.$$

Με νέο σχήμα Horner για το π(x) και ρ=1, προκύπτει υπόλοιπο $-3\alpha+\beta+1$, το οποίο πρέπει (αφού το 1 είναι διπλή ρίζα του P(x)) να είναι 0. Άρα έχουμε $-3\alpha+\beta+1=0$ (1). Εξάλλου, από υπόθεση, $P(2)=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow -7\alpha+2\beta+8=0$ (2). Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2), βρίσκουμε α=6, β=17.

Γ2. Είναι: $P(x)=x^4-7x^3+17x^2-17x+6$ και $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$ (προκύπτει εύκολα, λύνοντας την P(x)=0).

Αφού $2\cdot 2=1+3$ και $(e^2)^2=e^1\cdot e^3$, ισχύει το ζητούμενο.

537. **Α.** Πρέπει:

$$x^2=1\cdot(2-x) \Leftrightarrow x^2=2-x \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-2$$

Β. Πρέπει:

$$\left.\begin{array}{l} P(1)=0 \\ P(-2)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 1^4+(\alpha-\beta)1^3-(2\alpha-3\beta)1^2+1-2=0 \\ (-2)^4+(\alpha-\beta)(-2)^3-(2\alpha-3\beta)(-2)^2+(-2)-2=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 1+\alpha-\beta-2\alpha+3\beta+1-2=0 \\ 16-8\alpha+8\beta-8\alpha+12\beta-2-2=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -\alpha+2\beta=0 \\ -16\alpha+20\beta=-12 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -\alpha+2\beta=0 \\ -4\alpha+5\beta=-3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha=2\beta \\ -8\beta+5\beta=-3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \alpha=2,\ \beta=1$$

538. **B1.** Αφού το P(x) έχει παράγοντες το x+1 και το $x-2$ άρα:

$$\begin{array}{l} P(-1)=0 \quad (1) \\ P(2)=0 \quad (2) \end{array} \quad \text{δηλαδή} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha-\beta=-3 \\ 2\alpha+\beta=-6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha=-3 \\ \beta=0 \end{array}$$

B2. Η εξίσωση P(x)=0 δηλαδή $x^3-3x^2+4=0$ έχει παράγοντες το x+1 (άρα ρίζα το -1) και $x-2$ (άρα ρίζα το 2) οπότε με σχήμα Horner έχουμε:

1	–3	0	4	–1
	–1	4	–4	
1	–4	4	0	

$$x^3-3x^2+4=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-4x+4)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=2$$

B3. i. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)=x^3-3x^2+4$ τέμνει τον άξονα y΄y όταν x=0 δηλαδή P(0)=4 δηλαδή στο σημείο (0,4).

ii. Οι τιμές του x για τις οποίες η C είναι κάτω από τον άξονα x΄x είναι οι λύσεις της ανίσωσης P(x)<0 δηλαδή:

$$x^3-3x^2+4<0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)^2<0 \Leftrightarrow x<-1$$

539. **B1.** Πρέπει:

$$\left.\begin{array}{l} P(-2)=0 \\ P(-1)=-16 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 4\alpha-2\beta=36 \\ \alpha-\beta=6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \alpha=12,\ \beta=6$$

Άρα $P(x)=2x^3+12x^2+6x-20$

B2. Αφού $P(-2)=0$ άρα -2 ρίζα του P(x). Με Horner έχουμε:

$$2(x+2)(x^2+4x-5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ \text{ή} \\ x+4x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2 \text{ ή } (x=1 \text{ ή } x=-5)$$

B3. Έχουμε

$$2(x+2)(x^2+4x-5)>0 \text{ με ρίζες } -2,\ -5,\ 1.$$

Κάνοντας τον πίνακα προσήμων έχουμε τελικά: $x \in (-5,-2) \cup (1,+\infty)$

540. **B1.** Έχουμε

$$P(x)=F(x) \Leftrightarrow x^3-5x^2+16x-12=x^2+5x-6 \Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6=0$$

Πιθανές ακέραιες ρίζες οι ±1, ±2, ±3, ±6.

Έχουμε το παρακάτω σχήμα Horner:

1	–6	11	–6	1
	1	–5	6	
1	–5	6	0	

Άρα η εξίσωση γίνεται: $(x-1)(x^2-5x+6)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ ή

$x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=1$ ή (x=2 ή x=3).

B2. Πρέπει και αρκεί $P(x)<0 \Leftrightarrow x^3-5x^2+16x-12<0$.

Πιθανές ακέραιες ρίζες οι $\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm6,\ \pm12$

1	–5	16	–12	1
	1	–4	12	

1	–4	12	0	

Η ανίσωση γίνεται: $(x-1)(x^2-4x+12)<0 \Leftrightarrow x<1$.

Το τριώνυμο $x^2-4x+12$ είναι θετικό για κάθε $x \in R$, αφού Δ<0. Τελικά για $x \in (-\infty,1)$ η γραφική παράσταση του P(x) βρίσκεται κάτω από τον x΄x.

541. **Β1.** Επειδή ο αριθμός 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου έχουμε:

$$P(2)=0 \Leftrightarrow 84\alpha-12+4\beta+2-2\alpha=0 \Leftrightarrow -6\alpha+4\beta-2=0 \Leftrightarrow 3\alpha-2\beta+1=0 \quad (1)$$

Επειδή η διαίρεση του P(x) με το x+1 αφήνει υπόλοιπο -18 έχουμε:

$$P(-1)=-18 \Leftrightarrow -1-\alpha-3-2\beta-1-2\alpha=-18 \Leftrightarrow -3\alpha-2\beta+13=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\alpha+2\beta-13=0 \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2): $(1)+(2) \Rightarrow 6\alpha-12=0 \Leftrightarrow \alpha=2$

για α=2, $(1) \Rightarrow 6-2\beta+1=0 \Leftrightarrow \beta=\frac{7}{2}$

Β2. i. Για α=2 και $\beta=\frac{7}{2}$ το πολυώνυμο γίνεται $P(x)=x^3-5x^2+8x-4$.

Με σχήμα Horner έχουμε:

1	–5	8	4	2
	2	–6	4	
1	–3	2	0	

Το πολυώνυμο γράφεται:

$$P(x)=(x-2)(x^2-3x+2)=(x-2)(x-2)(x-1)=(x-2)^2(x-1)$$

Άρα $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x-1)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή x=2 διπλή ρίζα.

ii. Η διαίρεση είναι:

x^3-5x^2+8x-4	x^2+1
$x^3 \quad -x$	$x-5$
$-5x^2+7x-4$ $5x^2 \quad +5$	
7x+1	

Από την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε: $P(x)=(x-5)(x^2+1)+7x+1$

iii. Η ανίσωση γίνεται:

$$P(x)\geq 7x+1 \Leftrightarrow (x-5)(x^2+1)+7x+1\geq 7x+1 \Leftrightarrow (x-5)(x^2+1)\geq 0$$

$$\overset{x^2+1>0}{\Leftrightarrow}\ x-5\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 5$$

542. **Β1.** Έχουμε

$$P(-3)=-8 \ \text{και}\ P(-2)=0$$

$$P(-3)=-8 \Leftrightarrow (-3)^3+\alpha\cdot(-3)^2-(-3)+\beta=-8 \Leftrightarrow 9\alpha+\beta=16$$

$$P(-2)=0 \Leftrightarrow (-2)^3+\alpha(-2)^2-(-2)+\beta=0 \Leftrightarrow 4\alpha+\beta=6$$

Επομένως έχουμε το σύστημα: $\left.\begin{matrix}9\alpha+\beta=16\\ 4\alpha+\beta=6\end{matrix}\right\}$ που έχει λύση α=2 και $\beta=-2$.

Β2. Για α=2 και $\beta=-2$ το πολυώνυμο γίνεται:

$P(x)=x^3+2x^2-x-2$. Έτσι έχουμε:

x^3+2x^2-x-2	x^2+x-1
$-x^3-x^2+x$	x+1
x^2+0x-2 $-x^2-x+1$	
$-x-1$	

Άρα $\Pi(x)=x+1$ και $\upsilon(x)-x-1$.

Επομένως $P(x)=(x^2+x-1)(x+1)-x-1$.

Β3. Έχουμε

$$P(x)=Q(x)-1 \Leftrightarrow (x^2+x+1)(x+1)-x-1=x^2+x-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-1)(x+1)-x-x^2-x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-1)(x+1)-x-(x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-1)x-x=0 \Leftrightarrow (x^2+x-2)x=0$$

άρα οι λύσεις είναι $x=-2,\ x=1,\ x=0$

543. **Γ.1.** Έχουμε

$$P(1)=1 \ \text{και}\ P(-2)=10$$

$$P(1)=1 \Leftrightarrow 1+\alpha-7+\beta+2=1 \Leftrightarrow \alpha+\beta=5$$

$$P(-2)=10 \Leftrightarrow 16-8\alpha-28-2\beta+2=10 \Leftrightarrow 4\alpha+\beta=-10$$

Επομένως έχουμε το σύστημα: $\left.\begin{matrix}\alpha+\beta=5\\ 4\alpha+\beta=-10\end{matrix}\right\}$ που έχει λύση $\alpha=-5$ και β=10.

Γ.2.i. Για $\alpha=-5$ και β=10 έχουμε $P(x)=x^4-5x^3-7x^2+10x+2$. Τότε:

$x^4-5x^3-7x^2+10x+2$	x^3+x^2-2x
$-x^4-x^3+2x^2$	$x-6$
$-6x^3-5x^2+10x+2$	
$6x^3+6x^2-12x$	
x^2-2x+2	

Άρα το πηλίκο είναι $\Pi(x)=x-6$.

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε $P(x)=(x^3+x^2-2x)\Pi(x)+\upsilon(x)$

Επομένως $P(x)=(x^3+x^2-2x)(x-6)+x^2-2x+2$.

ii. Έχουμε:

$$P(x)=\upsilon(x)\Leftrightarrow(x^3+x^2-2x)\Pi(x)+\upsilon(x)=\upsilon(x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x^3+x^2-2x)(x-6)=0\Leftrightarrow x(x-6)(x-1)(x+2)=0$$

Άρα οι λύσεις είναι x=0, $x=-2$, x=1 και x=6.

iii. Έχουμε:

$$Q(x)>0\Rightarrow x^3+x^2-2x>0\Leftrightarrow x(x^2+x-2)>0\Leftrightarrow x(x-1)(x+2)>0$$

Επομένως $x\in(-2,0)\cup(1,+\infty)$

544. **B1.** Έχουμε

$$f(x)=0\Leftrightarrow 2x^3-3x^2+1=0 \quad (1).$$

Επειδή όλοι οι συντελεστές είναι ακέραιοι, οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης f(x)=0, είναι το -1 ή το 1. Το -1 δεν είναι ρίζα, γιατί $f(-1)=2(-1)^3-3(-1)^2+1=-4$.

Ενώ το 1 είναι ρίζα, γιατί $f(1)=2(1)^3-3(1)^2+1=0$.

Με εφαρμογή του σχήματος Horner έχουμε:

2	−3	0	1	ρ=1
↓	2	−1	−1	
2	−1	−1	0	

Η εξίσωση (1) είναι τώρα ισοδύναμη με την $(x-1)(2x^2-x-1)=0$.

Έτσι, $x-1=0\Leftrightarrow x=1$ ή $2x^2-x-1=0$ με ρίζες x=1 ή $x=-\dfrac{1}{2}$ αφού Δ=9.

Οι ρίζες λοιπόν της εξίσωσης (1) είναι $x=-\dfrac{1}{2}$ ή x=1 (διπλή).

B2. Επειδή το α=1 είναι η διπλή ρίζα τότε:

$$ημx = 1 \Leftrightarrow ημx = ημ\frac{π}{2} \Leftrightarrow x = 2κπ + \frac{π}{2}\ (κ \in Z)\ \text{ή}$$

$x = 2κπ + π - \frac{π}{2} = 2κπ + \frac{π}{2}\ (κ \in Z)$. Όμοια, το $β = -\frac{1}{2}$ είναι η άλλη ρίζα οπότε:

$συνx = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow συνx = συν\left(π - \frac{π}{3}\right) \Leftrightarrow x = 2κπ + \frac{2π}{3}$ ή $x = 2κπ - \frac{2π}{3}\ (κ \in Z)$.

Β3. Επειδή η γραφική παράσταση της f δεν είναι πάνω από τον άξονα x΄x πρέπει: $f(x) \le 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 - x - 1) \le 0$. Το πρόσημο της f(x) φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Έτσι, οι τιμές των $x \in R$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f δεν βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x είναι: $x \le -\frac{1}{2}$ ή x=1.

Β4. Έχουμε $f(-x) = 2(-x)^3 - 3(-x)^2 + 1 = -2x^3 - 3x^2 + 1$.

Εκτελούμε την ευκλείδεια διαίρεση, όπως φαίνεται παρακάτω:

$-2x^3 - 3x^2 + 0x + 1$	$x^2 + 1$
$2x^3 \quad +2x$	$-2x - 3$
$-3x^2 + 2x + 1$ $+3x^2 \quad +3$	
2x+4	

Το πηλίκο είναι: $π(x) = -2x - 3$ και το υπόλοιπο: $υ(x) = 2x + 4$.

Επομένως, $f(-x) = (x^2 + 1)(-2x - 3) + (2x + 4)$.

545. **Β1.** Αφού το $x+1$ είναι παράγοντα του P(x), από γνωστό θεώρημα ισχύει $P(-1) = 0$. Έχουμε:

$$P(-1) = 0 \Leftrightarrow 2(-1)^3 + (α+β)(-1)^2 + (2α+5β)(-1) + 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(-1) + (α+β)\cdot 1 - 2α - 5β + 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2 + α + β - 2α - 5β + 3 = 0 \Leftrightarrow -α - 4β + 1 = 0 \Leftrightarrow α + 4β = 1\ \ (1)$$

Αφού το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$ ισούται με -9, από γνωστό θεώρημα ισχύει: $P(2) = -9$. Έχουμε:

$$P(2) = -9 \Leftrightarrow 2\cdot 2^3 + (α+β)\cdot 2^2 + (2α+5β)\cdot 2 + 3 = -9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cdot 8 + 4(α+β) + 2(2α+5β) + 3 = -9 \Leftrightarrow 16 + 4α + 4β + 4α + 10β + 3 = -9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8α + 14β = -9 - 16 - 3\ (\text{απλοποιούμε με το 2}) \Leftrightarrow 4α + 7β = -14\ \ (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1), (2):

$$\begin{cases} α + 4β = 1 \\ 4α + 1β = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} α = 1 - 4β \\ 4(1-4β) + 7β = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} α = 1 - 4β \\ 4 - 16β + 7β = -14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} α = 1 - 4β \\ -9β = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} α = 1 - 4\cdot 2 \\ β = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} α = -7 \\ β = 2 \end{cases}$$

B2. i. Για $\alpha=-7$ και β=2 το πολυώνυμο P(x) γράφεται:

$$P(x)=2x^3+(-7+2)x^2+[2(-7)+5\cdot 2]x+3 \Leftrightarrow P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$$

Είναι $P(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3-5x^2-4x+3=0$

Σύμφωνα με το θεώρημα ακέραιων ριζών οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης, είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου $\alpha_0=3$, δηλαδή οι αριθμοί ± 1, ± 3

Από το ερώτημα (Β1) ισχύει $P(-1)=0$, δηλαδή το -1 είναι ρίζα του P(x) οπότε εφαρμόζοντας το σχήμα Horner για $\rho=-1$ έχουμε:

2	-5	-4	3	$\rho=-1$
	-2	7	-3	
2	-7	3	0	

ii. Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$\Delta(x)=\delta(x)\cdot\pi(x) \Leftrightarrow P(x)=(x-\rho)\cdot\pi(x)$ ή $2x^3-5x^2-4x+3=(x+1)(2x^2-7x+3)$

Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$(x+1)(2x^2-7x+3)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \text{ ή } 2x^2-7x+3=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=\frac{1}{2} \text{ ή } x=3$$

$2x^3-5x^2-4x+3$	x^2-1
$-2x^3 \quad +2x$	$2x-5$
$5x^2-2x+3$ $5x^2 \quad -5$	
$-2x-2$	

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι: $2x^3-5x^2-4x+3=(x^2-1)(2x-5)+(-2x-2)$

Από το (α) ερώτημα έχουμε $P(x)=(x+1)(2x^2-7x+3)$ και από το (β) ερώτημα έχουμε ότι $\upsilon(x)=-2x-2=-2(x+1)$.

iii. Για να ορίζεται η ανίσωση $\frac{\upsilon(x)}{P(x)}\geq 0$ πρέπει

$$P(x)\neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2-7x+3)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \text{ και } x\neq\frac{1}{2} \text{ και } x\neq 3.$$

Τότε: $\frac{\upsilon(x)}{P(x)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2(x+1)}{(x+1)(2x^2-7x+3)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{2x^2-7x+3}\geq 0 \Leftrightarrow 2x^2-7x+3<0$

Το πρόσημο του $2x^2-7x+3$ φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι $\frac{1}{2}<x<3$

546. **B1.** Πρέπει P(1)=3α+1

Άρα $1^3+2\alpha-\alpha^2+2=3\alpha+1 \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha-2=0 \Leftrightarrow \alpha=1$ ή $\alpha=-2$

B2. i. Για α=1 είναι $P(x)=x^3+2x^2-x+2$. Έχουμε λοιπόν:

x^3+2x^2-x+2	x^2+x+1
$-x^3-x^2-x$	x+1
x^2-2x+2	
$-x^2-x-1$	
$-3x+1$	

Έτσι σύμφωνα με την Ευκλείδεια διαίρεση του P(x) με το Q(x) το πηλίκο είναι π(x)=x+1, ενώ το υπόλοιπο $\upsilon(x)=-3x+1$.

ii. Για να ορίζεται η ανίσωση πρέπει $Q(x)\neq 0 \Leftrightarrow x^2+x+1\neq 0$, είναι $\Delta=-3$ οπότε το τριώνυμο $Q(x)=x^2+x+1$ δεν έχει ρίζες, δηλαδή ισχύει $x^2+x+1\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και μάλιστα $x^2+x+1>0$ αφού είναι ομόσημο του α=1>0. Διαδοχικά έχουμε:

$$\frac{P(x)+x-2}{Q(x)}\geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^3+2x^2-x+2+x-2}{x^2+x+1}\geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3+2x^2}{x^2+x+1}\geq 1 \overset{x^2+x+1>0}{\Leftrightarrow} x^3+2x^2\geq x^2+x+1 \Leftrightarrow x^3+x^2-x-1\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+1)-(x+1)\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-1)\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1)\geq 0.$$

(Σχόλιο 1)

Από τον παραπάνω πίνακα προσήμου έχουμε ότι η ανίσωση $(x+1)^2(x-1)\geq 0$ επαληθεύεται για $x\in[1,+\infty)$ ή $x=-1$ (Σχόλιο 2)

(1) Σχόλιο:

Συνήθως μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος οπότε έχουμε $\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+x+1}-1\geq 0$.

Στη συνέχεια κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα και παίρνουμε $\dfrac{x^3+2x^2-(x^2+x+1)}{x^2+x+1}\geq 0$.

Εδώ όμως παρατηρούμε ότι το $Q(x)=x^2+x+1$ έχει $\Delta=-3<0$ οπότε έχει το ίδιο πρόσημο α=1>0, δηλαδή ισχύει $x^2+x+1>0$ οπότε μπορούμε να κάνουμε απαλοιφή παρανομαστών χωρίς να αλλάξουμε τη φορά.

(2) Σχόλιο:

Το "=" της $(x+1)^2(x-1)\geq 0$ επαληθεύεται για $x=-1$ ή x=1 ενώ το ">" επαληθεύεται για $x\in(1,+\infty)$ έτσι έχουμε $x\in\{-1\}\cup[1,+\infty)$.

iii. Πρέπει $Q(x)=x^2+x+1\geq 0$ που ισχύει για κάθε $x\in R$ και μάλιστα $\Pi(x)=x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$.

Η εξίσωση γίνεται:

$$x+1=\sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow (x+1)^2=x^2+x+1 \Leftrightarrow x^2+2x+1=x^2+x+1 \Leftrightarrow x=0$$

η οποία είναι δεκτή.

Σχόλιο:

Για κάθε $x \geq -1$ και τα δύο μέλη της εξίσωσης $x+1=\sqrt{x^2+x+1}$ είναι μη αρνητικά οπότε υψώνουμε στο τετράγωνο.

Εναλλακτικά:

$$x+1=\sqrt{x^2+x+1} \Rightarrow (x+1)^2 = x^2+x+1 \Rightarrow x^2+2x+1=x^2+x+1 \Rightarrow x=0$$

Κάνουμε επαλήθευση. Για x=0 ή $x+1=\sqrt{x^2+x+1}$ μας δίνει

$0+1=\sqrt{0^2+0+1}$ το οποίο ισχύει. Άρα η ρίζα x=0 είναι δεκτή.

547. **Γ1.** Έχουμε $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

- $P(-2) = 24 \Leftrightarrow -8 + 4\alpha - 2\beta + \gamma = 24 \Leftrightarrow 4\alpha - 2\beta + \gamma = 32 \quad (1)$
- $P(0) = 8 \Leftrightarrow \boxed{\gamma = 8}$
- $P(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = -1 \quad (2)$

Έτσι $\overset{(1)\ \gamma=8}{\underset{(2)}{\Rightarrow}} \begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 24 \\ \alpha + \beta = -9 \end{cases} \left| \begin{matrix} \\ \cdot 2 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 24 \\ 2\alpha + 2\beta = -18 \end{cases} + \{6\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 1$

$(2) \Rightarrow 1 + \beta + 8 = -1 \Leftrightarrow \boxed{\beta = -10}$

Γ2. α. Το πολυώνυμο γίνεται: $f(x) = x^3 + x^2 + 10x + 8$. Με το σχήμα Horner για $x = 1$ βρίσκουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ γίνεται $(x - 1)(x^2 + 2x - 8) = 0$, επομένως $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x^2 + 2x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -4$.

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι οι -4, $1{,}2$.

β. Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, όταν $f(x) < 0$.

Η ανίσωση $f(x) < 0$ αληθεύει όταν $x \in (-\infty,-4) \cup (1, 2)$.

Γ3. $\dfrac{x+4}{f(x)} \leq \dfrac{2}{f(x) + f(-x) - 18}$ **(1)**

Είναι $f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - 10(-x) + 8 = -x^3 + x^2 + 10x + 8$, επομένως

$$f(x) + f(-x) - 18 =$$
$$= x^3 + x^2 - 10x + 8 - x^3 + x^2 + 10x + 8 - 18 = 2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1)$$

Πρέπει $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -4, 1, 2$ και $f(x) + f(-x) - 18 \neq 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$, επομένως συνολικά οι περιορισμοί είναι $x \neq -4, -1, 1, 2$ η ανίσωση **(1)** γίνεται:

$$\frac{x+4}{f(x)} - \frac{2}{f(x) + f(-x) - 18} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x^3 + x^2 - 10x + 8} - \frac{2}{2(x^2 - 1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4}{(x+4)(x-1)(x-2)} - \frac{2}{2(x-1)(x+1)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{(x-1)(x+1)} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1-(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-2)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-x+2}{(x-1)(x+1)(x-2)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{3}{(x-1)(x+1)(x-2)} \le 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3(x-1)(x+1)(x-2) \le 0.$

Είναι $x-1 \le 0 \Leftrightarrow x \le 1,\ x+1 \le 0 \Leftrightarrow x \le -1,\ x-2 \le 0 \Leftrightarrow x \le 2$

Κάνοντας τον πίνακα προσήμων η ανίσωση αληθεύει όταν

$$x \in (-\infty, -4) \cup (-4, -1) \cup (1, 2)$$

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ 47

548. **α.** Για να έχει παράγοντα το $x-1$, πρέπει P(1)=0.

Δηλαδή, $1^4 - \alpha\cdot 1^3 + 2^\beta \cdot 1^2 + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha + 2^\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha - 2^\beta = 1$

β. Και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x-2$ είναι 1→ P(2)=1.

Δηλαδή, $2^4 - \alpha\cdot 2^3 + 2^\beta \cdot 2^2 + 2 - 1 = 1 \Leftrightarrow 16 - 8\alpha + 4\cdot 2^\beta + 1 = 1 \Leftrightarrow 8\alpha - 4\cdot 2^\beta = 16$

Λύνουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha - 2^\beta = 1\\ 8\alpha - 4\cdot 2^\beta = 16\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}2^\beta = \alpha - 1\\ 8\alpha - 4(\alpha-1) = 16\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}2^\beta = \alpha - 1\\ 8\alpha - 4\alpha + 4 = 16\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}2^\beta = \alpha - 1\\ 4\alpha = 12\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}2^\beta = \alpha - 1\\ \alpha = 3\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}2^\beta = 3 - 1\\ \alpha = 3\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\beta = 1\\ \alpha = 3\end{array}\right\}$$

549. **α.** Για να έχει παράγοντα το x+1, πρέπει $P(-1) = 0$.

Δηλαδή $(-1)^3 + \lambda(-1)^2 - 3(-1) + 1 = 0 \Leftrightarrow -1 + \lambda + 3 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3$

β. Το πολυώνυμο γίνεται: $P(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$

Πιθανές ακέραιες ρίζες: ± 1

Εφαρμόζουμε Horner για $x = -1$ και προκύπτει $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = (x+1)(x^2 - 4x + 1) = 0$

$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3}$ ή $x = 2 - \sqrt{3}$

550. **α.** Για να έχει το

$P(x) = -x^3 + 2\alpha x - \beta + \alpha$ παράγοντα το x+2 πρέπει:

$P(-2) = 0 \Leftrightarrow -(-2)^3 + 2\alpha(-2) - \beta + \alpha = 0 \Leftrightarrow 8 - 4\alpha - \beta + \alpha = 0 \Leftrightarrow 8 - \beta - 3\alpha = 0 \Leftrightarrow 3\alpha + \beta = 8$

β. Για να είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1, 5 πρέπει:

$P(-1) = 5 \Leftrightarrow -(-1)^3 + 2\alpha(-1) - \beta + \alpha = 5 \Leftrightarrow 1 - 2\alpha - \beta + \alpha = 5 \Leftrightarrow 1 - \alpha - \beta = 5 \Leftrightarrow -\alpha - \beta = 4$

Λύνουμε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l}3\alpha+\beta=8\\ -\alpha-\beta=4\end{array}\right\}(+)\Rightarrow 2\alpha=12\Leftrightarrow\alpha=6$

Και $3\alpha+\beta=8\Leftrightarrow 3\cdot 6+\beta=8\Leftrightarrow 18+\beta=8\Leftrightarrow\beta=8-18\Leftrightarrow\beta=-10$

551. **α.** Έχουμε

$$x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$$

Για να έχει το πολυώνυμο P(x) παράγοντα το x^2-3x-4 δηλαδή το $(x-4)(x+1)$, πρέπει:

P(4)=0 και $P(-1)=0$

- $P(4)=0\Leftrightarrow\alpha\cdot 4^3+\beta\cdot 4^2+2\cdot 4+8=0\Leftrightarrow 64\alpha+16\beta+8+8=0\Leftrightarrow 64\alpha+16\beta+16=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4\alpha+\beta+1=0\Leftrightarrow 4\alpha+\beta=-1$

- $P(-1)=0\Leftrightarrow\alpha(-1)^3+\beta(-1)^2+2(-1)+8=0\Leftrightarrow-\alpha+\beta-2+8=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow-\alpha+\beta+6=0\Leftrightarrow\alpha-\beta=6$

Λύνουμε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l}4\alpha+\beta=-1\\ \alpha-\beta=6\end{array}\right\}(+)\Rightarrow 5\alpha=5\Leftrightarrow\alpha=1$

και $\alpha-\beta=6\Leftrightarrow 1-\beta=6\Leftrightarrow\beta=-5$. Άρα $P(x)=x^3-5x^2+2x+8$

β. $x^3-5x^2+2x+8\geq 0$

- $x^3-5x^2+2x+8=0\rightarrow$ πιθανές ακέραιες ρίζες $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 8$

Εφαρμόζουμε Horner για $x=-1$ και προκύπτει:

$P(x)=x^3-5x^2+2x+8=(x+1)(x^2-6x+8)=(x+1)(x-4)(x-2)$

$(x+1)(x-4)(x-2)=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$ ή $x-4=0\Leftrightarrow x=4$ ή $x-2=0\Leftrightarrow x=2$

$P(x)\geq 0\Leftrightarrow x\in[-1,2]\cup[4,+\infty)$

552. **α.** Για να είναι παράγοντας το x+1 πρέπει:

- $P(-1)=0\Leftrightarrow(-1)^4-6(-1)^3+9(-1)^2+\alpha(-1)+\beta=0\Leftrightarrow 1+6+9-\alpha+\beta=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow-\alpha+\beta=-16\ \ (1)$
- $P(0)=-12\Leftrightarrow 0^4-6\cdot 0^3+9\cdot 0^2+\alpha\cdot 0+\beta=-12\Leftrightarrow\beta=-12$

Από (1) $\rightarrow$ $-\alpha-12=-16\Leftrightarrow\alpha=4$. Άρα $P(x)=x^4-6x^3+9x^2+4x-12$.

β. Εφαρμόζω Horner για $x=-1$ και προκύπτει:

$$P(x)=x^4-6x^3+9x^2+4x-12=(x+1)(x^3-7x^2+16x-12)$$

Εφαρμόζουμε ξανά Horner στο $x^3-7x^2+16x-12$ για $x=-2$ και προκύπτει:

$P(x)=(x+1)(x-2)(x^2-5x+6)=(x+1)(x-2)(x-2)(x-3)=(x+1)(x-2)^2(x-3)$

Έχουμε:

$(x+1)(x-2)^2(x-3)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

553. **α.** Η αριθμητική τιμή του P(x) για $x=-1$ είναι:

$$P(-1)=(-1)^3-6(-1)^2+11(-1)-6=-1-6-11-6=-24$$

β. Έχουμε

$x^3-6x^2+11x-6$	$x-1$
$-x^3+x^2$	x^2-5x+6
$-5x^2+11x-6$ $+5x^2-5x$	
$6x-6$ $-6x+6$	
0	

Άρα $\pi(x)=x^2-5x+6$

554. **α.** Για να είναι το $x-\omega$ παράγοντας του P(x) πρέπει:

$P(\omega)=0 \Leftrightarrow \omega^3-\omega\cdot\omega^2+5\omega+\lambda=0 \Leftrightarrow \omega^3-\omega^3+5\omega+\lambda=0 \Leftrightarrow 5\omega+\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-5\omega$

β. Για να βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x πρέπει P(x)>0

$$\Leftrightarrow x^3-\omega x^2+5x-5\omega>0 \Leftrightarrow x^2(x-\omega)+5(x-\omega)>0$$
$$\Leftrightarrow (x-\omega)(x^2+5)>0 \Leftrightarrow x>\omega \text{ καθόσον } x^2+5>0$$

555. **α.** Έχουμε

$$P(1)=-2 \Leftrightarrow 2\cdot1^3+\alpha\cdot1^2-3\cdot1-5=-2 \Leftrightarrow 2+\alpha-3-5=-2 \Leftrightarrow \alpha-6=-2 \Leftrightarrow \alpha=4$$

β. Άρα $P(x)=2x^3+4x^2-3x-5=0$ Πιθανές ακέραιες ρίζες: ±1, ±5

Εφαρμόζουμε Horner για $x=-1$ και προκύπτει:

$P(x)=2x^3+4x^2-3x-5=(x+1)(2x^2+2x-5)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή

$$2x^2+2x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{11}}{2} \text{ ή } x=\frac{-1-\sqrt{11}}{2}$$

556. **α.** Για να είναι το 1 ρίζα του P(x) πρέπει:

$$P(1)=0 \Leftrightarrow 1^3-1^2-4\cdot1+4=0 \Leftrightarrow 1-1-4+4=0 \Leftrightarrow 0=0 \text{ ισχύει.}$$

Άρα 1 ρίζα του P(x).

β. Εφαρμόζουμε Horner για x=1 και προκύπτει $\pi(x)=x^2-4$.

γ. $P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-4) \geq 0$

- $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2$

Τελικά $P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2,1] \cup [2,+\infty)$

557. **α.**

$2x^3 + x^2 - 13x + 6$	x+1
$-2x^3 - 2x^2$	$2x^2 - x - 12$
$-x^2 - 13x + 6$ $+x^2 + x$	
$-12x + 6$ $+12x + 12$	
18	

Άρα υ=18.

β. Για να είναι παράγοντας το $x - 2$, πρέπει P(2)=0.

Άρα $2 \cdot 2^3 + 2^2 - 13 \cdot 2 + 6 = 0 \Leftrightarrow 16 + 4 - 26 + 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ ισχύει.

Άρα $x - 2$ παράγοντας του P(x).

γ. Για να βρίσκεται κάτω από τον x΄x η γραφική παράσταση της P(x), πρέπει P(x)<0.
Εφαρμόζουμε Horner για x=2 και προκύπτει:

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x^2 + 5x - 3) < 0$$

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \ \text{ ή } \ 2x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ \text{ ή } \ x = -3$$

$$\text{Άρα} \quad P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-3) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

558. **α.** Πιθανές ακέραιες ρίζες: ± 1, ± 2.

Όμως, επειδή έχει ρίζα άρτιο θετικό ακέραιο → x=2.

Άρα $P(2) = 0 \Leftrightarrow 2^3 - \alpha \cdot 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 8 - 2\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 3$

Άρα $P(x) = x^3 - 3x - 2$

β. Εφαρμόζουμε Horner για $x = -\lambda$:

1	0	-3	-2	$-\lambda$
	$-\lambda$	λ^2	$3\lambda - \lambda^3$	
1	$-\lambda$	$-3 + \lambda^2$	$-\lambda^3 + 3\lambda - 2$	

Άρα $\upsilon = -\lambda^3 + 3\lambda - 2$. Πρέπει

$$\upsilon > -4 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda - 2 > -4 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda - 2 + 4 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda + 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 3\lambda - 2 < 0$$

Εφαρμόζουμε Horner για λ=2 και προκύπτει:

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 < 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) < 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 < 0$$

$$\overset{\lambda \neq -1}{\Leftrightarrow} \lambda - 2 < 0 \overset{\lambda \neq -1}{\Leftrightarrow} \lambda < 2$$

Τελικά $\lambda^3 - 3\lambda - 2 < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, -1) \cup (-1, 2)$.

559. **α.** Για να έχει το P(x) ρίζα το 1, πρέπει:

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 + \alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 + 4 = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha + \beta + 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = -5$$

Για να είναι το υ=14, διαιρούμενο το P(x) με το x+1, πρέπει το

$$P(-1) = 14 \Leftrightarrow (-1)^3 + \alpha(-1)^2 + \beta(-1) + 4 = 14 \Leftrightarrow -1 + \alpha - \beta + 4 = 14 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 11$$

Λύνουμε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = -5 \\ \alpha - \beta = 11 \end{array}\right\} (+) \Rightarrow 2\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 3$

και $\alpha + \beta = -5 \Leftrightarrow 3 + \beta = -5 \Leftrightarrow \beta = -8$

β. Επομένως το P(x) γίνεται $P(x) = x^3 + 3x^2 - 8x + 4$

Πιθανές ακέραιες ρίζες: $\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4$. Εφαρμόζουμε Horner για x=1 και προκύπτει:

$$x^3 + 3x^2 - 8x + 4 = (x - 1)(x^2 + 4x - 4) = 0$$

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 + 2\sqrt{2}$ ή $x = -2 - 2\sqrt{2}$

560. **α.** Για να είναι ίσα τα P(x) και Q(x), πρέπει:

$\kappa - \mu = 2 \Leftrightarrow 1 - (-1) = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$ και

$-\mu = 2\kappa - 1 \Leftrightarrow -(-1) = 2\kappa - 1 \Leftrightarrow 1 = 2\kappa - 1 \Leftrightarrow 2\kappa = 2 \Leftrightarrow \kappa = 1$ και $\mu - 2 = -3 \Leftrightarrow \mu = -1$

β. Άρα $P(x) = (1+1)x^3 + 1x - 3 = 2x^3 + x - 3$

γ. Για να είναι το 1 ρίζα του P(x), πρέπει

$P(1) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 1^3 + 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow 2 + 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ ισχύει. Άρα 1 ρίζα του P(x).

Εφαρμόζουμε Horner για x=1 και προκύπτει $P(x) = (x - 1)(2x^2 + 2x + 3) = 0$

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $2x^2 + 2x + 3 = 0$ $\quad \Delta = 4 - 24 = -20 < 0$ άρα αδύνατη.

Επομένως x=1 μοναδική λύση του P(x).

561. **α.** Για να έχει παράγοντα το $x - 1$, πρέπει:

$$P(1)=0 \Leftrightarrow 1^4-(\lambda+1)\cdot 1^3+(\lambda-1)^2\cdot 1^2-\lambda\cdot 1+3\lambda-1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1-\lambda-1+\lambda^2-2\lambda+1-\lambda+3\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \lambda=0 \text{ ή } \lambda=1$$

για x=0 $\rightarrow$ $P(0)=3\lambda-1$. Όμως $P(0)\neq 2\lambda-1 \Leftrightarrow 3\lambda-1\neq 2\lambda-1 \Leftrightarrow \lambda\neq 0$

Τελικά λ=1.

β. Το P(x) γίνεται:

$$P(x)=x^4-(1+1)x^3+(1-1)^2x^2-1x+3\cdot 1-1=x^4-2x^3-x+2$$

$x^4-2x^3-x+2=0 \Leftrightarrow x^3(x-2)-(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^3-1)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ ή

$x^3-1=0 \Leftrightarrow x^3=1 \Leftrightarrow x=1$. Άρα P(2)=0 και P(1)=0.

γ. $Q(x)=\left[x-P(x)\right]^2+3-x$ Το υπόλοιπο της διαίρεσης του Q(x) με το $x-1$ είναι το

$$Q(1)=\left[1-P(1)\right]^2+3-1=(1-0)^2+2=3$$

Και το υπόλοιπο της διαίρεσης του Q(x) με το $x-2$ είναι το

$$Q(2)=\left[2-P(2)\right]^2+3-2=(2-0)^2+1=5$$

Στη διαίρεση $Q(x):(x-1)(x-2)$, δηλαδή $Q(x):(x^2-3x+2)$, ο διαιρέτης x^2-3x+2 είναι 2ου βαθμού, άρα το υπόλοιπο θα είναι της μορφής υ(x)=αx+β με $\alpha,\beta\in R$.

Έχουμε από την ταυτότητα της διαίρεσης $Q(x)=(x^2-3x+2)\cdot\pi(x)+\alpha x+\beta$

Όμως $Q(1)=3 \Rightarrow (1^2-3\cdot 1+2)\cdot\pi(1)+\alpha+\beta=3 \Leftrightarrow \alpha+\beta=3$

Και $Q(2)=5 \Rightarrow (2^2-3\cdot 2+2)\cdot\pi(2)+\alpha\cdot 2+\beta=5 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=5$

Λύνουμε το σύστημα $\left.\begin{aligned}\alpha+\beta&=3\\ 2\alpha+\beta&=5\end{aligned}\right\}\left.\begin{aligned}-\alpha-\beta&=-3\\ 2\alpha+\beta&=5\end{aligned}\right\}(+)\Rightarrow \alpha=2$

και $2\cdot 2+\beta=5 \Leftrightarrow 4+\beta=5 \Leftrightarrow \beta=1$. Τελικά υ(x)=2x+1

562. **α.** Για να έχει παράγοντα το $x-1$, πρέπει:

$$P(1)=0 \Leftrightarrow 2\cdot 1^3+1^2-\alpha\cdot 1+2=0 \Leftrightarrow 5-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=5$$

β. Το P(x) γίνεται: $P(x)=2x^3+x^2-5x+2$.

Εφαρμόζουμε Horner για x=1 και προκύπτει

$$2x^3+x^2-5x+2=(x-1)(2x^2+3x-2) \text{ με } \pi(x)=2x^2+3x-2 \text{ και υ=0.}$$

γ. $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+3x-2)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$$\text{ή } 2x^2+3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \text{ ή } x=-2$$

563. **α.** Για να είναι το x+1 παράγοντας του f(x), πρέπει:

$$f(-1)=0 \Leftrightarrow (-1)^4+(\lambda-\mu)(-1)^3-(2\lambda+\mu-6)(-1)^2+1-2=0$$
$$\Leftrightarrow 1-\lambda+\mu-2\lambda-\mu+6-1=0 \Leftrightarrow -3\lambda=-6 \Leftrightarrow \lambda=2$$

Αφού το F(x) διαιρούμενο με το $x-1$ δίνει υπόλοιπο -4, τότε:

$$f(1)=-4 \Leftrightarrow 1^4+(\lambda-\mu)\cdot 1^3-(2\lambda+\mu-6)\cdot 1^2-1-2=-4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1+\lambda-\mu-2\lambda-\mu+6-3=-4 \Leftrightarrow 1+2-2\mu-4+3+4=0 \Leftrightarrow 2\mu=6 \Leftrightarrow \mu=3$$

β. Το f(x) γίνεται: $F(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$. Πιθανές ακέραιες ρίζες: $\pm 1,\ \pm 2$

Εφαρμόζουμε Horner για $x=-1$ και προκύπτει:

$$f(x)=(x+1)(x^3-2x^2+x-2)=(x+1)(x^2(x-2)+(x-2))=(x+1)(x^2+1)(x-2)$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1 \text{ αδύνατη ή } x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

$$f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$$

564. **α.** Έχουμε

$$g(x)=x^2-x-6=(x-3)(x+2)$$

Για να είναι το g(x) παράγοντας του P(x) πρέπει: P(3)=0 και $P(-2)=0$

$$P(3)=0 \Leftrightarrow 3^3+\alpha\cdot 3^2+\beta\cdot 3+12=0 \Leftrightarrow 27+9\alpha+3\beta+12=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9\alpha+3\beta=-39 \Leftrightarrow 3\alpha+\beta=-13$$

$$P(-2)=0 \Leftrightarrow (-2)^3+\alpha(-2)^2+\beta(-2)+12=0 \Leftrightarrow -8+4\alpha-2\beta+12=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha-2\beta=-4 \Leftrightarrow 2\alpha-\beta=-2$$

Λύνουμε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l}3\alpha+\beta=-13\\ 2\alpha-\beta=-2\end{array}\right\}(+) \Rightarrow 5\alpha=-15 \Leftrightarrow \alpha=-3$

και $3\alpha+\beta=-13 \Leftrightarrow 3(-3)+\beta=-13 \Leftrightarrow -9+\beta=-13 \Leftrightarrow \beta=-4$

β. Το P(x) γίνεται: $P(x)=x^3-3x^2-4x+12$

$x^3-3x^2-4x+12$	x^2-x-6
$-x^3+x^2+6x$	$x-2$
$-2x^2+2x+12$ $+2x^2-2x-12$	
0	

γ. Βρίσκουμε το $\pi(1)=1-2=-1$, $\pi(3)=3-2=1$, $\pi(5)=5-2=3\ldots$
$\pi(2009)=2009-2=2007$

Άρα: $-1+1+3...+2007$ $\rightarrow$ το άθροισμα αυτό είναι μια αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1=-1$ και ω=2. Το $\alpha_\nu=2007$.

$$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega \Leftrightarrow 2007=-1+(\nu-1)\cdot 2 \Leftrightarrow 2007=-1+2\nu-2 \Leftrightarrow 2\nu=2010 \Leftrightarrow \nu=1005$$

Άρα

$$S_\nu=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu) \Leftrightarrow S_{1005}=\frac{1005}{2}(-1+2007) \Leftrightarrow S_{1005}=\frac{1005}{2}\cdot 2006=1005\cdot 1003=1.008.015$$

565. **α.** Για να είναι παράγοντας το x+1 πρέπει:

$$P(-1)=0 \Leftrightarrow (-1)^3-5(-1)^2-\lambda(-1)+5=0 \Leftrightarrow -1-5+\lambda+5=0 \Leftrightarrow \lambda=1$$

β. Για λ=1 το P(x) γίνεται: $P(x)=x^3-5x^2-x+5$

x^3-5x^2-x+5	x+1
$-x^3-x^2$	x^2-6x+5
$-6x^2-x+5$ $+6x^2+6x$	
$5x+5$ $-5x-5$	
0	

Άρα $x^3-5x^2-x+5=(x+1)(x^2-6x+5)$

γ. $P(x)\le 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-6x+5)\le 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-5)(x-1)\le 0$

$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$ ή $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$P(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[1,5]$

566. **α.** Για να είναι παράγοντας το $x-1$ πρέπει:

$$P(1)=0 \Leftrightarrow 1^4-\alpha\cdot 1^3+3\cdot 1^2+\beta\cdot 1+2=0 \Leftrightarrow 1-\alpha+3+\beta+2=0 \Leftrightarrow -\alpha+\beta=-6$$

Για να είναι παράγοντας το x+2, πρέπει:

$$P(-2)=0 \Leftrightarrow (-2)^4-\alpha(-2)^3+3(-2)^2+\beta(-2)+2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 16+8\alpha+12-2\beta+2=0 \Leftrightarrow 8\alpha-2\beta=-30 \Leftrightarrow 4\alpha-\beta=-15$$

Λύνουμε το σύστημα: $\left.\begin{matrix}-\alpha+\beta=-6\\ 4\alpha-\beta=-15\end{matrix}\right\}(+) \Rightarrow 3\alpha=-21 \Leftrightarrow \alpha=-7$

και $-\alpha+\beta=-6 \Leftrightarrow 7+\beta=-6 \Leftrightarrow \beta=-13$

Άρα, το P(x) γίνεται: $P(x)=x^4+7x^3+3x^2-13x+2$

β.

$x^4+7x^3+3x^2-13x+2$	x^2+x-2
$-x^4-x^3+2x^2$	x^2+6x-1
$6x^3+5x^2-13x+2$ $-6x^3-6x^2+12x$	
x^2-x+2 $-x^2+x-2$	
0	

Άρα $\pi(x)=x^2+6x-1$

567. **α.** Για να είναι το 1 ρίζα του πολυωνύμου P(x), πρέπει:

$$P(1)=0 \Leftrightarrow 2\cdot 1^3+1^2-\alpha\cdot 1+2=0 \Leftrightarrow 5-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=5$$

Το P(x) γίνεται: $P(x)=2x^3+x^2-5x+2$.

β. **i.** Έχουμε $P(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3+x^2-5x+2=0$.

Εφαρμόζουμε Horner για x=1 και προκύπτει:

$$2x^3+x^2-5x+2=(x-1)(2x^2+3x-2)=0$$

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } 2x^2+3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \text{ ή } x=-2$$

ii. $P(x)\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+3x-2)\geq 0$

$$P(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left[-2,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$$

568. **α.** Για να έχει ρίζα το 2 πρέπει:

$$P(2)=0 \Leftrightarrow \alpha\cdot 2^3+2^2+\beta\cdot 2-6=0 \Leftrightarrow 8\alpha+4+2\beta-6=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8\alpha+2\beta=2 \Leftrightarrow 4\alpha+\beta=1$$

Για να έχει παράγοντα το $x-1$ πρέπει:

$$P(1)=0 \Leftrightarrow \alpha\cdot 1^3+1^2+\beta\cdot 1-6=0 \Leftrightarrow \alpha+1+\beta-6=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=5$$

Λύνουμε το σύστημα: $\left.\begin{matrix}4\alpha+\beta=1\\ \alpha+\beta=5\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}-4\alpha-\beta=-1\\ \alpha+\beta=5\end{matrix}\right\}(+)\Rightarrow -3\alpha=4 \Leftrightarrow \alpha=\frac{-4}{3}$ και

$$-\frac{4}{3}+\beta=5 \Leftrightarrow \beta=5+\frac{4}{3} \Leftrightarrow \beta=\frac{19}{3}$$

Άρα το P(x) γίνεται: $P(x)=-\frac{4}{3}x^3+x^2+\frac{19}{3}x-6$

β. Εφαρμόζουμε Horner για x=1 και προκύπτει $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(-\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x+6\right)=0$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $-\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x+6=0 \Leftrightarrow -4x^2-x+18=0 \Leftrightarrow x=-\frac{9}{4}$ ή $x=2$

569. **α.** Έχουμε

$2x^3-16x^2+34x-20$	$x-2$
$-2x^3+4x^2$	$2x^2-12x+10$
$-12x^2+34x-20$ $+12x^2-24x$	
$10x-20$ $-10x+20$	
0	

Άρα $P(x)=2x^3-16x^2+34x-20=(x-2)(2x^2-12x+10)$

β. $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)(2x^2-12x+10)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ ή

$2x^2-12x+10=0 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow (x-5)(x-1)=0 \Leftrightarrow x-5=0 \Leftrightarrow x=5$ ή

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

570. **α.** Έχουμε

- $P\left(-\frac{1}{2}\right)=7 \Leftrightarrow \alpha\left(-\frac{1}{2}\right)^3-(\alpha+\beta)\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\beta\left(-\frac{1}{2}\right)+1=7 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow -\alpha\cdot\frac{1}{8}-(\alpha+\beta)\cdot\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}+1=7 \Leftrightarrow -\alpha-2(\alpha+\beta)-4\beta+8=56 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow -\alpha-2\alpha-2\beta-4\beta=48 \Leftrightarrow -3\alpha-6\beta=48 \Leftrightarrow \alpha+2\beta=-16$
- $P(-1)=23 \Leftrightarrow \alpha(-1)^3-(\alpha+\beta)(-1)^2+\beta(-1)+1=23 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow -\alpha-\alpha-\beta-\beta+1=23 \Leftrightarrow -2\alpha-2\beta=22 \Leftrightarrow -\alpha-\beta=11$

Λύνουμε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l}\alpha+2\beta=-16\\ -\alpha-\beta=11\end{array}\right\}(+) \Leftrightarrow \beta=-5$ και $-\alpha+5=11 \Leftrightarrow \alpha=-6$

β. Το P(x) γίνεται: $P(x)=-6x^3-(6-5)x^2-5x+1=-6x^3+11x^2-5x+1$

$-6x^3+11x^2-5x+1$	$2x+1$
$+6x^3+3x^2$	$-3x^2+7x-6$
$14x^2-5x+1$ $-14x^2-7x$	

$-12x+1$ $+12x+6$	
7	

Επομένως: $-6x^3+11x^2-5x+1=(2x+1)(-3x^2+7x-6)+7$

571. **α.** Για να είναι το -1 ρίζα του P(x) πρέπει:

$$P(-1)=0 \Leftrightarrow 2(-1)^3-5(-1)^2+\alpha(-1)+3=0 \Leftrightarrow -2-5-\alpha+3=0 \Leftrightarrow \alpha=-4$$

β. Για $\alpha=-4$ το P(x) γίνεται: $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$

i. $P(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3-5x^2-4x+3=0$

Εφαρμόζουμε Horner για $x=-1$ και προκύπτει

$$2x^3-5x^2-4x+3=(x+1)(2x^2-7x+3)=0$$

$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $2x^2-7x+3=0 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=\frac{1}{2}$

ii. $P(x)\le 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2-7x+3)\le 0$

$P(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{2},3\right]$

572. **α.** Εφαρμόζουμε Horner για x=11 και προκύπτει $P(x)=(x-11)(x^2-10x+21)$

β. $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-11)(x^2-10x+21)=0 \Leftrightarrow (x-11)(x-3)(x-7)=0$

$x-11=0 \Leftrightarrow x=11$ ή $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ ή $x-7=0 \Leftrightarrow x=7$

573. **α.** Έχουμε

$$(1): x^3-2x^2=x-2 \Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0 \Leftrightarrow x^2(x-2)-(x-2)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

β. Η εξίσωση $\eta\mu^3 x-2\eta\mu^2 x-\eta\mu x+2=0$ για ημx=ω γίνεται:

$$\omega^3-2\omega^2-\omega+2=0 \Leftrightarrow \omega^3-2\omega^2=\omega-2$$

Άρα σύμφωνα με την (1) έχουμε: ω=2 ή ω=1 ή $\omega=-1$.

Δηλαδή: ημx=2 αδύνατη $(|\eta\mu x|\le 1)$ ή $\eta\mu x=1 \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in Z$$

Όμως:

$$0 \le x \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \le 2\kappa\pi \le 2\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \le 2\kappa\pi \le \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\frac{\pi}{2}}{2\pi} \le \kappa \le \frac{\frac{3\pi}{2}}{2\pi} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le \kappa \le \frac{3}{4}$$

Άρα κ=0 αφού $\kappa \in Z$. Επομένως $x = \dfrac{\pi}{2}$

Ή: $\eta\mu x = -1 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2}$

ή $x = 2\kappa\pi + \pi + \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \dfrac{3\pi}{2}$

Άρα τελικά $x = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2}$, $\kappa \in Z$ διότι οι γωνίες $2\kappa\pi + \dfrac{3\pi}{2}$ και $2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2}$ βρίσκονται στο ίδιο σημείο του τριγωνομετρικού κύκλου.

Όμως:

$$0 \le x \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \le 2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \le 2\kappa\pi \le 2\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \le 2\kappa\pi \le \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} \le \kappa \le \frac{\frac{5\pi}{2}}{2\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \kappa \le \frac{5}{4}$$

Άρα κ=1 αφού $\kappa \in Z$. Τελικά $x = 2\pi - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2}$. Επομένως $x = \dfrac{\pi}{2}$ ή $x = \dfrac{3\pi}{2}$

574. **α.** Έχουμε

- Για να έχει παράγοντα το $x-1$ πρέπει:
  $P(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 - 2\alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 + 4 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\alpha + \beta + 4 = 0 \Leftrightarrow -2\alpha + \beta = -5$
- Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $x-2$ είναι 6. Άρα:

$P(2) = 6 \Leftrightarrow 2^3 - 2\alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + 4 = 6 \Leftrightarrow 8 - 8\alpha + 2\beta + 4 = 6 \Leftrightarrow -8\alpha + 2\beta = -6 \Leftrightarrow 4\alpha - \beta = 3$

Λύνουμε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} -2\alpha + \beta = -5 \\ 4\alpha - \beta = 3 \end{array}\right\} (+) \Leftrightarrow 2\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = -1$

και $4\alpha - \beta = 3 \Leftrightarrow 4(-1) - \beta = 3 \Leftrightarrow -4 - \beta = 3 \Leftrightarrow \beta = -7$

Επομένως το P(x) γίνεται: $P(x)=x^3+2x^2-7x+4$

β. Κάνουμε τη διαίρεση:

x^3+2x^2-7x+4	x+3
$-x^3-3x^2$	x^2-x-4
$-x^2-7x+4$ $+x^2+3x$	
$-4x+4$ $+4x+12$	
16	

Άρα το υπόλοιπο είναι 16.

γ. $P(x)>-4x+10 \Leftrightarrow x^3+2x^2-7x+4>-4x+10 \Leftrightarrow x^3+2x^2-3x-6>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2(x+2)-3(x+2)>0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-3)>0$$

$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

$$\text{Άρα } (x+2)(x^2-3)>0 \Leftrightarrow x\in(-2,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$$

575. **α.** Για να είναι το 3 ρίζα του P(x) πρέπει:

$$P(3)=0 \Leftrightarrow 3^3+\alpha\cdot 3^2-4\cdot 3-4\cdot\alpha=0 \Leftrightarrow 27+9\alpha-12-4\alpha=0 \Leftrightarrow 5\alpha=-15 \Leftrightarrow \alpha=-3$$

Το P(x) γίνεται $P(x)=x^3-3x^2-4x+12$

β. **i.** $P(x)=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2-4x+12=0 \Leftrightarrow x^2(x-3)-4(x-3)=0 \Leftrightarrow$

$$(x-3)(x^2-4)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2)(x-2)=0$$

$x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ ή $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

ii. $P(x)<0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2)(x-2)<0$

Άρα $P(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(2,3)$

576. **α.** Για να είναι ο αριθμός 1 ρίζα του P(x) πρέπει:

$$P(1)=0 \Leftrightarrow \alpha\cdot 1^3+(\beta-1)\cdot 1^2-3\cdot 1-2\beta+6=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta-1-3-2\beta+6=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta=-2$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1 είναι 2. Άρα:

$$P(-1)=2 \Leftrightarrow \alpha(-1)^3+(\beta-1)(-1)^2-3(-1)-2\beta+6=2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\alpha+\beta-1+3-2\beta+6=2 \Leftrightarrow -\alpha-\beta=-6$$

Λύνουμε το σύστημα: $\left.\begin{matrix}\alpha-\beta=-2\\-\alpha-\beta=-6\end{matrix}\right\}(+) \Rightarrow -2\beta=-8 \Leftrightarrow \beta=4$

και $\alpha-\beta=-2 \Leftrightarrow \alpha-4=-2 \Leftrightarrow \alpha=2$

β. Το P(x) γίνεται: $P(x)=2x^3+3x^2-3x-8+6=2x^3+3x^2-3x-2$

i. $P(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-3x-2=0$

Εφαρμόζουμε σχήμα Horner για x=1 και προκύπτει

$$2x^3+3x^2-3x-2=(x-1)(2x^2+5x+2)=0$$

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \ \text{ ή } \ 2x^2+5x+2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \ \text{ ή } \ x=-2$$

ii. Άρα $P(x)>0 \Leftrightarrow x \in \left(-2,-\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$.

577. **α.** Για να έχει παράγοντα το $x-2$ πρέπει:

$$P(2)=0 \Leftrightarrow 2^3-(\alpha+1)\cdot 2^2+(\alpha-1)\cdot 2+2=0 \Leftrightarrow 8-4\alpha-4+2\alpha-2+2=0$$
$$\Leftrightarrow -2\alpha=-4 \Leftrightarrow \alpha=2$$

Το P(x) γίνεται: $P(x)=x^3-3x^2+x+2$

β. Κάνοντας τη διαίρεση του P(x) με το $x-2$ προκύπτει ότι:

$$x^3-3x^2+x+2=(x-2)(x^2-x-1)$$

γ. $P(x)=x-2 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-x-1)=x-2 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-x-1)-(x-2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-x-1-1)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-2)(x+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2(x+1)=0$

$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \ \text{ ή } \ x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

578. **α.** Για να είναι το -1 ρίζα του P(x) πρέπει:

$$P(-1)=0 \Leftrightarrow (-1)^3+\alpha(-1)^2-\beta(-1)+2=0 \Leftrightarrow -1+\alpha+\beta+2=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=-1$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $x-1$ είναι 8.
Άρα $P(1)=8 \Leftrightarrow 1^3+\alpha\cdot 1^2-\beta\cdot 1+2=8 \Leftrightarrow 1+\alpha-\beta+2=8 \Leftrightarrow \alpha-\beta=5$

Λύνουμε το σύστημα: $\left.\begin{matrix}\alpha+\beta=-1\\ \alpha-\beta=5\end{matrix}\right\}(+) \Rightarrow 2\alpha=4 \Leftrightarrow \alpha=2$

και $\alpha-\beta=5 \Leftrightarrow 2-\beta=5 \Leftrightarrow \beta=-3$.

Επομένως το P(x) γίνεται: $P(x)=x^3+2x^2+3x+2$

β. **i.** Εφαρμόζουμε Horner για $x=-1$ και προκύπτει:

$$P(x)=(x+1)(x^2+x+2)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \ \text{ ή } \ x^2+x+2=0$$

$$\Delta=1-8=-7<0 \ \text{ αδύνατη στο R.}$$

ii. Έχουμε

$$P(x)<0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+x+2)<0$$

Τελικά $P(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)$.

579. **α.** Για να είναι το $x-1$ παράγοντας πρέπει:

$$P(1)=0 \Leftrightarrow 1^3+2\cdot 1^2+(\lambda-1)\cdot 1-\lambda^2=0 \Leftrightarrow 1+2+\lambda-1-\lambda^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^2+\lambda+2=0 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda-2=0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda+1)=0 \Leftrightarrow \lambda=2 \text{ ή } \lambda=-1$$

β. Για λ=2 το P(x) γίνεται: $P(x)=x^3+2x^2+x-4$

Εφαρμόζουμε Horner για $x=-2$ και προκύπτει ότι $\upsilon=-6$.

580. **α.** Για να είναι το 3 ρίζα του P(x) πρέπει:

$$P(3)=0 \Leftrightarrow 3^3-2\cdot 3^2-5\cdot 3+\alpha=0 \Leftrightarrow 27-18-15+\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=6$$

Για να είναι το x+1 παράγοντας του Q(x) πρέπει:

$$Q(-1)=0 \Leftrightarrow (-1)^2+(-1)+\beta=0 \Leftrightarrow 1-1+\beta=0 \Leftrightarrow \beta=0$$

β. Το P(x) για α=6 γίνεται: $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

Εφαρμόζουμε Horner για x=3 και προκύπτει:

$$P(x)=(x-3)(x^2+x-2)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=-2 \text{ ή } x=1$$

γ. **i.** Το Q(x) για β=0 γίνεται: $Q(x)=x^2+x$

Κάνοντας τη διαίρεση P(x):Q(x) προκύπτει ότι:

$$x^3-2x^2-5x+6=(x^2+x)(x-3)-2x+6 \text{ δηλαδή } P(x)=Q(x)(x-3)-2x+6$$

ii. Ο βαθμός του υπολοίπου είναι 1.

581. **α.** Για να είναι 3ου βαθμού πρέπει:

$$\lambda+\lambda^3=0 \Leftrightarrow \lambda(1+\lambda^2)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ ή } \lambda^2+1=0 \text{ αδύνατη}$$

και $-(\lambda^2-1)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2-1\neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2\neq 1 \Leftrightarrow \lambda\neq \pm 1$

Τελικά λ=0.

β. **i.** Για λ=0 το P(x) γίνεται:

$$P(x)=(0+0^3)x^4-(0^2-1)x^3+(0-1)x-2\cdot 0+2=x^3-x+2$$

Κάνουμε τη διαίρεση:

x^3-x+2	x+2
$-x^3-2x^2$	x^2-2x+3
$-2x^2-x+2$ $+2x^2+4x$	

$3x+2$ $-3x-6$	
4	

Άρα $\pi(x)=x^2-2x+3$ και $\upsilon=-4$

ii. Έχουμε

$$P(x)<-4 \Leftrightarrow x^3-x+2<-4 \Leftrightarrow x^3-x+6<0$$

Εφαρμόζουμε Horner για $x=-2$ και προκύπτει:

$$x^3-x+6<0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+3)<0$$

$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x^2-2x+3=0$ $\quad \Delta=4-12=-8$ αδύνατη στο R.

Τελικά $x^3-x+6<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)$

582. **α.** Για να έχει παράγοντα το $x-1$ πρέπει:

$$P(1)=0 \Leftrightarrow 1^3-6\cdot 1^2+\alpha\cdot 1+\beta=0 \Leftrightarrow 1-6+\alpha+\beta=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=5$$

Όταν διαιρείται με το x+1 δίνει υπόλοιπο -24, δηλαδή:

$$P(-1)=-24 \Leftrightarrow (-1)^3-6(-1)^2+\alpha(-1)+\beta=-24 \Leftrightarrow -1-6-\alpha+\beta=-24 \Leftrightarrow -\alpha+\beta=-17$$

Λύνουμε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=5\\ -\alpha+\beta=-17\end{array}\right\}(+) \Leftrightarrow 2\beta=-12 \Leftrightarrow \beta=-6$

και $\alpha+\beta=5 \Leftrightarrow \alpha-6=5 \Leftrightarrow \alpha=11$

Το P(x) γίνεται: $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$

β. Έχουμε

$$P(x)=0 \Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6=0$$

Εφαρμόζουμε Horner για x=1 και προκύπτει:

$P(x)=(x-1)(x^2-5x+6)=(x-1)(x-2)(x-3)=0$ x=1 ή x=2 ή x=3.

γ. Έχουμε

$$P(x)\geq 0 \Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-5x+6)\geq 0$$

Τελικά $P(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in[1,2]\cup[3,+\infty)$

583. **α.** Το P(x) διαιρούμενο με x+1 δίνει υπόλοιπο 6, δηλαδή:

$$P(-1)=6 \Leftrightarrow (-1)^4+\alpha(-1)^3-4(-1)^2-3(-1)+2\alpha+6=6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1-\alpha-4+3+2\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=0$$

Επομένως το P(x) γίνεται: $P(x)=x^4-4x^2-3x+6$

β. Έχουμε $P(x)=0 \Leftrightarrow x^4-4x^2-3x+6=0$

Εφαρμόζουμε Horner για x=1 και προκύπτει: $P(x)=(x-1)(x^3+x^2-3x-6)=0$

Εφαρμόζουμε Horner στο x^3+x^2-3x-6 για x=2 και προκύπτει:

$x^3+x^2-3x-6=(x-2)(x^2+3x+3)$

Άρα $(x-1)(x-2)(x^2+3x+3)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή x=2 ή $x^2+3x+3=0$

$$\Delta=9-12=-3<0$$

Επομένως P(1)=0 ή P(2)=0.

γ. Έχουμε

$$Q(x)=\left[P(x)\right]^2+x-1$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του Q(x) με το $x-1$ είναι το $Q(1)=\left[P(1)\right]^2+1-1=0+0=0$

Και το υπόλοιπο της διαίρεσης του Q(x) με το $x-2$ είναι το

$$Q(2)=\left[P(2)\right]^2+2-1=0+1=1$$

Στη διαίρεση $Q(x):(x-\ 1)(x$, δηλαδή $Q(x):(x^2-3x+2)$, ο διαιρέτης x^2-3x+2 είναι 2ου βαθμού, άρα το υπόλοιπο θα είναι της μορφής υ(x)=αx+β με $\alpha,\beta\in R$.

Έχουμε, από την ταυτότητα της διαίρεσης $Q(x)=(x^2-3x+2)\cdot\pi(x)+\alpha x+\beta$

Όμως $Q(1)=0 \Leftrightarrow (1^2-3\cdot1+2)\cdot\pi(1)+\alpha\cdot1+\beta=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=0$

Και $Q(2)=1 \Leftrightarrow (2^2-3\cdot2+2)\cdot\pi(2)+\alpha\cdot2+\beta=1 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=1$

Λύνουμε το σύστημα: $\left.\begin{matrix}\alpha+\beta=0\\ 2\alpha+\beta=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}-\alpha-\beta=0\\ 2\alpha+\beta=1\end{matrix}\right\}(+) \Rightarrow \alpha=1$

Και $\alpha+\beta=0 \Leftrightarrow 1+\beta=0 \Leftrightarrow \beta=-1$. Τελικά $\upsilon(x)=1x-1=x-1$

584. **α.** Εφαρμόζουμε Horner για x=2 και προκύπτει

$$\pi(x)=x^2-2x-3 \text{ και } \upsilon=0.$$

β. Έχουμε

$$P(x)=0 \Leftrightarrow x^3-4x^2+x+6=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-2x-3)=0$$

$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=-1$$

585. **α.** Για να είναι ρίζα το 2 πρέπει:

$$P(2)=0 \Leftrightarrow 2\cdot2^3+2^2-(2\kappa+1)\cdot2+\kappa=0 \Leftrightarrow 16+4-4\kappa-2+\kappa=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\kappa=18 \Leftrightarrow \kappa=6$$

β. i. Για κ=6 το P(x) γίνεται: $P(x)=2x^3+x^2-(2\cdot 6+1)x+6=2x^3+x^2-13x+6=0$

Εφαρμόζουμε Horner για x=2 και προκύπτει: $P(x)=(x-2)(2x^2+5x-3)=0$

$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $2x^2+5x-3=0$ Δ=25+24=49

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm 7}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \\ x_2=-\frac{12}{4}=-3 \end{cases}$$

ii. Για να είναι η γραφική παράσταση της P(x) πάνω από τον xx΄ πρέπει:

$$P(x)>0 \Leftrightarrow (x-2)(2x^2+5x-3)>0$$

Τελικά $P(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(-3,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$

iii. To 1,1997 ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},2\right)$ όπου το P(x) είναι αρνητικό.

Επομένως P(1,1997)<0.

586. α. Για να έχει παράγοντα το $x-1$ πρέπει:

$$P(1)=0 \Leftrightarrow 1^3-\alpha\cdot 1^2-\beta\cdot 1-2=0 \Leftrightarrow -\alpha-\beta-1=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=-1$$

- Για να έχει παράγοντα το $x-2$ πρέπει:

$P(2)=0 \Leftrightarrow 2^3-\alpha\cdot 2^2-\beta\cdot 2-2=0 \Leftrightarrow 8-4\alpha-2\beta-2=0 \Leftrightarrow 4\alpha+2\beta=6 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=3$

Λύνουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{matrix} \alpha+\beta=-1 \\ 2\alpha+\beta=3 \end{matrix}\right\}(+) \Rightarrow \alpha=4 \quad \text{και} \quad 4+\beta=-1 \Leftrightarrow \beta=-5$$

Άρα το P(x) γίνεται:

$$P(x)=x^3-4x^2+5x-2$$

Εφαρμόζω Horner για x=1 και προκύπτει:

$$P(x)=(x-1)(x^2-3x+2)=(x-1)(x-2)(x-1)=(x-1)^2(x-2)$$

β. Έχουμε

$\sqrt{P(x)}=x-1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{P(x)}\right)^2=(x-1)^2 \Leftrightarrow P(x)=(x-1)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)=(x-1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)-(x-1)^2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-3)=0$

$(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

Όμως πρέπει $P(x)\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)\geq 0$ κι επειδή $(x-1)^2\geq 0$ άρα πρέπει

$x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

Επομένως τα x=1 και 3 είναι δεκτά.

587. **α.** Για να είναι το 1 ρίζα του P(x) πρέπει:

$$P(1)=0 \Leftrightarrow \alpha\cdot 1^3+(\beta-1)\cdot 1^2-3\cdot 1-2\beta+6=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta-1-3-2\beta+6=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha-\beta=-2$$

- Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1 είναι ίσο με 2 άρα:

$$P(-1)=2 \Leftrightarrow \alpha\cdot(-1)^3+(\beta-1)(-1)^2-3(-1)-2\cdot\beta+6=2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\alpha+\beta-1+3-2\beta+6=2 \Leftrightarrow -\alpha-\beta=-6$$

Λύνουμε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l}\alpha-\beta=-2\\ -\alpha-\beta=-6\end{array}\right\}(+) \Rightarrow -2\beta=-8 \Leftrightarrow \beta=4$ και $\alpha-4=-2 \Leftrightarrow \alpha=2$

Άρα το P(x) γίνεται: $P(x)=2x^3+3x^2-3x-8+6=2x^3+3x^2-3x-2$

β. Έχουμε

$$P(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-3x-2=0$$

Εφαρμόζουμε Horner για x=1 και προκύπτει $P(x)=(x-1)(2x^2+5x+2)=0$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $2x^2+5x+2=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ ή $x=-2$

588. **α.** Για να έχει το P(x) ρίζα το 1 πρέπει:

$$P(1)=0 \Leftrightarrow \beta\cdot 1^3-\alpha\cdot 1^2+1-3=0 \Leftrightarrow \beta-\alpha=2$$

Διαιρούμενο με το x+1 δίνει υπόλοιπο $\upsilon=-10$:

$P(-1)=-10 \Leftrightarrow \beta(-1)^3-\alpha(-1)^2+(-1)-3=-10 \Leftrightarrow -\beta-\alpha-4=-10 \Leftrightarrow -\beta-\alpha=-6$

Λύνουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l}\beta-\alpha=2\\ -\beta-\alpha=-6\end{array}\right\}(+) \Rightarrow -2\alpha=-4 \Leftrightarrow \alpha=2 \quad \text{και} \quad \beta-2=2 \Leftrightarrow \beta=4$$

Άρα

$$P(x)=4x^3-2x^2+x-3.$$

β. Έχουμε

$f(x)=2\cdot 4-9\eta\mu^2 2x-7\sigma\upsilon\nu^2 2x+2\eta\mu^2 x=8-9\eta\mu^2 2x-7\sigma\upsilon\nu^2 2x+2\eta\mu^2 x$

Ισχύουν οι τύποι: $\eta\mu^2\alpha=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$

$$\text{Άρα} \quad \eta\mu^2 2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 4\alpha}{2} \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu^2 2\alpha=\frac{1+\sigma\upsilon\nu 4\alpha}{2}$$

Επομένως η f(x) γίνεται:

$$f(x)=8-9\left(\frac{1-συν4x}{2}\right)-7\left(\frac{1+συν4x}{2}\right)+2ημ^2x=$$
$$=8-\frac{9}{2}+\frac{9συν4x}{2}-\frac{7}{2}-\frac{7συν4x}{2}+2ημ^2x=8-\frac{16}{2}+\frac{2συν4x}{2}+2ημ^2x=$$
$$=8-8+συν4x+2ημ^2x=συν4x+2ημ^2x$$

γ. Έχουμε

$$f(x)=0 \Leftrightarrow συν4x+2ημ^2x=0$$

Ισχύει: $συν2x=1-2ημ^2x \Leftrightarrow συν4x=1-2ημ^2 2x$ και $ημ2x=2ημxσυνx$ και

$συν^2x=1-ημ^2x$. Άρα:

$$f(x)=1-2ημ^2 2x+2ημ^2x=1-2(2ημxσυνx)^2+2ημ^2x=1-2\cdot 4\cdot ημ^2xσυν^2x+2ημ^2x=$$
$$=1-8ημ^2x(1-ημ^2x)+2ημ^2x=1-8ημ^2x+8ημ^4x+2ημ^2x=8ημ^4x-6ημ^2x+1$$

Θέτω $ημ^2x=ω \Rightarrow f(x)=8ω^2-6ω+1$.

Έχουμε $8ω^2-6ω+1=0$ $\quad Δ=36-32=4 \quad ω_{1,2}=\dfrac{6\pm 2}{16}\Rightarrow \begin{cases} ω_1=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2} \\ ω_2=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$

Άρα $ημ^2x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow ημx=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow ημx=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και

$ημ^2x=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow ημx=\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}} \Leftrightarrow ημx=\pm\dfrac{1}{2}$

Λύνουμε τις τριγωνομετρικές εξισώσεις:

- $ημx=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow ημx=ημ\dfrac{π}{4} \Leftrightarrow x=2κπ+\dfrac{π}{4}$ ή $x=2κπ+π-\dfrac{π}{4},\ κ\in Z$
- $ημx=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow ημx=-ημ\dfrac{π}{4} \Leftrightarrow ημx=ημ\left(-\dfrac{π}{4}\right) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x=2κπ-\dfrac{π}{4}$ ή $x=2κπ+π+\dfrac{π}{4},\ κ\in Z$
- $ημx=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow ημx=ημ\dfrac{π}{6} \Leftrightarrow x=2κπ+\dfrac{π}{6}$ ή $x=2κπ+π-\dfrac{π}{6},\ κ\in Z$
- $ημx=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow ημx=-ημ\dfrac{π}{6} \Leftrightarrow ημx=ημ\left(-\dfrac{π}{6}\right) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x=2κπ-\dfrac{π}{6}$ ή $x=2κπ+π+\dfrac{π}{6},\ κ\in Z$

589. Έχουμε

$$P(x)=\frac{(x^2-4x+3)(x+4)}{(x^2-4)}\leq 0\Leftrightarrow\frac{(x-3)(x-1)(x+4)}{(x-2)(x+2)}\leq 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(x-1)(x+4)(x-2)(x+2)\leq 0$$

Πρέπει

$$(x-2)(x+2)\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2 \quad \text{και} \quad x\neq -2$$

$$x-3=0\Leftrightarrow x=3 \quad ή \quad x-1=0\Leftrightarrow x=1 \quad ή \quad x+4=0\Leftrightarrow x=-4 \quad ή \quad x-2=0\Leftrightarrow x=2 \quad ή$$
$$x+2=0\Leftrightarrow x=-2$$

Άρα

$$P(x)\leq 0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-4]\cup(-2,1]\cup(2,3]$$

590. Έχουμε

$$\frac{(x+3)(x^2+4x+5)}{x^2-7x+10}\leq 0\Leftrightarrow\frac{(x+3)(x^2+4x+5)}{(x-5)(x-2)}\leq 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+3)(x^2+4x+5)(x-5)(x-2)\leq 0\Leftrightarrow P(x)\leq 0$$

Πρέπει $(x-5)(x-2)\neq 0\Leftrightarrow x\neq 5$ και $x\neq 2$

$x+3=0\Leftrightarrow x=-3$ ή $x^2+4x+5=0$ $\quad \Delta=16-20=-4<0$ ή $x-5=0\Leftrightarrow x=5$

ή $x-2=0\Leftrightarrow x=2$

Τελικά $P(x)\leq 0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-3]\cup(2,5)$

591. Έχουμε

$$P(x)=(2-x)(-x^2+3x-2)(x^2+6x+13)\leq 0$$

$2-x=0\Leftrightarrow x=2$ ή

$-x^2+3x-2=0\Leftrightarrow -(x^2-3x+2)=0\Leftrightarrow -(x-2)(x-1)=0\Leftrightarrow x=2,\ x=1$

ή $x^2+6x+13=0$ $\quad \Delta=36-52=-16<0$

Τελικά

$$P(x)\leq 0\Leftrightarrow x\in(-\infty,1]$$

592. Έχουμε

$$P(x)=(x-2)^2(x^2-5x+5)(-x-5)\leq 0$$

$x-2=0\Leftrightarrow x=2$ ή $x^2-5x+5=0$ $\quad \Delta=25-20=5$ $\quad x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ ή

$-x-5=0\Leftrightarrow x=-5$

Τελικά

$$P(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in \left[-5, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$$

593. Έχουμε

$$P(x) = \frac{(3x^2-2x-1)(x^2-3x+2)}{(-3x+2)(4-x^2)} \le 0 \Leftrightarrow (3x^2-2x-1)(x^2-3x+2)(-3x+2)(4-x^2) \le 0$$

$$3x^2-2x-1=0 \qquad \Delta=4+12=16 \qquad x_{1,2} = \frac{2\pm 4}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \text{ ή}$$

$$x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=2 \quad \text{ή} \quad -3x+2=0 \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3} \quad \text{ή}$$

$$4-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$$

Πρέπει

$$(-3x+2)(4-x^2) \ne 0 \Leftrightarrow -3x+2 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{2}{3} \quad \text{και} \quad 4-x^2 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \pm 2$$

Τελικά

$$P(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$