**1 ο**

## ΘΕΩΡΙΑ

### Θέμα 1ο

**Α.** Είναι:

i. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

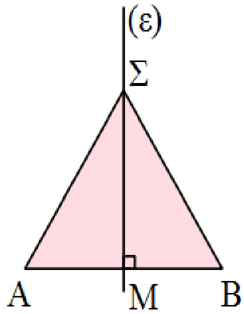
ii. $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

iii. $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

**Β.** Έχουμε: $(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta-\beta\alpha-\beta^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

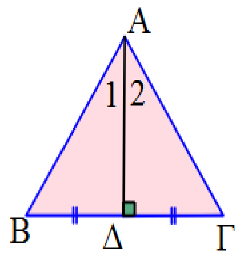
### Θέμα 2ο

**Α.** Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.
Αντίστροφα, κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος.



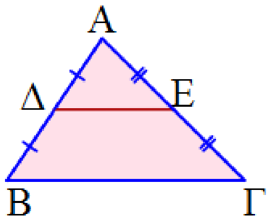

**Β.**

**1.** Διάμεσος, ύψος.



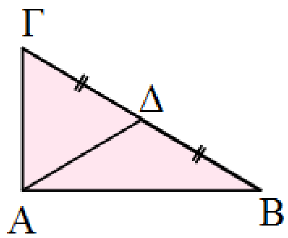

**2.** Παράλληλο και ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς.

Δηλαδή ισχύει $\Delta E // = \dfrac{B\Gamma}{2}$




**3.** Το μισό της υποτείνουσας.

Δηλαδή ισχύει $A\Delta=\dfrac{B\Gamma}{2}$




## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

**Α.** Η εξίσωση $x^2-5x+6=0$ είναι πολυωνυμική 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1$ και έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-(5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{5+1}{2}=3 \\ x_2=\dfrac{5-1}{2}=2 \end{cases}$$

**B.**

**i.** $\Pi(x)=\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}+\dfrac{2}{3-x}-\dfrac{3}{2x-4}$

<u>Περιορισμοί</u>:

Πρέπει:

- $x^2-5x+6\neq 0$ ή $(x\neq 2$ και $x\neq 3)$
- $3-x\neq 0$ ή $x\neq 3$
- $2x-4\neq 0$ ή $x\neq 2$

Δηλαδή $x\neq 2$ και $x\neq 3$.

Για $x\neq 2$ και $x\neq 3$ έχουμε:

$$\Pi(x)=\frac{x-1}{x^2-5x+6}+\frac{2}{3-x}-\frac{3}{2x-4}=\frac{x-1}{(x-3)(x-2)}+\frac{2}{-(x-3)}-\frac{3}{2(x-2)}=$$

$$=\frac{2(x-1)-4(x-2)-3(x-3)}{2(x-3)(x-2)}=\frac{2x-2-4x+8-3x+9}{2(x-3)(x-2)}$$

$$=\frac{-5x+15}{2(x-3)(x-2)}=-\frac{-5(x-3)}{2(x-3)(x-2)}=\frac{-5}{2(x-2)}$$

**ii.**

$$\Pi(x)=\frac{-5}{2(x-2)}$$

$$-\eta\mu^2\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{-5}{2(x-2)}$$

$$-\left(\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega\right)=\frac{-5}{2(x-2)}$$

$$-1=\frac{-5}{2(x-2)}$$

$$-2(x-2)=-5$$

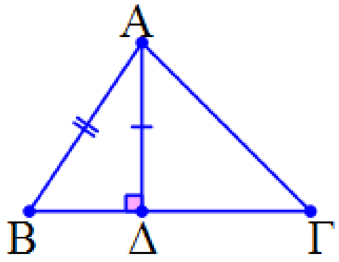
$$-2x+4=-5$$

$$\frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}}=\frac{-9}{-2}$$

$$x=\frac{9}{2}$$

Η τιμή $x=\dfrac{9}{2}$ είναι δεκτή αφού είναι διάφορη του $2$ και του $3$.

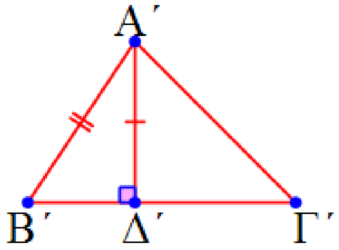
## Άσκηση 2η




α. Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A'B'\Delta'$ έχουμε:

- Είναι ορθογώνια
- $AB = A'B'$ (υπόθεση)
- $A\Delta = A'\Delta'$ (υπόθεση)

Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $A'B'\Delta'$ είναι ίσα γιατί έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά ίσες. Οπότε: $\hat{B} = \hat{B}'$.




β. Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουμε:

- $\hat{B} = \hat{B}'$ (από το ερώτημα (α))
- $AB = A'B'$ (υπόθεση)
- $\hat{A} = \hat{A}$ (υπόθεση)

Επομένως, από το κριτήριο Γ-Π-Γ, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

## Άσκηση 3η

**Α.**

| | $0^\circ$ | $90^\circ$ | $180^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $150^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **ημ** | 0 | 1 | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| **συν** | 1 | 0 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| **εφ** | 0 | Δεν ορίζεται | 0 | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

**Β.** Έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\omega - \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1-\eta\mu\omega} = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} - \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1-\eta\mu\omega} =$$

$$\frac{\eta\mu\omega\cdot(1-\eta\mu\omega)-\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega\cdot(1-\eta\mu\omega)} = \frac{\eta\mu\omega-\eta\mu^2\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega\cdot(1-\eta\mu\omega)} = \frac{\eta\mu\omega-\left(\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega\right)}{\sigma\upsilon\nu\omega\cdot(1-\eta\mu\omega)} =$$

$$\frac{\eta\mu\omega-1}{\sigma\upsilon\nu\omega\cdot(1-\eta\mu\omega)} = \frac{-\cancel{(1-\eta\mu\omega)}}{\sigma\upsilon\nu\omega\cancel{(1-\eta\mu\omega)}} = \frac{-1}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

**2 ο**

**Θ Ε Ω Ρ Ι Α**

### Θέμα 1ο

**Α.** Είναι:

**i.** $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

**ii.** $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$

**iii.** $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

**Β.** Είναι $i \to \Sigma$ , $ii \to \Lambda$ , $iii \to \Sigma$ , $iv \to \Lambda$

## Θέμα 2ο

**α)** Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.

**β)** Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια.

**γ)** i. την περιεχόμενη γωνία ίση

ii. οξεία γωνία
iii. τον ίδιο αριθμό πλευρών .
iv. το τετράγωνο

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

**α.**

- Η εξίσωση $2x^2-9x-5=0$ είναι πολυωνυμική $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=(-9)^2-4\cdot2\cdot(-5)=81+40=121$ και έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=-\frac{(-9)\pm\sqrt{121}}{2\cdot2}=\frac{9\pm11}{4}=\begin{cases}x_1=\dfrac{9+11}{4}=5\\[2mm] x_2=\dfrac{9-11}{4}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

- Η εξίσωση $4x^2+4x+1=0$ είναι πολυωνυμική $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=4^2-4\cdot4\cdot1=16-16=0$ και έχει μία διπλή πραγματική ρίζα, την:

$$x_0=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{4}{2\cdot4}=-\frac{1}{2}$$

**β.** Έχουμε:

- $2x^2-9x-5=2\cdot(x-5)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x-5)\cdot(2x+1)$ και
- $4x^2+4x+1=4\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=(2x+1)^2$

**γ.** Για $x\neq-\frac{1}{2}$ είναι:

$$\frac{2x^2-9x-5}{4x^2+4x+1}=\frac{(x-5)\cdot\cancel{(2x+1)}}{(2x+1)^{\cancel{2}}}=\frac{x-5}{2x+1}$$

### Άσκηση 2η

Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών έχουμε:

$$\begin{cases}\dfrac{7x+y}{3}-\dfrac{y-1}{2}=x+3\\[2mm] \dfrac{x}{2}-\dfrac{9y-1}{4}=-x+1\end{cases} \quad ή \quad \begin{cases}2\cdot(7x+y)-3(y-1)=6\cdot(x+3)\\ 2\cdot x-(9y-1)=4\cdot(-x+1)\end{cases}$$

$$\text{ή } \begin{cases} 14x+2y-3y+3=6x+18 \\ 2x-9y+1=-4x+4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 8x-y=15 \\ \dfrac{6x}{3}-\dfrac{9y}{3}=\dfrac{3}{3} \end{cases}$$

$$\text{ή } \begin{cases} 8x-y=15 \\ 2x-3y=1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \cancel{8x}-y=15 \\ \cancel{-8x}+12y=-4 \end{cases}$$

$$\text{ή } \begin{cases} 8x-y=15 \\ 11y=11 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 8x-y=15 \\ y=1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 8x=15+1 \\ y=1 \end{cases}$$

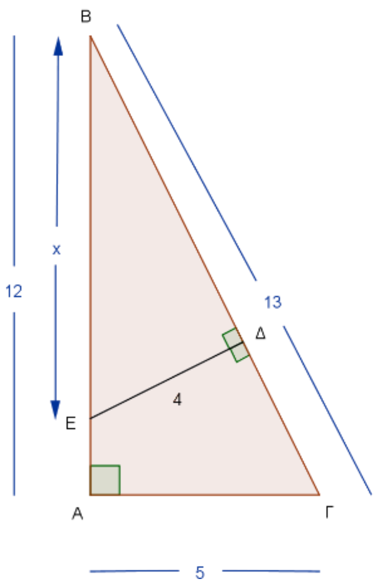
$$\text{ή } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=(2,1)$.

Για το σύστημα $\begin{cases} 8x-y=15 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$, αρκεί να δείξουμε ότι έχει λύση το ζεύγος $(x,y)=(2,1)$.

Για $x=2$ και $y=1$ έχουμε: $\begin{cases} 8\cdot 2-1=15 \\ 2\cdot 2-3\cdot 1=1 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 16-1=15 \\ 4-3=1 \end{cases}$ που ισχύουν. Επομένως το σύστημα $\begin{cases} 8x-y=15 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ έχει λύση το ζεύγος $(x,y)=(2,1)$.

## Άσκηση 3η




**α.** Είναι $B\Gamma^2=13^2=169$ και $AB^2+A\Gamma^2=12^2+5^2=144+25=169$. Δηλαδή $B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2$, οπότε ισχύει το αντίστροφο του πυθαγορείου θεωρήματος. Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

**β.** Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΕ έχουν $\hat{A}=\hat{\Delta}=90^\circ$ και $\hat{B}=$ κοινή. Επομένως έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες. Επομένως είναι όμοια

**γ.** Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΕ είναι όμοια, έχουν τις πλευρές τους ανάλογες. Οπότε έχουμε:

$$\lambda=\frac{4}{5}=\frac{x}{13} \text{ ή}$$

$$5x=4\cdot 13 \text{ ή}$$

$$\frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}}=\frac{52}{5} \text{ ή}$$

$$x=\frac{52}{5}$$

**δ.** Επειδή ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, έχουμε:

$$\frac{(B\Delta E)}{(AB\Gamma)}=\lambda^2=\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{(\mathrm{B\Delta E})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\dfrac{16}{25}\\[2ex] (\mathrm{AB\Gamma})=\dfrac{1}{\cancel{2}}\,\overset{6}{\cancel{12}}\cdot 5=30\end{array}\right\}\dfrac{(\mathrm{B\Delta E})}{30}\times\dfrac{16}{25}$$

$$\frac{\cancel{25}\cdot(\mathrm{B\Delta E})}{\cancel{25}}=\frac{16\cdot 30}{25}$$

Άρα $(\mathrm{B\Delta E})=\dfrac{16\cdot 30}{25}=\dfrac{480}{25}=\dfrac{96}{5}$ τ.μ.

## 3 ο

## Θ Ε Ω Ρ Ι Α

### Θ έ μ α 1 ο

**Α.** Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της. Ταυτότητες είναι οι ισότητες **ii** και **iv.**

**Β.** Έχουμε:

$$(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha+\beta)=\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)\cdot(\alpha+\beta)=$$

$$\alpha^3+\alpha^2\beta+2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^2\alpha+\beta^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

**Γ.** Είναι $1\rightarrow\Lambda$ , $2\rightarrow\Sigma$ , $3\rightarrow\Lambda$ , $4\rightarrow\Lambda$

### Θ έ μ α 1 ο

**Α)** Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

1. δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή
2. μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

**Β)** Είναι $\alpha\rightarrow\Lambda$ , $\beta\rightarrow\Lambda$ , $\gamma\rightarrow\Sigma$ , $\delta\rightarrow\Sigma$

## Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

### Ά σ κ η σ η 1 η

**α.** $\mathrm{A}=(1-2x)^2-(x+2)(2-x)-6x(x-1)+2$ ή

$$\mathrm{A}=1^2\cancel{-4x}+4x^2\cancel{-2x}+x^2-4+2x-6x^2\cancel{+6x}+2$$

$$\mathrm{A}=-x^2+2x-1$$

**β.** Έχουμε $\mathrm{A}=4x-4$ ή

$$-x^2+2x-1=4x-4$$
$$-x^2-2x+3=0$$

Η εξίσωση $-x^2-2x+3=0$ είναι πολυωνυμική 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=(-2)^2-4(-1)\cdot 3=4+12=16$ και έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{2\pm 4}{-2}=\begin{cases}x_1=\dfrac{2+4}{-2}=-3\\[2ex] x_2=\dfrac{2-4}{-2}=1\end{cases}$$

## Άσκηση 2η

**α.** Έχουμε:

$$A=\frac{1-4x^2}{y-2xy}:\frac{2x+1}{2xy-3y^2}=\frac{\cancel{(1-2x)}\,\cancel{(1+2x)}}{\cancel{y}\,\cancel{(1-2x)}}\cdot\frac{\cancel{y}\,(2x-3y)}{\cancel{2x+1}}=2x-3y \text{ και}$$

$$B=\frac{3xy+6x}{y+2}-y=\frac{3x\,\cancel{(y+2)}}{\cancel{y+2}}-y=3x-y$$

**β.** Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών έχουμε:

$$\begin{cases}A=-4\\ B=1\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}2x-3y=-4\\ 3x-y=1\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}2x-3y=-4\\ (-3)\cdot 3x-(-3)\cdot y=(-3)\cdot 1\end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases}2x-3y=-4\\ -9x+3y=-3\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}2x-3y=-4\\ -7x=-7\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}2x-3y=-4\\ x=1\end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases}-3y=-4-2\\ x=1\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}y=2\\ x=1\end{cases}$$

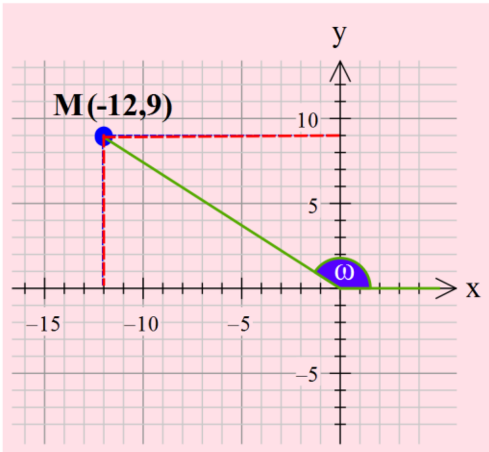
Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=(1,2)$

## Άσκηση 3η

**α.** Έχουμε:

$$(OM)=\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-12)^2+9^2}=\sqrt{144+81}=\sqrt{255}=15$$

$$\eta\mu\omega=\frac{y}{\rho}=\frac{9}{15},\ \sigma\upsilon\nu\omega\frac{x}{\rho}=\frac{-12}{15},\ \varepsilon\varphi\omega=\frac{y}{x}=\frac{9}{-12}=-\frac{9}{12}$$




**β.** Επειδή γωνίες παραπληρωματικές έχουν ίσα ημίτονα, ενώ έχουν αντίθετα συνημίτονα και εφαπτομένες, είναι:

- $\eta\mu(180^\circ-\omega)=\eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ-\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega$ και $\varepsilon\varphi(180^\circ-\omega)=-\varepsilon\varphi\omega$

Επομένως :

$$A=\frac{-5\left[\eta\mu(180^\circ-\omega)-\sigma\upsilon\nu(180^\circ-\omega)\right]+4\varepsilon\varphi(180^\circ-\omega)}{2\eta\mu 90^\circ+2008\varepsilon\varphi 180^\circ}$$

$$A=\frac{-5(\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega)-4\varepsilon\varphi 180^o}{2\eta\mu 90^o+2008\varepsilon\varphi 180^o}=\frac{-5\eta\mu\omega-5\sigma\upsilon\nu\omega-4\cdot 0}{2\cdot 1+2008\cdot 0}$$

$$=\frac{-5\eta\mu\omega-5\sigma\upsilon\nu\omega}{2}=\frac{-5\frac{9}{+\cancel{15}_3}+5\frac{12}{\cancel{15}_3}}{2}=\frac{\frac{-9+12}{3}}{2}=\frac{1}{2}$$

**4ο**

**ΘΕΩΡΙΑ**

### Θέμα 1ο

**α.**

- **1ο κριτήριο ισότητας (Π - Γ - Π)**

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα. Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες

- **2ο κριτήριο ισότητας (Γ - Π - Γ).**

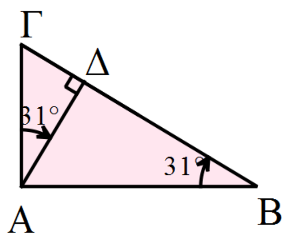
Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

**β.** Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν

- δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή
- μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

**γ.**

1. Σωστό
2. Λάθος




3. Σωστό
4. Λάθος
5. Λάθος

**ΘΕΜΑ 2°**

**α.** Η εξίσωση $y=\beta$ με $\beta\neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,\beta)$, ενώ η εξίσωση $y=0$ παριστάνει τον άξονα $x'x$.

Η εξίσωση $x=\alpha$ με $\alpha\neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(\alpha,0)$, ενώ η εξίσωση $x=0$ παριστάνει τον άξονα $y'y$.

**β.**

**i.** $\alpha+\gamma>\beta+\delta$

**ii.** $\alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\gamma$

**iii.** $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\delta$

**iv.** $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

**α.** Έχουμε:

$$P(x)=(3x-1)^2-(x-2)(3x-1) \text{ ή}$$

$$P(x)=9x^2-6x+1-(3x^2-x-6x+2) \text{ ή}$$

$$P(x)=9x^2-6x+1-3x^2+x+6x-2 \text{ ή}$$

$$P(x)=6x^2+x-1$$

**β.** Η εξίσωση $P(x)=0$ γράφεται $6x^2+x-1=0$ και είναι πολυωνυμική 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=1+24=25$ και έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2\cdot 6}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-1+5}{12}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3} \\ x_2=\dfrac{-1-5}{12}=\dfrac{-6}{12}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

**γ.** Είναι:

$$P(x)=6\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=2\cdot 3\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(3x-1)(2x+1)$$

## Άσκηση 2η

**α.** Έχουμε:

$$\begin{cases} x-2(5-y)=-2 \\ \dfrac{2(3x-y)}{3}-\dfrac{3x-2y}{2}=x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x-10+2y=-2 \\ 4(3x-y)-3(3x-2y)=6x \end{cases}$$

$$\text{ή } \begin{cases} x+2y=8 \\ 12x-4y-9x+6y=6x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x+2y=8 \\ -3x+2y=0 \end{cases}$$

**β.** Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών έχουμε:

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ -3x+2y=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x+2y=8 \\ (-1)\cdot(-3)x+(-1)\cdot 2y=(-1)\cdot 0 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ 3x-2y=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x+2y=8 \\ 4x=8 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x+2y=8 \\ x=2 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} 2+2y=8 \\ x=2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 2y=6 \\ x=2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=3 \\ x=2 \end{cases}$$

Επομένως το σύστημ αέχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=(2,3)$

## Άσκηση 3η

**α.** Από την ταυτότητα $ημ^2ω+συν^2ω=1$ για $ημω=\dfrac{3}{5}$ έχουμε:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2+συν^2ω=1$$

$$\frac{9}{25}+συν^2ω=1$$

$$συν^2ω=\frac{16}{25}$$

$$συνω=\pm\frac{4}{5}$$

Όμως η γωνία $ω$ είναι αμβλεία, οπότε δεκτή είναι η $συνω=\dfrac{-4}{5}$.

**β.** Είναι: $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \dfrac{\frac{3}{\cancel{5}}}{\frac{-4}{\cancel{5}}} = -\dfrac{3}{4}$

**γ.** Έχουμε:

$$A = \dfrac{\frac{-3}{4}+\frac{1}{2}}{-\frac{4}{5}+1} = \dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}} = -\frac{5}{4}$$

**5 ο**

**Θ Ε Ω Ρ Ι Α**

### Θ έ μ α 1 ο

**α.**
Τα αθροίσματα μη όμοιων μονωνύμων είναι μια αλγεβρική παράσταση, που λέγεται **πολυώνυμο**. **Βαθμός** ενός πολυωνύμου ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές του, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του.

**β.**

**i.** $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

**ii.** $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

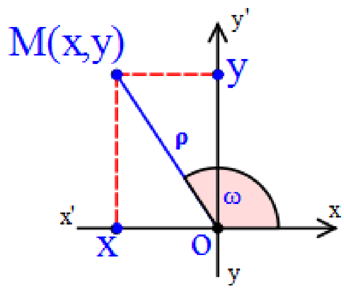
**γ.**

Για $\alpha = 2$ και $\beta = 1$ είναι: $(\alpha+\beta)^2 = (2+1)^2 = 3^2 = 9$ και $(\alpha-\beta)^2 = (2-1)^2 = 1^2 = 1$.

Επομένως η ισότητα $(\alpha+\beta)^2 = (\alpha-\beta)^2$ δεν επαληθεύεται για κάθε τιμή των παραγματικών $\alpha$ και $\beta$ και συνεπώς δεν είναι ταυτότητα.

### Θ έ μ α 2 ο

**α.** Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις ισότητες $\eta\mu\omega = \dfrac{y}{\rho}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{x}{\rho}$, με την προϋπόθεση ότι $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$, έχουμε:




$$\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} \text{ ή } \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{y\rho}{x\rho} \text{ ή } \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{y}{x} = \varepsilon\varphi\omega\,.$$

**β.** Είναι $i \to \Sigma$, $ii \to \Lambda$, $iii \to \Sigma$

**γ.** Είναι $\eta\mu\omega > 0$, $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$ και $\varepsilon\varphi\omega < 0$

**Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ**

### Άσκηση 1η

**α.** Για να ορίζεται η παράσταση $A$ πρέπει: $x^2 - x - 6 \neq 0$

Η εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$ είναι πολυωνυμική $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1(-6) = 1 + 24 = 25$ και έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 5}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{1+5}{2}=3 \\ x_2=\frac{1-5}{2}=-2 \end{cases}$$

Άρα η παράσταση $A$ ορίζεται για $x\neq 3$ και $x\neq -2$

**β.** Για $x\neq 3$ και $x\neq -2$ είναι:

$$A=\frac{2x^3-8x}{x^2-x-6}=\frac{2x\left(x^2-4\right)}{(x-3)(x+2)}=\frac{2x(x-2)\cancel{(x+2)}}{(x-3)\cancel{(x+2)}}=\frac{2x(x-2)}{x-3}$$

**γ.** Για $x\neq 3$ και $x\neq -2$ έχουμε:

$$A=0 \text{ ή } \frac{2x(x-2)}{x-3}=0 \text{ ή } 2x(x-2)=0 \text{ ή}$$

$(x=0 \text{ ή } x=2)$, οι οποίες είναι δεκτές αφού ικανοποιούν τους περιορισμούς.

## Άσκηση 2η

Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών έχουμε:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2}-\frac{y+1}{3}=2 \\ 2x+3(y-2)=-8 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3(x-3)-2(y+1)=12 \\ 2x+3y-6=-8 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3x-9-2y-2=12 \\ 2x+3y=-2 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} 3x-2y=23 \\ 2x+3y=-2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 9x-6y=69 \\ 4x+6y=-4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 13x=65 \\ 4x+6y=-4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=\frac{65}{13} \\ 4x+6y=-4 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} x=5 \\ 4x+6y=-4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=5 \\ 4\cdot 5+6y=-4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=5 \\ 6y=-24 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=5 \\ y=-4 \end{cases}$$

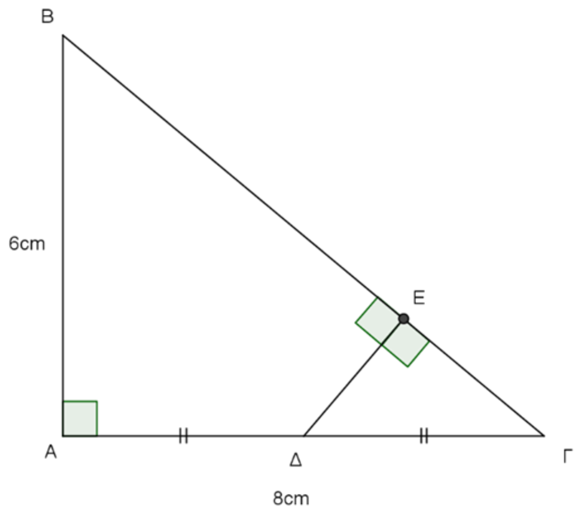
Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=(5,-4)$

## Άσκηση 3η

**α.** Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$ έχουν:

- $A=E=90^o$
- Η $\Gamma$ είναι κοινή γωνία

Επομένως έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, οπότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$ είναι όμοια.




**β.** Αν $\lambda$ ο λόγος ομοιότητας των $AB\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$, τότε:

$$\lambda=\frac{AB}{\Delta E}=\frac{A\Gamma}{E\Gamma}=\frac{B\Gamma}{\Delta\Gamma}$$

**γ.**

- Χρησιμοποιώντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

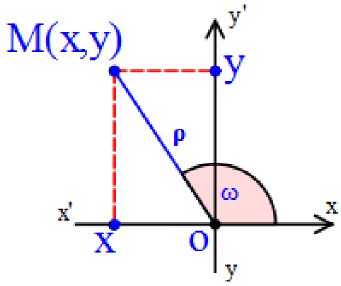
$$B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2=6^2+8^2=36+69=100 \text{ ή } B\Gamma=\sqrt{100}=10cm$$

- Επειδή το $\Delta$ είναι το μέσο της $\mathrm{A\Gamma}$, έχουμε ότι: $\Delta\Gamma = \dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{2} = 4\mathrm{cm}$
- Από το ερώτημα **(β)** έχουμε:
  - ✓ $\dfrac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}} = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{\Delta\Gamma}$ ή $\dfrac{6}{\Delta\mathrm{E}} = \dfrac{10}{4}$ ή $10 \cdot \Delta\mathrm{E} = 4 \cdot 6$ ή $\Delta\mathrm{E} = 2,4$ cm
  - ✓ $\dfrac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{E\Gamma}}$ ή $\dfrac{6}{2,4} = \dfrac{8}{\mathrm{E\Gamma}}$ ή $6 \cdot \mathrm{E\Gamma} = 2,4 \cdot 8$ ή $\mathrm{E\Gamma} = \dfrac{19,2}{6} = 3,2$ cm

## 6 ο

## Θ Ε Ω Ρ Ι Α

### Θ έ μ α  1 ο




Για την απόσταση $\rho$ ενός σημείου $M(x,y)$ από την αρχή των αξόνων ισχύει:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2} \text{ ή } \rho^2=x^2+y^2$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το $\rho^2$, τότε έχουμε:

$$\frac{\rho^2}{\rho^2}=\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2} \text{ ή } \left(\frac{x}{\rho}\right)^2+\left(\frac{y}{\rho}\right)^2=1 \quad :(1)$$

Επειδή $\eta\mu\omega=\frac{y}{\rho}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{x}{\rho}$, η ισότητα $(1)$ γίνεται:

$$(\sigma\upsilon\nu\omega)^2+(\eta\mu\omega)^2=1 \text{ ή } \eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$$

### Θ έ μ α  2 ο

**Α.** $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

**Β)** Είναι $\alpha\rightarrow1$ , $\beta\rightarrow1$ , $\gamma\rightarrow3$

## Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

### Ά σ κ η σ η  1 η

Έχουμε:

$$5(2x-3)(x^2+9)(x^2-6x+5)=0 \text{ ή } 2x-3=0 \text{ ή } x^2+9=0 \text{ ή } x^2-6x+5=0$$

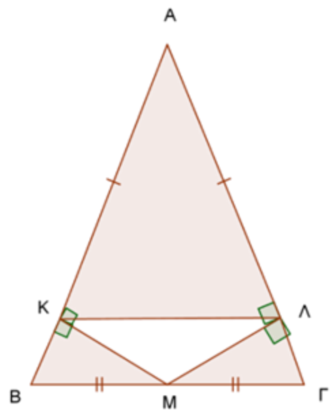
Έχουμε:

- $2x-3=0$ ή $2x=3$ ή $x=\frac{2}{3}$
- $x^2+9=0$ ή $x^2=-9$ η οποία είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$
- $x^2-6x+5=0$ η οποία είναι πολυωνυμική $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=(-6^2)-4\cdot15=16$ και έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{6\pm4}{2}\begin{cases} x_1=\frac{6+4}{2}=5 \\ x_2=\frac{6-4}{2}=1 \end{cases}$$

Επομένως η αρχική εξίσωση έχει ως λύσεις τους αριθμούς $x=\frac{3}{2}$, $x=5$ και $x=1$.

### Ά σ κ η σ η  2 η




**α.** Συγκρίνοντας τα ΚΒΜ και ΛΓΜ έχουμε:

- Είναι ορθογώνια αφού $MK \perp AB$ και $M\Lambda \perp A\Gamma$
- $BM = M\Gamma$ (αφού το Μ είναι μέσο τη ΒΓ)
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (παρά τη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ)

Επομένως τα τρίγωνα ΚΒΜ και ΛΓΜ είναι ίσα ως ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε $MK = M\Lambda$.

**β.** Είναι $AK = A\Lambda$ ως διαφορά ίσων τμημάτων $(AB - KB = A\Gamma = \Lambda\Gamma)$ αφού από την ισότητα των τριγώνων ΚΒΜ και ΛΓΜ έπεται ότι $KB = \Lambda\Gamma$.

## Άσκηση 3η

Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών έχουμε:

$$\begin{cases} -2(2x-3y) = 3(y-3x) - 5 \\ \dfrac{4x-y}{2} + \dfrac{y}{3} + 2 = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} -4x + 6y = 3y - 9x - 5 \\ 3(4x - y) + 2y + 12 = 0 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} 5x + 3y = -5 \\ 12x - 3y + 2y = -12 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 5x + 3y = -5 \\ 12x - y = -12 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} 5x \cancel{+3y} = -5 \\ 36x \cancel{-3y} = -36 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 5x + 3y = -5 \\ 41x = -41 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 5x + 3y = -5 \\ x = -1 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} -5 + 3y = -5 \\ x = -1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3y = 0 \\ x = -1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Επομένως το σύστημα έχι μοναδική λύση το ζεύγος $(x, y) = (-1, 0)$.

## 7 ο

## Θ Ε Ω Ρ Ι Α

### Θέμα 1ο

**α.** Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

**β.** Είναι:

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)^3 &= (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^2 = \\ &= (\alpha+\beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) \\ &= \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 \\ &= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \end{aligned}$$

**γ.** Είναι:

- $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

- $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3$
- $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

## Θ έ μ α 2$^{\text{ο}}$

**α.** Έχουμε:

- Από το πυθαγόρειο θεώρημα για την απόσταση $OM=\rho$ έχουμε ότι $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$
- $\eta\mu\omega=\dfrac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}}=\dfrac{y}{\rho}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $\sigma\upsilon\nu\omega=\dfrac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}}=\dfrac{x}{\rho}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}}=\dfrac{y}{x}$, $x\neq 0$

**β.** Για την απόσταση $\rho$ ενός σημείου $M(x,y)$ από την αρχή των αξόνων ισχύει:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\ \text{ ή }\ \rho^2=x^2+y^2$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το $\rho^2$, τότε έχουμε:

$$\frac{\rho^2}{\rho^2}=\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2}\ \text{ ή }\ \left(\frac{x}{\rho}\right)^2+\left(\frac{y}{\rho}\right)^2=1\quad :(1)$$

Επειδή $\eta\mu\omega=\dfrac{y}{\rho}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=\dfrac{x}{\rho}$, η ισότητα $(1)$ γίνεται:

$$(\sigma\upsilon\nu\omega)^2+(\eta\mu\omega)^2=1\ \text{ ή }\ \eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$$

**γ.** Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις ισότητες $\eta\mu\omega=\dfrac{y}{\rho}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=\dfrac{x}{\rho}$, με την προϋπόθεση ότι $\sigma\upsilon\nu\omega\neq 0$, έχουμε: $\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\dfrac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}}$ ή $\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\dfrac{y\rho}{x\rho}$ ή $\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\dfrac{y}{x}=\varepsilon\varphi\omega$.

## Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

### Άσκηση 1η

**α.** Για $x=-2$ και $y=3$ έχουμε:

$$A=-3\cdot(-2)\cdot 3^3+3^2+4\cdot(-2)^2\cdot 3=6\cdot 27+9+4\cdot 4\cdot 3=162+9+48=219$$

**β.** Το πολυώνυμο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του $x$ γράφεται:

$$A=4x^2y-3y^3x+y^2$$

Ο βαθμός του πολυωνύμου ως προς $x$ και $y$ είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του. Δηλαδή ο βαθμός του $-3y^3x$ ο οποίος είναι $3+1=4$.

### Άσκηση 2η

Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών έχουμε:

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{2}+\dfrac{2y+1}{3}=3 \\ \dfrac{x+4}{3}-\dfrac{y-6}{2}=4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3(x-5)+2(2y+1)=18 \\ 2(x+4)-3(y-6)=24 \end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases} 3x-15+4y+2=18 \\ 2x+8-3y+18=24 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3x+4y=31 \\ 2x-3y=-2 \end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases} 6x+8y=62 \\ -6x+9y=6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 6x+8y=62 \\ 17y=68 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 6x+8y=62 \\ y=\dfrac{68}{17} \end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases} 6x+8y=62 \\ y=4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 6x+8\cdot 4=62 \\ y=4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 6x=62-32 \\ y=4 \end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{30}{6} \\ y=4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$$

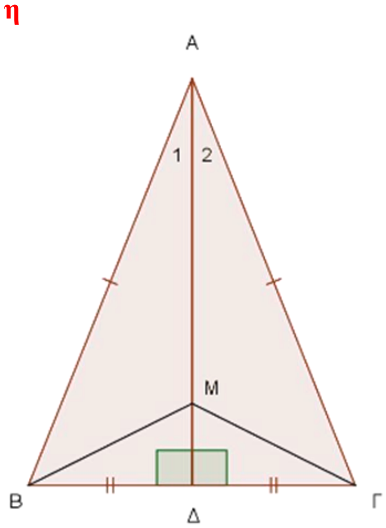
Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=(5,4)$.

**Άσκηση 3η**

**α.** Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $ABM$ και $A\Gamma M$ έχουμε:

- Η $AM$ είναι κοινή πλευρά
- $AB=A\Gamma$ (αφού το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές)
- $A_1=A_2$ (αφού η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $A$).

Επομένως από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα $ABM$ και $A\Gamma M$ είναι ίσα.




**β.** Από την ισότητα των $ABM$ και $A\Gamma M$ έπεται ότι $BM=M\Gamma$. Οπότε το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές.

**8ο**

**ΘΕΩΡΙΑ**

**Θέμα 1ο**

**A1.** Είναι $(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta-\beta\alpha+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

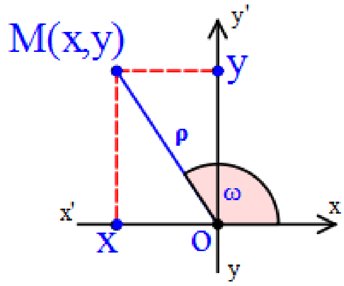
**A2. α.** $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

**β.** $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2$

**A3.** $1\to\gamma$ , $2\to\delta$ , $3\to\alpha$ , $4\to\varepsilon$

**Θέμα 2ο**

**B1.** Είναι:




- $\eta\mu\omega = \dfrac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \dfrac{y}{\rho} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}} = \dfrac{y}{x}$ , $x \neq 0$

**B2.**

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις ισότητες $\eta\mu\omega = \dfrac{y}{\rho}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{x}{\rho}$, με την προϋπόθεση ότι $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$, έχουμε: $\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \dfrac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}}$ ή $\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \dfrac{y\rho}{x\rho}$ ή $\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \dfrac{y}{x} = \varepsilon\varphi\omega$.

**B3.** Είναι: $1 \to \iota$ , $2 \to \sigma\tau$ , $3 \to \kappa$ , $4 \to \beta$ , $5 \to \beta$ , $6 \to \eta$ , $7 \to \delta$ , $8 \to \delta$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

**A.** Η $(1)$ ορίζεται αν και μόνο αν οι παρονομαστές είναι διάφοροι του μηδενός. Δηλαδή πρέπει:

- $x+2 \neq 0$ ή $x \neq -2$
- $x-2 \neq 0$ ή $x \neq 2$
- $x^2-4 \neq 0$ ή $x \neq \pm 2$

Δηλαδή η $(1)$ ορίζεται για $x \neq 2$ και $x \neq -2$

**B.** Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών είναι $\text{Ε.Κ.Π.} = (x-2)\cdot(x+2)$.

Τότε:

$$1 - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{2x}{x^2-4} \text{ ή}$$

$$(x-2)(x+2)\cdot 1 - (x-2)(x+2)\cdot\frac{1}{x+2} + (x-2)(x+2)\cdot\frac{1}{x-2} = (x-2)(x+2)\cdot\frac{2x}{(x-2)(x+2)} \text{ ή}$$

$$(x-2)(x+2) - (x-2) + (x+2) = 2x \text{ ή}$$

$$x^2 - \cancel{4} - \cancel{x} + \cancel{2} + \cancel{x} + \cancel{2} = 2x \text{ ή}$$

$$x^2 - 2x = 0 \text{ ή}$$

$$x\cdot(x-2) = 0 \text{ ή}$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 2$$

Η $x=2$ απορρίπτεται γιατί δεν πληροί τους περιορισμούς. Επομένως η μόνη λύση της αρχικής εξίσωσης είναι η $x=0$.

### Άσκηση 2η

**Α.** Είναι:

$K=x^3-9x+x^2-9=x\left(x^2-9\right)+\left(x^2-9\right)=\left(x^2-9\right)\cdot\left(x+1\right)=\left(x-3\right)\left(x+3\right)\left(x+1\right)$ και

$\Lambda=x^2-3x=x\cdot\left(x-3\right)$

**Β.** Το κλάσμα $\dfrac{K}{\Lambda}$ ορίζεται αν και μόνο αν $\Lambda\neq 0$. Δηλαδή αν και μόνο αν $x\left(x-3\right)\neq 0$ ή $x\neq 0$ και $x\neq 3$. Για $x\neq 0$ και $x\neq 3$ είναι:

$$\frac{K}{\Lambda}=\frac{\cancel{\left(x-3\right)}\left(x+3\right)\cdot\left(x+1\right)}{x\cdot\left(x-3\right)}=\frac{\left(x+3\right)\cdot\left(x+1\right)}{x}$$

### Άσκηση 3η

**α.** Από την ταυτότητα $ημ^2ω+συν^2ω=1$ για $ημω=\dfrac{4}{5}$ έχουμε:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2+συν^2ω=1 \text{ ή } συν^2ω=1-\frac{16}{25} \text{ ή } συν^2ω=\frac{9}{25} \text{ ή } συνω=\pm\frac{3}{5}$$

Επειδή η γωνία $ω$ είναι αμβλεία, το συνημίτονό της είναι αρνητικό. Επομένως δεκτή τιμή το $συνω=-\dfrac{3}{5}$. Επίσης είναι:

$$εφω=\frac{ημω}{συνω}=\frac{\frac{4}{\cancel{5}}}{-\frac{3}{\cancel{5}}}=-\frac{4}{3}$$

**β.** Έχουμε:

$$X=\frac{1}{3}ημω+\frac{2}{3}συνω-\frac{1}{10}εφω=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{1}{10}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$\frac{4}{15}-\frac{6}{15}+\frac{4}{30}=\frac{8-12+4}{30}=\frac{0}{30}=0$$

## 9ο

## ΘΕΩΡΙΑ

### Θέμα 1ο

**Α1.** Διακρίνουσα λέγεται η παράσταση $\Delta=β^2-4αγ$ και επιπλέον:

- Αν $\Delta>0$ τότε η εξίσωση $(1)$ έχει δύο άνισες λύσεις.
- Αν $\Delta=0$ τότε η $(1)$ έχει μία διπλή λύση.
- Αν $\Delta<0$ τότε η $(1)$ δεν έχει καμία πραγματική λύση.

**A2.** Έχουμε:

- Αν $\Delta > 0$, τότε οι δύο λύσεις της $(1)$ δίνονται από τον τύπο

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

- Αν $\Delta = 0$, τότε η μία διπλή λύση της $(1)$ δίνεται από τον τύπο $x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha}$.

**A3.** $\alpha \cdot (x - \rho_1) \cdot (x - \rho_2)$

## Θέμα 2ο

**B1.** Τα δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε από το κριτήριο $\Pi - \Pi - \Pi$ είναι ίσα. Επειδή σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες έχουμε: $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{Z}$, $\hat{\Gamma} = \hat{E}$

**B2.** Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Για τα ζεύγη όμοιων τριγώνων ισχύουν: $\lambda = \frac{AB}{\Delta Z} = \frac{A\Gamma}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ}$ και $\lambda' = \frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}$.

**B3.** Είναι: $1 \to \Lambda$, $2 \to \Sigma$, $3 \to \Sigma$, $4 \to \Sigma$, $5 \to \Lambda$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

**α.** Η εξίσωση $5x^2 - 7x - 6 = 0$ είναι πολυωνυμική $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-6) = 49 + 120 = 169$ και έχει δύο άνισες λύσεις, τις:

$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 5} = \frac{7 \pm 13}{10} = \begin{cases} x_1 = \frac{7+13}{10} = 2 \\ x_2 = \frac{7-13}{10} = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

**β.** Επειδή για οποιαδήποτε γωνία $\omega$ ισχύει $-1 \le \sigma\upsilon\nu\omega \le 1$, το $\sigma\upsilon\nu\omega$ είναι η $x_2 = -\frac{3}{5}$ από τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης. Δηλαδή $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$.

Επειδή $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5} < 0$, έπεται ότι η γωνία $\omega$ είναι αμβλεία.

Από την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ για $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$ έχουμε:

$$\eta\mu^2\omega + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\eta\mu\omega^2 = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}, \text{ οπότε } \eta\mu\omega = \frac{4}{5}$$

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{\frac{4}{\cancel{5}}}{-\frac{3}{\cancel{5}}}=-\frac{4}{3}$$

$$A=\frac{5\cdot\eta\mu\omega+3\varepsilon\varphi\omega-10\cdot\sigma\upsilon\nu\omega}{2\cdot\eta\mu 90^{\circ}\cdot\sigma\upsilon\nu 180^{\circ}}=$$

$$\frac{\cancel{5}\cdot\frac{4}{\cancel{5}}+\cancel{3}\cdot\left(-\frac{4}{\cancel{3}}\right)-\cancel{10}\cdot\left(-\frac{3}{\cancel{5}}\right)^{2}}{2\cdot 1\cdot(-1)}=\frac{\cancel{4}-\cancel{4}+6}{-2}=-3$$

## Άσκηση 2η

**α.** Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών έχουμε:

$$\begin{cases}2\alpha-\beta=3\\ \alpha+3\beta=-2\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}\cancel{2\alpha}-\beta=3\\ \cancel{-2\alpha}-6\beta=4\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}2\alpha-\beta=3\\ -7\beta=7\end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases}2\alpha-\beta=3\\ \beta=-1\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}2\alpha-(-1)=3\\ \beta=-1\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}2\alpha+1=3\\ \beta=-1\end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases}2\alpha=2\\ \beta=-1\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-1\end{cases}$$

Επομένως η μοναδική λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(\alpha,\beta)=(1,-1)$.

**β.** Το πολυώνυμο $P(x)$ γράφεται $P(x)=4x^{2}-4x+1-x^{2}+4+2x-6$ ή

$P(x)=3x^{2}-2x-1$

Για $\alpha=1$ και $\beta=-1$ το πολυώνυμο $Q(x)$ γράφεται:

$$Q(x)=1\cdot x\cdot(2x+1)-(-1)\cdot x(x-3)-1 \text{ ή}$$

$$Q(x)=2x^{2}+x+x^{2}-3x-1 \text{ ή}$$

$$Q(x)=3x^{2}-2x-1$$

Οπότε είναι $P(x)=Q(x)$.

## Άσκηση 3η

**α.** Έχουμε:

- $3x^{3}+6x^{2}=3x^{2}(x+2)$
- $x^{2}-9=(x-3)\cdot(x+3)$
- $3x+6+x^{2}+2x=3\cdot(x+2)+x\cdot(x+2)=(x+2)\cdot(3+x)$

- $x^3-6x^2+9x=x\left(x^2-6x+9\right)=x\cdot(x-3)^2$

**β.** Για την παράσταση $A=\dfrac{3x^3+6x^2}{3x+6+x^2+2x}$ έχουμε:

$A=\dfrac{3x^3+6x^2}{3x+6+x^2+2x}=\dfrac{3x^3+6x^2}{3(x+2)+x(x+2)}=\dfrac{3x^2(x+2)}{(x+2)(3+x)}$ και ορίζεται αν και μόνο αν ο παρονομαστής της είναι διάφορος του μηδενός.

Πρέπει $(x+2)(3+x)\neq 0$, δηλαδή $x\neq -2$ και $x\neq -3$.

Για την παράσταση $B=\dfrac{x^2-9}{x^3-6x^2+9x}$ έχουμε:

$B=\dfrac{x^2-9}{x^3-6x^2+9x}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{x\left(x^2-6x+9\right)}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)^2}$ και ορίζεται αν και μόνο αν ο παρονομαστής της είναι διάφορος του μηδενός.

Πρέπει $x(x-3)^2\neq 0$, δηλαδή $x\neq 0$ και $x\neq 3$.

Για $x\neq -3,-2,0,3$ έχουμε:

$$A\cdot B=\frac{3x^2(x+2)}{(x+2)(3+x)}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)^2}=\frac{3x^2}{x+3}\cdot\frac{x+3}{x(x-3)}=\frac{3x^2(x+3)}{x(x+3)(x-3)}=\frac{3x}{x-3}$$

**γ.** Για $x\neq -3,-2,0,3$ έχουμε:

$$A\cdot B=\frac{3x^2}{x-3} \text{ ή}$$

$$\frac{3x}{x-3}=\frac{3x^2}{x-3} \text{ ή}$$

$$3x^2(x-3)=3x(x-3) \text{ ή}$$

$$3x^2(x-3)-3x(x-3)=0 \text{ ή}$$

$$3x(x-3)(x-1)=0 \text{ ή}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \\ x-1=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=0 \text{ απορ} \\ x=3 \text{ απορ} \\ x=1 \text{ δεκτη} \end{cases}$$

Δηλαδή η μοναδική λύση της εξίσωσης $A\cdot B=\dfrac{3x^2}{x-3}$ είναι η $x=1$

**10ο**

**ΘΕΩΡΙΑ**

## Θ έ μ α 1 ο

**α.** Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

**β.** Είναι:

$$(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)=$$

$$=\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2+2\alpha\beta^2+\beta^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

**γ.** $\alpha\to 5$ , $\beta\to 1$ , $\gamma\to 2$ , $\delta\to 6$

## Θ έ μ α 2 $^{o}$

**α.** $1\to\Sigma$ , $2\to\Lambda$ , $3\to\Sigma$ , $4\to\Lambda$ , $5\to\Lambda$

**β.** **1ο κριτήριο ισότητας (Π - Γ - Π)**
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα. Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες
**2ο κριτήριο ισότητας (Γ - Π - Γ).**
Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

**γ.** Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:
- δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή
- μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

## Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

### Ά σ κ η σ η 1η

**α.** Από την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$ για $\eta\mu\omega=\frac{12}{13}$ έχουμε:

$$\left(\frac{12}{13}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu^2\omega=1-\frac{144}{169} \text{ ή } \sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{169}{169}-\frac{144}{169} \text{ ή}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{25}{169} \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\omega=\pm\sqrt{\frac{25}{169}} \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\omega=\pm\frac{5}{13}.$$

Όμως η γωνία $\omega$ είναι αμβλεία, οπότε το συνημίτονό της είναι αρνητικό. Επομένως δεκτή τιμή η $\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{5}{13}$.

Επιπλέον είναι $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{\frac{12}{13}}{\frac{-5}{13}}=-\frac{12\cdot 13}{5\cdot 13}=-\frac{12}{5}$.

**β.** Επειδή οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν ίσα ημίτονα και αντίθετα συνημίτονα και εφαπτομένες, έχουμε:

- $\eta\mu(180^o-\omega)=\eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(180^o-\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega$

- $\varepsilon\varphi\left(180^o-\omega\right)=-\varepsilon\varphi\omega$ και
- $\sigma\upsilon\nu 120^o=\sigma\upsilon\nu\left(180^o-60^o\right)=-\sigma\upsilon\nu 60^o=-\frac{1}{2}$

Οπότε:

$$A=\left[13(-\sigma\upsilon\nu\omega)+13\eta\mu\omega+5\varepsilon\varphi\omega\right]\sigma\upsilon\nu\left(180^0-60^o\right)=$$

$$\left(-13\sigma\upsilon\nu\omega+13\eta\mu\omega+5\varepsilon\varphi\omega\right)\left(-\sigma\upsilon\nu 60^o\right)=$$

$$\left(-13\cdot\frac{-5}{13}+13\cdot\frac{12}{13}+5\cdot\frac{-12}{5}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=$$

$$\left(5+\cancel{12}-\cancel{12}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{2}$$

## Άσκηση 2η

**α.** Έχουμε:

$$\begin{cases}\cancel{y^2}\cancel{-2yx}\cancel{+x^2}\cancel{-x^2}+3x=2y\cancel{-2xy}-9\cancel{+3y}\cancel{-3y}\cancel{+y^2}\\ y+5-2(1-x)=-4x\end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases}3x-2y=-9\\ y+5-2+2x=-4x\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}3x-2y=-9\\ 6x+y=-3\end{cases}$$

**β.** Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών έχουμε:

$$\begin{cases}3x-2y=-9\\ 6x+y=-3\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}-6x+4y=18\\ 6x+y=-3\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}5y=15\\ 6x+y=-3\end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases}y=3\\ 6x+y=-3\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}y=3\\ 6x+3=-3\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}y=3\\ 6x=-6\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}y=3\\ x=-1\end{cases}$$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=(-1,3)$.

## Άσκηση 3η

$$A=\frac{x^3-3x^2}{x^2-4x+3}$$

Πρέπει $x^2-4x+3\neq 0$.

Λύνω την εξίσωση $x^2-4x+3=0$

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=16-12=4$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}3\\ 1\end{cases}$$

Άρα $x^2-4x+3=1(x-3)(x-1)$

$$A=\frac{x^2\cancel{(x-3)}}{(x-1)\cancel{(x-3)}}=\frac{x^2}{x-1}$$ όπου $x\neq 3$ και $x\neq 1$

$$B=-\frac{(1-2x)(x+1)}{1-x^2}=-\frac{(1-2x)\cancel{(x+1)}}{(1-x)\cancel{(1+x)}}=-\frac{1-2x}{1-x}$$

όπου $x\neq 1$ και $x\neq -1$.

$$A+B=\frac{x^2}{x-1}+\frac{1-2x}{-(1-x)}=\frac{x^2}{x-1}+\frac{1-2x}{x-1}$$

$A+B=2$

$\frac{x^2}{x-1}+\frac{1-2x}{x-1}=2$. Πρέπει $x\neq 1,3$.

$$\frac{x^2+(1-2x)}{x-1}=2$$

$$\frac{x^2+1-2x}{x-1}=2$$

$$\frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-1)}}=2$$

$x-1=2$

$x=3$ απορρίπτεται

**1 1 ο**

**Θ Ε Ω Ρ Ι Α**

**Θ έ μ α   1 ο**

**Α.** Έχουμε:

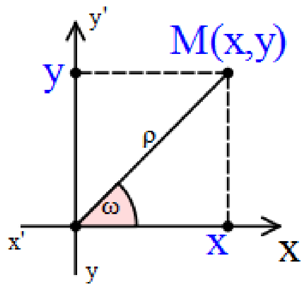
- Αν $\alpha>0$, τότε η εξίσωση $(1)$ έχει δύο λύσεις, τις $x=\alpha$ και $x=-\alpha$.
- Αν $\alpha<0$, τότε εξίσωση $(1)$ είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha=0$, τότε η εξίσωση $(1)$ έχει διπλή λύση το μηδέν.

**Β. α.** Είναι: $i\to 3$, $ii\to 1$, $iii\to 2$, $iv\to 3$

**β.** Είναι i. $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$   ii. $x_0=-\frac{\beta}{2\alpha}$

**Θ έ μ α   2 ο**

**α.** Είναι:




- $ημω = \dfrac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \dfrac{y}{ρ} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $συνω = \dfrac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \dfrac{x}{ρ} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

  και

- $εφω = \dfrac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}} = \dfrac{y}{x}$ , $x \neq 0$

**β.** Για την απόσταση $ρ$ ενός σημείου $M(x,y)$ από την αρχή των αξόνων ισχύει:

$ρ = \sqrt{x^2+y^2}$ ή $ρ^2 = x^2+y^2$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το $ρ^2$, τότε έχουμε:

$$\frac{ρ^2}{ρ^2} = \frac{x^2}{ρ^2} + \frac{y^2}{ρ^2} \text{ ή } \left(\frac{x}{ρ}\right)^2 + \left(\frac{y}{ρ}\right)^2 = 1 \ :(1)$$

Επειδή $ημω = \dfrac{y}{ρ}$ και $συνω = \dfrac{x}{ρ}$, η ισότητα $(1)$ γίνεται:

$$(συνω)^2 + (ημω)^2 = 1 \text{ ή } ημ^2ω + συν^2ω = 1$$

**γ.** Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις ισότητες $ημω = \dfrac{y}{ρ}$ και $συνω = \dfrac{x}{ρ}$, με την προϋπόθεση ότι $συνω \neq 0$, έχουμε: $\dfrac{ημω}{συνω} = \dfrac{\frac{y}{ρ}}{\frac{x}{ρ}}$ ή $\dfrac{ημω}{συνω} = \dfrac{yρ}{xρ}$ ή $\dfrac{ημω}{συνω} = \dfrac{y}{x} = εφω$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

**α.** Έχουμε:

- **i.** $x^2 - 2x = x(x-2)$
- **ii.** $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

**β.** Είναι:

- **i.** $x^2 - 2x = 0$ ή $x(x-2) = 0$ ή $(x=0$ ή $x=2)$
- **ii.** $x^2 - 4 = 0$ ή $(x-2)(x+2) = 0$ ή $(x=2$ ή $x=-2)$
- **iii.** $x+2=0$ ή $x=-2$

**γ.** Η εξίσωση $\frac{x+8}{x^2-2x}-\frac{x+12}{x^2-4}=\frac{1}{x+2}$ παραγοντοποιώντας τους παρονομαστές γράφεται $\frac{x+8}{x(x-2)}-\frac{x+12}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x+2}$. Επειδή οι παρονοματές πρέπει να είναι διάφοροι του μηδενός, πρέπει $x\neq 0$ και $x\neq 2$ και $x\neq -2$. Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών είναι $\text{Ε.Κ.Π}=x(x-2)(x+2)$.

Τότε:

$$\frac{x+8}{x(x-2)}-\frac{x+12}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x+2} \text{ ή}$$

$$x(x-2)(x+2)\frac{x+8}{x(x-2)}-x(x-2)(x+2)\frac{x+12}{(x-2)(x+2)}=x(x-2)(x+2)\frac{1}{x+2} \text{ ή}$$

$$(x+2)(x+8)-x(x+12)=x(x-2) \text{ ή}$$

$$x^2+8x+2x+16-x^2-12x=x^2-2x \text{ ή}$$

$-2x+16=x^2-2x$ ή $x^2=16$ ή $x=\pm\sqrt{16}$ ή $x=\pm 4$, οι οποίες πληρούν τους περιορισμούς και είναι δεκτές.

## Άσκηση 2η

**α.** Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών έχουμε:

$$\begin{cases}3x-2y=4\\ x+y=3\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}3x-2y=4\\ 2x+2y=6\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}5x=10\\ 2x+2y=6\end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases}x=2\\ 2x+2y=6\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=2\\ 2\cdot 2+2y=6\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=2\\ 2y=2\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=(2,1)$.

**β.** Το σημείο τομής των ευθειών $(\varepsilon_1):3x-2y=4$ και $(\varepsilon_2):x+y=3$ θα προκύψει από τη λύση του συστήματος $\begin{cases}3x-2y=4\\ x+y=3\end{cases}$. Λόγω του (α) ερωτήματος, το σημείο τομής των $(\varepsilon_1)$ και $(\varepsilon_2)$ είναι το σημείο $A(2,1)$.

Επειδή οι τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο, η ευθεία $(\varepsilon_3)$ θα διέρχεται και αυτή από το $A(2,1)$. Επομένως οι συντεταγμένες του $A$ ικανοποιούν την εξίσωση της $(\varepsilon_3)$. Για $x=2$ και $y=1$ στην εξίσωση της $(\varepsilon_3)$ έχουμε:

$2\cdot 2+\kappa\cdot 1=7$ ή $4+\kappa=7$ ή $\kappa=3$.

## Άσκηση 3η

**α.** Από την ταυτότητα $\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1$ για $\sigma\upsilon\nu x=\frac{-4}{5}$ έχουμε:

$$ημ^2x+\left(-\frac{4}{5}\right)^2=1 \text{ ή } ημ^2x=1-\frac{16}{25} \text{ ή } ημ^2x=\frac{25}{25}-\frac{16}{25} \text{ ή}$$

$$ημ^2x=\frac{9}{25} \text{ ή } ημx=\pm\sqrt{\frac{9}{25}} \text{ ή } ημx=\pm\frac{3}{5}.$$

Επειδή $90^o<x<180^o$, δεκτή είναι η τιμή $ημx=\frac{3}{5}$.

Επιπλέον έχουμε $εφx=\frac{ημx}{συνx}=\frac{\frac{3}{\cancel{5}}}{-\frac{4}{\cancel{5}}}=-\frac{3}{4}$

**β.** Επειδή παραπληρωματικές γωνίες έχουν ίσα ημίτονα και αντίθετες εφαπτομένες, έχουμε:

- $ημ\left(180^o-x\right)=ημx=\frac{3}{5}$
- $εφ\left(180^o-x\right)=-εφx=-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$

**γ.** Έχουμε:

$$A=ημ\left(180^\circ-x\right)+2συνx-4εφ\left(180^\circ-x\right) \text{ ή}$$

$$A=ημx+2συνx+4εφx \text{ ή}$$

$$A=\frac{3}{5}+2\left(-\frac{4}{5}\right)+4\left(\frac{-3}{4}\right) \text{ ή}$$

$$A=\frac{3}{5}-\frac{8}{5}-\frac{12}{4}=-\frac{5}{5}-3=-1-3=-4$$

## 12ο

## ΘΕΩΡΙΑ

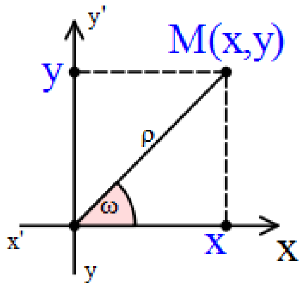
### Θέμα 1ο

**Α.** Οι ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού, λέγονται μονώνυμα. Όμοια μονώνυμα λέγονται εκείνα που έχουν ίδιο κύριο μέρος. Τα όμοια μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές, λέγονται αντίθετα.

**Β.** Ο εκθέτης μιας μεταβλητής λέγεται βαθμός του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή. Ως βαθμό ενός σταθερού και μη μηδενικού πολυωνύμου ορίζουμε το μηδέν.

### Θέμα 2ο

**Α.** Είναι:




- $\etaμω = \dfrac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}} = \dfrac{y}{ρ} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $συνω = \dfrac{\text{τετμημένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}} = \dfrac{x}{ρ} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

και

$εφω = \dfrac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{τετμημένη του Μ}} = \dfrac{y}{x}$ , $x \neq 0$

**Β.** Για την απόσταση $ρ$ ενός σημείου $M(x,y)$ από την αρχή των αξόνων ισχύει:

$$ρ = \sqrt{x^2+y^2} \text{ ή } ρ^2 = x^2+y^2$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το $ρ^2$, τότε έχουμε:

$$\frac{ρ^2}{ρ^2} = \frac{x^2}{ρ^2} + \frac{y^2}{ρ^2} \text{ ή } \left(\frac{x}{ρ}\right)^2 + \left(\frac{y}{ρ}\right)^2 = 1 \quad :(1)$$

Επειδή $\etaμω = \dfrac{y}{ρ}$ και $συνω = \dfrac{x}{ρ}$, η ισότητα $(1)$ γίνεται:

$$(συνω)^2 + (\etaμω)^2 = 1 \text{ ή } \etaμ^2ω + συν^2ω = 1$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

**α.** Έχουμε:

- $A(x) = (x+2)^2 - 9x = x^2 + 4x + 4 - 9x = x^2 - 5x + 4$
- $B(x) = x(x-1) - x^2 + 4 = x^2 - x - x^2 + 4 = -x + 4$
- $Γ(x) = (x-3)(x+3) - x(x-3) + 8 = x^2 - 9 - x^2 + 3x + 8 = 3x - 1$

**β.** Είναι:

$$A(x) + B(x) + Γ(x) = x^2 + 5x + 4 + (-x+4)(3x-1) =$$

$$= x^2 - 5x + 4 - 3x^2 + x + 12x - 4$$

$$= -2x^2 + 8x$$

**γ.** Είναι:

$-2x^2 + 8x = 0$ ή

$-2x(x-4) = 0$ ή

$(-2x = 0 \text{ ή } x - 4 = 0)$ ή

$(x = 0 \text{ ή } x = 4)$

## Άσκηση 2η

**α.** Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $AEB$ και $A\Gamma Z$ έχουμε:

- $AB = A\Gamma$ (πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$).
- $BE = \Gamma Z$ (από την υπόθεση) και
- $\hat{ABE} = \hat{A\Gamma Z}$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα, του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$).

Από το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ έπεται ότι τα τρίγωνα $AEB$ και $A\Gamma Z$ είναι ίσα.

**β.** Από την ισότητα των τριγώνων $AEB$ και $A\Gamma Z$ προκύπτει ότι $AE = AZ$. Επομένως το τρίγωνο $AEZ$ είναι ισοσκελές.

## Άσκηση 3η

α. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta EZ$ έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία. Επομένως είναι όμοια και έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες. Είναι:

$$\lambda = \frac{AB}{\Delta Z} = \frac{A\Gamma}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{ZE}$$

Έχουμε:

$$\lambda = \frac{A\Gamma}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} \text{ ή}$$

$$\frac{10}{5} = \frac{\alpha + \beta + 3}{2\alpha + 3\beta - 5} \text{ ή}$$

$$10(2\alpha + 3\beta - 5) = 5(\alpha + \beta + 3) \text{ ή}$$

$$2(2\alpha + 3\beta - 5) = \alpha + \beta + 3 \text{ ή}$$

$$4\alpha + 6\beta - 10 = \alpha + \beta + 3 \text{ ή}$$

$$3\alpha + 5\beta = 13 \quad :(1)$$

β. Έχουμε:

$$P(1) = -3 \text{ ή } 1^2 - 3\cdot 1 + 3\alpha - 2\beta = -3 \text{ ή } 1\cancel{-3} + 3\alpha - 2\beta = \cancel{-3} \text{ ή } 3\alpha - 2\beta = -1 \ :(2)$$

Για την εύρεση των $\alpha$ και $\beta$ θα λύσουμε με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών το σύστημα των εξισώσεων $(1)$ και $(2)$.

$$\begin{cases} 3\alpha + 5\beta = 13 \\ 3\alpha - 2\beta = -1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3\alpha + 5\beta = 13 \\ -3\alpha + 2\beta = 1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3\alpha + 5\beta = 13 \\ 7\beta = 14 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} 3\alpha + 5\beta = 13 \\ \beta = 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3\alpha + 5\cdot 2 = 13 \\ \beta = 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3\alpha = 13 - 10 \\ \beta = 2 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} 3\alpha = 3 \\ \beta = 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

# 13ο

## ΘΕΩΡΙΑ

### Θέμα 1ο

**A.1** Παραγοντοποίηση

**A2.** Είναι:

- $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
- $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

**A3.** Είναι $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta+\beta\alpha-\beta^2=\alpha^2-\beta^2$

### Θέμα 2ο

**B1.** Αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα..

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία.

**B2.** $1\to\Sigma$ , $2\to\Lambda$ , $3\to\Lambda$ , $4\to\Sigma$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

**α.** Έχουμε:

$$5x(x-1)=2(1-x)$$

$$5x^2-5x=2-2x$$

$$5x^2-5x+2x-2=0$$

$$5x^2-3x-2=0$$

**β.** Στην εξίσωση $5x^2-3x-2=0$ είναι $\alpha=5$, $\beta=-3$ και $\gamma=-2$ και η διακρίνουσά της είναι:

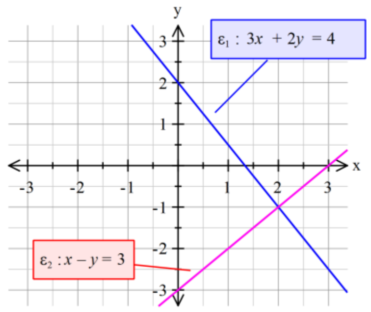
$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot5\cdot(-2)=9+40=49$$

**γ.** Οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης δίνονται από τον τύπο:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{49}}{2\cdot5}=\frac{3\pm7}{10}=\begin{cases}x_1=\dfrac{3+7}{10}=1\\[2mm] x_2=\dfrac{3-7}{10}=\dfrac{-4}{10}=\dfrac{-2}{5}\end{cases}$$

### Άσκηση 2η

**Α.**




**1.** Το γραμμικό σύστημα: $\begin{cases}3x+2y=4\\ x-y=3\end{cases}$ έχει μοναδική λύση την $(x,y)=(2,-1)$

**2.** Η ευθεία $(\varepsilon_1):3x+2y=4$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,2)$.

**3.** Η ευθεία $(\varepsilon_2):x-y=3$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(3,0)$

**Β.** Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών έχουμε:

$$\begin{cases}3x+2y=4\\ x-y=3\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}3x+2y=4\\ 2x-2y=6\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}3x+2y=4\\ 5x=10\end{cases} \text{ ή}$$

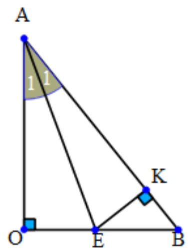
$$\begin{cases}3x+2y=4\\ x=2\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}3\cdot 2+2y=4\\ x=2\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}2y=4-6\\ x=2\end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases}2y=-2\\ x=2\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}y=-1\\ x=2\end{cases}$$

Επομένως η μοναδική λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x,y)=(2,-1)$.

**Άσκηση 3η**

**α.**




**β.** Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΟΕ και ΑΕΚ έχουμε:

- Είναι ορθογώνια (αφού $O=90^o$ και $EK\perp AB$)
- Η ΑΕ είναι κοινή πλευρά και
- $A_1=A_2$ (αφού η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Α)

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΟΕ και ΑΕΚ είναι ίσα, ως ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση.

Οπότε είναι και $AO=AK$.

**γ.** Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΒΕΚ έχουν:

- κοινή τη γωνία Β και
- $O=90^o$ και $BKE=90^o$ αφού $EK\perp AB$.

Δηλαδή τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΒΕΚ έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, άρα είναι όμοια.

**14ο**

**ΘΕΩΡΙΑ**

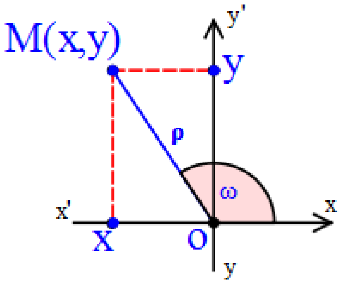
**Θέμα 1ο**

**Α1.** Είναι: $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

**Α2.** Είναι: $\alpha\to 1$, $\beta\to 1$, $\gamma\to 3$

**Θέμα 2ο**

**Β1.** Έχουμε: $\alpha\to\Sigma$, $\beta\to\Lambda$, $\gamma\to\Sigma$, $\delta\to\Lambda$




**Β2.** Για την απόσταση $\rho$ ενός σημείου $M(x,y)$ από την αρχή των αξόνων ισχύει:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2} \text{ ή } \rho^2=x^2+y^2$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το $\rho^2$, τότε έχουμε:

$$\frac{\rho^2}{\rho^2}=\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2} \text{ ή } \left(\frac{x}{\rho}\right)^2+\left(\frac{y}{\rho}\right)^2=1 \quad :(1)$$

Επειδή $ημω=\frac{y}{\rho}$ και $συνω=\frac{x}{\rho}$, η ισότητα $(1)$ γίνεται:

$$(συνω)^2+(ημω)^2=1 \text{ ή } ημ^2ω+συν^2ω=1$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών έχουμε:

$$\begin{cases} x-y=3 \\ x+\frac{y-1}{2}=4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x-y=3 \\ 2x+2\frac{y-1}{2}=2\cdot 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y-1=8 \end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y=9 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x-y=3 \\ 3x=12 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x-y=3 \\ x=4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 4-y=3 \\ x=4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=1 \\ x=4 \end{cases}$$

Επομένως, η μοναδική λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x,y)=(4,1)$.

### Άσκηση 2η

**α.** Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $ΓΜΝ$ και $ΒΜΝ$ έχουμε:

- Είναι ορθογώνια (αφού $Γ\hat{M}N=N\hat{M}B=90^o$)
- $ΓΜ=ΜΒ$ (αφού το $Μ$ είναι το μέσο της πλευράς $ΒΓ$) και
- Η πλευρά $ΜΝ$ είναι κοινή.

Επομένως τα τρίγωνα $ΓΜΝ$ και $ΒΜΝ$ είναι ίσα ως ορθογώνια τα οποία έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

**β. i.** Τα τρίγωνα $ΝΜΒ$ και $ΑΒΓ$ είναι όμοια αφού έχουν $Γ=Β$ (από την ισότητα των τριγώνων $ΓΜΝ$ και $ΒΜΝ$) και $B\hat{M}N=\hat{A}=90^o$, δηλαδή έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία.

**ii.** Οι λόγοι της ομοιότητας των τριγώνων $ΝΜΒ$ και $ΑΒΓ$ είναι: $\frac{BN}{BΓ}=\frac{MB}{AΓ}=\frac{MN}{AB}$

### Άσκηση 3η

**α.** Είναι:

$$A=(2x-3)^2-(x-2)^2-(x-1)(x+1)=$$

$$=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3+3^2-\left(x^2-2x\cdot 2+2^2\right)-\left(x^2-1^2\right)=$$

$$=4x^2-12x+9-x^2+4x-4-x^2+1=2x^2-8x+6$$

Άρα $A=2x^2-8x+6$ ή $A-6=2x^2-8x$

**β.** Η εξίσωση $A=0$ ή $2x^2-8x+6=0$ είναι πολυωνυμική $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=(-8)^2-4\cdot2\cdot6=64-48=16$ και έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-(-8)\pm\sqrt{16}}{2\cdot2}=\frac{8\pm4}{4}=\begin{cases}x_1=\dfrac{8+4}{4}=\dfrac{12}{4}=3\\[2mm] x_2=\dfrac{8-4}{4}=\dfrac{4}{4}=1\end{cases}$$

**γ.** Η παράσταση $\dfrac{A-6}{x^2-16}$ ορίζεται όταν $x^2-16\neq0$ ή $x^2\neq16$ ή $x\neq\pm4$.

Για $x\neq\pm4$ έχουμε:

$$\frac{A-6}{x^2-16}\overset{\alpha\text{ ερώτημα}}{=}\frac{2x^2-8x}{x^2-4^2}=\frac{2x(x-4)}{(x+4)(x-4)}=\frac{2x}{x+4}$$

**15ο**

**ΘΕΩΡΙΑ**

**Θέμα 1ο**

**α.** Τα όμοια μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές, λέγονται αντίθετα. Για παράδειγμα τα μονώνυμα $5x^2y$ και $-5x^2y$ είναι αντίθετα.

**β.** Το άθροισμα δύο τουλάχιστον μη όμοιων μονωνύμων είναι μία αλγεβρική παράσταση που λέγεται πολυώνυμο.

**1.** Δεν είναι πολυώνυμο γιατί ο όρος $-\dfrac{1}{x}$ δεν είναι μονώνυμο.

**2.** Είναι πολυώνυμο ως προς $x$ και ως προς $y$.

**3.** Είναι πολυώνυμο ως προς $x$.

**4.** Δεν είναι ως προς $x$, είναι ως προς $y$

**γ.** Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

**1.** $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

**2.** $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

**3.** $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$

**Θέμα 2ο**

**α.** Για την απόσταση $\rho$ ενός σημείου $M(x,y)$ από την αρχή των αξόνων ισχύει:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2} \text{ ή } \rho^2=x^2+y^2$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το $\rho^2$, τότε έχουμε:

$$\frac{\rho^2}{\rho^2}=\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2} \text{ ή } \left(\frac{x}{\rho}\right)^2+\left(\frac{y}{\rho}\right)^2=1 \quad :(1)$$

Επειδή $ημω=\frac{y}{ρ}$ και $συνω=\frac{x}{ρ}$, η ισότητα $(1)$ γίνεται:

$$(συνω)^2+(ημω)^2=1 \text{ ή } ημ^2ω+συν^2ω=1$$

**β.**

**1.** $συν0^\circ=1,\ \ ημ180^\circ=0$

**2.** $ημ(180^\circ-ω)=ημω,\ \ συνω(180^\circ-ω)=-συνω$

**3.** $ω=60^\circ$ ή $ω=120^\circ$ και $ω=180^\circ-20^\circ=160^\circ$

## Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

### Ά σ κ η σ η 1η

**α.** Η εξίσωση $2x^2+x-1=0$ είναι πολυωνυμική $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $Δ=β^2-4\cdot α\cdot γ=1^2-4\cdot 2\cdot(-1)=1+8=9$ και έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{-1\pm 3}{4}=\begin{cases} x_1=\frac{-1+3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \\ x_2=\frac{-1-3}{4}=\frac{-4}{4}=-1\end{cases}$$

Άρα $2x^2+x-1=2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-(-1))=(2x-1)\cdot(x+1)$

**β.** Το κλάσμα ορίζεται αν και μόνο αν $x^2-1\neq 0$ ή $x^2\neq 1$ ή $x\neq\pm 1$.

Για $x\neq\pm 1$ έχουμε:

$$K=\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}\overset{\text{αερώτημα}}{=}\frac{(2x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x-1}{x-1}$$

**γ.** Έχουμε:

$$\left(\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}:\frac{2x}{3x-3}\right)+\frac{3}{2x}\overset{\text{ερώτημα β}}{=}\frac{2x-1}{x-1}\cdot\frac{3x-3}{2x}+\frac{3}{2x}=$$

$$=\frac{2x-1}{\cancel{x-1}}\cdot\frac{3\cancel{(x-1)}}{2x}+\frac{3}{2x}=\frac{3\cdot(2x-1)}{2x}+\frac{3}{2x}=\frac{3(2x-1)+3}{2x}=$$

$$=\frac{3(2x-1+1)}{2x}=\frac{3\cdot\cancel{2x}}{\cancel{2x}}=3$$

### Ά σ κ η σ η 2η

**α.** Έχουμε:

$$A+B=(x-3y)^2+(2y+3x)(3x-2y)-(3x-y)^2+2x-y-x^2-4y^2=$$

$$=\cancel{x^2}-6xy+9y^2+\left[(3x)^2-(2y)^2\right]-(9x^2-6xy+y^2)+2x-y-\cancel{x^2}-4y^2=$$

$$=\cancel{-6xy}+\cancel{9y^2}+\cancel{9x^2}\cancel{-4y^2}\cancel{-9x^2}\cancel{+6xy}\cancel{-y^2}+2x-y\cancel{-4y^2}=2x-y$$

**β.** Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών έχουμε:

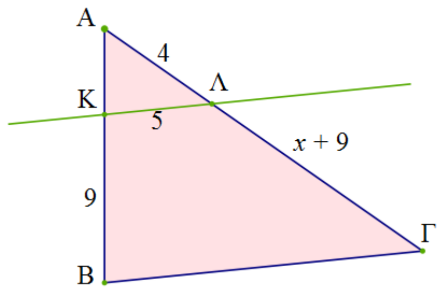
$$\begin{cases}A+B=5\\3x+y=1\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}2x-y=5\\3x+y=1\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}5x=6\\3x+y=1\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=\dfrac{6}{5}\\3x+y=1\end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{6}{5}\\3\cdot\dfrac{6}{5}+y=1\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=\dfrac{6}{5}\\y=1-\dfrac{18}{5}\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=\dfrac{6}{5}\\y=-\dfrac{13}{5}\end{cases}$$

Επομένως η μοναδική λύση τους συστήματος είναι το ζεύγος $(x,y)=\left(\frac{6}{5},-\frac{13}{5}\right)$.

## Άσκηση 3η

**α.** Στα τρίγωνα $ΑΚΛ$ και $ΑΒΓ$ έχουμε:




- $ΑΚΛ=Β$, ως εντός, εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $ΚΛ$ και $ΒΓ$ με τέμνουσα την $ΑΒ$.
- η γωνία $Α$ είναι κοινή

Δηλαδή τα τρίγωνα $ΑΚΛ$ και $ΑΒΓ$ έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια.
Επομένως έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή:

$$\frac{ΑΒ}{ΑΚ}=\frac{ΒΓ}{ΚΛ}=\frac{ΑΓ}{ΑΛ} \quad :(1)$$

**β.** Με αντικατάσταση στην ισότητα $(1)$ έχουμε:

$$\frac{x+9}{x}=\frac{y+13}{5}=\frac{x+13}{4} \text{ ή } \frac{x+9}{x}=\frac{x+13}{4} \quad :(2) \text{ και } \frac{x+9}{x}=\frac{y+13}{5} \quad :(3)$$

Η $(2)$ δίνει $4(x+9)=x(x+13)$ ή $x^2+13x=4x+36$ ή $x^2+13x-4x-36=0$ ή $x^2+9x-36=0$.

Η τελευταία είναι πολυωνυμική $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $Δ=9^2-4\cdot1\cdot(-36)=81+144=225$ και έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{81+144}}{2}=\frac{-9\pm\sqrt{225}}{2}=\begin{cases}x_1=\dfrac{-9-15}{2}\\x_2=\dfrac{-9+15}{2}\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x_1=-12\\x_1=3\end{cases}$$

Η $x=-12$ απορρίπτεται, αφού $x=ΑΚ>0$.

Επομένως είναι $x=3$ και η $(3)$ δίνει $\dfrac{3+9}{3}=\dfrac{y+13}{5}$ ή $\dfrac{\cancel{5}(y+13)}{\cancel{5}}=\dfrac{5\cdot\cancel{12}^{4}}{\cancel{3}_{1}}$ ή $y=20-13=7$.

Δηλαδή είναι $\boxed{x=3}$ και $\boxed{y=7}$.

## 16ο

## ΘΕΩΡΙΑ

### Θέμα 1ο

**Α1.** Η μετατροπή μιας παράστασης από άθροισμα σε γινόμενο παραγόντων λέγεται παραγοντοποίηση.

**Α2.** Είναι:

- $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
- $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

**Α3.** Έχουμε: $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta-\beta\alpha-\beta^2=\alpha^2-\beta^2$

## Θέμα 2ο

**Β1.** Δεν είναι απαραίτητο να αποδείξουμε ότι έχουν όλες τις πλευρές τους και τι αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία. Οι προτάσεις με τις οποίες αποδεικνύουμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα ονομάζονται κριτήρια ισότητας τριγώνων.

**Β2.** Ένα από τα κριτήρια ισότητας τριγώνων είναι το "Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα".

Ένα από τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων είναι το "Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία"

**Β3.** Αν από μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

**α.** Έχουμε: $x-2=3x(2-x)$ ή $x-2=6x-3x^2$ ή $3x^2+x-2-6x=0$ ή $3x^2-5x-2=0$.

Είναι $\alpha=3,\ \beta=-5$ και $\gamma=-2$ και $\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=(-5)^2-4\cdot3\cdot(-2)=25+24=49$

**β.** Η εξίσωση $3x^2-5x-2=0$ είναι πολυωνυμική $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=49>0$ και έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{49}}{2\cdot3}=\frac{5\pm7}{6}=\begin{cases}x_1=\dfrac{5+7}{6}=\dfrac{12}{6}=2\\[2mm] x_2=\dfrac{5-7}{6}=\dfrac{-2}{6}=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Το τριώνυμο σε μορφή γινομένου γράφεται: $3x^2-5x-2=3\cdot(x-2)\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right)=(x-2)\cdot(3x+1)$

### Άσκηση 2η

**α.** Είναι $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$, άρα θα ισχύει:

$$\kappa^2-5\kappa+3=3 \text{ και } \lambda^2-6=3 \text{ ή}$$

$$\kappa^2-5\kappa=0 \text{ και } \lambda^2-6-3=0 \text{ ή}$$

$$\kappa\cdot(\kappa-5)=0 \text{ και } \lambda^2-9=0 \text{ ή}$$

$$(\kappa=0 \text{ ή } \kappa-5=0) \text{ και } \lambda^2=9$$

$$(\kappa=0 \text{ ή } \kappa=5) \text{ και } (\lambda=3 \text{ ή } \lambda=-3)$$

Επειδή όμως $\kappa,\lambda>0$ είναι $(\kappa,\lambda)=(5,3)$.

**β.** $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{x^2-7}{x^2-1}=\dfrac{2}{x-1}$ ή

$$\frac{3}{x+1}-\frac{x^2-7}{(x-1)(x+1)}=\frac{2}{x-1}$$

Για να ορίζονται τα κλάσματα θα πρέπει:

- $x+1\neq 0$ δηλαδή $x\neq -1$ και
- $x-1\neq 0$ δηλαδή $x\neq 1$.

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $\text{Ε.Κ.Π.}=(x-1)(x+1)$. Τότε έχουμε:

$$\frac{3}{x+1}-\frac{x^2-7}{(x-1)(x+1)}=\frac{2}{x-1} \text{ ή}$$

$$(x-1)(x+1)\cdot\frac{3}{x+1}-(x-1)(x+1)\cdot\frac{x^2-7}{(x-1)(x+1)}=(x-1)(x+1)\cdot\frac{2}{x-1} \text{ ή}$$

$$3(x-1)-\left(x^2-7\right)=2(x+1) \text{ ή}$$

$$3x-3-x^2+7=2x+2 \text{ ή}$$

$$3x-3-x^2+7-2x-2 \text{ ή } -x^2+x+6=0$$

Η τελευταία είναι πολυωνυμική $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=1^2-4\cdot(-1)\cdot 6=1+24=25$ και έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2\cdot(-1)}=\frac{-1\pm 5}{-2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-1+5}{-2}=\dfrac{4}{-2}=-2 \\ x_2=\dfrac{-1-5}{-2}=\dfrac{-6}{-2}=3 \end{cases}$$

, οι οποίες είναι και οι δύο δεκτές, αφού πληρούν τους περιορισμούς.

## Άσκηση 3η

**α.** Τα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΖΕ έχουν $A=\Delta=50^o$ και $B=Z=80^o$. Δηλαδή έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, επομένως είναι όμοια. Άρα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες. Δηλαδή ισχύει:

$$\frac{AB}{\Delta Z}=\frac{B\Gamma}{ZE}=\frac{A\Gamma}{\Delta E}$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα έχουμε: $\dfrac{AB}{\Delta Z}=\dfrac{\alpha+\beta+3}{2\alpha+3\beta-5}=\dfrac{10}{5}=\dfrac{2}{1} \quad :(1)$

**β.** Είναι $P(1)=-3$ δηλαδή:

$$1^2-3\cdot 1+3\alpha-2\beta=-3 \text{ ή}$$

$$3\alpha-2\beta=-3-1+3 \text{ ή } 3\alpha-2\beta=-1.$$

Επιπλέον από τη σχέση $(1)$ έχουμε:

$$\alpha+\beta+3=2(2\alpha+3\beta-5) \text{ ή}$$

$\alpha+\beta+3=4\alpha+6\beta-10$ ή $4\alpha+6\beta-10-\alpha-\beta-3=0$ ή

$3\alpha+5\beta=13.$

Έτσι έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases}3\alpha-2\beta=-1\\3\alpha+5\beta=13\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}-3\alpha+2\beta=1\\3\alpha+5\beta=13\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}3\alpha-2\beta=-1\\7\beta=14\end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases}3\alpha-2\cdot2=-1\\\beta=2\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}3\alpha=-1+4\\\beta=2\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}\boxed{\alpha=1}\\\boxed{\beta=2}\end{cases}$$

## 1 7 ο

## Θ Ε Ω Ρ Ι Α

### Θ έ μ α 1 ο

**Α1.** Είναι $1\to\Lambda$ , $2\to\Sigma$ , $3\to\Lambda$ , $4\to\Sigma$ , $5\to\Sigma$

**Α2.** Έχουμε:

- $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3$
- $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$
- $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
- $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$

**Α3.** Είναι: $(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta-\beta\alpha+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

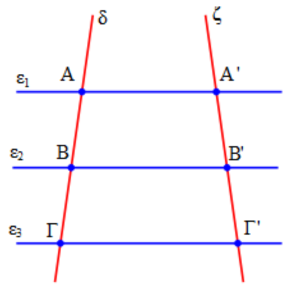
### Θ έ μ α 2 ο

**Β1.** Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

- δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή
- μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

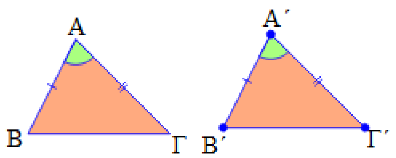
**Β2.**

Είναι σωστό ότι $A'B'=B'\Gamma'$ αφού $AB=B\Gamma$, γιατί αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μία τέμνουσά τους, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη τέμνουσα.

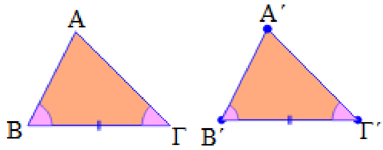



**Β3.** Έχουμε:

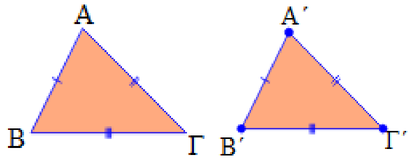
- Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.



- Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.




- Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.




## Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

### Άσκηση 1η

**α.** Έχουμε: $A=(x+2)^2-4(x+5)=x^2\cancel{+4x}+4\cancel{-4x}-20=x^2-16$

**β.** Για $x\neq\pm1$ έχουμε: $B=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}:\dfrac{1}{6x-6}=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}\cdot\dfrac{6x-6}{1}=\dfrac{x\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}}\cdot\dfrac{6\cancel{(x-1)}}{1}=6x$

**γ.** Για $x\neq\pm1$ έχουμε:

$A+B=0$ ή $x^2-16=6x$ ή $x^2-6x-16=0$

Η τελευταία είναι πολυωνυμική εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=(-6)^2-4\cdot1\cdot(-16)=36+64=100$ και έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{100}}{2\cdot1}=\frac{6\pm10}{2}=\begin{cases}x_1=\dfrac{6+10}{2}=8\\[2mm] x_2=\dfrac{6-10}{2}=-2\end{cases}$$

### Άσκηση 2η

**α.** Έχουμε:

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{4}-\dfrac{2x-y}{3}=x-\dfrac{5}{6}\\ 2(x-y)+3(y+2x)=9\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}12\cdot\dfrac{x+y}{4}-12\cdot\dfrac{2x-y}{3}=12x-12\cdot\dfrac{5}{6}\\ 2x-2y+3y+6x=9\end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases}3(x+y)-4(2x-y)=12x-10\\ 8x+y=9\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}3x+3y-8x+4y=12x-10\\ 8x+y=9\end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases}3x-8x-12x+3y+4y=-10\\ 8x+y=9\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}-17x+7y=-10\\ 8x+y=9\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}17x-7y=10\\ 8x+y=9\end{cases}$$

**β.** Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών έχουμε:

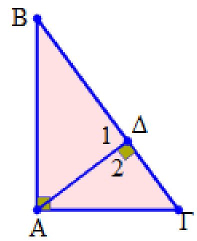
$$\begin{cases}17x-7y=10\\ 8x+y=9\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}17x-7y=10\\ 56x+7y=63\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}17x-7y=10\\ 73x=73\end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases}17x-7y=10\\ x=1\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}17\cdot1-7y=10\\ x=1\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}-7y=10-17\\ x=1\end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases}-7y=-7\\ x=1\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}y=1\\ x=1\end{cases}$$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=(1,1)$.

## Άσκηση 3η




**α.** Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ έχουν $\hat{A}=\hat{\Delta}_1=90^\circ$ και η γωνία $\hat{B}$ είναι κοινή. Επομένως έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι όμοια. Άρα έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες και ισχύει $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{B\Delta}{AB}$.

**β. i.** Από το ερώτημα (α) είναι: $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{B\Delta}{AB}$, άρα $\frac{\sqrt{3}}{x}=\frac{x-2}{\sqrt{3}}$.

**ii.** Επειδή $\frac{\sqrt{3}}{x}=\frac{x-2}{\sqrt{3}}$ προκύπτει ότι $\sqrt{3}^2=x(x-2)$ ή $3=x^2-2x$ ή $x^2-2x-3=0$.

Η τελευταία είναι πολυωνυμική εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=(-2)^2-4\cdot(\cdot(-3))=4+12=16$ και έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{6}{2}=3 \\ x_2=\frac{-2}{2}=-1 \end{cases}$$

Επειδή $x=(B\Gamma)>0$, η τιμή $-1$ απορρίπτεται, οπότε είναι $x=(B\Gamma)=3$.

**γ.** Επειδή παραπληρωματικές γωνίες έχουν αντίθετα συνημίτονα, έχουμε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu(180^\circ-B)=-\sigma\upsilon\nu B=-\frac{AB}{B\Gamma}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

**18ο**

# ΘΕΩΡΙΑ

## Θέμα 1ο

**Α1.** Οι ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού, λέγονται **μονώνυμα**.

Σ΄ ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται **συντελεστής** του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών του με τους αντίστοιχους εκθέτες τους λέγεται **κύριο μέρος** του μονωνύμου.

**Α2.** Είναι:

- **i.** $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
- **ii.** $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
- **iii.** $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$
- **iv.** $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$
- **v.** $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

**Α3.** Έχουμε:

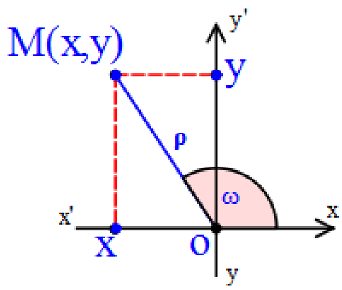
$$(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)=$$

$$=\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2+2\alpha\beta^2+\beta^3$$

$$=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

## Θέμα 2ο

**Β1**. Είναι:




- $\eta\mu\omega=\dfrac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}}=\dfrac{y}{\rho}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $\sigma\upsilon\nu\omega=\dfrac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}}=\dfrac{x}{\rho}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ και
- $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}}=\dfrac{y}{x}$, $x\neq 0$

**Β2.** Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις ισότητες $\eta\mu\omega=\dfrac{y}{\rho}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=\dfrac{x}{\rho}$, με την προϋπόθεση ότι $\sigma\upsilon\nu\omega\neq 0$,

έχουμε: $\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\dfrac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}}$ ή $\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\dfrac{y\rho}{x\rho}$ ή $\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\dfrac{y}{x}=\varepsilon\varphi\omega$.

**Β3.** Για την απόσταση $\rho$ ενός σημείου $M(x,y)$ από την αρχή των αξόνων ισχύει:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2} \text{ ή } \rho^2=x^2+y^2$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το $\rho^2$, τότε έχουμε:

$$\frac{\rho^2}{\rho^2}=\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2} \text{ ή } \left(\frac{x}{\rho}\right)^2+\left(\frac{y}{\rho}\right)^2=1 \quad :(1)$$

Επειδή $ημω=\frac{y}{ρ}$ και $συνω=\frac{x}{ρ}$, η ισότητα $(1)$ γίνεται:

$$(συνω)^2+(ημω)^2=1 \text{ ή } ημ^2ω+συν^2ω=1$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

Έχουμε:

$$\frac{x-1}{2x+2}=\frac{4}{x^2-1}-\frac{2}{x-1} \text{ ή } \frac{x-1}{2(x+1)}=\frac{4}{(x-1)(x+1)}-\frac{2}{x-1}$$

Η εξίσωση ορίζεται αν και μόνο αν οι παρονομαστές είναι διάφοροι του μηδενός. Δηλαδή αν και μόνο αν:

- $2(x+1)\neq 0$ ή $x+1\neq 0$ ή $x\neq -1$
- $(x-1)(x+1)\neq 0$ ή $(x-1\neq 0$ και $x+1\neq 0)$ ή $(x\neq 1$ και $x\neq -1)$
- $x-1\neq 0$ ή $x\neq 1$

Δηλαδή η εξίσωση ορίζεται για $x\neq \pm 1$.

Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών είναι $ΕΚΠ=2(x+1)(x-1)$. Άρα:

$$2(x+1)(x-1)\frac{x-1}{2(x+1)}=2(x+1)(x-1)\frac{4}{(x-1)(x+1)}-2(x+1)(x-1)\frac{2}{x-1} \text{ ή}$$

$(x-1)^2=8-4(x+1)$ ή

$x^2-2x+1=8-4x-4$ ή

$x^2-2x+1-8+4x+4=0$ ή

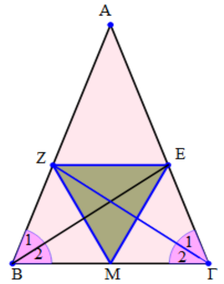
$x^2+2x-3=0$

Η τελευταία είναι πολυωνυμική $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $Δ=β^2-4\cdot α\cdot γ=2^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16$ και έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{-2+4}{2}=\frac{2}{2}=1 \\ x_2=\frac{-2-4}{2}=\frac{-6}{2}=-3 \end{cases}$$

Η $x=1$ απορρίπτεται γιατί δεν πληροί τους περιορισμούς. Επομένως η αρχική εξίσωση έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό $x=-3$.

### Άσκηση 2η




Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, είναι $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ και $\hat{B}_1=\hat{B}_2$, $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2$ αφού $BE$ και $\Gamma Z$ διχοτόμοι. Άρα είναι και $\hat{B}_1=\hat{B}_2=\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2$.

**α.** Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $BZ\Gamma$ και $\Gamma EB$ έχουμε:

- $\hat{B}_2=\hat{\Gamma}_2$
- $BM=M\Gamma$ (αφού το $M$ είναι μέσο της $B\Gamma$) και
- $ZB\Gamma=E\Gamma B$ (ως παρά τη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$)

Επομένως από το κριτήριο $\Gamma-\Pi-\Gamma$ τα τρίγωνα $BZ\Gamma$ και $\Gamma EB$ είναι ίσα. Οπότε έχουν $BZ=\Gamma E$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές $\hat{\Gamma}_2$ και $\hat{B}_2$ αντίστοιχα.

**β.** Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $BMZ$ και $\Gamma ME$ έχουμε:

- $BZ=\Gamma E$ (από το προηγούμενο ερώτημα).
- $BM=M\Gamma$ (αφού το $M$ είναι μέσο της $B\Gamma$) και
- $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ (ως παρά τη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$)

Απόμένως από το κριτήριο $\Pi-\Gamma-\Pi$ τα τρίγωνα $BMZ$ και $\Gamma ME$ είναι ίσα, οπότε έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ίσες. Δηλαδή είναι $ZM=ME$, οπότε το τρίγωνο $EMZ$ είναι ισοσκελές.

## Άσκηση 3η

**α.** Έχουμε:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2}-\frac{y+2x+2}{4}=\frac{2-x}{5} \\ \frac{x-1}{3}=\frac{3x+2y}{5}-\frac{11+x}{15} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 20\cdot\frac{x+1}{2}-20\cdot\frac{y+2x+2}{4}=20\cdot\frac{2-x}{5} \\ 15\cdot\frac{x-1}{3}=15\cdot\frac{3x+2y}{5}-15\cdot\frac{11+x}{15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10(x+1)-5(y+2x+2)=4(2-x) \\ 5(x-1)=3(3x+2y)-(11+x) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \cancel{10x}\cancel{+10}-5y\cancel{-10x}\cancel{-10}=8-4x \\ 5x-5=9x+6y-11-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x-5y=8 \\ 5x-9x+x-6y=5-11 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 4x-5y=8 \\ -3x-6y=-6 \end{cases}$$

**β.** Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών έχουμε:

$$\begin{cases} 4x-5y=8 \\ -3x-6y=-6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3\cdot 4x-3\cdot 5y=3\cdot 8 \\ 4\cdot(-3)x-4\cdot 6y=4\cdot(-6) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 12x-15y=24 \\ -12x-24y=-24 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} 12x-15y=24 \\ -39y=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 12x-15y=24 \\ y=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 12x-15\cdot 0=24 \\ y=0 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} 12x=24 \\ y=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

Επομένως το σύστημα έχι μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=(2,0)$.

**γ.** Θέτουμε $x=2$ και $y=0$ στην εξίσωση $4x-5y=8$ και έχουμε: $4\cdot 2-5\cdot 0=8$ ή $8=8$ που ισχύει

Ομοίως στην $-3x-6y=-6$ έχουμε: $-3\cdot 2-6\cdot 0=-6$ ή $-6=-6$ που ισχύει.

Άρα η λύση ικανοποιεί και τις δύο εξισώσεις του συστήματος.

**1 9 ο**

## ΘΕΩΡΙΑ

### Θέμα 1ο

**Α1.** Έχουμε:

$$(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)=$$

$$=\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2+2\alpha\beta^2+\beta^3$$

$$=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

**Α2.** Είναι: $\alpha\to\Lambda$, $\beta\to\Sigma$, $\gamma\to\Sigma$, $\delta\to\Sigma$

### Θέμα 2ο

**Β1.** Για την απόσταση $\rho$ ενός σημείου $M(x,y)$ από την αρχή των αξόνων ισχύει:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2} \text{ ή } \rho^2=x^2+y^2$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το $\rho^2$, τότε έχουμε:

$$\frac{\rho^2}{\rho^2}=\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2} \text{ ή } \left(\frac{x}{\rho}\right)^2+\left(\frac{y}{\rho}\right)^2=1 \quad :(1)$$

Επειδή $\eta\mu\omega=\frac{y}{\rho}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{x}{\rho}$, η ισότητα $(1)$ γίνεται:

$$(\sigma\upsilon\nu\omega)^2+(\eta\mu\omega)^2=1 \text{ ή } \eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$$

**Β2.** Είναι: $\alpha\to\Lambda$, $\beta\to\Sigma$, $\gamma\to\Sigma$, $\delta\to\Sigma$, $\varepsilon\to\Sigma$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

**α.** Από την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$ για $\eta\mu\omega=\frac{4}{5}$ έχουμε:

$$\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1 \text{ ή } \left(\frac{4}{5}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1 \text{ ή } \frac{16}{25}+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu^2\omega=1-\frac{16}{25} \text{ ή}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{9}{25} \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\omega=\pm\sqrt{\frac{9}{25}} \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\omega=\pm\frac{3}{5}$$

Επειδή η γωνία $\omega$ είναι αμβλεία, ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega<0$, άρα δεκτή η $\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{3}{5}$.

**β.** Από την ταυτότητα $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ έχουμε: $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{4\cdot5}{-3\cdot5}=-\frac{4}{3}$

**γ.** Επειδή παραπληρωματικές γωνίες έχουν αντίθεα συνημίτον ακι εφαπτομένες, έχουμε:

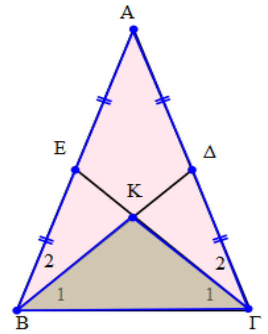
- $\sigma\upsilon\nu120^o=\sigma\upsilon\nu(180^0-60^0)=-\sigma\upsilon\nu60^0=-\frac{1}{2}$ και
- $\varepsilon\varphi135^o=\varepsilon\varphi(180^0-45^0)=-\varepsilon\varphi45^0=-1$

Άρα

$$A=\frac{\sigma\upsilon\nu\omega-\sigma\upsilon\nu120^{o}}{\varepsilon\varphi\omega+\varepsilon\varphi135^{0}}=\frac{-\frac{3}{5}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{4}{3}+(-1)}=\frac{-\frac{3}{5}+\frac{1}{2}}{-\frac{4}{3}-1}=\frac{-\frac{6}{10}+\frac{5}{10}}{-\frac{4}{3}-\frac{3}{3}}=$$

$$=\frac{-\frac{6+5}{10}}{\frac{-4-3}{3}}=\frac{\frac{-1}{10}}{\frac{-7}{3}}=\frac{-1\cdot3}{-7\cdot10}=\frac{-3}{-70}=\frac{3}{70}$$

## Άσκηση 2η




**α.** Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουμε:

- $A\Delta=AE$ (ως μισά των ίσων πλευρών $AB$ και $A\Gamma$, αφού οι $\Gamma E$ και $B\Delta$ είναι διάμεσοι).
- $AB=A\Gamma$ (αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές) και
- Η γωνία $A$ είναι κοινή.

Επομένως από το κριτήριο $\Pi-\Gamma-\Pi$ τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

**β.** Από την ισότητα των τριγώνων $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έπεται ότι $\hat{B}_2=\hat{\Gamma}_2$. Επειδή είναι και $\hat{B}=\hat{\Gamma}$, θα ισχύει ότι $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1$ ως διαφορές των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Άρα επειδή $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1$, το τρίγωνο $B\Gamma K$ είναι ισοσκελές.

## Άσκηση 3η

**α.** Έχουμε:

- $A(x)=2x(3x-1)-(x-1)(1+x)-3x^2-1=$
  $=6x^2-2x-(x^2-1)-3x^2-1$
  $=6x^2-2x-x^2+1-3x^2-1$
  $=2x^2-2x$
- $B(x)=(3x-2)^2-(2x-1)(4x-3)=$
  $=(3x)^2-2\cdot3x\cdot2+2^2-(8x^2-6x-4x+3)=$
  $=9x^2-12x+4-8x^2+6x+4x-3$
  $=x^2-2x+1$

**β.** Είναι:

- $A(x)=2x^2-2x=2x(x-1)$ και
- $B(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$

**γ.** Η παράσταση $\Gamma(x)$ ορίζεται αν και μόνο αν ο παρονομαστής $B(x)$ είναι διάφορος του μηδενός, δηλαδή αν και μόνο αν $(x-1)^2\neq0$ ή $x-1\neq0$ ή $x\neq1$. Άρα η $\Gamma(x)$ ορίζεται για κάθε αριθμό $x$ εκτός του $x=1$.

Είναι $\Gamma(x)=\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{2x\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}}=\frac{2x}{x-1}$.

**δ.** Για $x\neq1$ έχουμε:

$\Gamma(x)=\frac{2}{x-1}$ ή $\frac{2x}{x-1}=\frac{2}{x-1}$ ή $(x-1)\frac{2x}{x-1}=(x-1)\frac{2}{x-1}$ ή $2x=2$ ή $\frac{2x}{2}=\frac{2}{2}$ ή $x=1$. Η λύση αυτή απορρίπτεται και άρα η εξίσωση $\Gamma(x)=\frac{2}{x-1}$ είναι αδύνατη.

## 20ο

## ΘΕΩΡΙΑ

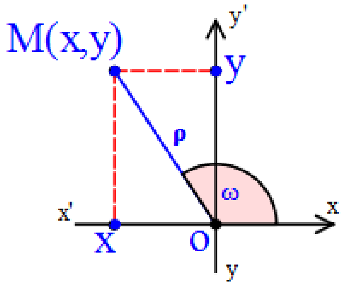
### Θέμα 1ο

**A1.** Έχουμε: $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

**A2.** $1\to\Sigma$ , $2\to\Lambda$ , $3\to\Lambda$ , $4\to\Sigma$

### Θέμα 2ο

**B1.** Για την απόσταση $\rho$ ενός σημείου $M(x,y)$ από την αρχή των αξόνων ισχύει:




$$\rho=\sqrt{x^2+y^2} \text{ ή } \rho^2=x^2+y^2$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το $\rho^2$, τότε έχουμε:

$$\frac{\rho^2}{\rho^2}=\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2} \text{ ή } \left(\frac{x}{\rho}\right)^2+\left(\frac{y}{\rho}\right)^2=1 \quad :(1)$$

Επειδή $\eta\mu\omega=\frac{y}{\rho}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{x}{\rho}$, η ισότητα $(1)$ γίνεται:

$$(\sigma\upsilon\nu\omega)^2+(\eta\mu\omega)^2=1 \text{ ή } \eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$$

**B2.** Είναι $1\to\beta$ , $2\to\gamma$ , $3\to\alpha$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

**α.** Έχουμε:

- $A=x^2-4=x^2-2^2=(x-2)\cdot(x+2)$ και
- $B=3x^2-6=3x^2-3\cdot 2=3(x^2-2)$

**β.** Είναι:

$2A-3B+x^2+7x-11=0$ ή $2\cdot(x^2-4)-3\cdot(3x^2-6)+x^2+7x-11=0$ ή

$2x^2-8-9x^2+18+x^2+7x-11=0$ ή $-6x^2+7x-1=0$.

Η τελευταία είναι πολυωνυμική $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα
$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=7^2-4\cdot(-6)\cdot(-1)=49-24=25>0$ και έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{25}}{2\cdot(-6)}=\frac{-7\pm 5}{-12}=\begin{cases} x_1=\frac{-7+5}{-12}=\frac{-2}{-12}=\frac{1}{6} \\ x_2=\frac{-7-5}{-12}=\frac{-12}{-12}=1 \end{cases}$$

### Άσκηση 2η

α. Αφού η τιμή της συνάρτησης είναι $9$ για $x=-2$ έχουμε

$$9=-(-2)^2+\kappa(-2)+\lambda$$
$$9=-4-2\kappa+\lambda$$
$$13=-2\kappa+\lambda$$
$$\lambda=13+42$$

Στο τριώνυμο $-x^2+\kappa x+\lambda$ είναι $\alpha=-1$, $\beta=\kappa$ και $\gamma=\lambda$, άραQ

$$\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=\kappa^2-4\cdot(-1)\cdot\lambda=\kappa^2+4\lambda$$

Όμως $\Delta=36$ οπότε

$36=\kappa^2+4\lambda$ η οποία λόγο της $\lambda=13+2\kappa$

Γίνεται

$$36=\kappa^2+4(13+2\kappa)$$
$$36=\kappa^2+52+16\kappa$$
$$0=\kappa^2+16\kappa+52-36$$
$$0=\kappa^2+16\kappa+16$$
$$0=(\kappa+4)^2$$
$$0=\kappa+4$$
$$\kappa=-4$$

Οπότε $\lambda=13+2(-4)=13-8=4$

β. Για $\kappa=-4$ και $\lambda=5$ η συνάρτηση γίνεται: $y=-x^2-4x+5$

Για τα κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ θέτουμε $y=0$ και έχουμε: $0=-x^2-4x+5$.

Εξίσωση β' βαθμού με $\alpha=-1$, $\beta=-4$, $\gamma=5$

$$\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=(-4)^2-4\cdot(-1)\cdot5=16+20=36>0$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{36}}{2\cdot(-1)}=\frac{4\pm6}{-2}=\begin{cases}\dfrac{4+6}{-2}=\dfrac{10}{-2}=-5\\[2mm]\dfrac{4-6}{-2}=\dfrac{-2}{-2}=1\end{cases}$$

Άρα τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ είναι $(-5,0)$ και $(1,0)$.

Για το κοινό σημείο με τον $y'y$ θέτουμε $x=0$ και έχουμε: $y=-0^2-4\cdot0+5$ ή $y=5$. Άρα το κοινό σημείο με τον $y'y$ είναι το $(0,-5)$.

## Άσκηση 3η

α. Από την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$ για $\eta\mu\omega=\dfrac{4}{5}$ έχουμε:

$$\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1 \text{ ή } \left(\frac{4}{5}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1 \text{ ή } \frac{16}{25}+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu^2\omega=1-\frac{16}{25} \text{ ή}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{9}{25} \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\omega=\pm\sqrt{\frac{9}{25}} \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\omega=\pm\frac{3}{5}.$$

Επειδή $90^{\circ} < \omega < 180^{\circ}$, το συνημίτονο της γωνίας $\omega$ είναι αρνητικ΄΄ο. Επομένως δεκτή τιμή η $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$.

Επιπλέον είναι: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{-3}{5}} = \frac{4\cdot 5}{-3\cdot 5} = -\frac{4}{3}$.

β. Για $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$ και $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{4}{3}$ έχουμε:

$$1 = \frac{5}{17}(2\eta\mu\omega - 3\sigma\upsilon\nu\omega) - \frac{3}{4}\varepsilon\varphi\omega = \frac{5}{17}\left[2\cdot\frac{4}{5} - 3\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\right] - \frac{3}{4}\left(-\frac{4}{3}\right) =$$

$$= \frac{5}{17}\left(\frac{8}{5} + \frac{9}{5}\right) + \frac{12}{12} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{17}}\cdot\frac{\cancel{17}}{\cancel{5}} + 1 = 1 + 1 = 2$$

## 2 1 ο

## Θ Ε Ω Ρ Ι Α

### Θ έ μ α  1 ο

α. **Μονώνυμο** λέγεται μια ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία μεταξύ των αριθμών και των μεταβλητών της σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού.

Σ΄ ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται **συντελεστής** του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών του με τους αντίστοιχους εκθέτες τους λέγεται **κύριο μέρος** του μονωνύμου.

β. **Όμοια** ονομάζονται τα μονώνυμα τα οποία έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

Τα **όμοια** μονώνυμα που έχουν έχουν αντίθετους συντελεστές, λέγονται **αντίθετα**.

Για παράδειγμα τα μονώνυμα $-3x^2y^3$ και $5x^2y^3$ είναι όμοια, ενώ τα μονώνυμα $3x^2y^4$ και $-3x^2y^4$ είναι αντίθετα.

γ. Για να είναι ίσα τα μονώνυμα $(2\lambda+1)\cdot x^{\mu+1}\cdot y^2$ και $-5x^2y^{\nu+2}$ πρέπει:

- $2\lambda+1=-5$ ή $2\lambda=-1-5$ ή $2\lambda=-6$ ή $\lambda=-3$ και
- $\mu-1=2$ ή $\mu=1+2$ ή $\mu=3$ και
- $2=\nu+2$ ή $\nu=2-2$ ή $\nu=0$

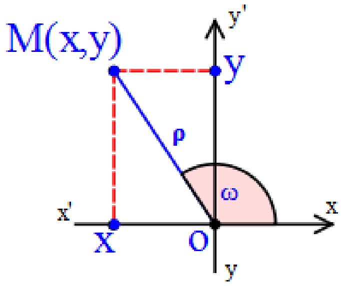
δ. Είναι $1\to\Gamma$, $2\to E$, $3\to\Delta$, $4\to B$, $5\to A$

### Θ έ μ α  2 ο

α. Για την απόσταση $\rho$ ενός σημείου $M(x,y)$ από την αρχή των αξόνων ισχύει:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \text{ ή } \rho^2 = x^2+y^2$$

Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το $\rho^2$, τότε έχουμε:




$$\frac{\rho^2}{\rho^2} = \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} \text{ ή } \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 = 1 \quad :(1)$$

Επειδή $\eta\mu\omega=\frac{y}{\rho}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{x}{\rho}$, η ισότητα $(1)$ γίνεται:

$$(\sigma\upsilon\nu\omega)^2+(\eta\mu\omega)^2=1 \text{ ή } \eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$$

**β.** Έστω ότι υπάρχει γωνία $\omega$ για την οποία ισχύει $\eta\mu\omega=\frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{1}{3}$. Τότε έχουμε από την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$ έχουμε:

$$\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{9}{36}+\frac{4}{36}=\frac{13}{36}\neq 1$$

Άρα δεν υπάρχει τέτοια γωνία.

**γ.** Επειδή οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν ίσα ημίτονα και αντίθετα συνημίτονα και εφαπτομένες, έχουμε:

- $\eta\mu\left(180^\circ-\omega\right)=\eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu\left(180^\circ-\omega\right)=-\sigma\upsilon\nu\omega$
- $\varepsilon\varphi\left(180^\circ-\omega\right)=-\varepsilon\varphi\omega$

Επιπλέον είναι $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1η

**α.** Είναι:

- $2x^2-2x-4=2\left(x^2-x-2\right)=2\left(x^2+x-2x-2\right)=$

  $=2\left[x(x+1)-2(x+1)\right]=2(x+1)(x-2)$

- $x^5-x^3=x^3\left(x^2-1\right)=x^3(x-1)(x+1)$

  ✓ Η παράσταση Α ορίζεται όταν $2x^2-2x-4\neq 0$ ή $2(x+1)(x-2)\neq 0$ ή $(x\neq -1 \text{ και } x\neq 2)$.

  ✓ Η παράσταση Β ορίζεται όταν $x^5-x^3\neq 0$ ή $x^3(x-1)(x+1)\neq 0$ ή $(x\neq 0 \text{ και } x\neq 1 \text{ και } x\neq -1)$

Οπότε έχουμε:

- $A=\frac{x^2-4x+4}{2x^2-2x-4}=\frac{(x-2)^{\cancel{2}}}{2(x+1)\cancel{(x-2)}}=\frac{x-2}{2(x+1)}$
- $B=\frac{6x^3}{x^5-x^3}=\frac{6x^3}{x^3\left(x^2-1\right)}=\frac{6}{x^2-1}=\frac{6}{(x-1)(x+1)}$

**β.** Για την εξίσωση $A=\frac{3}{1-x}+B$ με $x\neq -1,0,1,2$ έχουμε:

$A=\frac{3}{1-x}+B$ ή $\frac{x-2}{2(x+1)}=\frac{3}{1-x}+\frac{6}{x^2-1}$ ή $\frac{x-2}{2(x+1)}=\frac{3}{1-x}+\frac{6}{(x-1)(x+1)}$ ή

$\frac{x-2}{2(x+1)}=\frac{-3}{x-1}+\frac{6}{(x-1)(x+1)}$

Το ελάχιστοκοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών είναι: $Ε.Κ.Π=2(x-1)(x+1)$. Οπότε:

$$\cancel{2}(x-1)\cancel{(x+1)}\frac{x-2}{\cancel{2}\cancel{(x+1)}}=2\cancel{(x-1)}(x+1)\frac{-3}{\cancel{x-1}}+2\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}\frac{6}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}} \text{ ή}$$

$(x-1)(x-2)=-6(x+1)+12$ ή $x^2-2x-x+2=-6x-6+12$ ή $x^2-3x+2=-6x+6$ ή

$x^2-3x+2+6x-6=0$ ή $x^2+3x-4=0$

Η τελευταία είναι πολυωνυμική εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα

$\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=3^2-4\cdot1(-4)=9+16=25>0$ και έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm5}{2}=\begin{cases}x_1=\frac{-3+5}{2}=\frac{2}{2}=1\\ x_2=\frac{-3-5}{2}=\frac{-8}{2}=-4\end{cases}$$

Η λύση $x=1$ δεν πληροί τους περιορισμούς και απορρίπτεται.

Επομένως η εξίσωση $A=\frac{3}{1-x}+B$ έχει μοναδική λύση τον αριθμό $x=-4$.

## Άσκηση 2η

Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών έχουμε:

$$\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=-2\\ \frac{2x-1}{5}+\frac{y+5}{4}=1\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}6\cdot\frac{x}{2}-6\cdot\frac{y}{3}=6\cdot(-2)\\ 20\cdot\frac{2x-1}{5}+20\cdot\frac{y+5}{4}=20\cdot1\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}3x-2y=-12\\ 4(2x-1)+5(y+5)=20\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}3x-2y=-12\\ 8x-4+5y+25=20\end{cases}$$

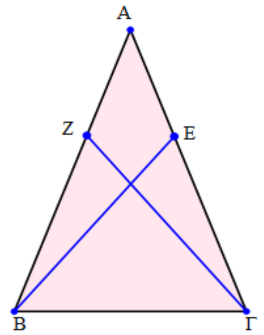
$$\text{ή } \begin{cases}3x-2y=-12\\ 8x+5y=20-25+4\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}3x-2y=-12\\ 8x+5y=-1\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}15x-10y=-60\\ 16x+10y=-2\end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases}31x=-62\\ 16x+10y=-2\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=-2\\ 16x+10y=-2\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=-2\\ 16\cdot(-2)+10y=-2\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=-2\\ 10y=-2+32\end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases}x=-2\\ 10y=30\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=-2\\ y=3\end{cases}$$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=(-2,3)$.

## Άσκηση $3^η$




**87.** Συγκρίνω τα

$$\overset{\Delta}{\mathrm{B Z \Gamma}} \text{ και } \overset{\Delta}{\mathrm{B H \Gamma}}. \text{ Έχουν:}$$

**1.** $\mathrm{B\Gamma}$ κοινή.

**2.** $\mathrm{Z\hat{B}\Gamma = B\hat{\Gamma}H}$ παρά τη βάση ισοσκελούς.

**3.** $\mathrm{BZ = \Gamma H}$ διότι $\begin{cases} \mathrm{BA = \Gamma A} \\ \mathrm{AZ = AH} \end{cases}$ ή $\mathrm{BA - AZ = \Gamma A - AH}$ δηλ.

$\mathrm{BZ = \Gamma H}$

άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

**β.** Προφανώς $\hat{\varphi} = \mathrm{B\hat{H}\Gamma}$ και $\mathrm{B\hat{H}\Gamma} + \omega = 180^{o}$ ή $\hat{\varphi} + \hat{\omega} = 180^{o}$ συνεπώς

**i.** $\text{συν}\omega = \text{συν}(180 - \varphi) = -\text{συν}\varphi = -\dfrac{3}{5}$

**ii.** $\text{ημ}^2\omega = 1 - \text{συν}^2\omega = 1 - \left(-\dfrac{3}{5}\right)^2 = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{25-9}{25} = \dfrac{16}{25}$ ή $\text{ημ}\omega = \pm\sqrt{\dfrac{16}{25}}$

με $90^{o} < \omega < 180^{o}$ όπου όμως $\text{ημ}\omega = \dfrac{4}{5}$ .

Τέλος $\text{εφ}\omega = \dfrac{\text{ημ}\omega}{\text{συν}\omega} = \dfrac{\frac{4}{3}}{-\frac{3}{5}} = -\dfrac{4 \cdot 5}{3 \cdot 5} = -\dfrac{4}{3}$ .

**2 2 ο**

**Θ Ε Ω Ρ Ι Α**

**Θ έ μ α 1 ο**

**α.** **Μονώνυμο** λέγεται μια ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία μεταξύ των αριθμών και των μεταβλητών της σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού. Για παράδειγμα το $-2x^2y^3$ είναι μονώνυμο.

**β.** **Όμοια** ονομάζονται τα μονώνυμα τα οποία έχουν το ίδιο κύριο μέρος. Για παράδειγμα τα μονώνυμα $2x^2y^4$ και $-\dfrac{3}{2}x^2y^4$ είναι όμοια.

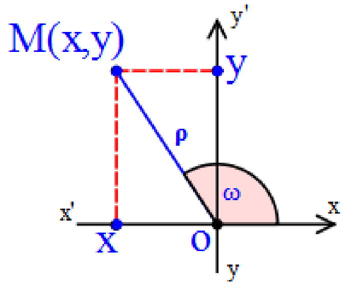
**γ.** Τα **όμοια** μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται **ίσα** ενώ, αν έχουν αντίθετους συντελεστές, λέγονται **αντίθετα**.

**δ.** Ο εκθέτης μιας μεταβλητής λέγεται **βαθμός** του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή.

**ε.** Τα σταθερά μη μηδενικά μονώνυμα είναι **μηδενικού** βαθμού.

**Θ έ μ α 2 ο**

**α.**




- α. $\eta\mu\omega = \dfrac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}} = \dfrac{y}{\rho} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{\text{τετμημένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}} = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- και $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{τετμημένη του Μ}} = \dfrac{y}{x}$, $x \neq 0$

**β.** Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις ισότητες $\eta\mu\omega = \dfrac{y}{\rho}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{x}{\rho}$, με την προϋπόθεση ότι $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$, έχουμε:

$$\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} \ \text{ή}\ \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{y\rho}{x\rho} \ \text{ή}\ \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{y}{x} = \varepsilon\varphi\omega .$$

**γ.**

| | ημω | συνω | εφω |
|---|---|---|---|
| ω οξεία | + | + | + |
| ω αμβλεία | + | - | - |

## Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

### Άσκηση 1η

Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών έχουμε:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = 2 - \dfrac{x-y}{3} \\ \dfrac{x+y}{3} - \dfrac{x-y}{12} = 5 \end{cases} \text{ή} \begin{cases} 6\dfrac{x+y}{2} = 6\cdot 2 - 6\dfrac{x-y}{3} \\ 12\dfrac{x+y}{3} - 12\dfrac{x-y}{12} = 12\cdot 5 \end{cases} \text{ή} \begin{cases} 3(x+y) = 12 - 2(x-y) \\ 4(x+y) - (x-y) = 60 \end{cases} \text{ή}$$

$$\begin{cases} 3x+3y = 12-2x+2y \\ 4x+4y-x+y = 60 \end{cases} \text{ή} \begin{cases} 3x+2x+3y-2y = 12 \\ 4x-x+4y+y = 60 \end{cases} \text{ή} \begin{cases} 5x+y = 12 \\ 3x+5y = 60 \end{cases} \text{ή}$$

$$\begin{cases} -25x-5y = -60 \\ 3x+5y = 60 \end{cases} \text{ή} \begin{cases} -22x = 0 \\ 3x+5y = 60 \end{cases} \text{ή} \begin{cases} x = 0 \\ 3x+5y = 60 \end{cases} \text{ή} \begin{cases} x = 0 \\ 3\cdot 0+5y = 60 \end{cases} \text{ή}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 5y = 60 \end{cases} \text{ή} \begin{cases} x = 0 \\ y = 12 \end{cases}$$

Επομένως η μοναδική λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x,y) = (0,12)$.

### Άσκηση 2η

**α.** Έχουμε:

$$P(x) = x(x+3)^2 - (3x-1)\cdot(3x+1) - (19x-23) =$$

$$= x\cdot\left(x^2+6x+9\right) - \left((3x)^2 - 1^2\right) - 19x + 23 =$$

$$= x^3 + 6x^2 + 9x - \left(9x^2 - 1\right) - 19x + 23 =$$

$$= x^3 + 6x^2 + 9x - 9x^2 + 1 - 19x + 23 =$$

$$= x^3 - 3x^2 - 10x + 24$$

**β.** Αρχικά θα παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο $P(x)$. Έχουμε:

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = x^3 + x^2 - 4x^2 - 6x - 4x + 24 =$$

$$= x^3 + x^2 - 6x - 4x^2 - 4x + 24 = x(x^2 + x - 6) - 4(x^2 + x - 6) =$$

$$= (x^2 + x - 6)\cdot(x - 4) = (x + 3)(x - 2)(x - 4)$$

Αφού το τριώνυμο $x^2 + x - 6$ έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\cdot\alpha\cdot\gamma = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-6) = 1 + 24 = 25$ και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-1-5}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

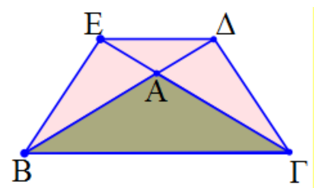
Άρα $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x - (-3)) = (x - 2)(x + 3)$

Επίσης, για τον παρονομαστή έχουμε:

$$2x^3 + 2x^2 - 12x = 2x(x^2 + x - 6) = 2x(x - 2)(x + 3)$$

Άρα $\dfrac{P(x)}{2x^3 + 2x^2 - 12x} = \dfrac{\cancel{(x+3)}\,\cancel{(x-2)}\,(x-4)}{2x\,\cancel{(x-2)}\,\cancel{(x+3)}} = \dfrac{x-4}{2x}$

## Άσκηση 3η




**α.** Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $AEB$ και $\Delta A\Gamma$ έχουμε:

- $AB = A\Gamma$ (αφού το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές)
- $AE = A\Delta$ (από την υπόθεση) και
- $EAB = \Delta A\Gamma$ (ως κατακορυφήν)

Επομένως από το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ τα τρίγωνα $AEB$ και $\Delta A\Gamma$ είναι ίσα, οπότε έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ίσες. Δηλαδή είναι $EB = \Delta\Gamma$.

**β.** Από την ισότητα των τριγώνων $AEB$ και $\Delta A\Gamma$ έχουμε $EBA = \Delta\Gamma A \ :(1)$ και $AB\Gamma = A\Gamma B \ :(2)$ ως παρά τη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις $(1)$ και $(2)$ έχουμε:

$EBA + AB\Gamma = \Delta\Gamma A + A\Gamma B$ ή $EB\Gamma = \Delta\Gamma B$.

**γ.** Από την ισότητα των τριγώνων $AEB$ και $\Delta A\Gamma$ έπεται ότι $BEA = \Gamma\Delta A \ :(3)$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές $AB$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Επιπλέον είναι και $AE\Delta = A\Delta E \ :(4)$ αφού το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές με $AE = A\Delta$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις $(3)$ και $(4)$ έχουμε:

$BEA + AE\Delta = \Gamma\Delta A + A\Delta E$ ή $BE\Delta = \Gamma\Delta E$.