ΛΥΣΕΙΣ ΚΕΦ. 1ο ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 1-94

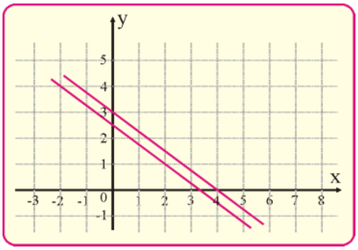
1. **α.** Το σύστημα

$$(\Sigma):\begin{cases}3x+4y=12\\9x+12y=30\end{cases} \quad \text{έχει} \quad D=\begin{vmatrix}3 & 4\\9 & 12\end{vmatrix}=36-36=0$$

άρα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Αλλά το παραπάνω σύστημα γράφεται: $\begin{cases}3x+4y=12\\3x+4y=10\end{cases}$,το οποίο προφανώς είναι αδύνατο.

β. Το παραπάνω σύστημα (Σ) είναι αδύνατο, επειδή οι ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του είναι παράλληλες (οι ευθείες έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{3}{4}$).



2. **α.** Πρέπει το σύστημα που θα προκύψει να είναι αδύνατο,
άρα επιλέγουμε την εξίσωση $8x+2y=13$.

Επομένως προκύπτει το σύστημα $(\Sigma):\begin{cases}8x+2y=7\\8x+2y=13\end{cases}$, το οποίο προφανώς είναι αδύνατο.

β. Το παραπάνω σύστημα (Σ) είναι αδύνατο, επειδή οι ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του είναι παράλληλες (οι ευθείες έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-4$).

3. Έστω x η ηλικία του Μάρκου και y η ηλικία του Βασίλη, οπότε από τα δεδομένα, προκύπτει ότι: $x+y=27$ (1) και $x>y$ (2).

α. Προφανώς οι x, y είναι θετικοί ρητοί αριθμοί, αλλά από τις σχέσεις (1) και (2) δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την ηλικία του καθενός, διότι η σχέση (1) αποτελεί μία γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους, ενώ η (2) δεν αποτελεί ικανό δεσμό σε συνδυασμό με την (1).

Για παράδειγμα, θα μπορούσε $(x,y)=(15,12)$ ή $(x,y)=(14,13)$,

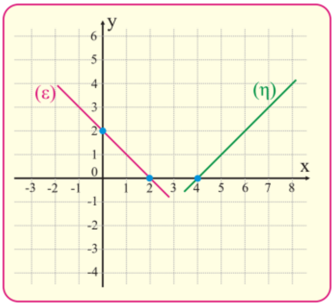
όπως και άλλοι συνδιασμοί.

β. Αν επιπλέον δοθεί η πληροφορία ότι η διαφορά των ηλικιών τους είναι 5 χρόνια, προκύπτει ότι $x-y=5$ (3) (επειδή $x>y$).

Επιλύοντας το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων (1) και (3) έχουμε: $x=16$ και $y=11$.

Επομένως ο Μάρκος είναι 16 ετών και ο Βασίλης 11 ετών.

4. **α.** Έστω $y=\lambda_1 x+\beta_1$ η εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $A(2,0)$ και $B(0,2)$ αντίστοιχα.



Άρα : $\begin{cases} 0=\lambda_1\cdot 2+\beta \\ 2=\lambda_1\cdot 0+\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1=-1 \\ \beta=2 \end{cases}$, οπότε η ευθεία (ε) έχει εξίσωση: $\varepsilon: y=-x+2$.

Η ευθεία (η) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\varepsilon\varphi 45^\circ=1$, άρα η εξίσωσή της είναι της μορφής $y=x+\beta_2$. Αλλά η ευθεία (η) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ(4,0),

άρα $0=4+\beta \Rightarrow \beta=-4$, οπότε η ευθεία (η) έχει εξίσωση $\eta: y=x-4$.

β. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (ε) και (η) προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος:

$$\begin{cases} y=x-4 \\ y=-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-4 \\ -x+2=x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (η) είναι το $\Gamma(3,-1)$.

5. **α.** Αρκεί η ευθεία (2) που θα επιλέξουμε να διέρχεται απο το σημείο $(2,-3)$ και να έχει διαφορετικό συντελεστή διεύθυνσης από την (1). Θα "επιλέξουμε" για τις παραμέτρους α,β,γ τις τιμές $\alpha=1,\ \beta=0,\ \gamma=2$, δηλαδή την ευθεία με εξίσωση $x=2$.

Η (1) προφανώς διέρχεται απο το σημείο $(2,-3)$, άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση.

β. Θα επιλέξουμε για τις παραμέτρους α,β,γ τις τιμές $\alpha=1,\ \beta=-2,\ \gamma=10$, δηλαδή την ευθεία με εξίσωση $x-2y=10$, η οποία είναι παράλληλη της (1), άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

6. α. Έστω x, y ο αριθμός των δίκυκλων και των τετράτροχων οχημάτων αντίστοιχα. Επειδή το σύνολο των δίκυκλων και τετράτροχων οχημάτων που έχουν παρκάρει είναι 830 είναι $x+y=830$ (1) .Αλλά επειδή τα δίκυκλα έχουν συνολικά 2x τροχούς, ενώ τα τετράτροχα 4y τροχούς. Είναι $2x+4y=2700$ ή $x+y=1350$ (2).

β. $\begin{cases} x+y=830 \\ x+2y=1350 \end{cases} \overset{(-)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y=830 \\ y=520 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=310 \\ y=520 \end{cases}$

Επομένως έχουν παρκάρει 310 δίκυκλα και 520 τετράτροχα οχήματα.

7. α. Για $\lambda=-3$ είναι

$$\begin{cases} -2x+2y=3 \\ 4x-4y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y=3 \\ -2x+2y=3 \end{cases},$$

άρα το σύστημα για $\lambda=-3$ έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y)=\left(\kappa,\kappa+\frac{3}{2}\right)$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

Για $x=\frac{1}{2}$, έχουμε $y=2$, άρα μια λύση είναι η $(x,y)=\left(\frac{1}{2},2\right)$.

β. Για $\lambda=3$ είναι $\begin{cases} 4x+2y=3 \\ 4x+2y=-6 \end{cases}$ άρα το σύστημα για $\lambda=3$ είναι αδύνατο.

γ. Για $\lambda=0$ είναι $\begin{cases} x+2y=3 \\ 4x-y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ 8x-2y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$.

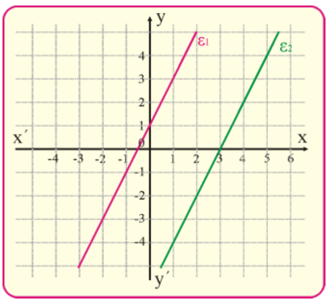
Άρα για $\lambda=0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x,y)=(-1,2)$.

8. α. Οι ευθείες

ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες, άρα το σύστημα $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ (\lambda-1)x-y=6 \end{cases}$

είναι αδύνατο, οπότε: $D=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ \lambda-1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -2+\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=3$ και αντικαθιστώντας $\lambda=3$ της εξισώσεις των ευθειών προκύπτουν οι ευθείες (ε_1): $2x-y=-1$ και (ε_2): $2x-y=6$ που είναι παράλληλες. Άρα η ζητούμενη τιμή είναι $\lambda=3$.

β.



γ. Για να ταυτίζονται οι δυο ευθείες θα πρέπει το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις, δηλαδή:

- $D=0 \Leftrightarrow \lambda=3$ αντικαθιστώντας $\lambda=3$ να προκύψει η ίδια ευθεία.

Αλλά για $\lambda=3$ η εξίσωση της ε_2 γίνεται (ε_2): $2x-y=6$ και από ερώτημα α) οι ευθείες (ε_1): $2x-y=-1$ και (ε_2): $2x-y=6$ είναι παράλληλες.

Άρα δεν υπάρχει τιμή του λ ώστε οι ευθείες να ταυτίζονται.

9. **α.** **i.** Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος :

$$\begin{cases}2x+y=5\\-2x+3y=-9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=5\\4y=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι το $(3,-1)$.

ii. Ομοίως $\begin{cases}2x+y=5\\3x+2y=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4x-2y=-10\\3x+2y=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$

Άρα το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_3 είναι το $(3,-1)$.

β. Παρατηρούμε ότι οι τρεις ευθείες έχουν κοινό σημείο το $A(3,-1)$,

άρα προφανώς το κοινό σημείο των $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ είναι σημείο της ε_1.

10. **α.** Έστω x οι σειρές του κάτω διαζώματος και y οι σειρές του πάνω διαζώματος, οπότε επειδή το σύνολο των σειρών είναι 25, έχουμε $x+y=25 \ (1)$.

Της επειδή κάθε σειρά του κάτω διαζώματος έχει 14 καθίσματα , κάθε σειρά του πάνω έχει 16 καθίσματα και το σύνολο των καθισμάτων είναι 374, έχουμε $14x+16y=374 \ (2)$.

Άρα το ζητούμενο σύστημα είναι $\begin{cases}x+y=25\\14x+16y=374\end{cases}$.

β. Επιλύουμε το σύστημα : $\begin{cases}x+y=25\\14x+16y=374\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=25-y\\14(25-y)+16y=374\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=13\\y=12\end{cases}$.

Άρα το κάτω διάζωμα έχει 13 σειρές και το πάνω 12 σειρές.

11. **α.** Οι συντεταγμένες του σημείου Μ θα προσδιορισθούν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των δύο ευθειών: $(\Sigma)\begin{cases}\varepsilon_1: 2x+y=6\\\varepsilon_2: x-2y=-3\end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & -2\end{vmatrix}=2\cdot(-2)-1=-4-1=-5 \qquad D_x=\begin{vmatrix}6 & 1\\-3 & -2\end{vmatrix}=-12-(-3)=-12+3=-9$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2 & 6\\1 & -3\end{vmatrix}=2\cdot(-3)-6=-6-6=-12.$$

Είναι $D=-5\neq 0$, άρα το (Σ) έχει μοναδική λύση, την:

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{-9}{-5},\frac{-12}{-5}\right)=\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)\text{ . Άρα } M\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right).$$

β. Η ευθεία $3x+\alpha y=\alpha+5$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$, αν και μόνο αν η εξίσωσή της επαληθεύεται από της συντεταγμένες του σημείου M, άρα

$$3\cdot\frac{9}{5}+\alpha\cdot\frac{12}{5}=\alpha+5\Leftrightarrow 27+12\alpha=5\alpha+25\Leftrightarrow 7\alpha=-2\Leftrightarrow \alpha=-\frac{2}{7}.$$

12. **α. Α΄ τρόπος**

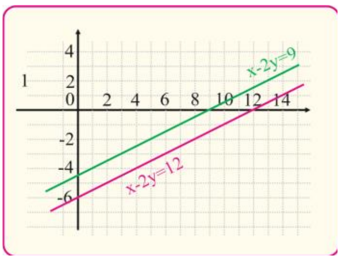
Αρκεί η ευθεία της μορφής $\alpha x+\beta y=\gamma$ που θα επιλέξουμε να διέρχεται από το σημείο $(1,-4)$ και να έχει διαφορετικό συντελεστή διεύθυνσης από την ευθεία με εξίσωση $x-2y=9$. Θα «επιλέξουμε» για της παραμέτρους α,β,γ της τιμές $\alpha=1,\ \beta=2,\ \gamma=-7$, δηλαδή την ευθεία με εξίσωση $x+2y=-7$. Η ευθεία με εξίσωση $x-2y=9$ προφανώς διέρχεται από το σημείο $(1,-4)$ άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση.

α. Β΄ τρόπος

Είναι $D=\beta+2\alpha$, οπότε για να έχει το σύστημα μοναδική λύση πρέπει $D\neq 0\Leftrightarrow \beta\neq -2\alpha$ (1). Αλλά το ζεύγος $(1,-4)$ είναι μοναδική λύση του συστήματος, οπότε επαληθεύει την δεύτερη εξίσωση (προφανώς επαληθεύει και την πρώτη εξίσωση), άρα $\alpha-4\beta=\gamma$ (2). Φροντίζοντας να ισχύει η σχέση (1), επιλέγουμε π.χ.

$\alpha=1,\ \beta=2$ και έτσι η (2) δίνει $\gamma=-7$.

β. Θα επιλέξουμε για τις παραμέτρους α,β,γ της τιμές $\alpha=1,\ \beta=-2,\ \gamma=10$, δηλαδή την ευθεία με εξίσωση $x-2y=12$, η οποία είναι παράλληλη της (1), άρα το σύστημα είναι αδύνατο.



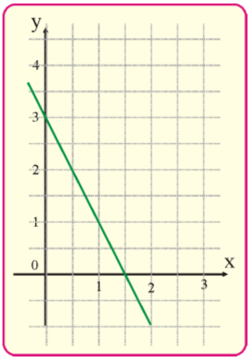
13. **α.** Είναι $D=2\beta-\alpha$, οπότε για να έχει το σύστημα μοναδική λύση πρέπει $D\neq 0\Leftrightarrow \alpha\neq 2\beta$ (1).

Αλλά το ζεύγος $(-1,5)$ είναι μοναδική λύση του συστήματος, οπότε επαληθεύει την δεύτερη εξίσωση (προφανώς επαληθεύει και την πρώτη εξίσωση), άρα $-\alpha+5\beta=\gamma$ (2)

Φροντίζοντας να ισχύει η σχέση (1), επιλέγουμε π.χ.

$\alpha=1,\ \beta=3$ και έτσι η (2) δίνει $\gamma=14$.

β. Για να έχει άπειρες λύσεις το σύστημα πρέπει $D=0 \Leftrightarrow \alpha=2\beta$. Επιλέγουμε $\alpha=2,\ \beta=1$, άρα το σύστημα γίνεται: $\begin{cases}2x+y=3\\ 2x+y=\gamma\end{cases}$, οπότε προφανώς πρέπει $\gamma=3$.



14. **α.** Είναι:

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ \lambda & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)$$

$$D_x=\begin{vmatrix}2 & 1\\ \lambda+1 & \lambda\end{vmatrix}=2\lambda-(\lambda+1)=2\lambda-\lambda-1=\lambda-1$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\lambda & 2\\ \lambda & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)-2\lambda=\lambda^2+\lambda-2\lambda=\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)$$

β. Αν $\lambda\neq0$ και $\lambda\neq1$ είναι $D\neq0$, άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση, την

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{\lambda-1}{\lambda(\lambda-1)},\frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda(\lambda-1)}\right)=\left(\frac{1}{\lambda},1\right)$$

15. **α.** Έστω $x,\ y,\ z\ \in(0,+\infty)$ οι ηλικίες πατέρα , μητέρας και παιδιού αντίστοιχα,

οπότε σύμφωνα με την υπόθεση είναι : $\begin{cases}y=3z\\ \dfrac{x}{z}=\dfrac{11}{3}\\ x+y+z=115\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3z\\ 3x=11z\\ x+y+z=115\end{cases}$

β. Έχουμε $\begin{cases}y=3z\\ \dfrac{x}{z}=\dfrac{11}{3}\\ x+y+z=115\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3z\\ 3x=11z\\ x+y+z=115\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3z\\ 3x=11z\\ 3x+3y+3z=345\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3z \\ 3x=11z \\ 11z+9z+3z=345 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3z \\ x=\dfrac{11}{3}z \\ 23z=345 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=45 \\ x=55 \\ z=15 \end{cases}$$

Επομένως ο πατέρας είναι 55, η μητέρα 45 και το παιδί 15 ετών.

16. α. Οι ορίζουσες $D,\ D_x,\ D_y$ του συστήματος είναι:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & \lambda+2 \\ \lambda-2 & 5 \end{vmatrix}=5-(\lambda^2-4)=9-\lambda^2=-(\lambda-3)(\lambda+3)$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 3 & \lambda+2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=15-3(\lambda+2)=9-3\lambda=-3(\lambda-3)$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \lambda-2 & 3 \end{vmatrix}=3-3(\lambda-2)=9-3\lambda=-3(\lambda-3)$$

i. Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(3+\lambda)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 3$ και $\lambda\neq -3$,

τότε οι ευθείες τέμνονται, έστω σε ένα σημείο A.

ii. Αν $\lambda=3$, το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} x+5y=3 \\ x+5y=3 \end{cases}$,

δηλαδή αν $\lambda=3$ οι ευθείες ταυτίζονται.

iii. Αν $\lambda=-3$, το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} x-y=3 \\ -5x+5y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+5y=-15 \\ -5x+5y=3 \end{cases}$,

δηλαδή αν $\lambda=-3$ οι ευθείες είναι παράλληλες.

β. Οι συντεταγμένες του σημείου A είναι:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{3}{\lambda+3},\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{3}{\lambda+3} \quad \text{δηλαδή } A\left(\frac{3}{\lambda+3},\frac{3}{\lambda+3}\right).$$

γ. Για να ανήκει το σημείο A στην ευθεία με εξίσωση $x+2y=3$ πρέπει και αρκεί οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Από το ερώτημα β) έχουμε: $\dfrac{3}{\lambda+3}+2\dfrac{3}{\lambda+3}=3 \Leftrightarrow 3+6=3\lambda+9 \Leftrightarrow \lambda=0$.

17. α. Οι ορίζουσες $D,\ D_x,\ D_y$ του συστήματος είναι:

$$D=\begin{vmatrix} \alpha-1 & 3 \\ 1 & \alpha+1 \end{vmatrix}=(\alpha-1)(\alpha+1)-3=\alpha^2-1-3=\alpha^2-4=(\alpha-2)(\alpha+2)$$

$$D_x=\begin{vmatrix} \alpha-1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3(\alpha-1)-3=3\alpha-6=3(\alpha-2)$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & \alpha+1 \end{vmatrix}=3(\alpha+1)-9=3\alpha-6=3(\alpha-2)$$

Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow (\alpha-2)(\alpha+2)\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 2$ και $\alpha\neq -2$, το σύστημα έχει μοναδική λύση την :

$$(x_0,y_0)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{3(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha+2)},\frac{3(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha+2)}\right)=\left(\frac{3}{(\alpha+2)},\frac{3}{(\alpha+2)}\right)$$

οπότε άμεσα προκύπτει ότι : $x_0=y_0$.

β. **i.** Αν $\alpha=2$, το σύστημα γίνεται :

$$\begin{cases}(2-1)x+3y=3\\ x+(2+1)y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3y=3\\ x+3y=3\end{cases}\Leftrightarrow x+3y=3\Leftrightarrow x=3-3y$$

και επομένως έχει άπειρες λύσεις , της μορφής : $(x,y)=(3-3k,k)$, $k\in R$.

ii. Αν $\alpha=-2$, το σύστημα γίνεται :

$$\begin{cases}(-2-1)x+3y=3\\ x+(-2+1)y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+3y=3\\ x-y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y=-1\\ x-y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0x+0y=2\\ x-y=3\end{cases},$$

το οποίο είναι αδύνατο.

γ. Για α=3 το σύστημα έχει μοναδική λύση και επομένως οι αντίστοιχες ευθείες έχουν μοναδικό κοινό σημείο , δηλαδή τέμνονται .

Για α=2 το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και επομένως οι αντίστοιχες ευθείες έχουν άπειρα κοινά σημεία , οπότε συμπίπτουν .

Για $\alpha=-2$ το σύστημα είναι αδύνατο και επομένως οι αντίστοιχες ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο ,οπότε είναι παράλληλες .

18. **α.** Οι ορίζουσες D, D_x, D_y του συστήματος είναι:

$$D=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=-\lambda-2\quad D_x=\begin{vmatrix}1 & 2\\ \lambda & \lambda\end{vmatrix}=\lambda-2\lambda=-\lambda\quad D_y=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=-\lambda-1$$

i. Αν $D\neq 0\Leftrightarrow -\lambda-2\neq 0\Leftrightarrow \lambda\neq -2$, το σύστημα έχει μοναδική λύση την :

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{-\lambda}{-\lambda-2},\frac{-\lambda-1}{-\lambda-2}\right)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+2},\frac{\lambda+1}{\lambda+2}\right)$$

ii. Αν $D=0\Leftrightarrow -\lambda-2=0\Leftrightarrow \lambda=-2$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases}-x+2y=1\\ x-2y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=-1\\ x-2y=-2\end{cases}$$, προφανώς αδύνατο.

β. Αν $\lambda=-1$, τότε η λύση του συστήματος είναι:

$$(x_o,y_o)=\left(\frac{-1}{-1+2},\frac{-1+1}{-1+2}\right)=(-1,0).$$

Αλλά $\pi\in[0,2\pi)$ και επειδή $\sigma\upsilon\nu\pi=-1=x_o$ και $\eta\mu\pi=0=y_o$,

η ζητούμενη γωνία είναι θ=π.

γ. Αν $\lambda=1$, τότε η λύση του συστήματος είναι: $(x_1,y_1)=\left(\frac{1}{1+2},\frac{1+1}{1+2}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

Έστω ότι υπάρχει γωνία ω τέτοια ώστε , $\sigma\upsilon\nu\omega=x_1=\frac{1}{3}$ και $\eta\mu\omega=y_1=\frac{2}{3}$, οπότε : $ημ^2ω+συν^2ω=1 \Leftrightarrow \frac{4}{9}+\frac{1}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{5}{9}=1$, που είναι άτοπο.

Επομένως δεν υπάρχει δεν υπάρχει γωνία $ω$, τέτοια ώστε $x_1=συνω$ και $y_1=ημω$.

19. α. Έχουμε

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ (x+y)^2-2xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ 1-2xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x=0 \text{ ή } y=0 \end{cases}$$

Οπότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με τα συστήματα

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x+y=-1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$$

Επομένως οι λύσεις είναι $(x,y)=(0,-1)$ ή $(x,y)=(-1,0)$.

β. Από την σχέση $συνω+ημω=-1$ και την ταυτότητα $συν^2ω+ημ^2ω=1$, έχουμε:

$$\begin{cases} συνω+ημω=-1 \\ συν^2ω+ημ^2ω=1 \end{cases} \overset{συνω=x,\, ημω=y}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \quad \text{με} \quad -1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1$$

Αλλά σύμφωνα με το α) ερώτημα είναι: $(x,y)=(0,-1)$ ή $(x,y)=(-1,0)$, που είναι δεκτές. Επομένως έχουμε :

- $συνω=0$ και $ημω=-1$ και επειδή $0\le ω\le 2π$, είναι $ω=\frac{3π}{2}$ ή
- $συνω=-1$ και $ημω=0$ και επειδή $0\le ω\le 2π$, είναι $ω=π$.

20. **α.** Είναι

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=2\cdot 6-1\cdot(-4)=12+4=16\neq 0,$$

επομένως το σύστημα έχει λύση, για κάθε $λ\in\mathbb{R}$.

β. Είναι $D_x=\begin{vmatrix} 1-λ & -4 \\ λ+2 & 6 \end{vmatrix}=6(1-λ)-(-4)(λ+2)=-2λ+14=2(-λ+7)$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 1-λ \\ 1 & λ+2 \end{vmatrix}=2(λ+2)-1(1-λ)-=2λ+4-1+λ=3λ+3=3(λ+1) \quad \text{οπότε}$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{2(-λ+7)}{16}=\frac{7-λ}{8} \quad \text{και} \quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{3(λ+1)}{16}.$$

γ. Οι ευθείες $2x-4y=1-λ$ και $x+6y=λ+2$ τέμνονται (από ερώτημα β) στο σημείο

$$A\left(\frac{7-λ}{8},\frac{3(λ+1)}{16}\right).$$

Επομένως η ευθεία $16x+16y=19$ διέρχεται από το A, αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της : $16\frac{7-λ}{8}+16\frac{3(λ+1)}{16}=19 \Leftrightarrow 2(7-λ)+3(λ+1)=19 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 14-2λ+3λ+3=19 \Leftrightarrow λ+17=19 \Leftrightarrow \boxed{λ=2}.$$

21. **α.** Οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται αν και μόνο αν το σύστημα των εξισώσεών τους $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda^2 \end{cases}$ (Σ) έχει μοναδική λύση.

Είναι: $D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot \lambda - 1 \cdot 1 = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$.

Οπότε για να έχει το σύστημα μοναδική λύση πρέπει:

$D \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda + 1 \neq 0$ και $\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -1$ και $\lambda \neq 1$

Δηλαδή, οι ευθείες τέμνονται όταν $\lambda \neq -1$ και $\lambda \neq 1$ και οι συντεταγμένες του κοινού τους σημείου θα είναι η λύση (x, y) του συστήματος, όπου

$x = \dfrac{D_x}{D}$ και $y = \dfrac{D_y}{D}$.

Είναι:

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - \lambda^2 = \lambda(1 - \lambda) \text{ και } D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

$$\text{άρα, } x = \frac{D_x}{D} = \frac{\lambda(1 - \lambda)}{(\lambda + 1)(\lambda - 1)} = \frac{-\lambda(\lambda - 1)}{(\lambda + 1)(\lambda - 1)} = -\frac{\lambda}{\lambda + 1}$$

$$\text{και } y = \frac{D_y}{D} = \frac{(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)} = \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\lambda + 1}$$

Τελικά $M\left(-\dfrac{\lambda}{\lambda + 1}, \dfrac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\lambda + 1}\right)$ το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2.

β. Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες αν και μόνο αν το σύστημα (Σ) είναι αδύνατο, δηλαδή

$$D = 0 \text{ και } \{D_x \neq 0 \text{ ή } D_y \neq 0\}$$

$D = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ ή $\lambda = 1$

$D_x \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(1 - \lambda) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$

$D_y \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$

αφού το τριώνυμο $\lambda^2 + \lambda + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -3 < 0$, άρα $\lambda^2 + \lambda + 1 \neq 0$ για κάθε $\lambda \in R$.

Συνεπώς για $\lambda = -1$ είναι $D = 0$ και $D_x = -2 = D_y \neq 0$ και $\varepsilon 1 // \varepsilon_2$.

γ. Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 συμπίπτουν, τότε το (Σ) έχει άπειρες λύσεις. Οπότε,

$$D = D_x = D_y = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Πράγματι, για $\lambda = 1$ το (Σ) γίνεται: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ που είναι αόριστο, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις, άρα $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$.

Έστω

$$\eta_1: \lambda x + \lambda^2 y = \lambda^3 \text{ και } \eta_2: 2x + 2\lambda y = \lambda^2 - 1$$

Για $\lambda = 1$ είναι $\begin{cases} \eta_2: 2x + 2y = 0 \\ \eta_1: \ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$,

που είναι προφανώς αδύνατο σύστημα αφού τα πρώτα μέλη των εξισώσεων είναι ίδια ενώ τα δεύτερα μέλη είναι άνισα, άρα $\eta_1 // \eta_2$.

22. Έχουμε

i. $\begin{cases} 2x + y = 3 & (\varepsilon_1) \\ x - 2y = -1 & (\varepsilon_2) \end{cases}$

Για να σχεδιάσουμε τις ευθείες ε_1 και ε_2 προσδιορίζουμε δύο σημεία τους.

(ε_1): για $x = 1$ έχουμε $y = 1$, για $x = -1$ έχουμε $y = 5$. Άρα η (ε_1) διέρχεται από τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(-1, 5)$

(ε_2): για $x = 3$ έχουμε $y = 2$, για $x = -5$ έχουμε $y = -2$. Άρα η (ε_2) διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(3, 2)$ και $\Delta(-1, -5)$

Τις σχεδιάζουμε στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων:

ΣΧΗΜΑ

Παρατηρούμε ότι οι ευθείες έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το $A(1, 1)$ οπότε το σύστημα έχει μια λύση την $(x, y) = (1, 1)$.

ii. $\begin{cases} 1{,}5x - 2y = 6 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$

Για να σχεδιάσουμε τις ευθείες ε_1 και ε_2 προσδιορίζουμε δύο σημεία τους.

(ε_1): για $x = 0$ έχουμε $y = -3$, για $x = 1$ έχουμε $y = \frac{9}{4}$. Άρα η (ε_1) διέρχεται από τα σημεία $A(0, -3)$ και $B(1, -\frac{9}{4})$

(ε_2): για $x = -1$ έχουμε $y = \frac{3}{2}$, για $x = 1$ έχουμε $y = -\frac{1}{2}$. Άρα η (ε_2) διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(-1, \frac{3}{2})$ και $\Delta(1, -\frac{1}{2})$

Τις σχεδιάζουμε:

ΣΧΗΜΑ

Παρατηρούμε ότι οι ευθείες έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με συντεταγμένες

$(x, y) = \left(2, -\frac{3}{2}\right)$ το οποίο αποτελεί και τη λύση του συστήματος.

23. **i.** Η εξίσωση ευθείας δίνεται από τον τύπο $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ (1), επαληθεύεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (2), ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$.

Έτσι για τα σημεία που φαίνονται στις εικόνες θα έχουμε:

i) (ε_1) $A(0, 0)$ και $B(-1, 2)$

(ε_2) $\Gamma(1, 0)$, $\Delta(0, -1)$, $E(-1, -2)$

Σύμφωνα με τους τύπους (1), (2) προκύπτουν:

$$\left.\begin{array}{l} y - 0 = \dfrac{-2-0}{-1-0}(x-0) \Rightarrow y = 3x \quad (\varepsilon_1) \\ \text{και} \\ y + 2 = \dfrac{-2+1}{-1-0}(x+1) \Rightarrow y = x - 1 \quad (\varepsilon_2) \end{array}\right\} (\Sigma): \left.\begin{array}{l} y = 2x \\ y = x - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x = x - 1 \\ x = -1 \end{array} \quad \text{και } y = 2(-1) \Rightarrow y = -2$$

Άρα η λύση των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι η $(x, y) = (-1, -2)$.

ii. Για το δεύτερο σχήμα

(ε_3) $A(0, 1)$, $B(1, 0)$

(ε_4) $\Gamma(0, 4)$, $\Delta(2, 0)$

Σύμφωνα με τους τύπους (1), (2) θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} y - 1 = \dfrac{0-1}{1-0}(x-0) \Rightarrow y = -x + 1 \quad (\varepsilon_3) \\ y - 4 = \dfrac{0-4}{2-0}(x-0) \Rightarrow y = -2x + 4 \quad (\varepsilon_4) \end{array}\right\} (\Sigma): \left.\begin{array}{l} y = -x + 1 \\ y = -2x + 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -x + 1 = -2x + 4 \Rightarrow \\ x = 3 \end{array} \quad \text{και άρα } y = -2$$

Άρα η λύση των $(\varepsilon_3), (\varepsilon_4)$ είναι η $(x, y) = (3, -2)$.

24. Έχουμε

i. $\begin{cases} 7x - 5(y+3) = 8(x-2) + 4y \\ 10(x+1) - 12(y-2) = 12(x+5) + 6y \end{cases}$

Κάνοντας τις πράξεις, το σύστημα απλοποιείται ως εξής:

$\begin{cases} x + 9y = 1 \\ 2x + 18y = -26 \end{cases}$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο αντίθετων συντελεστών γίνεται:

$$\begin{array}{r} -2 \cdot \\ 1 \cdot \end{array}\begin{cases} x + 9y = 1 \\ 2x + 18y = -26 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} -2x - 18y = -2 \\ 2x + 19y = -26 \end{array} \underset{\text{κατά μέλη}}{\overset{\text{προσθέτω}}{\Rightarrow}} 0x + 0y = -28$$

Επομένως το σύστημα είναι **αδύνατο.**

ii. $\begin{cases} 2(2x + 3y) = 3(2x - 3y) + 10 \\ 4x - 3y = 4(6y - 2x) + 3 \end{cases}$

Κάνοντας τις πράξεις θα έχουμε:

$$\begin{cases}4x+6y=6x-9y+10\\ 4x-3y=24y-8x+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-15y=-10\\ 12x-27y=3\end{cases}\overset{\text{χρησιμοποιώ τη}}{\underset{\text{μέθοδο αντίθετων συντελεστών}}{\Longrightarrow}}$$

$$\begin{matrix}1\cdot\\2\cdot\end{matrix}\begin{cases}2x-15y=-10\\ 4x-9y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}8x-60y=-40\\ -8x+18y=-2\end{matrix}\overset{\text{προσθέτω}}{\underset{\text{κατά μέλη}}{\Longrightarrow}}-42y=-42\Rightarrow y=1$$

και αντικαθιστώ σε μια από τις δύο εξισώσεις και βρίσκω $x=\frac{5}{2}$.

25. Έχουμε

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0\\ 2x+5y=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x+y}{xy}=0\\ x\neq 0,\ y\neq 0\\ 2x+5y=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=0\\ 2x+5y=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\ y=4\end{cases}$$

26. Έχουμε

$$\begin{cases}0{,}75x=0{,}25y+1\\ 2y=6x+8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}y=1\\ 6x-2y=-8\end{cases}\ \text{εφαρμόζουμε μέθοδο αντίθετων συντελεστών}$$

$$\begin{matrix}6\cdot\\-\frac{3}{4}\cdot\end{matrix}\begin{cases}\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}y=1\\ 6x-2y=-8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{18}{4}x-\frac{16}{4}y=6\\ -\frac{18}{4}x+\frac{6}{4}y=6\end{cases}\Rightarrow 0x+y=12$$

άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

27. Έχουμε

$$\begin{cases}\frac{2}{x}-\frac{5}{y}=4\\ \frac{7}{x}+\frac{15}{y}=1\end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις του συστήματος ορίζονται όταν $x\neq 0$ και $y\neq 0$. Το σύστημα που μας δίνεται δεν είναι γραμμικό.

Για να το μετατρέψουμε σε γραμμικό θέτουμε $\frac{1}{x}=\alpha$ και $\frac{1}{y}=\beta$ οπότε γίνεται:

$$\begin{cases}2\alpha-5\beta=4\\7\alpha+15\beta=1\end{cases}\xrightarrow[\text{συντελεστές}]{\text{αντίθετοι}}\begin{array}{r|l}+7\cdot & 2\alpha-5\beta=4\\-2\cdot & 7\alpha+15\beta=1\end{array}\Rightarrow\begin{cases}14\alpha-35\beta=28\\-14\alpha-30\beta=-2\end{cases}$$

$$\xRightarrow[\text{κατά μέλη}]{(+)}\ \beta=-\frac{26}{65}\ \text{ άρα }\ y=-\frac{65}{26}=-\frac{5}{2}$$

και με αντικατάσταση προκύπτει ότι $\alpha=1$ άρα **x= 1.**

Επομένως η λύση του αρχικού συστήματος είναι:

$$(x,y)=\left(1,\ -\frac{65}{26}\right)=\left(1,\ -\frac{5}{2}\right).$$

28. Έχουμε

i. $\begin{cases}(\sqrt{2}-1)x-y=\sqrt{2}-2\\-x+(\sqrt{2}+1)y=\sqrt{2}\end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix}(\sqrt{2}-1) & (-1)\\(-1) & (\sqrt{2}+1)\end{vmatrix}=0,$$

άρα αναμένεται το σύστημα να είναι είτε αδύνατο είτε να έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο αντίθετων συντελεστών

$$\begin{array}{r}+1\cdot\\(\sqrt{2}-1)\cdot\end{array}\left\{\begin{array}{l}(\sqrt{2}-1)x-y=\sqrt{2}-2\\-x+(\sqrt{2}+1)y=\sqrt{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}(\sqrt{2}-1)x-y=(\sqrt{2}-2)\\-(\sqrt{2}-1)x+((\sqrt{2})^2-1)y=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\end{cases}$$

$$\xRightarrow[\text{κατά μέλη}]{(+)}\begin{cases}0y+0x=0\ \text{ άρα το σύστημα είναι αόριστο}\\\text{δηλαδή έχει άπειρο πλήθος λύσεων}\end{cases}$$

ii. $\begin{cases}-2x+(\sqrt{5}+1)y=5\\(\sqrt{5}-1)x-2y=\sqrt{5}\end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix}-2 & (\sqrt{5}+1)\\(\sqrt{5}-1) & -2\end{vmatrix}=0,$$

άρα αναμένεται το σύστημα να είναι είτε αδύνατο είτε αόριστο.

Λύνοντας και πάλι με τη μέθοδο αντίθετων συντελεστών

$$\begin{array}{r}(\sqrt{5}-1)\cdot\\+2\cdot\end{array}\left\{\begin{array}{l}-2x+(\sqrt{5}+1)y=5\\(\sqrt{5}-1)x-2y=\sqrt{5}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}-2(\sqrt{5}-1)x+4y=5(\sqrt{5}-1)\\+2(\sqrt{5}-1)x-4y=2\sqrt{5}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\xRightarrow[\text{κατά μέλη}]{\text{προσθέτω}}\ 0x+0y=7\sqrt{5}-5,\ \text{ άρα το σύστημα είναι αδύνατο, δηλαδή δεν έχει λύσεις.}$$

29. Έχουμε

i. $\begin{cases}10x-y-1\\3x-2+4y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}10x-y=1\\3x+4y=2\end{cases}$

$D=\begin{vmatrix}10 & -1\\3 & 4\end{vmatrix}=43\neq 0$ άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την (x, y) με

$$x=\frac{Dx}{D} \text{ και } y=\frac{Dy}{y}.$$

ii. $\begin{cases}7x-2y=5\\4y-14x+10=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}7x-2y=5\\-14x+4y=-10\end{cases}$

$D=\begin{vmatrix}7 & -2\\-14 & 4\end{vmatrix}=28-28=0$ άρα το σύστημα είναι ή αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Επίσης $Dx=0$ και $Dy=0$ άρα θα έχει άπειρες λύσεις.

Όντως παρατηρούμε ότι διαιρώντας τη δεύτερη εξίσωση με -2, οι εξισώσεις συμπίπτουν άρα το σύστημα έχει μια μόνο εξίσωση της μορφής $7x-2y=5$ άρα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής $y=\frac{7x-5}{2}$ δηλαδή το ζεύγος $\left(\kappa, \frac{7\kappa-5}{2}\right)$ για $\kappa\in R$.

iii. $\begin{cases}x-y=2\\\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=4\end{cases}$. Παρατηρούμε ότι $D=\begin{vmatrix}1 & -1\\\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=0$ άρα είναι ή αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Όμως επειδή $Dx\neq 0$ και $Dy\neq 0$ άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

$$D_x=\begin{vmatrix}2 & -1\\4 & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-1+4=3\neq 0,\ D_y=\begin{vmatrix}1 & 2\\\frac{1}{2} & 4\end{vmatrix}=4-1=3\neq 0$$

30. Έχουμε

$$\begin{cases}-x+\lambda y=\lambda-1\\-2x+\lambda^2 y=\lambda\end{cases}.$$

Υπολογίζουμε τα D, D_x, D_y

$$D=\begin{vmatrix}-1 & \lambda\\-2 & \lambda^2\end{vmatrix}=-\lambda^2+2\lambda=-\lambda(\lambda-2)$$

$$D_x=\begin{vmatrix}\lambda-1 & \lambda\\\lambda & \lambda^2\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)-\lambda^2=\lambda^2(\lambda-2)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}-1 & \lambda-1\\-2 & \lambda\end{vmatrix}=-\lambda+2(\lambda-1)=(\lambda-2)$$

Για $D\neq 0$, για $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 2$ το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος (x, y) με

$$x = \frac{Dx}{D} \text{ και } y = \frac{Dy}{D}.$$

$$x = \frac{\lambda^2(\lambda-2)}{-\lambda(\lambda-2)} = -2 \text{ και } y = \frac{(\lambda-2)}{-\lambda(\lambda-2)} = -\frac{1}{\lambda} \text{ άρα } (x, y) = \left(-\lambda, -\frac{1}{\lambda}\right).$$

Για $\lambda = 0$ τότε $D = 0$, $D_x = 0$, $D_y \neq 0$ άρα το σύστημα είναι αδύνατο.
Για $\lambda = 2$ τότε $D = 0$, $D_x = 0$, $D_y = 0$ άρα το σύστημα είναι αόριστο.

Αντικαθιστώ $\lambda = 0$ στο (Σ) και γίνεται $\begin{cases} -x + 0y = -1 \\ -2x + 0y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 & \text{άρα αδύνατο} \\ x = 0 & \text{όπως αναφέραμε} \end{matrix}$.

Αντικαθιστώ $\lambda = 2$ στο (Σ) και γίνεται $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ -2x + 4y = 2 \end{cases} \underset{(:2)}{\Rightarrow} \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ -2x + 2y = 1 \end{cases}$ άπειρες λύσεις.

Θέτουμε $y = \kappa \in R$ άρα οι άπειρες λύσεις του συστήματος θα είναι:

$$(x, y) = (2\kappa - 1, \kappa).$$

31. Έχουμε

$$\begin{cases} (\lambda+2)x + \lambda y = 1 \\ 3x + (2-\lambda)y = 1 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} \lambda+2 & \lambda \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(2-\lambda) - 3\lambda = -(\lambda+2)(\lambda-2) - 3\lambda =$$

$$= -(\lambda^2+4) - 3\lambda = -\lambda^2 + 4 - 3\lambda = -(\lambda^2 + 3\lambda - 4) = -(\lambda-1)(\lambda+4)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 2 - \lambda - \lambda = 2 - 2\lambda = 2(1-\lambda)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda + 2 - 3 = \lambda - 1$$

- Αν $D \neq 0 \Rightarrow -(\lambda-1)(\lambda+4) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -4$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2(1-\lambda)}{-(\lambda-1)(\lambda+4)} = \frac{2(1-\lambda)}{(1-\lambda)(\lambda+4)} = \frac{2}{\lambda+4}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\lambda-1}{-(\lambda-1)(\lambda+4)} = -\frac{1}{\lambda+4}$$

- Αν $\lambda = 1$ τότε το σύστημα γίνεται:

$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 3x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - 3x$ που σημαίνει ότι έχουμε άπειρες λύσεις που είναι όλα τα ζεύγη της μορφής $(\kappa, 1 - 3\kappa)$, $\kappa \in R$.

- Αν $\lambda = -4$ τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} -2x-4y=1 \\ 3x+6y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=-\dfrac{1}{2} \\ x+2y=\dfrac{1}{3} \end{cases} \quad \text{που είναι αδύνατο.}$$

32. Έχουμε

$$\begin{cases} x+\lambda y=2 \\ \lambda x+4\lambda y=3\lambda+4 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 4\lambda \end{vmatrix}=4\lambda-\lambda^2=\lambda(4-\lambda)$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ 3\lambda+4 & 4\lambda \end{vmatrix}=8\lambda-\lambda(3\lambda+4)=8\lambda-3\lambda^2-4\lambda=-3\lambda^2+4\lambda=\lambda(-3\lambda+4)$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \lambda & 3\lambda+4 \end{vmatrix}=3\lambda+4-2\lambda=\lambda+4$$

- Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow \lambda(4-\lambda)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 4$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\lambda(-3\lambda+4))}{\lambda(4-\lambda)}=\frac{-3\lambda+4}{4-\lambda}, \quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{\lambda+4}{\lambda(4-\lambda)}$$

- Αν $\lambda=0$ τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x=0 \\ 0=4 \end{cases} \quad \text{που είναι αδύνατο.}$$

- Αν $\lambda=4$ τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x+4y=2 \\ 4x+16=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4y=2 \\ x+4y=4 \end{cases} \quad \text{που είναι αδύνατο.}$$

33. Έχουμε

$$\begin{cases} 2x+\lambda y=4 \\ \lambda x+2y=\lambda^2 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{vmatrix}=4-\lambda^2=(2-\lambda)(2+\lambda)$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 4 & \lambda \\ \lambda^2 & 2 \end{vmatrix}=8-\lambda^3=2^3-\lambda^3=(2-\lambda)(2^2+2\lambda+\lambda^2)=(2-\lambda)(4+2\lambda+\lambda^2)$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ \lambda & \lambda^2 \end{vmatrix}=2\lambda^2-4\lambda=2\lambda(\lambda-2)=2\lambda(2-\lambda)$$

- Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(2+\lambda)\neq 0 \Leftrightarrow 2-\lambda\neq 0,\ 2+\lambda\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 2,\ \lambda\neq -2$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{(2-\lambda)\,(4+2\lambda+\lambda^2)}{(2-\lambda)\,(2+\lambda)} = \frac{4+2\lambda+\lambda^2}{2+\lambda}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2\lambda(2-\lambda)}{(2-\lambda)\,(2+\lambda)} = \frac{-2\lambda}{2+\lambda}$$

- Αν $D = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ή $\lambda = -2$ τότε

για $\lambda = 2$ το σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{aligned} 2x+2y=4 \\ 2x+2y=4 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow 2x+2y=4 \Leftrightarrow 2x = 4-2y \Leftrightarrow x = 2y$$

δηλαδή έχει άπειρες λύσεις τα ζεύγη $(x, y) = (2-y, y)$, $y \in R$

για $\lambda = -2$ το σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{aligned} 2x-2y=4 \\ -2x+2y=4 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 2x-2y=4 \\ 2x-2y=-4 \end{aligned}\right\}$$ που είναι αδύνατο.

34. Έχουμε

$$\begin{cases} (\lambda+4)x+(2\lambda+1)y = 3\lambda-1 \\ (3\lambda+7)x+(5\lambda+1)y = 2\lambda+2 \end{cases}$$

Υπολογίζουμε D, D_x, D_y.

$$D = \begin{vmatrix} (\lambda+4) & (2\lambda+1) \\ (3\lambda+7) & (5\lambda+1) \end{vmatrix} = (\lambda+4)\,(5\lambda+1) - (2\lambda+1)\,(3\lambda+7) = -\lambda^2 + 4\lambda - 3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} (3\lambda-1) & (2\lambda+1) \\ (2\lambda+2) & (5\lambda+1) \end{vmatrix} = (3\lambda-1)\,(5\lambda+1) - (2\lambda+2)\,(2\lambda+1) = 11\lambda^2 - 8\lambda - 3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} (\lambda+4) & (3\lambda-1) \\ (3\lambda+7) & (2\lambda+2) \end{vmatrix} = (\lambda+4)\,(2\lambda+2) - (3\lambda+7)\,(3\lambda-1) = -7\lambda^2 - 8\lambda + 15$$

i. Για να έχει μια λύση θα πρέπει $D \neq 0$.

Βρίσκουμε τις τιμές του λ που μηδενίζουν το D και είναι

$$\text{για } \underbrace{D=0}_{\lambda=3 \text{ ή } \lambda=1} \Rightarrow -\lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0 \Rightarrow -(\lambda-3)\,(\lambda-1) = 0.$$

Άρα το σύστημα έχει μια λύση για $D \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 3$ και $\lambda \neq 1$ την

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{11\lambda^2 - 8\lambda - 3}{-\lambda^2 + 4\lambda - 3} \quad \text{και} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-7\lambda^2 - 8\lambda + 15}{-\lambda^2 + 4\lambda - 3}.$$

Όταν μας ζητούν να προσδιορίσουμε τα (x, y) τότε παραγοντοποιούμε τα τριώνυμα ώστενα βρούμε απλοποιημένες λύσεις.

ii. Για να έχει άπειρες λύσεις πρέπει $D = 0$ και $D_x = 0$, $D_y = 0$.

Για $\lambda = 1 \Rightarrow D_x = 0$, $D_y = 0$ άρα θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Το (Σ) γίνεται $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 10x + 6y = 4 \end{cases} \underset{(:2)}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 5x + 3y = 2 \\ 5x + 3y = 2 \end{vmatrix}$ άρα άπειρες λύσεις .

Έστω $y = \kappa \in R$ και τις προσδιορίζω αν ζητούνται, ως ζεύγος $\left(\frac{2-3\kappa}{5}, \kappa\right)$.

iii. Για να είναι αδύνατο θα πρέπει όταν $D = 0$ τότε $Dx \neq 0$ ή $Dy \neq 0$.

Πράγματι για $\lambda = 3$, $D_x \neq 0$ και $D_y \neq 0$ και το σύστημα γίνεται $\begin{cases} 7x + 7y = 8 \\ 16x + 16y = 8 \end{cases}$

που όντως είναι αδύνατο εφόσον τα 2 μέλη είναι ίσα, ενώ τα πρώτα μέλη δεν είναι.
Με αφαίρεση κατά μέλη γίνεται $-9x - 9y = 0 \Rightarrow x = -y$ και αντικαθιστώντας σε μια εκ των δύο επαληθεύουμε ότι είναι αδύνατο διότι προκύπτει $0y = 8$.

35. Έχουμε

$$\begin{cases} -x - 5y = 8 \\ 2x - 2\alpha - 4 + 10y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 5y = -8 \\ 2x + 10y = 2\alpha + 4 \end{cases}$$

Υπολογίζουμε τα D, D_x, D_y.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 0, \quad D_x = \begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 2\alpha + 4 & 10 \end{vmatrix} = -100 - 10\alpha$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 2\alpha + 4 \end{vmatrix} = 2\alpha + 20$$

i. Το (Σ) έχει άπειρο πλήθος λύσεων όταν $D = 0$ και $D_x = 0$, $D_y = 0$ άρα $\boldsymbol{\alpha = -10}$.

ii. Το (Σ) είναι αδύνατο όταν $D = 0$ και $Dx \neq 0$ ή $Dy \neq 0$ άρα όταν $\boldsymbol{\alpha \neq -10}$.

36. Έχουμε

$$\begin{cases} \lambda x + y = 2 \\ 3x + (\lambda + 2)y = -1 \end{cases}$$

Για να είναι αδύνατο το (Σ) πρέπει $D = 0$ και $Dx \neq 0$ ή $Dy \neq 0$.

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 3 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2 - 3. \text{ Για } D = 0 \text{ τότε } \lambda = -3 \text{ ή } \lambda = +1.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & (\lambda + 2) \end{vmatrix} = 2\lambda + 5 \text{ και } D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda - 6$$

Παρατηρούμε ότι και για $\boldsymbol{\lambda = -3}$ και για $\boldsymbol{\lambda = +1}$, $D_x \neq 0$ και $D_y \neq 0$.

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο για $\lambda = -3$ και $\lambda = +1$.

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 3 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2 - 3. \text{ Για } D = 0 \text{ τότε } \lambda = -3 \text{ ή } \lambda = +1.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & (\lambda+2) \end{vmatrix} = 2\lambda + 5 \text{ και } D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda - 6$$

Πράγματι για $\lambda = -3 \Rightarrow \begin{cases} -3x + y = 2 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = -2 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \overset{\text{αδύνατο}}{=}$

και για $\lambda = +1 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = -1 \end{cases} \underset{(:3)}{\Rightarrow} \begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \overset{\text{αδύνατο}}{=}$

37. Έχουμε

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + (\lambda^2 - 8)y = 6 - \lambda \end{cases}$$

Για να έχει άπειρες λύσεις πρέπει $D = 0$ και $D_x = 0$, $D_y = 0$.

Υπολογίζουμε το $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda^2 - 8 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = (\lambda - 3)\cdot(\lambda + 3).$

Αν $D = 0$ τότε $\lambda = 3$ ή $\lambda = -3$.

Για $\lambda = 3$ το (Σ) γράφεται: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow$ έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Θέτουμε $y = \kappa \in R$ άρα το άπειρο πλήθος λύσεων θα είναι της μορφής $(3 - \kappa, \kappa)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{και } D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6-\lambda & \lambda^2 - 8 \end{vmatrix} = 3\lambda^2 + 9 - 30 \text{ όπου για } \lambda = 3 \Rightarrow D_x = 0 \\ \text{και } D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 3 - \lambda \text{ όπου για } \lambda = 3 \Rightarrow D_y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{πράγματι} \\ \text{άπειρες λύσεις} \\ \text{για } \lambda = 3 \end{array} \text{ ενώ}$$

για $\lambda = -3$ το σύστημα είναι αδύνατο, γιατί $D = 0$ και $D_y \neq 0$ και $D_x \neq 0$.

38. Για να είναι τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) συγχρόνως αδύνατα πρέπει κατ' αρχήν:

$$D = \begin{vmatrix} 2\lambda - 1 & 10\mu \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ και } D' = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -(\mu+1) \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

(D ορίζουσα συντελεστών 1ου συστ., D' ορίζουσα συντελεστών 2ου συστ.).

Δηλαδή: $\begin{cases} 4(2\lambda - 1) - 20\mu = 0 \\ -6(\lambda - 2) + 3(\mu + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - 5\mu - 1 = 0 \\ -2\lambda + \mu + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - 5\mu = 1 \\ -2\lambda + \mu = -5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\mu = 1$ και $\lambda = 3)$. Για $\mu = 1$ και $\lambda = 3$, είναι όμως:

$$(\Sigma_1): D_x = \begin{vmatrix} 3 & 10\mu \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 50 = -38 \neq 0$$

$$(\Sigma_2): D_x = \begin{vmatrix} 7 & -(\mu+1) \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -32 \neq 0$$

39. Έχουμε

i. $\begin{cases} \alpha x - y = \beta \\ x + \alpha y = \gamma \end{cases}$ όπου $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

Υπολογίζουμε το D.

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 1, \quad \text{εφόσον } D = \alpha^2 + 1 \neq 0$$

άρα το σύστημα έχει μια και μοναδική λύση το ζεύγος $(x, y) = \left(\dfrac{D_x}{D}, \dfrac{D_y}{D}\right)$.

ii. $\begin{cases} \alpha x + 2\alpha y = 1 \\ x + 2y = -\alpha \end{cases}$, όπου $\alpha \in R$.

Υπολογίζουμε το D.

$D = \begin{vmatrix} \alpha & 2\alpha \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\alpha - 2\alpha = 0$, άρα αναμένεται να είναι είτε αδύνατο είτε αόριστο.

$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2\alpha \\ -\alpha & 2 \end{vmatrix} = 2\alpha^2 + 2 \neq 0$ και $D_y = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix} = -(\alpha^2 + 1) \neq 0$

άρα το σύστημα δεν έχει καμία λύση, είναι αδύνατο.

40. Υπολογίζουμε το

$$D = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & \lambda \\ 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) - 2\lambda = \boldsymbol{\lambda^2 - 6\lambda + 3.}$$

$$\Delta = 36 - 4 \cdot 3 = 24, \quad \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{24}}{2} = 3 \pm \sqrt{6}$$

Άρα αν $D \neq 0$ τότε πρέπει $\lambda \neq 3 + \sqrt{6}$ και $\lambda \neq 3 - \sqrt{6}$ και τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση της μορφής $(x, y) = \left(\dfrac{D_x}{D}, \dfrac{D_y}{D}\right)$.

$$D_x = \begin{vmatrix} 5\lambda + 7 & \lambda \\ 3\lambda + 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (5\lambda + 7)(\lambda - 3) - \lambda(3\lambda + 1) = 5\lambda^2 - 15\lambda + 7\lambda - 21 - 3\lambda^2 - \lambda$$

$= 2\lambda^2 - 9\lambda - 21$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 5\lambda + 7 \\ 2 & 3\lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(3\lambda + 1) - 2(5\lambda + 7) = 3\lambda^2 + \lambda - 3\lambda - 1 - 10\lambda - 14 =$$

$= 3\lambda^2 - 12\lambda - 15 = 3(\lambda^2 - 4\lambda - 5)$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2\lambda^2 - 9\lambda - 21}{\lambda^2 - 6\lambda + 3},\ \ y = \frac{D_y}{D} = \frac{3(\lambda^2 - 4\lambda - 5)}{\lambda^2 - 6\lambda + 3}$$

Εφόσον $x - y = 2$ άρα αντικαθιστώντας x και y προκύπτει:

$$\frac{2\lambda^2 - 9\lambda - 21 - 3(\lambda^2 - 4\lambda - 5)}{\lambda^2 - 6\lambda + 3} = 2 \Rightarrow \quad \begin{matrix} \text{πρέπει } \lambda^2 - 6\lambda + 3 \neq 0 \\ \text{δηλαδή } \lambda \neq 3 \pm \sqrt{6} \end{matrix}.$$

Επομένως $2\lambda^2 - 9\lambda - 21 - 3\lambda^2 + 12\lambda + 15 = 2\lambda^2 - 12\lambda = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 15\lambda - 3\lambda^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3\lambda^2 - 15\lambda + 12 = 0 \Rightarrow 3(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

$$\Delta = 9 > 0. \quad \lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{matrix} \dfrac{5+3}{2} = 2 \ \text{ ή} \\ \dfrac{5-3}{2} = 1 \end{matrix}$$

Επομένως πρέπει το $\lambda = 4$ ή $\lambda = 1$ ώστε το (x, y) να είναι λύση του συστήματος και να πληρείται η εξίσωση $x - y = 2$.

(Μπορούμε να επαληθεύσουμε ως εξής):

Για $\lambda = 1$ το (Σ) γίνεται $\begin{cases} 0x + y = 12 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 12 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 12 \\ x = 14 \end{cases}$

και ικανοποιούν τη συνθήκη $x - y = 2$.

Για $\lambda = 4$ το (Σ) γίνεται $\begin{cases} 3x + 4y = 27 \\ 2x + y = 13 \end{cases}$ λύνοντάς το προκύπτει $y = 3$ και $x = 5$ οι οποίες πάλι ικανοποιούν τη συνθήκη $x - y = 2$.

41. Έχουμε

$$\begin{cases} \kappa x - (\lambda - \kappa)y = \kappa + \lambda \\ \dfrac{\kappa + \lambda}{2}\, x - 2(\lambda - \kappa)y = 3\lambda - 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \kappa \cdot 6 - (\lambda - \kappa)1 = \kappa + \lambda \\ \dfrac{\kappa + \lambda}{2}\, 6 - 2(\lambda - \kappa)1 = 3\lambda - 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 6\kappa - \lambda + \kappa = \kappa + \lambda \\ 3(\kappa + \lambda) - 2\lambda + 2\kappa = 3\lambda - 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} 6\kappa - 2\lambda = 0 \\ 3\kappa + 3\lambda - 2\lambda + 2\kappa - 3\lambda = -1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 6\kappa - 2\lambda = 0 \\ 5\kappa - 2\lambda = 1 \end{matrix}\right|_{-1} \Bigg\} \Leftrightarrow \begin{matrix} 6\kappa - 2\lambda = 0 \\ -5\kappa + 2\lambda = 1 \\ \hline \kappa = 1 \end{matrix}$$

και $6 \cdot 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow -2\lambda = -6 \Leftrightarrow \lambda = 3$

αντικαθιστούμε τις τιμές των κ, λ που βρήκα στο αρχικό σύστημα οπότε:

$$\begin{cases} 1x - (3 - 1)y = 1 + 3 \\ \dfrac{1+3}{2}\, x - 2(3 - 1)y = 3 \cdot 3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 4 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x - 2y = 4 \Leftrightarrow x = 4 + 2y,$

δηλαδή το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις τα ζεύγη της μορφής: $(x, y)=(4+2y, y) \in R$.

42. Για να έχει μοναδική λύση πρέπει το $D \neq 0$.

Εφόσον η λύση είναι $(x, y) = (1, 1)$ αντικαθιστώ στο σύστημα και θα γίνει

$$\left.\begin{cases} \kappa^2 + 2\kappa = 0 \\ -2\lambda = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \kappa(\kappa + 2) = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa = 0 \text{ ή } \kappa = -2 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

οι τιμές αυτές όντως δεν μηδενίζουν το D το οποίο είναι

$$D = \begin{vmatrix} (\kappa+1)^2 & -(\kappa+1) \\ (\lambda-1) & (5-2\lambda) \end{vmatrix} = (\kappa+1)^2\ (5-2\lambda) + (\lambda-1)\ (\kappa+1).$$

Δηλαδή $D \neq 0$ για $\kappa = 0$ και $\lambda = 0$ και $D \neq 0$ για $\kappa = -2$ και $\lambda = 0$ οπότε οι τιμές είναι αποδεκτέςκαι δίνουν τη μοναδική λύση $(x, y) = (1, 1)$.

43. Έχουμε

$$\begin{cases} (\lambda+1)x + 8y = 4\lambda \\ \lambda x + (\lambda+3)y = 3\lambda - 1 \end{cases}$$

i. Για να έχει το σύστημα μοναδική λύση πρέπει $D \neq 0$ και τότε

$x = \dfrac{D_x}{D}$ και $y = \dfrac{D_y}{D}$.

$$D = \begin{vmatrix} (\lambda+1) & 8 \\ \lambda & (\lambda+3) \end{vmatrix} = (\lambda+1)\ (\lambda+3) - 8\lambda = \lambda^2 + 3\lambda + \lambda + 3 - 8\lambda = \boxed{\lambda^2 - 4\lambda + 3}$$

Πρέπει $\lambda^2 - 4\lambda + 3 \neq 0$, οι λύσεις του τριωνύμου είναι $\lambda = 3$, $\lambda = 1$.

Επομένως πρέπει $\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq 1$ για να έχει το σύστημαμοναδική λύση.

ii. Πρέπει $D \neq 0$ και η λύση (x_0, y_0) να ικανοποιεί την $x_0 + y_0 = 1$.

$$D_x = \begin{vmatrix} 4\lambda & 8 \\ (3\lambda-1) & (\lambda+3) \end{vmatrix} = 4\lambda(\lambda+3) - 8(3\lambda-1) = \boxed{4\lambda^2 - 12\lambda + 8}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} (\lambda+1) & 4\lambda \\ \lambda & 3\lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\ (3\lambda-1) - 4\lambda^2 = 3\lambda^2 - \lambda + 3\lambda - 1 - 4\lambda^2 =$$

$$= \boxed{-\lambda^2 + 2\lambda - 1}\ .$$

$$x_0 = \frac{D_x}{D} = \frac{4\lambda^2 - 12\lambda + 8}{\lambda^2 - 4\lambda + 3}\ ,\ y_0 = \frac{D_y}{D} = \frac{-\lambda^2 + 2\lambda - 1}{\lambda^2 - 4\lambda + 3}\ .$$

Η σχέση $x_0 + y_0 = 1$ γίνεται

$$\frac{4\lambda^2 - 12\lambda + 8 - \lambda^2 + 2\lambda - 1}{\lambda^2 - 4\lambda + 3} = 1 \underset{\lambda^2-4\lambda+3 \neq 0}{\Rightarrow} 4\lambda^2 - 12\lambda + 8\ \ \lambda^2 + 2\lambda - 1 =$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 \Rightarrow 2\lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0$$

$$\Delta = 36 - 32 = 4 > 0,\quad \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{4} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right. \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1$$

όπου $\lambda = 1$ απορρίπτεται γιατί πρέπει $D \neq 0$ άρα $\lambda \neq 1$.
Επομένως η μόνη αποδεκτή τιμή είναι η $\boldsymbol{\lambda = 2}$.

iii. Για να μην έχει καμία λύση πρέπει $D = 0$ και $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$.
Για $\lambda = 3 \Rightarrow D_x \neq 0$ και $D_y \neq 0$ άρα αδύνατο, επομένως δεν έχει καμία λύση.

Όντως για $\lambda = 3$ το (Σ) γίνεται $\begin{cases} 4x + 8y = 12 \\ 3x + 6y = 8 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} 3\ \cdot & x + 2y = 3 \\ 1\ \cdot & 3x + 6y = 8 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 6y = 9 \\ -3x - 6y = -8 \end{cases} \Rightarrow \{0x + 0y = 1,$$ άρα δεν έχει καμία λύση.

iv. Για να έχει άπειρες λύσεις πρέπει $D = 0$ και $D_x = 0$, $D_y = 0$.
Για $\lambda = 1 \Rightarrow D_x = 0$, $D_y = 0$ άρα θα είναι αόριστο.

Όντως για $\lambda = 1$ το (Σ) γίνεται $\left.\begin{cases} 2x + 8y = 4 \\ x + 4y = 2 \end{cases}\right\} \overset{(:2)}{\Rightarrow} \begin{cases} x + 4y = 2 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$.

Θέτω $y = \kappa \in R$ και επομένως η μορφή των άπειρων λύσεων θα είναι το ζεύγος

$$(2 - 4\kappa, \kappa).$$

44. Έχουμε

$$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ \lambda x + 3y = 5 \end{cases}$$

Για να έχει λύση το σύστημα θα πρέπει το $D \neq 0$.

$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \lambda & 3 \end{vmatrix} = 2\lambda + 3$, $D \neq 0$ όταν $\lambda \neq -\dfrac{3}{2}$ και τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την

(x, y) όπου $x = \dfrac{D_x}{D}$ και $y = \dfrac{D_y}{D}$.

$$\left.\begin{aligned} D_x &= \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 10 = -2 \\ D_y &= \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ \lambda & 5 \end{vmatrix} = 5 + 4\lambda \end{aligned}\right\} \text{ οπότε } \begin{aligned} x &= -\frac{2}{2\lambda + 3} \\ y &= \frac{5 + 4\lambda}{2\lambda + 3} \end{aligned}$$

Εφόσον θέλουμε να ικανοποιείται η εξίσωση $x + 5y = 17$ άρα αντικαθιστώντας τα x, y θα έχουμε: $\dfrac{-2}{2\lambda + 3} + 5\dfrac{(5 + 4\lambda)}{(2\lambda + 3)} = 17 \Rightarrow \lambda \neq -\dfrac{3}{2}$

οπότε πολλαπλασιάζοντας με $(2\lambda + 3)$ όλα τα μέλη της εξίσωσης γίνεται:

$$-2 + 25 + 20\lambda = 34\lambda + 51 \Rightarrow 14\lambda + 28 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$$

η οποία όντως δεν μηδενίζει το D και είναι αποδεκτή τιμή ώστε το (Σ) να έχει λύση η οποία επαληθεύει την εξίσωση $x + 5y = 17$.

45. Έχουμε

$$\begin{cases}(3\lambda - 1)x + (\mu + 1)y = 5\mu + \lambda \\ (\lambda x) + (2\mu - 3)y = 2\mu - \dfrac{7}{2}\lambda\end{cases}$$

Για να τέμνονται οι δύο ευθείες στο σημείο $A\left(-\dfrac{1}{2}, 3\right)$ θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν τις εξισώσεις των ευθειών, να είναι δηλαδή η λύση του συστήματος.
Πρέπει επίσης το $D \neq 0$ για αυτές τις τιμές των λ, μ

$$D = \begin{vmatrix}3\lambda - 1 & \mu + 1 \\ \lambda & 2\mu - 3\end{vmatrix} = (3\lambda - 1)(2\mu - 3) - \lambda(\mu + 1) = 5\lambda\mu - 10\lambda - 2\mu + 3.$$

Βάζω στο σύστημα όπου x, y τις συντεταγμένες του σημείου τομής και γίνεται:

$$\left.\begin{cases}(3\lambda - 1)\left(-\dfrac{1}{2}\right) + (\mu + 1)3 = 5\mu + \lambda \\ \lambda\left(-\dfrac{1}{2}\right) + (2\mu - 3)3 = 2\mu - \dfrac{7}{2}\lambda\end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases}-\dfrac{3}{2}\lambda + \dfrac{1}{2} + 3\mu + 3 = 5\mu + \lambda \\ -\dfrac{1}{2}\lambda + 6\mu - 9 = 2\mu - \dfrac{7}{2}\lambda\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{5}{2}\lambda + 2\mu = \dfrac{7}{2} \\ -3\lambda - 4\mu = -9\end{cases} \xrightarrow[\text{συντελεστές}]{\text{αντίθετοι}} \begin{matrix}+3 \cdot \\ +\dfrac{5}{2} \cdot\end{matrix}\begin{cases}\dfrac{5}{2}\lambda + 2\mu = \dfrac{7}{2} \\ -3\lambda - 4\mu = -9\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{15}{2}\lambda + 6\mu = \dfrac{21}{2} \\ -\dfrac{15}{2}\lambda - \dfrac{20}{2}\mu = -\dfrac{45}{2}\end{cases} \xrightarrow[\text{κατά μέλη}]{(+)} \begin{cases}-4\mu = -12 \Rightarrow \boxed{\mu = 3} \\ \text{και} \\ -3\lambda - 12 = -9 \Rightarrow \boxed{\lambda = -1}\end{cases}.$$

Πράγματι για $\mu = 3$ και $\lambda = -1$ το $D \neq 0$ επομένως για αυτές τις τιμές το (Σ) των εξισώσεων έχει λύση, άρα οι ευθείες τέμνονται στο $A\left(-\dfrac{1}{2}, 3\right)$.

46. Έχουμε

$$\begin{cases}x + y = \lambda \\ x + 2y = \lambda + 1\end{cases}$$

Για να έχει μοναδική λύση θα πρέπει $D \neq 0$.

$D = \begin{vmatrix}1 & 1 \\ 1 & 2\end{vmatrix} = 1 \neq 0$, άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right).$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda+1 & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda - \lambda - 1 = \lambda - 1, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda + 1 - \lambda = 1$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \lambda - 1 \text{ και } y = \frac{D_y}{D} = 1$$

Στην παράσταση $A = x_0^2 + y_0^2$ αντικαθιστώ τα x, y και γίνεται:

$A = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1 = \boldsymbol{\lambda^2 - 2\lambda + 2}$.

Τώρα πρέπει να μελετήσουμε τη μονοτονία της και να βρούμε πότε γίνεται ελάχιστη, δηλαδή για ποια τιμή λ.

Για την $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ το $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ και το $\alpha = 1 > 0$.

Επομένως είναι φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ και αύξουσα στο διάστημα $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$. Στο σημείο $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ η f(x) παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με

$$f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}.$$

Άρα στην $\lambda^2 - 2\lambda + 2$: $f\left(-\frac{(-2)}{2}\right) = -\frac{-4}{4\cdot 1} \Rightarrow f(1) = 1$, άρα για $\lambda = 1$ παρουσιάζει ελάχιστο το οποίο ισούται με 1.

47. Έχουμε

$$\begin{cases} 2D_x - 3D_y = 9D \\ D_x + 2D_y = D \end{cases}$$

Αφού το σύστημα έχει μοναδική λύση, ισχύει ότι $D \neq 0$ λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2D_x - 3D_y = 9D \\ D_x + 2D_y = D \end{cases} \quad \text{διαιρώ κατά μέλη με } D \neq 0$$

$$\begin{cases} \frac{2D_x}{D} - \frac{3D_y}{D} = \frac{9D}{D} \\ \frac{D_x}{D} + \frac{2D_y}{D} = \frac{D}{D} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \quad \text{όπου } \frac{D_x}{D} = x, \ \frac{D_y}{D} = y \quad \text{εφόσον } D \neq 0$$

$$\begin{matrix} -1\cdot \\ 2\cdot \end{matrix}\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 3y = -9 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} \begin{cases} 7y = -7 \Rightarrow \boxed{y = -1} \\ \text{και } \boxed{x = 3} \end{cases}.$$

Επομένως $(x, y) = (3, -1)$ η μοναδική λύση του συστήματος.

48. Έχουμε

Αν $D = 0$ τότε η σχέση γίνεται $18D_x^2 + 8D_y^2 + 12D_x D_y = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 9D_x^2 + 4D_y^2 + 6D_x D_y = 0 \Leftrightarrow 9D_x^2 + 6D_x D_y + D_y^2 + 3D_y^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3D_x + D_y)^2 + 3D_y^2 = 0 \Leftrightarrow 3D_x + D_y = 0 \overset{\text{και}}{=} D_y = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow D_x = 0$ και $D_y = 0$ ΑΤΟΠΟ

Άρα $D \neq 0$ και επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Επομένως η σχέση μας γίνεται:

$$18\frac{D_x^2}{D^2} + \frac{8D_y^2}{D^2} + 2 + 12\frac{D_x}{D}\cdot\frac{D_y}{D} + 4\frac{D_y}{D} - 6\frac{D_x}{D} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18x^2 + 8y^2 + 2 + 12xy + 4y - 6x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 + 9x^2 + 4y^2 + 12xy = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)^2 + (2y+1)^2 + (3x+2y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{1}{3}.$$

49. Έχουμε

i. $2x + y - z = 2$ (1)

$4x - y - 3z = -2$ (2)

$2x + 2y - z = 9$ (3)

Από την (3) έχουμε $\boxed{z = 2x + 2y - 9}$ (4)

Αντικαθιστώ στις (1) και (2)

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - 2x - 2y + 9 &= 2 \\ 4x - y - 3(2x + 2y - 9) &= -2 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} -y &= -7 \\ 4x - y - 6x - 6y + 27 &= -2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} y &= 7 \\ -2x - 7y &= -29 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} y &= 7 \\ -2x - 49 &= -29 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} y &= 7 \\ -2x &= 20 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} y &= 7 \\ x &= -10 \end{aligned}$$

και από την (4): $z = 2(-10) + 2\cdot 7 - 9 \Leftrightarrow z = -20 + 14 - 9 \Leftrightarrow z = -15$.

ii. $x - y + z = 1$ (1)

$2x - 3y + z = 0$ (2)

$3x + y + z = 5$ (3)

Η (1) γίνεται $z = 1 - x + y$ (4).

Αντικαθιστώ στις (2) και (3)

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + 1 - x + y &= 0 \\ 3x + y + 1 - x + y &= 5 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x - 2y &= -1 \quad (5) \\ 2x + 2y &= 4 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 3x &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Άρα από (5): $1 - 2y = -1 \Leftrightarrow -2y = -2 \Leftrightarrow y = 1$

και από (4): $z = 1 - 1 + 1 \Leftrightarrow z = 1$

50. Έχουμε

i. $\left.\begin{aligned} x+y-2z&=3 \\ 3x+2y-z&=12 \end{aligned}\right|^{(-3)} \Leftrightarrow \begin{array}{r} -3x-3y+6z=-9 \\ +\quad 3x+2y-z=12 \\ \hline -y+5z=3 \end{array}$

$\left.\begin{aligned} x+y-2z&=3 \\ 8x-4y+5z&=21 \end{aligned}\right|^{(-8)} \Leftrightarrow \begin{array}{r} -8x-8y+16z=-24 \\ +\quad 8x-4y+5z=21 \\ \hline -12y+21z=-3 \end{array} \Leftrightarrow 4y-7z=1$

Το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{cases} x+y-2z=3 \\ -y+5z=3 \\ 4y-7z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} -y+5z&=3 \\ 4y-7z&=1 \end{aligned}\right|^{(-4)}_{-1} \Leftrightarrow \begin{array}{r} 4y-20z=-12 \\ (+)\quad -4y+7z=-1 \\ \hline -13z=-13 \end{array} \Leftrightarrow z=1$$

Επομένως το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{cases} x+y-2z=3 \\ -y+5z=3 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2\cdot 1=3 \\ -y+5\cdot 1=3 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=5 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$. Επομένως λύση του συστήματος είναι η $(3,\ 2,\ 1)$.

ii. $9x+2y-7z=2 \quad (1)$

$x-4y-z=-2 \quad (2)$

$9x-17y-8z=10 \quad (3)$

Από τη (2) έχουμε $x=-2+4y+z$.

Αντικαθιστώντας στις (1) και (3) έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} 9(-2y+4y+z)+2y-7z&=2 \\ 9(-2+4y+z)-17y-8z&=10 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} -18+36y+9z+2y-7z&=2 \\ -18+36y+9z-17y-8z&=10 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 38y+2z&=20 \\ 19y+z&=28 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 19y+z&=10 \\ 19y+z&=28 \end{aligned} \quad \text{ΑΔΥΝΑΤΟ}$$

51. Έχουμε

i. $x+4y+4z=38 \quad (1)$

$2x-2y+3z=26 \quad (2)$

$x-2y+z=8 \quad (3)$

Από την (3) έχουμε $x=2y-z+8 \quad (4)$

Αντικαθιστώντας στις (1) και (2) έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} 2y-z+8+4y+4z&=38 \\ 2(2y-z+8)-2y+3z&=26 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 6y+3z&=30 \\ 4y-2z+16-2y+3z&=26 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2y+z&=10 \\ 2y+z&=10 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ} \\ &z=10-2y \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (4): $x = 2y - 10 + 2y + 8,\quad x = 4y - 2$

Άρα οι λύσεις είναι $(x, z) = (4\kappa - 9$ και $10 - 2\kappa)$.

ii. Απαλείφουμε το x από τις δύο πρώτες εξισώσεις:

$$\left.\begin{array}{l} x + 3y + 5\omega = 0 \\ x - y + 7\omega = 0 \end{array}\right|_{-1} \Bigg\} \qquad \begin{array}{r} x + 3y + 5\omega = 0 \\ -x + y - \omega = 0 \\ \hline 4y + 4\omega = 0 \end{array}$$

Απαλείφουμε το x από την πρώτη και την τρίτη εξίσωση:

$$\left.\begin{array}{l} x + 3y + 5\omega = 0 \\ 4x - y + 7\omega = 0 \end{array}\right|^{-4} \Bigg\} \qquad \begin{array}{r} -4x - 12y - 20\omega = 0 \\ 4x - y + 7\omega = 0 \\ \hline -13y - 13\omega = 0 \end{array}$$

Οπότε το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το $\begin{cases} x + 3y + 5\omega = 0 \\ 4y + 4\omega = 0 \\ -13y - 13\omega = 0 \end{cases}$.

Απαλείφουμε το y από τις δύο τελευταίες εξισώσεις:

$$\left.\begin{array}{l} 4y + 4\omega = 0 \\ -13y - 13\omega = 0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r} y + \omega = 0 \\ -y - \omega = 0 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

οπότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x + 3y + 5\omega \\ 4y + 4\omega = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3\omega + 5\omega = 0 \\ y = -\omega \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\omega \\ y = -\omega \end{cases}$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις τις τριάδες της μορφής:

$$(x, y, \omega) = (-2\omega, -\omega, \omega),\ \ \omega \in R.$$

52. Έστω ότι η παραβολή έχει εξίσωση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0$.

Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της f από τα Α, Β, Γ πρέπει οι συντεταγμένες τους να επαληθεύουν την εξίσωσή της. Πρέπει δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 2 \\ f(-2) = 11 \\ f(3) = 16 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha - 1^2 + \beta\cdot 1 + \gamma = 2 \\ \alpha(-2)^2 + \beta(-2) + \gamma = 11 \\ \alpha - 3^2 + \beta\cdot 3 + \gamma = 16 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ 4\alpha - 2\beta + \gamma = 11 \\ 9\alpha + 3\beta + \gamma = 16 \end{array}\right\} \ (\Sigma)$$

Απαλείφουμε το α από τις δύο πρώτες εξισώσεις:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ 4\alpha - 2\beta + \gamma = 11 \end{array}\right|^{-4} \Bigg\} \Leftrightarrow \begin{array}{r} -4\alpha - 4\beta - 4\gamma = -8 \\ 4\alpha - 2\beta + \gamma = 11 \\ \hline -6\beta - 3\gamma = 3 \end{array}$$

Απαλείφουμε το α από την πρώτη και την τρίτη εξίσωση:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma=2 \\ 9\alpha+3\beta+\gamma=16 \end{array}\right| \begin{array}{l} -9 \\ \\ \end{array} \Bigg\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} -9\alpha-9\beta-9\gamma=-18 \\ 9\alpha+3\beta+\gamma=16 \\ \hline -6\beta-8\gamma=-2 \end{array}$$

Το σύστημα (Σ) γίνεται: $\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma=2 \\ -6\beta-\gamma=3 \\ -6\beta-8\gamma=-2 \end{array}\right\}$.

Απαλείφουμε το β από τις δύο τελευταίες εξισώσεις:

$$\left.\begin{array}{l} -6\beta-3\gamma=3 \\ -6\beta-8\gamma=-2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ -1 \end{array} \Bigg\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} -6\beta-3\gamma=3 \\ 6\beta+8\gamma=2 \\ \hline 5\gamma=5 \end{array} \Leftrightarrow \gamma=1$$

Άρα το σύστημα (Σ) γίνεται:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha+\beta+\gamma=2 \\ -6\beta-3\gamma=3 \\ \gamma=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha+\beta+1=2 \\ -6\beta-3=3 \\ \gamma=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha+\beta=1 \\ -6\beta=6 \\ \gamma=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha-1=1 \\ \beta=-6 \\ \gamma=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha=2 \\ \beta=-1 \\ \gamma=1 \end{array}\right\}$$

Οπότε η παραβολή είναι η $f(x)=2x^2-x+1$.

53. Έχουμε

Έστω x, y τα ψηφία του αριθμού με x το ψηφίο των δεκάδων. Τότε:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ 10x+y=10y+x+9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ 9x-9y=9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ x-y=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2x=8 \Leftrightarrow x=4 \\ y=7-x \Leftrightarrow y=3 \end{array}.$$

Άρα ο αριθμός είναι ο 43.

54. Έστω

$\dfrac{x}{y}$ το ζητούμενο κλάσμα.

Τότε:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{y+1}=\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{x-2}{y-2}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3x+3=2y+2 \\ 2x-4=y-2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3x-2y=-1 \\ 2x-y=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3x-2y=-1 \\ -4x+2y=-4 \end{array}$$

$$-x=-5 \Leftrightarrow x=5 \text{ και } y=2x-2 \text{ άρα } y=10-2 \Leftrightarrow y=8.$$

Άρα το κλάσμα είναι $\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{8}$.

55. Έστω ότι η εταιρία προσλαμβάνει x άτομα στο 1^o υποκατάστημα και y άτομα στο 2^o υποκατάστημα, τότε θα είναι $x+y=53$. Επίσης $\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{7}y=16$, οπότε θα προκύψει το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y = 53 \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{7}y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 53 \\ 7x + 6y = 336 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 35 \end{cases}$$

56. Έχουμε

Έστω τιμή καναπέ $= x$

τιμή πολυθρόνας $= y$

τιμή τραπεζιού $= \omega$

Τότε έχουμε:

$$\left.\begin{array}{ll} x + y = 350 & (1) \\ x + \omega = 330 & (2) \\ y + \omega = 180 & (3) \end{array}\right\} \Leftrightarrow 2x + 2y + 2\omega = 860 \Leftrightarrow x + y + \omega = 430 \quad (4).$$

Από (4) και (1) έχουμε $350 + \omega = 430$ άρα

$$\omega = 430 - 350 \Leftrightarrow \boxed{\omega = 80}$$

$$x + \omega = 330 \Leftrightarrow x = 330 - 80 \Leftrightarrow \boxed{x = 250}$$

$$x + y = 330 \Leftrightarrow y = 350 - 250 \Leftrightarrow \boxed{y = 100}$$

§1.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

57. **α.** Το αρχικό ορθογώνιο έχει μήκος x και πλάτος y, άρα έχει εμβαδόν $E_1 = x \cdot y$ και περίμετρο $\Pi_1 = 2x + 2y$.

Αλλά επειδή η περίμετρός του είναι ίση με 38, έχουμε $2x + 2y = 38$ (1)

Αν γίνουν οι αλλαγές στις διαστάσεις του, το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου είναι $E_2 = (x+2)(y-4)$.

Αλλά το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου είναι ίσο με το εμβαδόν του αρχικού, άρα $E_1 = E_2 \Leftrightarrow x \cdot y = (x+2)(y-4)$.Επομένως το ζητούμενο σύστημα είναι το :

$$\begin{cases} 2x + 2y = 38 \\ (x+2)(y-4) = xy \end{cases}.$$

β. Είναι: $\begin{cases} 2x + 2y = 38 \\ (x+2)(y-4) = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 19 \\ xy - 4x + 2y - 8 = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 19 \\ -4x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 19 - x \\ -2x + 19 - x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 19 - x \\ -3x = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 14 \\ x = 5 \end{cases}$$

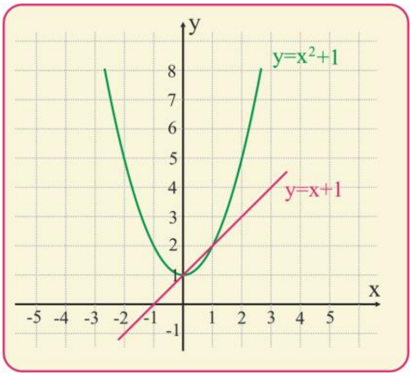
Επομένως οι διαστάσεις x, y του ορθογωνίου είναι $x = 5$ cm, $y = 14$ cm.

58. **α.** Έχουμε

$$\begin{cases} y = x^2+1 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2+1 \\ y=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = x^2+1 \\ y=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)=0 \\ y=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x,y)=(0,1) \quad ή \quad (x,y)=(1,2)$$

β. Οι λύσεις του συστήματος είναι τα σημεία τομής της παραβολής με εξίσωση $y=x^2+1$ και της ευθείας με εξίσωση $y=x+1$, όπως φαίνεται στην επόμενη γραφική παράσταση.



Άρα η παραβολή και η ευθεία έχουν δυο κοινά σημεία τα $(0,1)$ και $(1,2)$.

59. Έστω ότι οι ηλικία του καθενός από τα δίδυμα κορίτσια είναι x και του αγοριού y, με x,y>0.

α. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14, άρα είναι $2x+y=14$ (1).

Επίσης το γινόμενο της ηλικίας της κόρης επί την ηλικία του γιου είναι 24 επομένως $x\cdot y=24$ (2).

β. Επίσης το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού , άρα $2x<y$.

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) .

$$\begin{cases} 2x+y=14 \\ x\cdot y=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=14-2x \\ x\cdot(14-2x)=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=14-2x \\ -2x^2+14x-24=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=14-2x \\ x^2-7x+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6 \;\; ή \;\; y=8 \\ x=4 \;\; ή \;\; x=3 \end{cases}$$

Αλλά επειδή $2x<y$ δεχόμαστε μόνο την λύση $(x,y)=(3,8)$.

Επομένως τα δίδυμα κορίτσια είναι 3 ετών και το αγόρι 8 ετών.

60. **α.** Η απόσταση της Χώρας από την Αιγιάλη είναι 16 χιλιόμετρα και s είναι η απόσταση του σημείου συνάντησης από την Αιγιάλη, άρα η απόσταση του σημείου συνάντησης από την Χώρα είναι $16-s$ χιλιόμετρα. Η Άλκηστη ανηφορίζει το μονοπάτι από την Αιγιάλη για να συναντήσει την Ελένη με σταθερή ταχύτητα 2,4 χιλιόμετρα την ώρα, επομένως η απόσταση που διένυσε η Άλκηστη μέχρι το σημείο συνάντησης δίνεται από την εξίσωση $s=2,4\cdot t \quad (1)$.

Η Ελένη κατηφορίζει το ίδιο μονοπάτι από τη Χώρα με σταθερή ταχύτητα 4 χιλιόμετρα την ώρα, άρα η απόσταση που διένυσε η Ελένη είναι

$16-s$ χιλιόμετρα, οπότε $16-s=4\cdot t \quad (2)$.

Επομένως το ζητούμενο σύστημα που περιγράφει την κατάσταση, είναι το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2).

β. Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) του ερωτήματος α) έχουμε:

$$\begin{cases} s=2,4t \\ 16-s=4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=2,4t \\ 16-2,4t=4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=2,4t \\ 6,4t=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=2,4t \\ t=2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=6 \\ t=2,5 \end{cases}$$

Επομένως τα δυο κορίτσια θα συναντηθούν μετά από $2,5$ ώρες από την στιγμή που ξεκίνησαν και το σημείο συνάντησης απέχει $16-s=16-6=10$ χιλιόμετρα από τη Χώρα.

61. Αν x, y (με $y>2,\ x<10$) οι διαστάσεις του αρχικού ορθογωνίου , τότε οι διαστάσεις του νέου ορθογωνίου που προκύπτει μετά την αύξηση του μήκους και την ελάττωση του πλάτους είναι $x+3,\ y-2$.

α. Η περίμετρος του αρχικού ορθογωνίου είναι $\Pi=2x+2y$ και το εμβαδόν του $E=x\cdot y$.

Άρα το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου είναι $E'=(x+3)\cdot(y-2)$.

Επομένως το σύστημα που περιγράφει την παραπάνω κατάσταση είναι:

$$\begin{cases} 2x+2y=24 \\ (x+3)\cdot(y-2)=2x\cdot y \end{cases}, \text{ με } \quad 0<x<10 \quad \text{και} \quad y>2.$$

β. Οι διαστάσεις x, y του αρχικού ορθογωνίου προκύπτουν από την επίλυση του μη γραμμικού συστήματος $\begin{cases} 2x+2y=24 \\ (x+3)\cdot(y-2)=2x\cdot y \end{cases}$,το οποίο επιλύεται με την μέθοδο της αντικατάστασης. Επομένως

$$y=12-x \ (1) \qquad \text{και} \qquad x\cdot y-2x+3y-6=2x\cdot y \Leftrightarrow -2x+3y-x\cdot y-6=0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow -2x+3(12-x)-x(12-x)-6=0 \Leftrightarrow x^2-17+30=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x=2 \ \text{ ή } \ x=15 \ >10.$$

Άρα $x=2$ και $y=10$.

62. **α.** Η σχέση

$$xy=6\neq 0 \Rightarrow x\neq 0 \ \text{ και } \ y\neq 0, \ \text{ τότε } \ xy=6 \Leftrightarrow y=\frac{6}{x},$$

οπότε με αντικατάσταση στην $x^2+y^2=13$, προκύπτει:

$$x^2 + \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 13 \Leftrightarrow x^2 + \frac{36}{x^2} = 13 \Leftrightarrow x^4 + 36 = 13x^2 \Leftrightarrow x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

Θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$ οπότε η εξίσωση γίνεται: $\omega^2 - 13\omega + 36 = 0$.
Αυτή είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς ω με διακρίνουσα
$\Delta = (-13)^2 - 4\cdot1\cdot36 = 159 - 144 = 25 > 0$ άρα έχει δύο διαφορετικές ρίζες, τις

$$\omega_{1,2} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{25}}{2\cdot1} = \frac{13 \pm 5}{2} \text{ δηλαδή } \omega_1 = 9 \text{ ή } \omega_2 = 4.$$

Συνεπώς: $\omega = 9$ ή $\omega = 4$
$x^2 = 9$ ή $x^2 = 4$
$x = \pm3$ ή $x = \pm2$

- Για $x = 3$ η σχέση $y = \frac{6}{x}$ δίνει $y = \frac{6}{3} = 2$
- Για $x = -3$ η σχέση $y = \frac{6}{x}$ δίνει $y = \frac{6}{-3} = -2$
- Για $x = 2$ η σχέση $y = \frac{6}{x}$ δίνει $y = \frac{6}{2} = 3$
- Για $x = -2$ η σχέση $y = \frac{6}{x}$ δίνει $y = \frac{6}{-2} = -3$

Άρα το σύστημα (Σ1) έχει 4 λύσεις, τις $(x, y) = (3, 2)$ ή $(-3, -2)$ ή $(2, 3)$ ή $(-2, -3)$.

β. 1ος τρόπος: Η $|xy| = 6 \Leftrightarrow xy = 6$ ή $xy = -6$, άρα όλες οι λύσεις της εξίσωσης $xy = 6$ θα περιλαμβάνονται και στις λύσεις της $|xy| = 6$.

Συνεπώς και οι λύσεις του συστήματος (Σ1) είναι λύσεις και τουσυστήματος (Σ2), καθώς οιδεύτερες εξισώσεις των δύο συστημάτων ταυτίζονται.

2ος τρόπος: Θα λύσουμε το σύστημα (Σ2) και θα διαπιστώσουμε ότι μέσα στις λύσεις του περιλαμβάνονται και οι λύσεις του συστήματος (Σ1).
Έχουμε:

$$\begin{cases} |xy| = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 6 \text{ ή } xy = -6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} xy = 6 \text{ ή } xy = -6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \text{ ή } \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \right)$$

Παρατηρούμε ότι η επίλυση του (Σ2) οδηγεί σε δύο εναλλακτικά συστήματα, το πρώτο εκ των οποίων είναι το (Σ1). Συνεπώς οι λύσεις του (Σ1) θα συμπεριλαμβάνονται μέσα στις λύσεις του (Σ2).

Φυσικά μπορούμε να προχωρήσουμε κανονικά στην επίλυση και να βρούμε τις λύσεις των επιμέρους συστημάτων, άρα και όλες τις λύσεις του (Σ2).
Το πρώτο είναι το σύστημα (Σ1) το οποίο, όπως είδαμε στο (α) ερώτημα, έχει λύσεις τις: $(x, y) = (3, 2)$ ή $(-3, -2)$ ή $(2, 3)$ ή $(-2, -3)$.
Το δεύτερο σύστημα λύνεται εντελώς παρόμοια και βρίσκουμε ότι έχει λύσεις τις:

$(x, y) = (3, -2)$ ή $(-3, 2)$ ή $(2, -3)$ ή $(-2, 3)$.

Άρα το σύστημα (Σ2) έχει συνολικά 8 λύσεις, τις

$(x, y) = (3, 2)$ ή $(-3, -2)$ ή $(2, 3)$ ή $(-2, -3)$ ή $(3, -2)$ ή $(-3, 2)$ ή $(2, -3)$ ή $(-2, 3)$

Παρατηρούμε ότι μέσα στις λύσεις του (Σ2) περιλαμβάνονται και οι λύσεις του (Σ1).

γ) Λύνοντας το σύστημα (Σ2) (δες τον 2^o τρόπο στο (β) ερώτημα) διαπιστώνουμε ότι έχει 8 λύσεις, ενώ το (Σ1) έχει 4, συνεπώς δεν συμπεριλαμβάνονται όλες οι λύσεις του (Σ2) και στο (Σ1). Πράγματι, τα ζεύγη $(3, -2)$, $(-3, 2)$, $(2, -3)$ και $(-2, 3)$ είναι λύσεις του (Σ2) αλλά όχι και λύσεις του (Σ1).

63. Έχουμε

$$\begin{cases} \alpha-\beta=5 \\ 3\alpha+2\beta=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=4 \\ \beta=-1 \end{cases} \text{ συνεπώς } \begin{cases} x^2=4 \\ y^5=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \text{ ή } x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

64. Έχουμε

$$\left.\begin{matrix} y=-2x^2 \\ 4x+y=2 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y=-2x^2 \\ 4x-2x^2=2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Για τη (2) έχουμε: $-2x^2+4x-2=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$

Οπότε από την (1): $y=-2\cdot 1^2 \Leftrightarrow \boxed{y=-2}$.

65. Έχουμε

$$\left.\begin{matrix} x(x+2y+1)=y^2-3 \\ x+6y=4 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x(x+2y+2)=y^2-3 \\ x=4-6y \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} (4-6y)(4-6y+2y+1)=y^2-3 \\ x=4-6y \end{matrix}\right\} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Η (1) γίνεται $(4-6y)(5-4y)=y^2-3 \Leftrightarrow 24y^2-30y-16y+20-y^2+3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 23y^2-46y+23=0 \Leftrightarrow y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow (y-1)^2=0 \Leftrightarrow \boxed{y=1}$.

Άρα από (2): $x=4-6\cdot 1 \Leftrightarrow \boxed{x=-2}$.

66. Έχουμε

$$\begin{cases} x^3+y^3=35 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2)=35 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \\ (x+y)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \\ x^2+y^2+2xy=25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\overset{(-)}{\Leftrightarrow} 3xy=18 \Leftrightarrow xy=6 \text{ οπότε είναι } \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$$

και οι x, y είναι οι ρίζες της εξίσωσης: ω2 – 5ω +6 = 0 $\Leftrightarrow$ ω = 2 ή ω = 3.

Άρα $(x, y)=(2, 3)$ ή $(x, y)=(3, 2)$.

67. Έχουμε

$$\begin{cases} x^3-y^3=117 \\ x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2)=117 \\ x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2=39 \\ x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2=39 \\ x^2-2xy+y^2=9 \end{cases} \overset{(-)}{\Leftrightarrow} 3xy=30 \Leftrightarrow xy=10$$

οπότε είναι $\begin{cases} x-y=3 \\ xy=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+3 \\ (y+3)y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+3 \\ y^2+3y-10=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=-2 \\ y=-5 \end{cases}.$$

68. Έχουμε

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=62 \\ x^2-y^2+x-y=50 \end{cases}.$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και είναι:

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=68 \\ 2x^2+2x=112 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x+y=68 \\ x^2+x-56=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x+y=68 \\ x=-8 \text{ ή } x=7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 64+y^2-8+y=68 \\ x=-8 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 49+y^2+7+y=68 \\ x=7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2+y-12=0 \\ x=-8 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y^2+y-12=0 \\ x=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3x \text{ ή } y=2 \\ x=-8 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=-3x \text{ ή } y=2 \\ x=7 \end{cases}$$

69. Θέτουμε

$x+y=\kappa$ και $\sqrt{xy}=\lambda>0$ οπότε το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} \kappa+\lambda=7 \\ \kappa^2-\lambda^2=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa+\lambda=7 \\ (\kappa+\lambda)(\kappa-\lambda)=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa+\lambda=7 \\ \kappa-\lambda=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \kappa=5 \\ \lambda=2 \end{cases}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Είναι } (x+y)^2=\kappa^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+2xy=\kappa^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+xy=\kappa^2-xy \\ \text{και } \sqrt{xy}=1 \Leftrightarrow xy=\lambda^2, \text{ οπότε } x^2+y^2+xy=\kappa^2-\lambda^2 \end{array}\right]$$

Έχουμε $\begin{cases} x+y=5 \\ \sqrt{xy}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases}$ συνεπώς οι x, y είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$\omega^2-5\omega+4=0 \Leftrightarrow \omega=1$ ή $\omega=4$

Άρα $(x, y)=(1, 4)$ ή $(x, y)=(4, 1)$.

70. Έστω x cm, y cm οι αρχικές διαστάσεις του ορθογωνίου, τότε είναι:

$$2(x+y)=16 \text{ cm} \quad (1).$$

Όταν αυξηθούν οι διαστάσεις κατά 2 cm οι πλευρές του θα είναι $(x + 2)$ cm, $(y + 2)$ cm και το εμβαδόν είναι $(x + 2)(y + 2) = 36\ cm^2$ (2).

Συνεπώς έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 2y + xy + 4 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ 2(x + y) + xy = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 16 \end{cases}$$

οπότε οι x, y είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\omega^2 - 8\omega + 16 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\omega - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega = 4}$ (διπλή).

Άρα $x = 4$ και $y = 4$, οπότε το αρχικό ορθογώνιο είναι τετράγωνο πλευράς 4 cm.

71. Οι συντεταγμένες των σημείων τομής της ευθείας και της παραβολής είναι οι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} y = \kappa x + x - 2 \\ y = -2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (\kappa + 1)x - 2 \\ (\kappa + 1)x - 2 = -2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (\kappa + 1)x - 2 \\ 2x^2 + (\kappa + 1)x - 2 = 0 \end{cases}$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $2x^2 + (\kappa + 1)x - 2 = 0$ είναι:$\Delta = (\kappa + 1)^2 + 16 > 0$ για κάθε $\kappa \in R$, οπότε το τριώνυμο έχει δύο ρίζες για κάθε τιμή του $\kappa \in R$.

Άρα η ευθεία $y = \kappa x + x - 2$ και η παραβολή $y = -2x^2$ έχουν δύο κοινά σημεία για κάθε τιμή του $\kappa \in R$.

72. Έχουμε

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{x} - 2\sqrt{y} &= 3 \\ 3\sqrt{x} + 4\sqrt{y} &= -11 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 2\sqrt{x} - 4\sqrt{y} &= 6 \\ 3\sqrt{x} + 4\sqrt{y} &= -11 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 5\sqrt{x} &= -5 \\ \sqrt{x} &= -1 \quad \text{ΑΔΥΝΑΤΗ} \end{aligned}$$

73. Έχουμε

i.

$$\left.\begin{aligned} 2|x + 1| + |y - 1| &= 7 \\ |y - 1| - |x + 1| &= 1 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 2|x + 2| + |y - 1| &= 7 \\ -|y - 1| + |x - 1| &= -1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &3|x + 1| = 6 \Leftrightarrow |x + 1| = 2 \text{ άρα} \\ &|y - 1| - 2 = 1 \Leftrightarrow |y - 1| = 3 \end{aligned}$$

$$|x + 1| = 2 \Leftrightarrow x + 1 = 2 \quad ή \quad x + 1 = -2$$

$$\boxed{x = 1} \qquad \boxed{x = -3}$$

και

$$|y - 1| = 3 \Leftrightarrow y - 1 = 3 \quad ή \quad y - 1 = -3$$

$$\boxed{y = 4} \qquad \boxed{y = -2}$$

Άρα οι λύσεις είναι: (1, 4), (1, –2), (–3, 4), (–3, –2).

ii.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 8 \\ |y - x - 1| &= 5 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x &= 8 - y \\ |y - 8 + y - 1| &= 5 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x &= 8 - y \\ |2y - 9| &= 5 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x = 8 - y \\ &2y - 9 = 5 \;\; ή \;\; 2y - 5 = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 8 - y \\ 2y &= 14 \end{aligned} \;\; ή \;\; \left.\begin{aligned} x &= 8 - y \\ 2y &= 4 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 7 \end{aligned} \;\; ή \;\; \begin{aligned} x &= 6 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Άρα οι λύσεις είναι $(x, y) = (1, 7)$ ή $(x, y) = (6, 2)$.

74. Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l}2x^2 - y^2 = 10\\ 3x^2 + 4y^2 = 4\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l}8x^2 - 4y^2 = 40\\ 3x^2 + 4y^2 = 4\end{array} \Leftrightarrow 11x^2 = 44 \Leftrightarrow \boxed{x^2 = 4}$$

και $2 \cdot 4 - y^2 = 10 \Leftrightarrow y^2 = -2$ ΑΔΥΝΑΤΗ.

75. Έχουμε

$$\begin{cases}(3x+2)(x-y)=0\\ \quad x+y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x+2=0 \text{ ή } x-y=0\\ \quad x+y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x+2=0\\ \quad x+y=2\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x-y=0\\ x+y=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{2}{3}\\ y=\dfrac{8}{3}\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=1\\ y-1\end{cases}$$

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 20

76. Έχουμε

$$D = \begin{vmatrix}\lambda+2 & 4\\ 2 & \lambda+4\end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda+4) - 8 =$$

$$= \lambda^2 + 4\lambda + 2\lambda + 8 - 8 = \lambda^2 + 6\lambda = \lambda(\lambda+6)$$

$$D_x = \begin{vmatrix}8-3\lambda & 4\\ 8 & \lambda+4\end{vmatrix} = (8-3\lambda)(\lambda+4) - 32 =$$

$$= 8\lambda + 32 - 3\lambda^2 - 12\lambda - 32 = -3\lambda^2 - 4\lambda = -\lambda(3\lambda+4)$$

$$D_y = \begin{vmatrix}\lambda+2 & 8-3\lambda\\ 2 & 8\end{vmatrix} = 8(\lambda+2) - 2(8-3\lambda) = 8\lambda + 16 - 16 + 6\lambda = 14\lambda$$

Αν $D \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -6$ τότε μόνη λύση:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-\lambda(3\lambda+4)}{\lambda(\lambda+6)} = \frac{-3\lambda-4}{\lambda+6}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{14\lambda}{\lambda(\lambda+6)} = \frac{14}{\lambda+6}$$

Αν $D = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = -6$

- Αν $\lambda=0$ το σύστημα γίνεται

$$\left.\begin{array}{l}2x+4y=8\\ 2x+4y=8\end{array}\right\} \text{ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ}$$

- Αν $\lambda = -6$ το σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{array}{l} -4x+4y=29 \\ 2x-2y=8 \end{array}\right|_{2} \quad \begin{array}{r} -4x+4y=29 \\ +\quad 4x-4y=16 \\ \hline 0x+0y=45 \end{array}$$

ΑΔΥΝΑΤΟ

77. Έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=\lambda \\ x+2(y+1)=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=\lambda \\ x+2y=\lambda-2 \end{array}\right\}$$

α. $D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-3=1$

$$D_x=\begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ \lambda-2 & 2 \end{vmatrix}=2\lambda-3(\lambda-2)=2\lambda-3\lambda+6=-\lambda+6$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=2\lambda-4-\lambda=\lambda-4$$

β. $D=1\neq 0$ άρα έχουμε μοναδική λύση:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-\lambda+6}{1}=-\lambda+6$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{\lambda-4}{1}=\lambda-4$$

78. Έχουμε

$$\begin{array}{r} \alpha x+\alpha y=1 \\ x+\alpha y=\alpha \end{array}$$

$$D=\begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha \end{vmatrix}=\alpha^2-\alpha=\alpha(\alpha-1)$$

α. Για να έχει μοναδική λύση πρέπει $D\neq 0$:

$\alpha^2-\alpha\neq 0$ ή $\alpha(\alpha-1)\neq 0$ ή $\alpha\neq 0$ και $\alpha\neq 1$

β. Για $D\neq 0$

$$D_x=\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix}=\alpha-\alpha^2=\alpha(1-\alpha)$$

$$D_y=\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix}=\alpha^2-1=(\alpha-1)(\alpha+1)$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}=-1$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)}=\frac{\alpha+1}{\alpha}$$

γ. $x = y = 4 \Rightarrow -1 + \dfrac{\alpha+1}{\alpha} = 4 \Rightarrow -a + a^2 + a = 4 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$;h $a = -2$

79. Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} \lambda x - 2y = \lambda \\ (\lambda-2)x - y = 2 \end{array}\right\}$$

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ \lambda-2 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda + 2(\lambda-2) = -\lambda + 2\lambda - 4 = \lambda - 4$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda + 4$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda-2 & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda - \lambda(\lambda-2) = 2\lambda - \lambda^2 + 2\lambda = 4\lambda - \lambda^2 = \lambda(4-\lambda)$$

- Αν $D \neq 0 \Rightarrow \lambda - 4 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 4$ τότε έχουμε μοναδική λύση:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-\lambda+4}{\lambda-4} = -1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\lambda(4-\lambda)}{\lambda-4} = -\lambda$$

- Αν $D = 0 \Rightarrow \lambda = 4$

Το σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{array}{l|l} 4x - 2y = 4 & \\ 2x - y = 2 & -2 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{c} 4x - 2y = 4 \\ -4x + 2y = -4 \\ \hline 0x + 0y = 0 \end{array}$$

ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

80. Έστω x η πλευρά του $1^{ου}$ τετραγώνου και y η πλευρά του $2^{ου}$ τετραγώνου. Οι σχέσεις που προκύπτουν είναι:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 500 \\ 4x - 4y = 40 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 500 \\ x = 10 + y \end{array}\right\}$$

$$(10+y)^2 - y^2 = 500 \Rightarrow 100 + 20y + y^2 - y^2 = 500 \Rightarrow 100 + 20y = 500 \Rightarrow$$

$$20y = 400 \Rightarrow \boxed{y = 20} \quad \boxed{x = 30}$$

81. Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} 3x + (\lambda-1) = -3 \\ \lambda x + 2y = 2 \end{array}\right\}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & \lambda-1 \\ \lambda & 2 \end{vmatrix} = 6-\lambda(\lambda-1) = 6-\lambda^2+\lambda$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -3 & \lambda-1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6-2(\lambda-1) = -6-2\lambda+2 = -2\lambda-4$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ \lambda & 2 \end{vmatrix} = 6-3\lambda$$

Για να έχει άπειρες λύσεις πρέπει $D = 0$:

$$-\lambda^2+\lambda+6=0 \quad \bullet \quad \Delta = 1+24 = 25, \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-1\pm 5}{-2} \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix} \right.$$

- Αν $\lambda = 3$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{matrix} 3x+2y=-3 \\ 3x+2y=2 \end{matrix} \quad \text{ΑΔΥΝΑΤΟ}$$

- Αν $\lambda = -2$ το σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{matrix} 3x-3y=-3 \;\big|\, 2 \\ -2x+2y=2 \;\big|\, 3 \end{matrix}\right\} \qquad \begin{array}{r} 6x-6y=-6 \\ -6x+6y=6 \quad + \\ \hline 0x+0y=0 \end{array}$$

ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

82. Έχουμε

$$2D\cdot D_x + D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 0 \xRightarrow{\text{διαιρώ με } D^2} 2\frac{D_x}{D} + 1 + \frac{D_x^2}{D^2} = 0 \Rightarrow$$

$$2x+1+x^2+y^2 = 0 \Rightarrow (x+1)^2+y^2 = 0$$

$$x+1=0 \quad \text{και} \quad y=0$$

$$x=-1 \quad \text{και} \quad y=0$$

83. Έχουμε

α. $f(-4) = \dfrac{\beta+2\alpha}{-4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{\beta+2\alpha}{-4} \Leftrightarrow -4 = 2\beta+4\alpha \quad (1)$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\alpha+\beta+1 \Leftrightarrow 4 = -\frac{\alpha}{2}+\beta+1 \Leftrightarrow$$

$$3 = -\frac{\alpha}{2}+\beta \Leftrightarrow 6 = -\alpha+2\beta \quad (2)$$

Από (1) & (2): $\left.\begin{matrix} 4\alpha+2\beta=-4 \\ -\alpha+2\beta=6 \end{matrix}\right\}$ Αφαίρεση κατά μέλη $\Rightarrow 5\alpha = -10 \quad \boxed{\alpha=-2} \quad \boxed{\beta=2}$

β. $A = -2\begin{vmatrix} 2\alpha & -\beta \\ f(4) & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ f(4) & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow f(4) = -2\cdot 4+2+1 = -5$

$$A = -2\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot(-4-10) = -2(-14) = 28$$

84. Έχουμε

$$\begin{aligned} (\lambda-2)x + 5y &= 2 \\ x + (\lambda+2)y &= 2 \end{aligned}$$

α. Αν $\lambda = 2$ το σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{aligned} 5y &= 2 \\ x + 4y &= 2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} y &= \frac{2}{5} \\ x + \frac{8}{5} &= 2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} y &= \frac{2}{5} \\ x &= \frac{10-8}{5} = \frac{2}{5} \end{aligned}\right\}$$

β. Αν $\lambda = 3$ το σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{aligned} x + 5y &= 2 \\ x + 5y &= 2 \end{aligned}\right\} \text{Αντικαθιστώ} \Rightarrow \begin{aligned} 2002 + 5(400) &= 2 \\ 2002 - 2000 &= 2 \end{aligned}$$

ισχύει, άρα το ζεύγος $(2002, -400)$ επαληθεύει το σύστημα

γ. $D = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 5 \\ 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 - 5 = \lambda^2 - 9$

$$D = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ ή } \lambda = -3$$

- Αν το $\lambda = 3$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (βλ. ερώτ. β)
- Αν το $\lambda = -3$ το σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{aligned} -5x + 5y &= 2 \\ x - y &= 2 \end{aligned}\right|_{5}\Bigg\} \qquad \begin{aligned} -5x + 5y &= 2 \\ 5x - 5y &= 10 \\ \hline 0x + 0y &= 0 \end{aligned}$$

Αδύνατο

- Αν $\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq -3$ τότε έχει μοναδική λύση:

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 2\lambda + 4 - 10 = 2\lambda - 6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(\lambda-2) - 2 = 2\lambda - 4 - 2 = 2\lambda - 6$$

Οι λύσεις είναι:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2\lambda-6}{\lambda^2-9} = \frac{2(\lambda-3)}{(\lambda-3)(\lambda+3)}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{2\lambda-6}{\lambda^2-9} = \frac{2}{\lambda+3}$$

85. Έχουμε

$$\left.\begin{array}{r}\lambda+\lambda y=1\\ x+\lambda y=\lambda\end{array}\right\}$$

α. $D=\begin{vmatrix}\lambda & \lambda\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)$

$D_x=\begin{vmatrix}1 & \lambda\\ \lambda & \lambda\end{vmatrix}=\lambda-\lambda^2=\lambda(1-\lambda)$

$D_y=\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1=(\lambda-1)\,(\lambda+1)$

β. Για να έχει μοναδική λύση πρέπει $D\neq 0$: $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\lambda(1-\lambda)}{\lambda(\lambda-1)}=-1$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{(\lambda-1)\,(\lambda+1)}{\lambda(\lambda-1)}=\frac{\lambda+1}{\lambda}$$

γ. • Αν $\lambda=0$ το σύστημα γίνεται: $\left.\begin{array}{r}0x+0y=1\\ x+0y=0\end{array}\right\}$ ΑΔΥΝΑΤΟ

• Αν $\lambda=1$ το σύστημα γίνεται: $\left.\begin{array}{r}x+y=1\\ x+y=1\end{array}\right\}$ ΑΟΡΙΣΤΟ

86. Έχουμε

$$D_1=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -3\\ \mu-2 & 1\end{vmatrix}=\lambda+1+3\mu-6=\lambda+3\mu-5$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2\lambda+1 & \mu+4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\lambda+1-\mu-4=2\lambda-\mu-3$$

Για να είναι αδύνατα πρέπει $D_1=D_2=0$

$$\left.\begin{array}{r|l}\lambda+3\mu=5 & \\ 2\lambda-\mu=3 & 3\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{array}{r}\lambda+3\mu=5\\ 6\lambda-3\mu=9\\ \hline 7\lambda=14\end{array}\Rightarrow\boxed{\lambda=2}\quad\boxed{\mu=1}$$

Το Σ_1 γίνεται:

$$\left.\begin{array}{r|l}3x-3y=5 & \\ -x+y=1 & -3\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{array}{r}3x-3y=5\\ 3x-3y=-3\end{array}\text{ ΑΔΥΝ.}$$

Το Σ_2 γίνεται:

$$\left.\begin{array}{r|l}5x+5y=-1 & \\ x+\ y=4 & 5\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{array}{r}5x+5y=-1\\ 5x+5y=20\end{array}\text{ ΑΔΥΝ.}$$

$\boxed{\lambda=2}$ και $\boxed{\mu=1}$

87. Έχουμε

$$\left.\begin{aligned} 2x + y = \lambda + 2 \\ 3x - 2y = 5 - \lambda \end{aligned}\right\}$$

α. $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7 \neq 0$ για κάθε $\lambda \in R$ άρα έχει μον. λύση

β. $D_x = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ 5 - \lambda & -2 \end{vmatrix} = -2(\lambda + 2) - (5 - \lambda) = -2\lambda - 4 - 5 + \lambda = \lambda - 9$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & \lambda + 2 \\ 3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 2(5 - \lambda) - 3(\lambda + 2) = 10 - 2\lambda - 3\lambda - 6 = -5\lambda + 4$$

άρα $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-\lambda - 9}{-7} = \dfrac{\lambda + 9}{7}$

$y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{5\lambda - 4}{9}$

γ. Αντικατάσταση:

$$\frac{\lambda + 9}{7} + \frac{5\lambda - 4}{7} = 5 \Rightarrow \lambda + \alpha + 5\lambda - 4 = 35 \Rightarrow 6\lambda = 30 \quad \boxed{\lambda = 5}$$

88. Έχουμε

$$\left.\begin{aligned} \lambda x + y = 3 \\ 4x + \lambda y = 2 \end{aligned}\right\}$$

α. $D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 4 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$

Αν $\lambda \neq 2, -2$ τότε έχει μοναδική λύση:

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda - 2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda - 12 = 2\lambda - 12 = 2(\lambda - 6)$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{3\lambda - 2}{(\lambda - 2)(\lambda + 2)}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{2(\lambda - 6)}{(\lambda - 2)(\lambda + 2)}$$

β. $\dfrac{3\lambda - 2}{(\lambda - 2)(\lambda + 2)} + \dfrac{2(\lambda - 6)}{(\lambda - 2)(\lambda + 2)} = \dfrac{3\lambda - 2 + 2\lambda - 12}{(\lambda - 2)(\lambda + 2)} = \dfrac{5\lambda - 14}{\lambda^2 - 4}$

γ. $x_0 + y_0 = -1$

$$\frac{5\lambda - 14}{\lambda^2 - 4} = -1 \Leftrightarrow 5\lambda - 14 = -\lambda^2 + 4 \Leftrightarrow \lambda^2 + 5\lambda - 14 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 5\lambda - 18 = 0$$

$$\Delta = 25 + 72 = 97, \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{97}}{2}$$

89. Έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} 2\lambda x + (\lambda - 1)y = \lambda \\ x + \lambda y = 1 \end{array}\right\}$$

α. $D = \begin{vmatrix} 2\lambda & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - (\lambda - 1) = 2\lambda^2 - \lambda + 1)$

Για να έχει μον. λύση πρέπει $D \neq 0$.

Αν $D = 0$: $2\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, $\Delta = 1 - 4{\cdot}2 = -7 < 0$ άρα $D \neq 0$ για κάθε $\lambda \in R$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2\lambda & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda - \lambda = \lambda$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{2\lambda^2 - \lambda + 1}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\lambda}{2\lambda^2 - \lambda + 1}$$

β. $\dfrac{\lambda^2 - \lambda + 1}{2\lambda^2 - \lambda + 1} + \dfrac{3\lambda}{2\lambda^2 - \lambda + 1} = 0 \Leftrightarrow$

$$\lambda^2 - \lambda + 1 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

γ. ε_1: $-2x - 2y = -1$

ε_2: $x - y = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{\varepsilon_1} = -\dfrac{A}{B} = -1 \\ \lambda_{\varepsilon_2} = -\dfrac{A}{B} = 1 \end{array}\right\} \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon 2} = -1 \text{ άρα } \varepsilon_1 \text{ κάθετη } \varepsilon_2$$

δ. Για την ε_1: $\lambda_{\varepsilon_1} = -1$ άρα εφω $= -1 \Rightarrow \omega = 125^o$

Για την ε_2: $\lambda_{\varepsilon_2} = 1$ άρα εφω $= 1 \Rightarrow \omega = 45^o$

90. Έστω x τα αγόρια και y τα κορίτσια

Τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{7}{5}x \\ y - 9 = x - 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{7}{5}x \\ y = x + 6 \end{array}\right\} \left.\dfrac{7}{5}x = x + 6\right\} \left.6 = \dfrac{2}{5}x\right\} x = 15, \ y = 21$$

Άρα στις 11 μ.μ. υπήρχαν 12 αγόρια και 12 κορίτσια. Δηλαδή 12 ζευγάρια.

Το πάρτι τελείωσε στις 1 π.μ..

91. **α.** Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{y-x+1}{3}=x\\ \dfrac{y+1}{4}=3x-4\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}y-x+1=3x\\ y+1=12x-16\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}4x-y=1\\ 12x-y=17\end{array}\right\}$$

β. Έχουμε:

$$D=\begin{vmatrix}4 & -1\\ 12 & -1\end{vmatrix}=-4+12-8$$

$$D_x=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 17 & -1\end{vmatrix}=-1+17=16,\quad D_y=\begin{vmatrix}4 & 1\\ 12 & 17\end{vmatrix}=68-12=56$$

γ. Οι λύσεις x, y του συστήματος είναι:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{16}{8}=2 \quad \text{και} \quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{56}{8}=7$$

Άρα $(x, y) = (2, 7)$.

92. **α.** Έχουμε:

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 7 & -4\end{vmatrix}=-8+7=-1$$

$$D_x=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ \lambda & -4\end{vmatrix}=-4\lambda+4+\lambda=-3\lambda+4$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2 & \lambda-1\\ 7 & \lambda\end{vmatrix}=2\lambda-7\lambda+7=-5\lambda+7$$

β. Εφόσον $D \neq 0$ το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση για κάθε $\lambda \in R$.

γ. Η λύση του συστήματος είναι:

$$x_0=\frac{D_x}{D}=3\lambda-4,\quad y_0=\frac{D_y}{D}=5\lambda-7$$

δ. Έχουμε:

$$2x_0-y_0<1 \Leftrightarrow 2(3\lambda-4)-(5\lambda-7)<1 \Leftrightarrow 6\lambda-8-5\lambda+7<1 \Leftrightarrow \lambda<2$$

93. **α.** Έχουμε:

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4-3=1\neq 0$$

Αφού $D \neq 0$ το σύστημά μας έχει μοναδική λύση.

β. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα Dx, Dy:

$$D_x = \begin{vmatrix} \kappa-1 & 1 \\ \kappa & 2 \end{vmatrix} = 2\kappa - 2 - 4 = \kappa - 2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & \kappa-1 \\ 3 & \kappa \end{vmatrix} = 2\kappa - 3\kappa + 3 = -\kappa + 3$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι:

$$x_0 = \frac{D_x}{D} = \kappa - 2 \quad \text{και} \quad y_0 = \frac{D_y}{D} = -\kappa + 3$$

γ. Έχουμε:

$$|x_0 - y_0| < 4 \Leftrightarrow |\kappa - 2 + \kappa - 3| < 4 \Leftrightarrow |2\kappa - 5| < 4 \Leftrightarrow -4 < 2\kappa - 5 < 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4 + 5 < 2\kappa < 4 + 5 \Leftrightarrow 1 < 2\kappa < 9 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \kappa < \frac{9}{2}$$

94. **α.** Έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 2\lambda - 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 2\lambda + 1 = -\lambda + 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ 1 & 2\lambda - 1 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - \lambda - \lambda = 2\lambda^2 - 2\lambda = 2\lambda(\lambda - 1)$$

β. Αν $\lambda \neq 1 \Leftrightarrow \lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow D \neq 0$. Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$x_0 = \frac{D_x}{D} = \frac{-\lambda + 1}{\lambda - 1} = -\frac{\lambda - 1}{\lambda - 1} = -1, \qquad y_0 = \frac{D_y}{D} = \frac{2\lambda(\lambda - 1)}{\lambda - 1} = 2\lambda$$

Άρα $(x_0, y_0) = (-1, 2\lambda)$.

γ. Αν $\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow D = 0$ και το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και μάλιστα ισχύει $x + y = 1 \Leftrightarrow \boxed{y = 1 - x}$.

Επομένως οι λύσεις είναι της μορφής: $(x_0, y_0) = (x_0, 1 - x_0)$