ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

Ημερομηνία: Κυριακή 26 Απριλίου 2015
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και (x, y) οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Μονάδες 9

Α2. Να δώσετε το ορισμό του εσωτερικού γινομένου $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Πώς ορίζουμε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ όταν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$;

Μονάδες 6

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$ είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου, τότε σε κάθε περίπτωση ο συντελεστής του, $\lambda_{\vec{\alpha}}$, είναι ίσος με το πηλίκο $\dfrac{y}{x}$.

β) Έστω $\vec{\alpha}, \vec{v}$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Τότε ισχύει ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}$.

γ) Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής: $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A, B, \Gamma \in R$.

δ) Οι διχοτόμοι των γωνιών $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}x'$ των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων, έχουν εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$ αντιστοίχως.

ε) Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$, έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ευθεία ε με εξίσωση: $3x+4y=12$.

Β1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία ε και διέρχεται από το σημείο $A\left(2,-\frac{9}{2}\right)$.

Μονάδες 8

Β2. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας η των ευθειών ε και ζ.

Μονάδες 9

Β3. Αν η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Β και η ευθεία ζ τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $\vec{\alpha}=(x,4y)$, $\vec{\beta}=(-x,2)$, με $x,y\in R$, δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου, τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους.

Γ1. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ είναι η παραβολή C, με εξίσωση: $x^2=8y$, της οποίας να βρείτε την εστία Ε και την διευθετούσα δ.

Μονάδες 8

Γ2. **i)** Να βρείτε τις εξισώσεις ε_1, ε_2 των εφαπτομένων στην παραβολή C, στο σημείο $N\left(x_1,\frac{x_1^2}{8}\right)$, $x_1\neq 0$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(1,-1)$.

Μονάδες 6

ii) Να δείξετε ότι για την αμβλεία γωνία ω των εφαπτομένων ε_1, ε_2, ισχύει: $\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Μονάδες 3

Γ3. Δίνεται, επιπλέον, σημείο $B(x_0,y_0)$ της παραβολής C, με $x_0<0$ που απέχει από την διευθετούσα δ αυτής απόσταση ίση με 10.Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1, ο οποίος έχει διάμετρο το τμήμα με άκρα τα σημεία Ε και Β.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η εξίσωση $x^2+y^2-2\lambda y-1=0,(1)$, με $\lambda\in R$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C_λ, για κάθε $\lambda\in R$, του οποίου να υπολογίσετε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ.

Μονάδες 6

Δ2. **i)** Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_λ, για κάθε $\lambda\in R$, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία Α και Β, των οποίων να βρείτε τις συντεταγμένες.

Μονάδες 4

ii) Αν Α(1,0), να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C_λ στο σημείο Α.

Μονάδες 4

Δ3. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C, με εστίες τα σημεία Α, Β και εκκεντρότητα $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Μονάδες 6

Δ4. Αν Μ είναι ένα κοινό σημείο των C_λ, C, να υπολογίσετε τις τιμές του $\lambda\in R$, έτσι ώστε: (ΜΑ)+(ΜΒ) = 2(ΜΚ).

Μονάδες 5