

**ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΜΑΘΗΜΑ: ΆΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

**Ημερομηνία: Κυριακή 10 Μαΐου 2015**

**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Απόδειξη (βλέπε σχολικό σελ. 135)
- A2.** Σχολικό σελίδα 97.
- A3.** Για την  $f(x) = a^x$  έχουμε:
- πεδίο ορισμού το  $A = \mathbb{R}$
  - σύνολο τιμών το  $B = (0, +\infty)$ .
- Για την  $g(x) = \log_a x$ , με  $0 < a \neq 1$  έχουμε:
- πεδίο ορισμού το  $A = (0, +\infty)$
  - σύνολο τιμών το  $B = \mathbb{R}$
- A4.** α. ΛΑΘΟΣ  
β. ΛΑΘΟΣ  
γ. ΛΑΘΟΣ  
δ. ΣΩΣΤΟ  
ε. ΛΑΘΟΣ

**ΘΕΜΑ Β**

Έχουμε  $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x - 1$

- B1.** Αφού  $-1 \leq \sigma\upsilon\nu 2x \leq 1 \Leftrightarrow$
- $$-2 \leq 2\sigma\upsilon\nu 2x \leq 2 \Leftrightarrow$$
- $$-3 \leq 2\sigma\upsilon\nu 2x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq f(x) \leq f(0)$ . Έτσι έχουμε  $\boxed{\max f = 1}$ ,  $\boxed{\min f = -3}$ .

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015**  
 Β' ΦΑΣΗ

**E\_3.ΒΜλ2Γ(α)**

Η περίοδος της  $f$  είναι  $T = \frac{2\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{T = \pi}$

**B2.**  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$$2x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \boxed{x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}}$$

Αφού  $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \kappa\pi + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \Leftrightarrow$

$$-\frac{\pi}{6} \leq \kappa\pi \leq \frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq \kappa \leq \frac{11}{6} \stackrel{\kappa \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}$$

- $\kappa = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6}}$

- $\kappa = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{7\pi}{6}}$

Αφού  $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \kappa\pi - \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \Leftrightarrow$

$$\frac{\pi}{6} \leq \kappa\pi \leq \frac{13\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq \kappa \leq \frac{13}{6} \stackrel{\kappa \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}$$

- $\kappa = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{5\pi}{6}}$

- $\kappa = 2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{11\pi}{6}}$

Έτσι η  $C_f$  τέμνει τον  $x'x$  στα σημεία:  $A\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ ,  $B\left(\frac{7\pi}{6}, 0\right)$ ,  $\Gamma\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$  και  $\Delta\left(\frac{11\pi}{6}, 0\right)$ .

**B3.** Υπολογίζουμε:

- $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} - 1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1$

- $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} - 1 = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = -2 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} - 1 = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\sqrt{3} - 1$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015**  
Β' ΦΑΣΗ

**E\_3.BMλ2Γ(α)**

- $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$

- $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} - 1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1$

$$\text{Έτσι } K = \frac{(\sqrt{3}-1) \cdot (-\sqrt{3}-1) + 0}{1 - (-1)} = \frac{-(\sqrt{3}-1) \cdot (\sqrt{3}+1)}{2} = \frac{-(\sqrt{3}^2 - 1^2)}{2} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Έχουμε  $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

- $P(-2) = 24 \Leftrightarrow -8 + 4\alpha - 2\beta + \gamma = 24 \Leftrightarrow 4\alpha - 2\beta + \gamma = 32 \quad (1)$

- $P(0) = 8 \Leftrightarrow \boxed{\gamma = 8}$

- $P(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = -1 \quad (2)$

$$\text{Έτσι } \begin{cases} (1) \gamma=8 \\ (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 24 \\ \alpha + \beta = -9 \end{cases} \cdot 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 24 \\ 2\alpha + 2\beta = -18 \end{cases} + \begin{cases} 6\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow 1 + \beta + 8 = -1 \Leftrightarrow \boxed{\beta = -10}$$

**Γ2. α)** Το πολυώνυμο γίνεται:  $f(x) = x^3 + x^2 + 10x + 8$ . Με το σχήμα Horner για  $x = 1$  βρίσκουμε:

1	1	-10	8	$x=1$
	1	2	-8	
1	2	-8	0	

Οπότε η εξίσωση  $f(x) = 0$  γίνεται  $(x-1)(x^2 + 2x - 8) = 0$ , επομένως  $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$  ή  $x^2 + 2x - 9 = 0 \Leftrightarrow x=2$  ή  $x=-4$ . Άρα οι ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$  είναι οι  $-4, 1, 2$ .

**β)** Η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$ , όταν  $f(x) < 0$ .

Η ανίσωση  $f(x) < 0$  αληθεύει όταν  $x \in (-\infty, -4) \cup (1, 2)$ .

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015**  
Β' ΦΑΣΗ

**E\_3.BMλ2Γ(α)**

x	$-\infty$	-4	1	2	$+\infty$
x-1	-		-	0	+
$x^2 + 2x - 8$	+	0	-		+
f(x)	-	0	+	0	+

Γ3.  $\frac{x+4}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)+f(-x)-18}$  (1)

Είναι  $f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - 10(-x) + 8 = -x^3 + x^2 + 10x + 8$ , επομένως

$f(x) + f(-x) - 18 =$

$= x^3 + x^2 - 10x + 8 - x^3 + x^2 + 10x + 8 - 18 = 2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1)$ .

Πρέπει  $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -4, 1, 2$  και

$f(x) + f(-x) - 18 \neq 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$ , επομένως συνολικά οι περιορισμοί είναι  $x \neq -4, -1, 1, 2$  η ανίσωση (1) γίνεται:

$\frac{x+4}{f(x)} - \frac{2}{f(x)+f(-x)-18} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x^3+x^2-10x+8} - \frac{2}{2(x^2-1)} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x+4}{(x+4)(x-1)(x-2)} - \frac{2}{2(x-1)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{(x-1)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x+1-(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-x+2}{(x-1)(x+1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{(x-1)(x+1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(x-1)(x+1)(x-2) \leq 0$ .

Είναι  $x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ ,  $x+1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ ,  $x-2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

x	$-\infty$	-4	-1	1	2	$+\infty$
x-1	-		-		0	+
x+1	-		-	0	+	
x-2	-		-		-	0
Γ	-		-	0	+	0

Η ανίσωση αληθεύει όταν  $x \in (-\infty, -4) \cup (-4, -1) \cup (1, 2)$ .

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015**  
Β' ΦΑΣΗ

**E\_3.ΒΜλ2Γ(α)**

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1. α)** Είναι  $f(\ln x) = 2^{\ln x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln x} = 2^{\ln x} - \frac{1}{2^{\ln x}}$ , με  $x > 0$ .

**β)** Πρέπει  $x > 0$  και  $f(\ln x) > 0$ , οπότε  $2^{\ln x} - \frac{1}{2^{\ln x}} > 0 \Leftrightarrow (2^{\ln x})^2 - 1 > 0$  (αφού είναι  $2^{\ln x} > 0$ )  
 $(2^{\ln x} - 1) \cdot (2^{\ln x} + 1) > 0$  και επειδή είναι  $2^{\ln x} + 1 > 0$  για κάθε  $x > 0$ , τότε  
 $2^{\ln x} - 1 > 0 \Leftrightarrow 2^{\ln x} > 1 \Leftrightarrow 2^{\ln x} > 2^0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$ .  
 Οι ανισώσεις  $x > 0$  και  $x > 1$  συναληθεύουν όταν  $x \in (1, +\infty)$ , επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g$  είναι το  $(1, +\infty)$ .

**Δ2.** Είναι  $h(x) = \ln \frac{3}{x} + \ln \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \ln \left(1 - \frac{1}{x+2}\right) + \ln \left(1 + \frac{x}{2}\right) =$   
 $= \ln \frac{3}{x} + \ln \frac{x+1-1}{x+1} + \ln \frac{x+2-1}{x+2} + \ln \frac{2+x}{2} =$   
 $= \ln \frac{3}{x} + \ln \frac{x}{x+1} + \ln \frac{x+1}{x+2} + \ln \frac{x+2}{2}$ .

Για  $x > 0$  είναι  $\frac{3}{x} > 0$ ,  $\frac{x}{x+1} > 0$ ,  $\frac{x+1}{x+2} > 0$ ,  $\frac{x+2}{2} > 0$ ,

οπότε  $h(x) = \ln \left(\frac{3}{x} \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+2}{2}\right) = \ln \frac{3}{2}$ .

**Δ3.** Για  $x > 1$  έχουμε

$$h(x) = g(x), \ln \frac{3}{2} = \ln(f(\ln x)) \Leftrightarrow f(\ln x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2^{\ln x} - \frac{1}{2^{\ln x}} = \frac{3}{2}.$$

Θέτουμε  $2^{\ln x} = \omega > 0$ , οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\omega - \frac{1}{\omega} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\omega^2 - 3\omega - 2 = 0 \Leftrightarrow \omega = 2 \text{ ή } \omega = -\frac{1}{2}$$

Η τιμή  $\omega = -\frac{1}{2}$  απορρίπτεται γιατί  $-\frac{1}{2} < 0$ , οπότε

$$\omega = 2, 2^{\ln x} = 2 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

**Δ4.** Είναι  $f(1) = 2^1 - \frac{1}{2^1} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ,  $f(2) = 2^2 - \frac{1}{2^2} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$ , τότε

$$\eta\mu\theta = \frac{\frac{3}{2}\ln^2 x - 2 \cdot \frac{15}{4}\ln x}{6 \cdot \frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\theta = \frac{\frac{3}{2}\ln^2 x - \frac{15}{2}\ln x}{9} \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \frac{\frac{3}{2}(\ln^2 x - 5\ln x)}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\theta = \frac{\ln^2 x - 5\ln x}{6}.$$

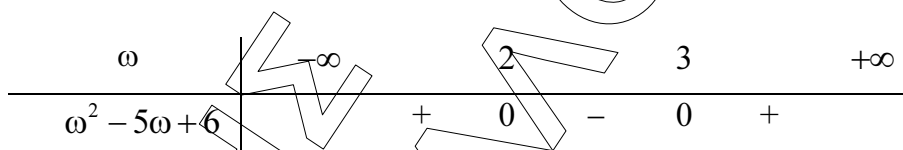
Γνωρίζουμε ότι για κάθε  $\theta \in \mathbb{R}$  ισχύει  $-1 \leq \eta\mu\theta \leq 1$ , οπότε

$$-1 \leq \frac{\ln^2 x - 5\ln x}{6} \leq 1 \Leftrightarrow -6 \leq \ln^2 x - 5\ln x \leq 6 \text{ με } x > 0 \text{ και έχουμε τις}$$

ανισώσεις:

$$\ln^2 x - 5\ln x \geq -6 \quad (1) \text{ και } \ln^2 x - 5\ln x \leq 6 \quad (2)$$

(1):  $\ln^2 x - 5\ln x + 6 \geq 0$ , θέτουμε  $\ln x = \omega$ , οπότε  $\omega^2 - 5\omega + 6 \geq 0$ . Οι ρίζες του τριωνύμου  $\omega^2 - 5\omega + 6$  είναι οι  $\omega = 2$ ,  $\omega = 3$

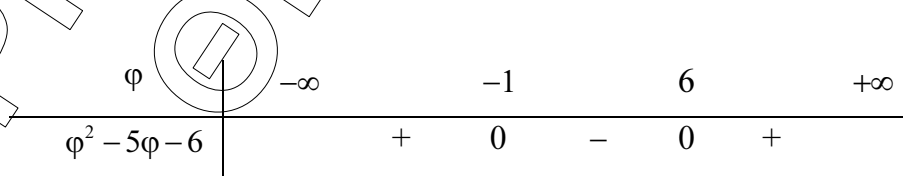


Η ανίσωση  $\omega^2 - 5\omega + 6 \geq 0$  αληθεύει όταν  $\omega \leq 2$  ή  $\omega \geq 3$ , οπότε

$$\ln x \leq 2 \text{ ή } \ln x \geq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x \leq \ln e^2 \text{ ή } \ln x \geq \ln e^3 \Leftrightarrow x \leq e^2 \text{ ή } x \geq e^3 \text{ και αφού πρέπει } x > 0 \text{ τότε } x \in (0, e^2] \cup [e^3, +\infty).$$

(2):  $\ln^2 x - 5\ln x - 6 \leq 0$ , θέτουμε  $\ln x = \varphi$ , οπότε  $\varphi^2 - 5\varphi - 6 \leq 0$ . Οι ρίζες του τριωνύμου  $\varphi^2 - 5\varphi - 6$  είναι οι  $\varphi = -1$ ,  $\varphi = 6$



Η ανίσωση  $\varphi^2 - 5\varphi - 6 \leq 0$  αληθεύει όταν  $-1 \leq \varphi \leq 6$ , οπότε  $-1 \leq \ln x \leq 6 \Leftrightarrow$

$$\ln e^{-1} \leq \ln x \leq \ln e^6 \Leftrightarrow \frac{1}{e} \leq x \leq e^6 \Leftrightarrow x \in \left[ \frac{1}{e}, e^6 \right]$$

Οι ανισώσεις (1) και (2) συναληθεύουν όταν  $x \in \left[ \frac{1}{e}, e^2 \right] \cup [e^3, e^6]$ .