<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 194

Α2. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ. 188

Α3. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ. 259

Α4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1.

$$|z-4|^2 = 4|z-1|^2$$
$$\Leftrightarrow (z-4)(\bar{z}-4) = 4(z-1)(\bar{z}-1)$$
$$\Leftrightarrow z\bar{z} - \cancel{4z} - \cancel{4\bar{z}} + 16 = 4z\bar{z} - \cancel{4z} - \cancel{4\bar{z}} + 4$$
$$\Leftrightarrow 3z\bar{z} = 12 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$$

Άρα $M(z) \in \mathbb{C}$ με $K(0,0)$ και $\rho = 2$.

B2.

α) Ισχύει $\left|z_1\right| = 2$ και $\left|z_2\right| = 2$

$$z_1\overline{z_1} = 4 \text{ και } z_2\overline{z_2} = 4$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{w} = w$.

Έχουμε $\overline{w} = \dfrac{2\overline{z_1}}{\overline{z_2}} + \dfrac{2\overline{z_2}}{\overline{z_1}} =$

$$= \frac{2 \cdot \dfrac{4}{z_1}}{\dfrac{4}{z_2}} + \frac{2 \cdot \dfrac{4}{z_2}}{\dfrac{4}{z_1}} =$$

$$= \frac{8z_2}{4z_1} + \frac{8z_1}{4z_2} =$$

$$= \frac{2z_2}{z_1} + \frac{2z_1}{z_2} = w \Leftrightarrow w \in \mathbb{R}$$

β) $|w| = \left|\dfrac{2z_1}{z_2} + \dfrac{2z_2}{z_1}\right| \le \dfrac{2|z_1|}{|z_2|} + \dfrac{2|z_2|}{|z_1|}$

$$\Leftrightarrow |w| \le \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} \Leftrightarrow |w| \le 4$$

όμως $w \in \mathbb{R}$ άρα $-4 \le w \le 4$.

B3.

<u>Α΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>

Είναι $w=-4$

$$\Leftrightarrow \frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}=-4$$
$$\Leftrightarrow \frac{2{z_1}^2+2{z_2}^2}{z_1 z_2}=-4$$
$$\Leftrightarrow 2{z_1}^2+2{z_2}^2=-4z_1z_2$$
$$\Leftrightarrow 2{z_1}^2+2{z_2}^2+4z_1z_2=0$$
$$\Leftrightarrow {z_1}^2+{z_2}^2+2z_1z_2=0$$
$$\Leftrightarrow \left(z_1+z_2\right)^2=0 \Leftrightarrow z_1+z_2=0 \Leftrightarrow z_1=-z_2$$

Άρα $\left(\mathrm{AB}\right)=\left|z_1-z_2\right|=\left|z_1+z_1\right|=2\left|z_1\right|=2\cdot 2=4$

$$\left(\mathrm{A\Gamma}\right)=\left|z_1-z_3\right|=\left|z_1-2iz_1\right|=\left|z_1\left(1-2i\right)\right|=$$
$$=\left|z_1\right|\cdot\left|1-2i\right|=\left|z_1\right|\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

$$\left(\mathrm{B\Gamma}\right)=\left|z_2-z_3\right|=\left|-z_1-2iz_1\right|=\left|-z_1\left(1+2i\right)\right|=$$
$$=\left|-z_1\right|\cdot\left|1+2i\right|=\left|z_1\right|\cdot\sqrt{5}=2\cdot\sqrt{5}$$

άρα $\left(\mathrm{A\Gamma}\right)=\left(\mathrm{B\Gamma}\right)$ ισοσκελές.

<u>Β΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>

Αν $z_1=x_1+y_1i$ και $z_2=x_2+y_2i$

$$w=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}=\frac{2z_1}{\frac{4}{\overline{z_2}}}+\frac{2z_2}{\frac{4}{\overline{z_1}}}=$$
$$=\frac{2z_1\overline{z_2}}{4}+\frac{2z_2\overline{z_1}}{4}=\frac{1}{2}\left(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)\in\mathbb{R}$$

$$z_1 \cdot \overline{z_2} = (x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i) =$$
$$= x_1 x_2 - x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 y_2$$

Άρα $w = x_1 x_2 + y_1 y_2 \Leftrightarrow \boxed{x_1 x_2 + y_1 y_2 = -4}$

Έχουμε

$$|z_1 - z_3| = |z_1 - 2iz_1| = |z_1(1-2i)| =$$
$$= |z_1| \cdot |1-2i| = |z_1| \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

<u>και</u>

$$|z_1 - z_2| = |x_1 + y_1 i - x_2 - y_2 i| =$$
$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 y_2} =$$
$$\underset{x_2^2+y_2^2=4}{\overset{x_1^2+y_1^2=4}{=}} \sqrt{8 - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2)} = \sqrt{8 - 2\cdot(-4)} = \sqrt{16} = 4$$

<u>και</u>

$$|z_2 - z_3| = |x_2 + y_2 i - 2x_1 i + 2y_1|$$

$$\boxed{z_3 = 2i(x_1 + y_1 i) = 2x_1 i - 2y_1}$$

άρα $|z_2 - z_3| = \sqrt{(x_2 + 2y_1)^2 + (y_2 - 2x_1)^2} =$

$$= \sqrt{x_2^2 + 4y_1^2 + 4x_2 y_1 + y_2^2 + 4x_1^2 - 4x_1 y_2} =$$
$$= \sqrt{(x_2^2 + y_2^2) + 4(x_1^2 + y_1^2) + 4\underbrace{\cancel{(x_2 y_1 - x_1 y_2)}}_{0}}$$
$$= \sqrt{4 + 4\cdot 4 + 4\cdot 0} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

γιατί :

$$\det\left(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\right) = 0$$
$$x_2 y_1 - x_1 y_2 = 0$$
$$\alpha\varphi o\acute{\upsilon} \;\; \overrightarrow{OM_1} \nearrow\swarrow \overrightarrow{OM_2}$$
$$\varepsilon\varphi\acute{o}\sigma o\nu \;\; w = -4$$

Άρα $|z_1 - z_3| = |z_2 - z_3|$ δηλαδή ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x)=\dfrac{e^x\left(x^2+1\right)-e^x 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{e^x\left(x-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow \left(x-1\right)^2=0 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\nearrow$	

Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2+1}=0\cdot 0=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2+1}\underset{DL'H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x}\underset{DL'H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2}=+\infty$

Άρα $f(A)\overset{\nearrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(0,+\infty)$

Γ2.

<u>Α΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>

$f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=\dfrac{e^2}{5}\Leftrightarrow f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=f(2)\overset{"1-1"}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)=2\Leftrightarrow \dfrac{e^3}{e^x}\cdot\left(x^2+1\right)=2\Leftrightarrow \dfrac{e^3}{2}=\dfrac{e^x}{x^2+1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^3}{2}$

Αφού το $\dfrac{e^3}{2}\in f(A)$ άρα υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x_0)=\dfrac{e^3}{2}$, όμως η f γνησίως μονότονη άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Β΄ ΤΡΟΠΟΣ

$..... \Leftrightarrow e^{3-x} \cdot \left(x^2+1\right) = 2$

Θεωρώ $\varphi(x) = e^{3-x} \cdot \left(x^2+1\right) - 2$ στο $\mathbb{R}$

$\varphi'(x) = -e^{3-x} \cdot \left(x^2+1\right) + e^{3-x} \cdot 2x = -e^{3-x} \cdot (x-1)^2$

Άρα $\varphi \searrow$ στο $\mathbb{R}$ δηλαδή έχει 1 το πολύ ρίζα (1)

Σύνολο τιμών της φ

$\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[e^{3-x} \cdot \left(x^2+1\right) - 2 \right] = ... = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{x^2+1}{e^{x-3}} - 2 \right] = ... = -2$

Άρα $\varphi(A) \overset{\downarrow}{=} (-2, +\infty)$ δηλαδή έχει τουλάχιστον 1 ρίζα. (2)

Τελικά έχει 1 ακριβώς ρίζα από τις (1), (2).

Γ3. $\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt < 2xf(4x) \Leftrightarrow \int_{a}^{4x} f(t)\,dt - \int_{a}^{2x} f(t)\,dt < 2xf(4x)$

$\overset{2x>0}{\Leftrightarrow} \dfrac{\int_{a}^{4x} f(t)\,dt - \int_{a}^{2x} f(t)\,dt}{4x-2x} < f(4x)$ (3)

Θεωρώ την $\kappa(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$ στο $[2x, 4x]$.

- Η κ είναι παραγωγίσιμη στο $[2x, 4x]$ άρα και συνεχής αφού η f είναι συνεχής.

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει 1 τουλάχιστον $\xi \in (2x, 4x)$ ώστε

$\kappa'(\xi) = \dfrac{\kappa(4x) - \kappa(2x)}{4x-2x} \Leftrightarrow f(\xi) = \dfrac{\int_{a}^{4x} f(t)\,dt - \int_{a}^{2x} f(t)\,dt}{4x-2x}$

Όμως $\xi < 4x \overset{f:\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\xi) < f(4x) \Leftrightarrow \dfrac{\int_a^{4x} f(t)\,dt - \int_a^{2x} f(t)\,dt}{4x-2x} < f(4x)$

Άρα η ζητούμενη 3 αποδείχθηκε.

Γ4. Συνέχεια της g στο 0

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x} \underset{DL'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{4f(4x) - 2f(2x)}{1} =$$

[Θέτω $\begin{matrix} 4x = u \\ 2x = w \end{matrix}$]

$$= 4\lim_{x\to 0^+} f(4x) - 2\lim_{x\to 0^+} f(2x) = 4\lim_{u\to 0^+} f(u) - 2\lim_{w\to 0^+} f(w) =$$

$$\overset{f\,συνεχής\ στο\ 0}{=} 4f(0) - 2f(0) = 2f(0) = 2\cdot 1 = 2$$

$$g'(x) = \left(\frac{\int_a^{4x} f(t)\,dt - \int_a^{2x} f(t)\,dt}{x}\right)' = \frac{\left[4f(4x) - 2f(2x)\right]\cdot x - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x^2} =$$

$$= \frac{\left[2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt\right] + \left[2xf(4x) - 2xf(2x)\right]}{x^2} > 0, \forall x \in (0,+\infty)$$

Γιατί :

- λόγω **Γ3**
  $2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt > 0$
- $x > 0 \Rightarrow 2x < 4x \overset{f:\nearrow}{\Leftrightarrow} f(2x) < f(4x)$
  $\Leftrightarrow f(4x) - f(2x) > 0 \overset{2x>0}{\Leftrightarrow} 2x\cdot\left[f(4x) - f(2x)\right] > 0$
  $\Leftrightarrow 2xf(4x) - 2xf(2x) > 0$

Άρα $\left.\begin{matrix} g'(x) > 0, \forall x > 0 \\ g\ \ συνεχής \end{matrix}\right\}$ άρα η g γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Α΄ ΤΡΟΠΟΣ

$$f'(x)\cdot\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2\Leftrightarrow$$

$$\left(e^{f(x)}-e^{-f(x)}\right)'=(2x)'\Leftrightarrow e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c$$

Για $x=0$ $\quad e^{f(0)}-e^{-f(0)}=2\cdot 0+c\Rightarrow 1-1=0+c$

Άρα

$$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x\Leftrightarrow e^{f(x)}-\frac{1}{e^{f(x)}}=2x\Leftrightarrow$$

$$\left(e^{f(x)}\right)^2-1=2x\cdot e^{f(x)}\Leftrightarrow$$

$$\left(e^{f(x)}\right)^2-2x\cdot e^{f(x)}+x^2=x^2+1\Leftrightarrow$$

$$\left(e^{f(x)}-x\right)^2=x^2+1$$

Θέτω $g(x)=e^{f(x)}-x$ $\quad g(x)\neq 0$, αφού αν $g(x)=0$ τότε $x^2+1=0\Rightarrow$ αδύνατο.

Άρα $\left.\begin{matrix} g(x)\neq 0 \\ g \;\; συνεχής \end{matrix}\right\}\Rightarrow$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Για $x=0$ → $g(0)=e^{f(0)}-0=1>0$ άρα $g(x)>0$

Τελικά, $g^2(x)=x^2+1\Rightarrow g(x)=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{f(x)}-x=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow e^{f(x)}=x+\sqrt{x^2+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), x\in\mathbb{R}$$

Β΄ ΤΡΟΠΟΣ

$$.... \Leftrightarrow \left(e^{f(x)} - e^{-f(x)}\right)' = (2x)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)^2 - 1 = 2x \cdot e^{f(x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)^2 - 2xe^{f(x)} - 1 = 0$$

$$\Delta = 4x^2 + 4$$

Άρα $e^{f(x)} = \dfrac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = \dfrac{x \pm \sqrt{x^2+1}}{1} = x \pm \sqrt{x^2+1}$

όμως $f(0) = 0$ οπότε $f(x) = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Δ2. α) $f'(x) = \left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' =$

$$= \frac{1 + \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \left(\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(x^2+1\right)' =$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \cancel{2}x$$

Τελικά $f''(x) = -\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	
f		$\smile$		$\frown$	

Για $x \in (-\infty, 0]$ η f κυρτή

Για $x \in [0, +\infty)$ η f κοίλη

Για $x = 0$ η f παρουσιάζει σημείο καμπής $O(0,0)$

β) $f'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{0^2+1}} = 1$

εξίσωση εφαπτομένης $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y - 0 = 1(x-0) \Rightarrow y = x$

Η C_f κοίλη για $x \in [0, +\infty)$ άρα $f(x) \le x$

Η ισότητα ισχύει για $x = 0$, $f(x) - x \le 0$

Τελικά $E = \int_0^1 |f(x) - x|dx = -\int_0^1 (f(x) - x)dx$

$$E = -\int_0^1 \left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - x\right]dx$$

(με κατά παράγοντες ολοκλήρωση)

$$= -\int_0^1 \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)dx + \int_0^1 x dx$$

$$= -\int_0^1 (x)' \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)dx + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= -\left[x \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 + \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\right)dx + \frac{1}{2}$$

$$= -1\ln\left(1 + \sqrt{2}\right) + \int_0^1 x \cdot \frac{1}{\cancel{x + \sqrt{x^2+1}}} \cdot \left(\frac{\cancel{x + \sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx + \frac{1}{2}$$

$$= -\ln\left(1 + \sqrt{2}\right) + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx + \frac{1}{2}$$

$$= -\ln\left(1 + \sqrt{2}\right) + \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx + \frac{1}{2}$$

$$= -\ln\left(1 + \sqrt{2}\right) + \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 + \frac{1}{2}$$

$$= -\ln\left(1 + \sqrt{2}\right) + \sqrt{2} - 1 + \frac{1}{2}$$

$$= \left[-\ln\left(1 + \sqrt{2}\right) + \sqrt{2} - \frac{1}{2}\right] \tau.\mu.$$

Δ3. <u>Α΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot \ln\left|f(x)\right|\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{x}\right]\cdot \lim_{x\to 0^+}\left[x\cdot \ln f(x)\right]=0$$

$f\nearrow: x>0 \Rightarrow f(x)>f(0)=0$

$ά\rho\alpha\ \ f(x)>0$

<u>διότι</u>

- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{x}\underset{DL'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{1}=\lim_{x\to 0^+}e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}x\cdot \ln f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{x}}\underset{DL'H}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{f'(x)\cdot x^2}{f(x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\underset{DL'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{2x}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x}{\frac{x\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}+1}=\frac{-0}{\frac{0\cdot\ln 1}{1}+1}=0$$

<u>Β΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot \ln\left|f(x)\right|\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{\frac{1}{\ln\left|f(x)\right|}}$$

Για $x>0 \underset{f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}}$

$f(x)>f(0)\Rightarrow f(x)>0$

άρα

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{\frac{1}{\ln|f(x)|}}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DL'H}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)'}{\left(\frac{1}{\ln|f(x)|}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{\frac{-1}{\ln^2 f(x)}\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f(x)\cdot \ln^2 f(x)}{-f'(x)}=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}}{f'(x)}\cdot\frac{\ln^2 f(x)}{\frac{1}{f(x)}}\right]=$$

$$\overset{(1)}{=}\frac{e^0}{f'(0)}\cdot 0=\frac{1}{1}\cdot 0=0$$

όπου (1) : $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^2 f(x)}{\frac{1}{f(x)}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DL'H}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln f(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{1}{f^2(x)}\cdot f'(x)}=$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln f(x)}{-\frac{1}{f(x)}}\overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{\underset{DL'H}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2\cancel{f'(x)}}{f(x)}}{\frac{1}{f^2(x)}\cdot\cancel{f'(x)}}=\lim_{x\to 0^+}\left(2f(x)\right)=0$$

Δ4. Ισοδύναμα η εξίσωση γίνεται :

$$(x-2)\cdot\left(1-3\int_0^{x-2} f\left(t^2\right)dt\right)+(x-3)\cdot\left(8-3\int_0^x f^2(t)\,dt\right)=0$$

Θεωρούμε συνάρτηση

$$\varphi(x)=(x-2)\cdot\left(1-3\int_0^{x-2} f\left(t^2\right)dt\right)+(x-3)\cdot\left(8-3\int_0^x f^2(t)\,dt\right)$$

συνεχής στο $[2,3]$ γιατί η f συνεχής.

$f\left(t^2\right)$ συνεχής ως σύνθεση και $x-2$ παραγωγίσιμη

άρα $\int_0^{x-2} f\left(t^2\right)dt$ παραγωγίσιμη.

Ομοίως $f^2(t)$ συνεχής $\Rightarrow \int_0^x f^2(t)dt$ παραγωγίσιμη

Άρα η $\varphi(x)$ είναι πράξεις παραγωγίσιμων στο $\mathbb{R}$.

Δηλαδή τελικά είναι και συνεχής στο $[2,3]$

- $\varphi(2) = -1\cdot\left(8-3\int_0^2 f^2(t)dt\right) = -8+3\int_0^2 f^2(t)dt$
- $\varphi(3) = 1\cdot\left(1-3\int_0^1 f(t^2)dt\right) = 1-3\int_0^1 f(t^2)dt$

Η f κοίλη στο $[0,+\infty)$ άρα $f(x)\le x, \forall x\ge 0$,οπότε

$0 < f(x) \le x \Rightarrow f^2(x) \le x^2$

$\Rightarrow f^2(x) - x^2 \le 0 \Rightarrow \int_0^2 \left(f^2(x)-x^2\right)dx < 0$

Γιατί δε μηδενίζεται παντού

$\Leftrightarrow \int_0^2 f^2(x)dx - \int_0^2 x^2dx < 0$

$\Leftrightarrow \int_0^2 f^2(x)dx < \int_0^2 x^2dx$

$\Leftrightarrow \int_0^2 f^2(x)dx < \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^2$

$\Leftrightarrow \int_0^2 f^2(x)dx < \dfrac{8}{3}$

$\Leftrightarrow 3\int_0^2 f^2(x)dx < 8 \Leftrightarrow -8+3\int_0^2 f^2(x)dx < 0$

$\Leftrightarrow \varphi(2) < 0$

και αφού $f(x)\le x, \forall x\ge 0$,θα ισχύει $f(x^2)\le x^2 \Leftrightarrow f(x^2)-x^2\le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^1 \left(f(x^2)-x^2\right)dx < 0$

Γιατί δε μηδενίζεται παντού

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x^2)dx < \int_0^1 x^2dx$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x^2)dx < \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f\left(x^2\right)dx < \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow -3\int_0^1 f\left(x^2\right)dx > -1$$

$$\Leftrightarrow 1-3\int_0^1 f\left(x^2\right)dx > 0 \Leftrightarrow \varphi(3) > 0$$

Άρα $\varphi(2)\varphi(3)<0$ ισχύει το Θ.Bolzano, επομένως $\exists$ τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2,3):\varphi(x_0)=0$ οπότε ισοδύναμα και η αρχική εξίσωση.